4.4 El teorema fundamental del cálculo

- **Evaluar una integral definida utilizando el teorema fundamental del cálculo.**
- **Entender y utilizar el teorema del valor medio para integrales.**
- **Encontrar el valor medio de una función sobre un intervalo cerrado.**
- **Entender y utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo.**
- **Entender y utilizar el teorema del cambio neto.**

El teorema fundamental del cálculo

Se han visto ya dos de las principales ramas del cálculo: el cálculo diferencial (presentado con el problema de la recta tangente) y el cálculo integral (presentado con el problema del área). En este punto, podría parecer que estos dos problemas no se relacionan, aunque tienen una conexión muy estrecha. La conexión fue descubierta independientemente por Isaac Newton y Gottfried Leibniz y está enunciada en un teorema que recibe el nombre de **teorema fundamental del cálculo**.

De manera informal, el teorema establece que la derivación y la integración (definida) son operaciones inversas, en el mismo sentido que lo son la división y la multiplicación. Para saber cómo Newton y Leibniz habrían pronosticado esta relación, considerar las aproximaciones que se muestran en la figura 4.26. La pendiente de la recta tangente se definió utilizando el *cociente* $\Delta y/\Delta x$ (la pendiente de la recta secante). De manera similar, el área de la región bajo una curva se definió utilizando el *producto* $\Delta y \Delta x$ (el área de un rectángulo). De tal modo, al menos en una etapa de aproximación primitiva, las operaciones de derivación y de integración definida parecen tener una relación inversa en el mismo sentido en el que son operaciones inversas la división y la multiplicación. El teorema fundamental del cálculo establece que los procesos de límite (utilizados para definir la derivada y la integral definida) preservan esta relación inversa.

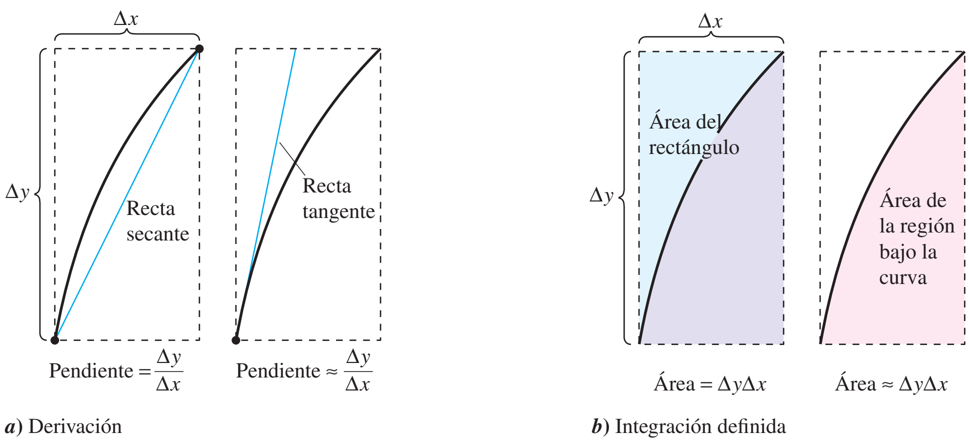
EXPLORACIÓN

Integración y antiderivación
A lo largo de este capítulo, se ha estado utilizando el signo de integral para denotar una antiderivada o primitiva (una familia de funciones) y una integral definida (un número).

Antiderivación: $\int f(x)\, dx$

Integración definida: $\int_a^b f(x)\, dx$

El uso de este mismo símbolo para ambas operaciones hace parecer que estarán relacionadas. En los primeros trabajos con cálculo, sin embargo, no se sabía que las dos operaciones estaban relacionadas. ¿A qué se aplicó primero el símbolo $\int$: a la antiderivación o a la integración definida? Explicar el razonamiento. (*Sugerencia:* El símbolo fue utilizado primero por Leibniz y proviene de la letra *S*.)



La derivación y la integración definida tienen una relación "inversa"
Figura 4.26

TEOREMA 4.9 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

DEMOSTRACIÓN La clave para la demostración consiste en escribir la diferencia $F(b) - F(a)$ en una forma conveniente. Sea Δ la siguiente partición de $[a, b]$.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_{n-1} < x_n = b$$

Mediante la resta y suma de términos análogos, se obtiene

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdot \cdot \cdot - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema del valor medio, se sabe que existe un número c_i en el i-ésimo subintervalo tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Como $F'(c_i) = f(c_i)$, puede dejarse que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y obtenerse

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

Esta importante ecuación dice que al aplicar repetidamente el teorema del valor medio, se puede siempre encontrar una colección de c_i tal que la *constante* $F(b) - F(a)$ es una suma de Riemann de f en $[a, b]$ para cualquier partición. El teorema 4.4 garantiza que el límite de sumas de Riemann sobre las particiones con $\|\Delta\| \to 0$ existe. Así, al tomar el límite (cuando $\|\Delta\| \to 0$) produce

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La siguiente guía puede ayudar a comprender el uso del teorema fundamental del cálculo.

Estrategia para utilizar el teorema fundamental del cálculo

1. *Suponiendo que se conozca* una antiderivada o primitiva f, se dispone de una forma de calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma.
2. Cuando se aplica el teorema fundamental del cálculo, la siguiente notación resulta conveniente.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= F(x)\Big]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Por ejemplo, para calcular $\int_1^3 x^3\,dx$, es posible escribir

$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

3. No es necesario incluir una constante de integración C en la antiderivada o primitiva ya que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \Big[F(x) + C\Big]_a^b \\ &= [F(b) + C] - [F(a) + C] \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Cálculo de una integral definida

Evaluar cada integral definida.

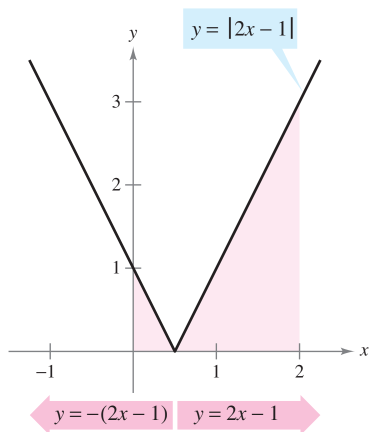
a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - 3)\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$

Solución

a) $$\int_1^2 (x^2 - 3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6\right) - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{3}$$

b) $$\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx = 3\int_1^4 x^{1/2}\,dx = 3\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = 2(4)^{3/2} - 2(1)^{3/2} = 14$$

c) $$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$$



La integral definida de y en $[0, 2]$ es $\frac{5}{2}$
Figura 4.27

EJEMPLO 2 Integral definida de un valor absoluto

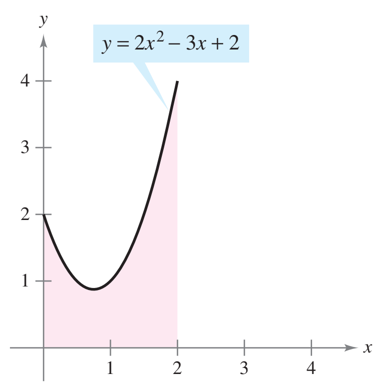
Calcular $\displaystyle\int_0^2 |2x - 1|\,dx.$

Solución Utilizando la figura 4.27 y la definición de valor absoluto, se puede reescribir el integrando como se indica.

$$|2x - 1| = \begin{cases} -(2x - 1), & x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

A partir de esto, es posible reescribir la integral en dos partes.

$$\begin{aligned}\int_0^2 |2x - 1|\,dx &= \int_0^{1/2} -(2x - 1)\,dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1)\,dx \\ &= \Big[-x^2 + x\Big]_0^{1/2} + \Big[x^2 - x\Big]_{1/2}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - (0 + 0) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\end{aligned}$$



El área de la región acotada por la gráfica de y, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$ es $\frac{10}{3}$
Figura 4.28

EJEMPLO 3 Empleo del teorema fundamental para encontrar un área

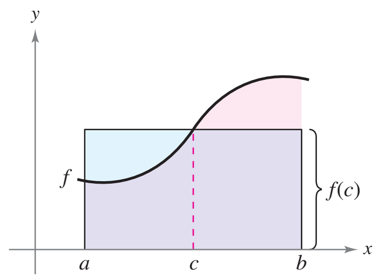
Encontrar el área de la región delimitada por la gráfica de $y = 2x^2 - 3x + 2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, como se muestra en la figura 4.28.

Solución Notar que $y > 0$ en el intervalo $[0, 2]$.

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)\,dx && \text{Integrar entre } x = 0 \text{ y } x = 2. \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^2 && \text{Encontrar la antiderivada.} \\ &= \left(\frac{16}{3} - 6 + 4\right) - (0 - 0 + 0) && \text{Aplicar el teorema fundamental del cálculo.} \\ &= \frac{10}{3} && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$

El teorema del valor medio para integrales

En la sección 4.2, se vio que el área de una región bajo una curva es mayor que el área de un rectángulo inscrito y menor que el área de un rectángulo circunscrito. El teorema del valor medio para integrales establece que en alguna parte "entre" los rectángulos inscrito y circunscrito hay un rectángulo cuya área es precisamente igual al área de la región bajo la curva, como se ilustra en la figura 4.29.



Rectángulo de valor medio:

$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\, dx$

Figura 4.29

TEOREMA 4.10 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a).$$

DEMOSTRACIÓN

Caso 1: Si f es constante en el intervalo $[a, b]$, el teorema es claramente válido debido a que c puede ser cualquier punto en $[a, b]$.

Caso 2: Si f no es constante en $[a, b]$, entonces, por el teorema del valor extremo, pueden elegirse $f(m)$ y $f(M)$ como valores mínimo y máximo de f en $[a, b]$. Como $f(m) \le f(x) \le f(M)$ para todo x en $[a, b]$, se puede aplicar el teorema 4.8 para escribir

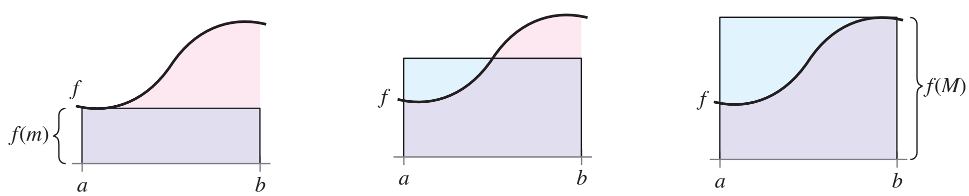
$$\int_a^b f(m)\, dx \le \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b f(M)\, dx \qquad \text{Ver la figura 4.30.}$$

$$f(m)(b - a) \le \int_a^b f(x)\, dx \le f(M)(b - a)$$

$$f(m) \le \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\, dx \le f(M)$$

De acuerdo con la tercera desigualdad, puede aplicarse el teorema del valor medio para concluir que existe alguna c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{o} \qquad f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$



Rectángulo inscrito (menor que el área real)

$\int_a^b f(m)\, dx = f(m)(b - a)$

Rectángulo del valor medio (igual al área real)

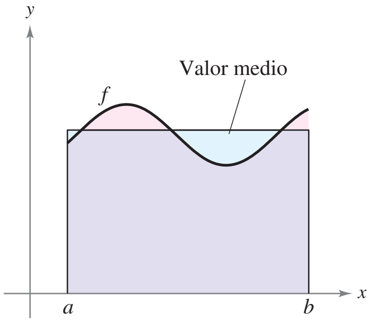
$\int_a^b f(x)\, dx$

Rectángulo circunscrito (mayor que el área real)

$\int_a^b f(M)\, dx = f(M)(b - a)$

Figura 4.30

NOTA Adviértase que el teorema 4.10 no especifica cómo determinar c. Sólo garantiza la existencia de al menos un número c en el intervalo.



Valor medio $= \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Figura 4.31

Valor medio de una función

El valor de $f(c)$ dado en el teorema del valor medio para integrales recibe el nombre de **valor medio** de f en el intervalo $[a, b]$.

DEFINICIÓN DEL VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

Si f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el **valor medio** de f en el intervalo es

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

NOTA Obsérvese en la figura 4.31 que el área de la región bajo la gráfica f es igual al área del rectángulo cuya altura es el valor medio.

Para saber por qué el promedio de f se define de esta manera, supóngase que se divide $[a, b]$ en n subintervalos de igual anchura $\Delta x = (b-a)/n$. Si c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo, la media aritmética de los valores de la función en los c_i está dada por

$$a_n = \frac{1}{n}[f(c_1) + f(c_2) + \cdot\cdot\cdot + f(c_n)]. \qquad \text{Porcentaje de } f(c_1), \ldots, f(c_n).$$

Al multiplicar y dividir entre $(b - a)$, puede escribirse la media como

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{b-a}\right) &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x. \end{aligned}$$

Por último, al tomar el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene el valor medio de f en el intervalo $[a, b]$, como se indicó en la definición anterior.

Este desarrollo del valor medio de una función en un intervalo es sólo uno de los muchos usos prácticos de las integrales definidas para representar procesos de suma. En el capítulo 7, se estudiarán otras aplicaciones, tales como volumen, longitud de arco, centros de masa y trabajo.

EJEMPLO 4 Determinación del valor medio de una función

Determinar el valor medio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1, 4]$.

Solución El valor medio está dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{4-1}\int_1^4 (3x^2 - 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\Big[x^3 - x^2\Big]_1^4 \\ &= \frac{1}{3}[64 - 16 - (1-1)] = \frac{48}{3} = 16. \end{aligned}$$

(Ver la figura 4.32.)

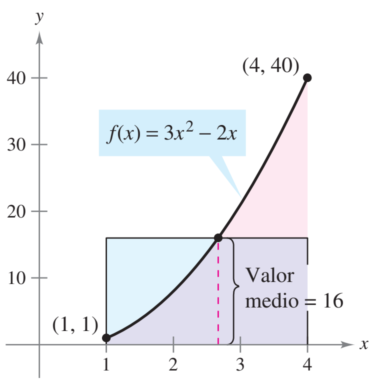
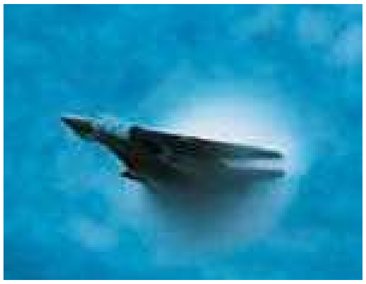


Figura 4.32



George Hall/Corbis

La primera persona en volar a una velocidad mayor que la del sonido fue Charles Yeager. El 14 de octubre de 1947, a una altura de 12.2 kilómetros, Yeager alcanzó 295.9 metros por segundo. Si Yeager hubiera volado a una altura menor que 11.275 kilómetros, su velocidad de 295.9 metros por segundo no hubiera "roto la barrera del sonido". La foto muestra un *Tomcat* F-14, un avión bimotor supersónico. Normalmente, el *Tomcat* puede alcanzar alturas de 15.24 km y velocidades que superan en más del doble la velocidad del sonido (707.78 m/s).

EJEMPLO 5 La velocidad del sonido

A diferentes alturas en la atmósfera de la Tierra, el sonido viaja a distintas velocidades. La velocidad del sonido $s(x)$ (en metros por segundo) puede modelarse mediante

$$s(x) = \begin{cases} -4x + 341, & 0 \le x < 11.5 \\ 295, & 11.5 \le x < 22 \\ \frac{3}{4}x + 278.5, & 22 \le x < 32 \\ \frac{3}{2}x + 254.5, & 32 \le x < 50 \\ -\frac{3}{2}x + 404.5, & 50 \le x \le 80 \end{cases}$$

donde x es la altura en kilómetros (ver la figura 4.33). ¿Cuál es la velocidad media del sonido sobre el intervalo [0, 80]?

Solución Se empieza con la integración $s(x)$ en el intervalo [0, 80]. Para hacer esto, se puede dividir la integral en cinco partes.

$$\int_0^{11.5} s(x)\,dx = \int_0^{11.5} (-4x + 341)\,dx = \Big[-2x^2 + 341x\Big]_0^{11.5} = 3\,657$$

$$\int_{11.5}^{22} s(x)\,dx = \int_{11.5}^{22} (295)\,dx = \Big[295x\Big]_{11.5}^{22} = 3\,097.5$$

$$\int_{22}^{32} s(x)\,dx = \int_{22}^{32} \left(\tfrac{3}{4}x + 278.5\right)dx = \Big[\tfrac{3}{8}x^2 + 278.5x\Big]_{22}^{32} = 2\,987.5$$

$$\int_{32}^{50} s(x)\,dx = \int_{32}^{50} \left(\tfrac{3}{2}x + 254.5\right)dx = \Big[\tfrac{3}{4}x^2 + 254.5x\Big]_{32}^{50} = 5\,688$$

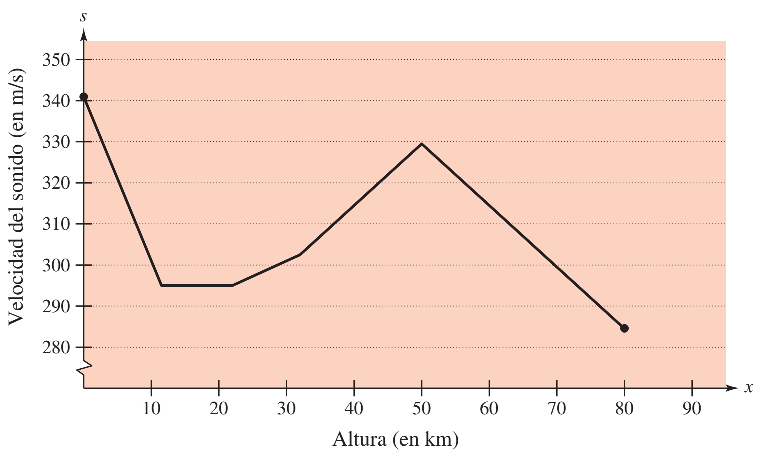
$$\int_{50}^{80} s(x)\,dx = \int_{50}^{80} \left(-\tfrac{3}{2}x + 404.5\right)dx = \Big[-\tfrac{3}{4}x^2 + 404.5x\Big]_{50}^{80} = 9\,210$$

Al sumar los valores de las cinco integrales, se obtiene

$$\int_0^{80} s(x)\,dx = 24\,640.$$

De tal modo, la velocidad media del sonido entre los 0 y los 80 km de altitud es

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{1}{80}\int_0^{80} s(x)\,dx = \frac{24\,640}{80} = 308 \text{ metros por segundo}$$



La velocidad del sonido depende de la altura
Figura 4.33

El segundo teorema fundamental del cálculo

Al introducir la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ se ha tomado como fijo el límite superior de integración b y x como la variable de integración. Sin embargo, es posible que surja una situación un poco diferente en la que la variable x se use como el límite superior de integración. Para evitar la confusión de utilizar x de dos maneras diferentes, se usa temporalmente t como la variable de integración. (Recordar que la integral definida *no* es una función de su variable de integración.)

La integral definida como un número

Constante

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Constante

f es una función de x

La integral definida como una función de x

F es una función de x

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Constante

f es una función de t

EXPLORACIÓN

Emplear una herramienta de graficación para representar la función

$$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$$

para $0 \le x \le \pi$. ¿Reconoce esta gráfica? Explicar.

EJEMPLO 6 La integral definida como función

Calcular la función

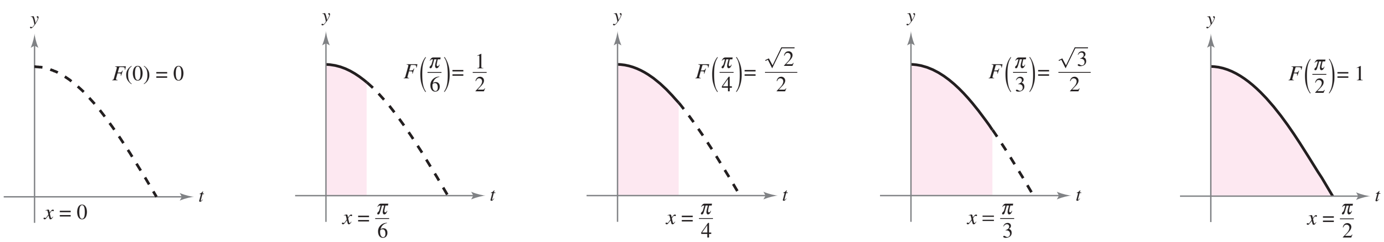
$$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$$

en $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ y $\pi/2$.

Solución Se podrían calcular cinco integrales definidas diferentes, una para cada uno de los límites superiores dados. Sin embargo, es mucho más simple fijar x (como una constante) por el momento para obtener

$$\int_0^x \cos t\,dt = \operatorname{sen} t\Big]_0^x = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} x.$$

Después de esto, utilizando $F(x) = \operatorname{sen} x$, es posible obtener los resultados que se muestran en la figura 4.34.



$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$ es el área bajo la curva $f(t) = \cos t$ desde 0 hasta x

Figura 4.34

Podría considerarse la función $F(x)$ como la *acumulación* del área bajo la curva $f(t) = \cos t$ desde $t = 0$ hasta $t = x$. Para $x = 0$, el área es 0 y $F(0) = 0$. Para $x = \pi/2$, $F(\pi/2) = 1$ produce el área acumulada bajo la curva coseno del intervalo completo $[0, \pi/2]$. Esta interpretación de una integral como una **función acumulación** se usa a menudo en aplicaciones de la integración.

En el ejemplo 6, advertir que la derivada de F es el integrando original (sólo que con la variable cambiada). Esto es,

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \cos t\,dt\right] = \cos x.$$

Este resultado se generaliza en el siguiente teorema, denominado el **segundo teorema fundamental del cálculo**.

TEOREMA 4.11 EL SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es continua en un intervalo abierto I que contiene a, entonces, para todo x en el intervalo,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x).$$

DEMOSTRACIÓN Empezar definiendo F como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

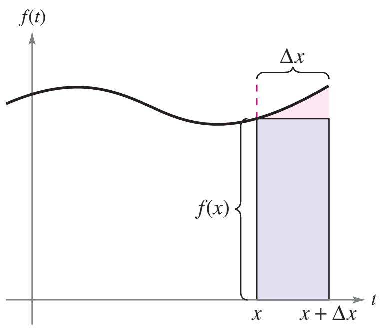
Luego, de acuerdo con la definición de la derivada, es posible escribir

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right]. \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio para integrales (suponiendo que $\Delta x > 0$), se sabe que existe un número c en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ tal que la integral en la expresión anterior es igual a $f(c)\,\Delta x$. Además, como $x \le c \le x + \Delta x$ se sigue que $c \to x$ cuando $\Delta x \to 0$. De tal modo, se obtiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x} f(c)\,\Delta x\right] \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} f(c) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Es posible plantear un argumento similar para $\Delta x < 0$.



$f(x)\,\Delta x \approx \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$

Figura 4.35

NOTA Utilizando el modelo del área para integrales definidas, considerar la aproximación

$$f(x)\,\Delta x \approx \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

se dice que el área del rectángulo de altura $f(x)$ y anchura Δx es aproximadamente igual al área de la región que se encuentra entre la gráfica de f y el eje x en el intervalo $[x, x + \Delta x]$, como se muestra en la figura 4.35.

Nótese que el segundo teorema del cálculo indica que toda f continua admite una antiderivada o primitiva. Sin embargo, ésta no necesita ser una función elemental. (Recordar la discusión de las funciones elementales en la sección P.3.)

EJEMPLO 7 Empleo del segundo teorema fundamental del cálculo

Calcular $\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right]$.

Solución Advertir que $f(t) = \sqrt{t^2+1}$ es continua en toda la recta real. De tal modo, empleando el segundo teorema fundamental del cálculo, es posible escribir

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right] = \sqrt{x^2+1}.$$

La derivación que se muestra en el ejemplo 7 es una aplicación directa del segundo teorema fundamental del cálculo. El siguiente ejemplo muestra cómo puede combinarse este teorema con la regla de la cadena para encontrar la derivada de una función.

EJEMPLO 8 Empleo del segundo teorema fundamental del cálculo

Encontrar la derivada de $F(x) = \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt$.

Solución Haciendo $u = x^3$, es factible aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo junto con la regla de la cadena como se ilustra.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} && \text{Regla de la cadena.}\\
&= \frac{d}{du}[F(x)]\frac{du}{dx} && \text{Definición de } \frac{dF}{du}.\\
&= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt\right]\frac{du}{dx} && \text{Sustituir } \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt \text{ por } F(x).\\
&= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{u} \cos t\,dt\right]\frac{du}{dx} && \text{Sustituir } u \text{ por } x^3.\\
&= (\cos u)(3x^2) && \text{Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo.}\\
&= (\cos x^3)(3x^2) && \text{Reescribir como función de } x.
\end{aligned}$$

Debido a que la integral del ejemplo 8 se integra con facilidad, se puede verificar la derivada del modo siguiente.

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt = \operatorname{sen} t\Big]_{\pi/2}^{x^3} = \operatorname{sen} x^3 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = (\operatorname{sen} x^3) - 1$$

En esta forma, se tiene la posibilidad de aplicar la regla de las potencias para verificar que la derivada es la misma que la que se obtuvo en el ejemplo 8.

$$F'(x) = (\cos x^3)(3x^2)$$

Teorema del cambio neto

El teorema fundamental del cálculo (teorema 4.9) establece que si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Pero dado que $F'(x) = f(x)$, este enunciado se puede reescribir como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde la cantidad $F(b) - F(a)$ representa el *cambio neto de F* sobre el intervalo $[a, b]$.

TEOREMA 4.12 EL TEOREMA DEL CAMBIO NETO

La integral definida de la razón de cambio de una cantidad $F'(x)$ proporciona el cambio total, o **cambio neto**, en esa cantidad sobre el intervalo $[a, b]$.

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{Cambio neto de F.}$$

EJEMPLO 9 Uso del teorema del cambio neto

Una sustancia química fluye en un tanque de almacenamiento a una razón de $180 + 3t$ litros por minuto, donde $0 \leq t \leq 60$. Encontrar la cantidad de la sustancia química que fluye en el tanque durante los primeros 20 minutos.

Solución Sea $c(t)$ la cantidad de la sustancia química en el tanque en el tiempo t. Entonces $c'(t)$ representa la razón a la cual la sustancia química fluye dentro del tanque en el tiempo t. Durante los primeros 20 minutos, la cantidad que fluye dentro del tanque es

$$\begin{aligned}\int_0^{20} c'(t)\,dt &= \int_0^{20} (180 + 3t)\,dt \\ &= \left[180t + \frac{3}{2}t^2\right]_0^{20} \\ &= 3\,600 + 600 = 4\,200.\end{aligned}$$

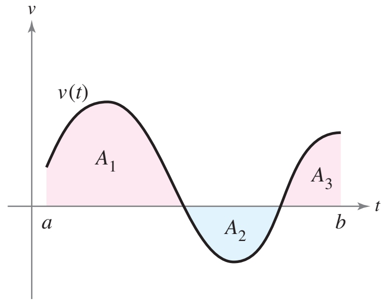
Así, la cantidad que fluye dentro del tanque durante los primeros 20 minutos es de 4 200 litros.

Otra forma de ilustrar el teorema del cambio neto es examinar la velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, donde $s(t)$ es la posición en el tiempo t. Entonces, su velocidad es $v(t) = s'(t)$ y

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a).$$

Esta integral definida representa el cambio neto en posición, o **desplazamiento**, de la partícula.

Cuando se calcula la distancia *total* recorrida por la partícula, se deben considerar los intervalos donde $v(t) \leq 0$ y los intervalos donde $v(t) \geq 0$. Cuando $v(t) \leq 0$, la partícula se mueve a la izquierda, y cuando $v(t) \geq 0$, la partícula se mueve hacia la derecha. Para calcular la distancia total recorrida, se integra el valor absoluto de la velocidad $|v(t)|$. Así, el



A_1, A_2 y A_3 son las áreas de las regiones sombreadas
Figura 4.36

desplazamiento de una partícula y la distancia total recorrida por una partícula sobre $[a, b]$, se puede escribir como

$$\textbf{Desplazamiento sobre } [a, b] = \int_a^b v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\textbf{Distancia total recorrida sobre } [a, b] = \int_a^b |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$$

(ver la figura 4.36).

EJEMPLO 10 Solución de un problema de movimiento de partícula

Una partícula está moviéndose a lo largo de una línea, así, su velocidad es $v(t) = t^3 - 10t^2 + 29t - 20$ pies por segundo en el tiempo t.

a) ¿Cuál es el desplazamiento de la partícula en el tiempo $1 \le t \le 5$?

b) ¿Cuál es la distancia total recorrida por la partícula en el tiempo $1 \le t \le 5$?

Solución

a) Por definición, se sabe que el desplazamiento es

$$\begin{aligned}
\int_1^5 v(t)\,dt &= \int_1^5 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\,dt \\
&= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t\right]_1^5 \\
&= \frac{25}{12} - \left(-\frac{103}{12}\right) \\
&= \frac{128}{12} \\
&= \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

Así, la partícula se mueve $\frac{32}{3}$ pies hacia la derecha.

b) Para encontrar la distancia total recorrida, calcular $\int_1^5 |v(t)|\,dt$. Usando la figura 4.37 y el hecho de que $v(t)$ pueda factorizarse como $(t - 1)(t - 4)(t - 5)$, se puede determinar que $v(t) \ge 0$ en $[1, 4]$ y $v(t) \le 0$ en $[4, 5]$. Así, la distancia total recorrida es

$$\begin{aligned}
\int_1^5 |v(t)|\,dt &= \int_1^4 v(t)\,dt - \int_4^5 v(t)\,dt \\
&= \int_1^4 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\,dt - \int_4^5 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\,dt \\
&= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t\right]_1^4 - \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t\right]_4^5 \\
&= \frac{45}{4} - \left(-\frac{7}{12}\right) \\
&= \frac{71}{6} \text{ pies.}
\end{aligned}$$

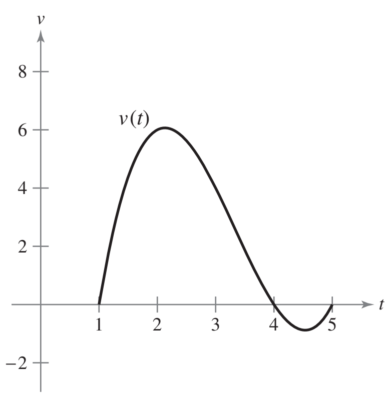


Figura 4.37

4.4 Ejercicios

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 1 a 4, utilizar una herramienta de graficación para representar el integrando. Emplear la gráfica para determinar si la integral definida es positiva, negativa o cero.**

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{4}{x^2+1}\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

3. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$

4. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\sqrt{2-x}\,dx$

En los ejercicios 5 a 26, hallar la integral definida de la función algebraica. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

5. $\displaystyle\int_0^{2} 6x\,dx$

6. $\displaystyle\int_4^{9} 5\,dv$

7. $\displaystyle\int_{-1}^{0} (2x-1)\,dx$

8. $\displaystyle\int_2^{5} (-3v+4)\,dv$

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2-2)\,dt$

10. $\displaystyle\int_1^{7} (6x^2+2x-3)\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^{1} (2t-1)^2\,dt$

12. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3-9t)\,dt$

13. $\displaystyle\int_1^{2} \left(\frac{3}{x^2}-1\right)dx$

14. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(u-\frac{1}{u^2}\right)du$

15. $\displaystyle\int_1^{4} \frac{u-2}{\sqrt{u}}\,du$

16. $\displaystyle\int_{-3}^{3} v^{1/3}\,dv$

17. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\sqrt[3]{t}-2\right)dt$

18. $\displaystyle\int_1^{8} \sqrt{\frac{2}{x}}\,dx$

19. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x-\sqrt{x}}{3}\,dx$

20. $\displaystyle\int_0^{2} (2-t)\sqrt{t}\,dt$

21. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left(t^{1/3}-t^{2/3}\right)dt$

22. $\displaystyle\int_{-8}^{-1} \frac{x-x^2}{2\sqrt[3]{x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int_0^{5} |2x-5|\,dx$

24. $\displaystyle\int_1^{4} (3-|x-3|)\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^{3} |x^2-9|\,dx$

26. $\displaystyle\int_0^{4} |x^2-4x+3|\,dx$

En los ejercicios 27 a 34, hallar la integral definida de la función trigonométrica. Emplear una herramienta de graficación para verificar el resultado.

27. $\displaystyle\int_0^{\pi} (1+\operatorname{sen} x)\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^{\pi} (2+\cos x)\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\,d\theta$

31. $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sec^2 x\,dx$

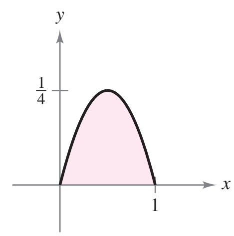
32. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} (2-\csc^2 x)\,dx$

33. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

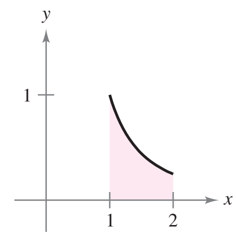
34. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2t+\cos t)\,dt$

En los ejercicios 35 a 38, determinar el área de la región indicada.

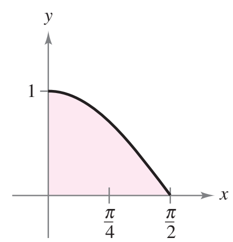
35. $y = x - x^2$



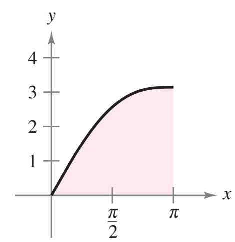
36. $y = \dfrac{1}{x^2}$



37. $y = \cos x$



38. $y = x + \operatorname{sen} x$



En los ejercicios 39 a 44, encontrar el área de la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones.

39. $y = 5x^2 + 2,\quad x = 0,\quad x = 2,\quad y = 0$

40. $y = x^3 + x,\quad x = 2,\quad y = 0$

41. $y = 1 + \sqrt[3]{x},\quad x = 0,\quad x = 8,\quad y = 0$

42. $y = (3-x)\sqrt{x},\quad y = 0$

43. $y = -x^2 + 4x,\quad y = 0$

44. $y = 1 - x^4,\quad y = 0$

En los ejercicios 45 a 50, determinar el (los) valor(es) de *c* cuya existencia es garantizada por el teorema del valor medio para integrales de la función en el intervalo indicado.

45. $f(x) = x^3,\quad [0, 3]$

46. $f(x) = \dfrac{9}{x^3},\quad [1, 3]$

47. $f(x) = \sqrt{x},\quad [4, 9]$

48. $f(x) = x - 2\sqrt{x},\quad [0, 2]$

49. $f(x) = 2\sec^2 x,\quad [-\pi/4, \pi/4]$

50. $f(x) = \cos x,\quad [-\pi/3, \pi/3]$

En los ejercicios 51 a 56, encontrar el valor medio de la función sobre el intervalo dado y todos los valores de *x* en el intervalo para los cuales la función sea igual a su valor promedio.

51. $f(x) = 9 - x^2,\quad [-3, 3]$

52. $f(x) = \dfrac{4(x^2+1)}{x^2},\quad [1, 3]$

53. $f(x) = x^3,\quad [0, 1]$

54. $f(x) = 4x^3 - 3x^2,\quad [-1, 2]$

55. $f(x) = \operatorname{sen} x,\quad [0, \pi]$

56. $f(x) = \cos x,\quad [0, \pi/2]$

57. ***Velocidad*** La gráfica muestra la velocidad, en pies por segundo, de un automóvil que acelera desde el reposo. Emplear la gráfica para estimar la distancia que el automóvil recorre en 8 segundos.

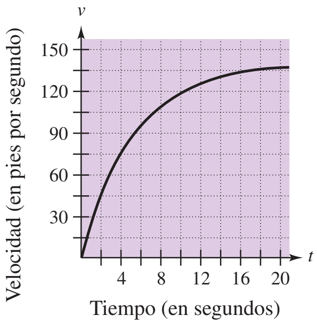


Figura para 57

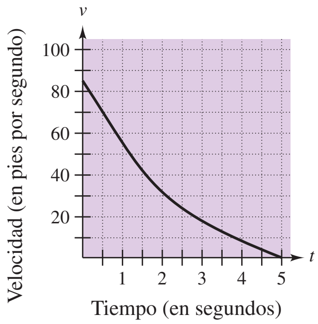
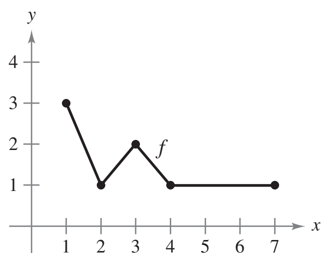


Figura para 58

58. ***Velocidad*** La gráfica muestra la velocidad de un automóvil tan pronto como el conductor aplica los frenos. Emplear la gráfica para estimar qué distancia recorre el auto antes de detenerse.

Desarrollo de conceptos

59. La gráfica de f se muestra en la figura.



a) Calcular $\int_1^7 f(x)\,dx$.

b) Determinar el valor medio de f en el intervalo $[1, 7]$.

c) Determinar las respuestas a los apartados *a*) y *b*) si la gráfica se desplaza dos unidades hacia arriba.

60. Si $r'(t)$ representa la razón de crecimiento de un perro en libras por año, ¿qué representa $r(t)$? ¿Qué representa $\int_2^6 r'(t)\,dt$ en el perro?

61. ***Fuerza*** La fuerza F (en newtons) de un cilindro hidráulico en una prensa es proporcional al cuadrado de $\sec x$, donde x es la distancia (en metros) que el cilindro se desplaza en su ciclo. El dominio de F es $[0, \pi/3]$ y $F(0) = 500$.

a) Encontrar F como una función de x.

b) Determinar la fuerza media ejercida por la prensa sobre el intervalo $[0, \pi/3]$.

62. ***Flujo sanguíneo*** La velocidad v del flujo de sangre a una distancia r del eje central de cualquier arteria de radio R es

$$v = k(R^2 - r^2)$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Determinar el flujo medio de sangre a lo largo de un radio de la arteria. (Usar 0 y R como los límites de integración.)

63. ***Ciclo respiratorio*** El volumen V en litros de aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de cinco segundos se aproxima mediante el modelo $V = 0.1729t + 0.1522t^2 - 0.0374t^3$ donde t es el tiempo en segundos. Aproximar el volumen medio de aire en los pulmones durante un ciclo.

64. ***Promedio de ventas*** Una compañía ajusta un modelo a los datos de ventas mensuales de un producto de temporada. El modelo es

$$S(t) = \frac{t}{4} + 1.8 + 0.5\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right), \qquad 0 \le t \le 24$$

donde S son las ventas (en miles) y t es el tiempo en meses.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar $f(t) = 0.5\,\mathrm{sen}(\pi t/6)$ para $0 \le t \le 24$. Emplear la gráfica para explicar por qué el valor medio de $f(t)$ es cero sobre el intervalo.

b) Recurrir a una herramienta de graficación para representar $S(t)$ y la recta $g(t) = t/4 + 1.8$ en la misma ventana de observación. Utilizar la gráfica y el resultado del apartado *a*) para explicar por qué g recibe el nombre *recta de tendencia*.

65. ***Modelado matemático*** Se prueba un vehículo experimental en una pista recta. Parte del reposo y su velocidad v (metros por segundo) se registra en la tabla cada 10 segundos durante un minuto.

t	0	10	20	30	40	50	60
v	0	5	21	40	62	78	83

a) Emplear una herramienta de graficación para determinar un modelo de la forma $v = at^3 + bt^2 + ct + d$ para los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para dibujar los datos y hacer la gráfica del modelo.

c) Emplear el teorema fundamental del cálculo para aproximar la distancia recorrida por el vehículo durante la prueba.

Para discusión

66. La gráfica de f se muestra en la figura. La región sombreada A tiene un área de 1.5, y $\int_0^6 f(x)\,dx = 3.5$. Usar esta información para completar los espacios en blanco.

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx =$ ____

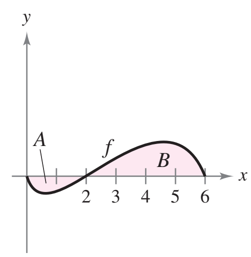
b) $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,dx =$ ____

c) $\displaystyle\int_0^6 |f(x)|\,dx =$ ____

d) $\displaystyle\int_0^2 -2f(x)\,dx =$ ____

e) $\displaystyle\int_0^6 [2 + f(x)]\,dx =$ ____

f) El valor promedio de f sobre el intervalo $[0, 6]$ es ____.



En los ejercicios 67 a 72, encontrar F como una función de x y evaluar en $x = 2$, $x = 5$ y $x = 8$.

67. $F(x) = \displaystyle\int_0^x (4t - 7)\,dt$

68. $F(x) = \displaystyle\int_2^x (t^3 + 2t - 2)\,dt$