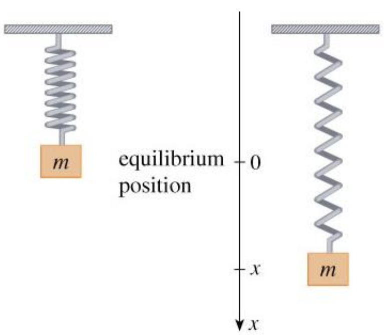
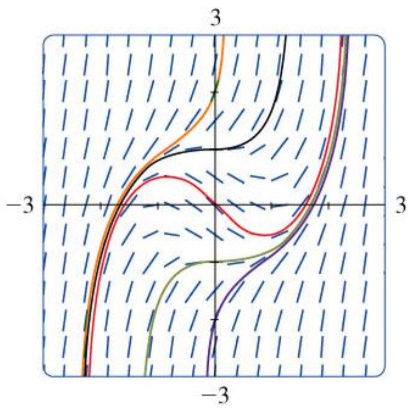
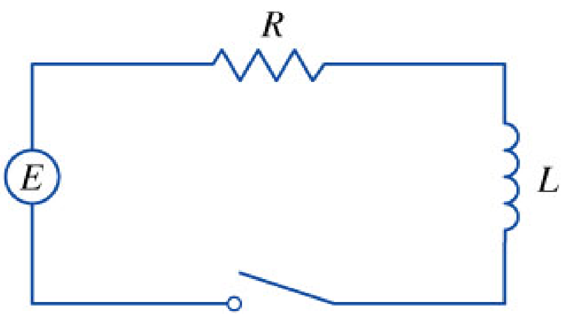
Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Profesor Edis Alberto Flores







Consideremos la forma estándar de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)$$

con $P(x)$ y $Q(x)$ funciones continuas y supongamos que $y_1(x)$ una solución de (*)

Si definimos a $y = uy_1$, entonces

$$y' = uy'_1 + y_1 u' \,; \quad y'' = uy''_1 + 2y'u' + y_1u''$$

Luego remplazamos y agrupamos en (*), esto es:

$$y'' + Py' + Qy = u[\boldsymbol{y''_1} + \boldsymbol{Py'_1} + \boldsymbol{Qy_1}] + y_1u'' + (2y'_1 + Py_1)u' = 0$$

Lo que se reduce a la expresión: $y_1u'' + (2y'_1 + Py_1)u' = 0$

Hagamos la sustitución $w = u'$ y además $w' = u''$ de donde obtenemos,

$$y_1\, w' + (2y'_1 + Py_1)w = 0$$

Dividiendo por y_1 ➔ $w' + \left(2\frac{y'_1}{y_1} + P\right)w = 0$ que resulta la expresión:

$\frac{dw}{dx} + \left(2\frac{y'_1}{y_1} + P\right)w = 0 \quad separando\ variables\ \frac{dw}{w} = -\left(2\frac{y'_1}{y_1} + P\right)dx$

⇨ $\int \frac{dw}{w} = -2\int \frac{y'_1}{y_1}dx - \int Pdx$ integrando usando $k = y_1$

⇨ $ln|wy_1^2| = -\int Pdx + c$

⇨ $wy_1^2 = c_1 e^{-\int Pdx}$

⇨ $w = c_1 \dfrac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}$ finalmente retornamos a $u' = w$

⇨ $u' = c_1 \dfrac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}$ integramos nuevamente y obtenemos la fórmula para la segunda solución de nuestra ecuación (*)

⇨ $u = c_1 \int \dfrac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}$ y como $u = \dfrac{y}{y_1}$

$\dfrac{y}{y_1} = c_1 \int \dfrac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}$ así $y = c_1 y_1 \int \dfrac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2} + c_2$

Si tomamos a $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ tenemos nuestra segunda solución

$$\boldsymbol{y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2}\, dx}$$

Por ejemplo: $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ con $y_1 = x^2$

Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas

Definición: Se dice que una ecuación diferencial lineal de n –ésimo orden de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \text{ es } \textbf{Homogénea} \text{ si } \boldsymbol{g(x) = 0} \ \ \textbf{(*)}$$

Por ejemplo:

1. $2y'' + 3y' - 5y = 0$ es homogénea de 2 orden
2. $x^2y'' + 6y' + 10y = e^x$ es no homogénea de 2 orden

Solución genera de una Ecuación diferencial homogénea

Digamos que $y_1, y_2, \cdots, y_n$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (*).

Entonces la solución general de la EDH.

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \cdots + c_ny_n$$

Observación:

$y_1, y_2, \cdots, y_n$ es un conjunto fundamental de soluciones si $W(y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq 0$, esto es si

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \cdots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \cdots & y''_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (wronkiano)}$$

Solución genera de una Ecuación diferencial no homogénea

Digamos que $y_1, y_2, \cdots, y_n$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (*).

Entonces la solución general de la EDNH.

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_n y_n + y_p$$

es decir que $\boldsymbol{y_G = y_c + y_p}$

Por similitud con la E.D.O. de primer orden y coeficientes constantes, vamos a suponer que la E.D. lineal de segundo orden y coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{4.9}$$

tiene por solución una exponencial de la forma: $y = e^{mx}$, derivando dos veces se tiene

$$y' = me^{mx}, \qquad y'' = m^2 e^{mx}$$

y sustituyendo en la E.D. (4.9): $am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$
luego

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

o sea que

$$am^2 + bm + c = 0,$$

la cual llamamos ecuación característica o ecuación auxiliar de la E.D.:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Con las raices de la ecuación característica suceden tres casos:

1. Que tenga raices reales y diferentes.

2. Que tenga raices reales e iguales.

3. Que tenga raices complejas conjugadas.

Caso 1. **Raices reales y diferentes**

Si las raices son m_1 y m_2, con $m_1 \neq m_2$, luego $y_1 = e^{m_1 x}$ y $y_2 = e^{m_2 x}$ son linealmente independientes, por tanto la solución general es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}.$$

Ejemplo 12 Hallar la solución general de $2y'' - 5y' - 3y = 0$

Sc

$$m_1 = 3 \,,\; m_2 = -\frac{1}{2}$$

0

La solución general es $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} \;\Rightarrow\; m = \frac{5 \pm 7}{4}$$

<u>Caso 2.</u> **Raices reales e iguales:** en este caso las raices son de multiplicidad dos.

Sea m (con multiplicidad 2) $\Rightarrow y_1 = e^{mx}$ es una solución.
Utilicemos el método de D'Alambert para hallar la segunda sulución de

$$ay'' + by' + cy = 0$$

dividiendo por a para conseguir la forma canónica, se tiene

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0.$$

$$y_2 \;=\; y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx = e^{mx}\int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}\,dx}}{e^{2mx}}\,dx$$

como $ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow am^2 + bm + c = 0$ (ecuación característica) y sus raices son $m_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; pero como las raices son iguales, entonces el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, por lo tanto $m_{1,2} = m = -\frac{b}{2a}$, luego:

$$
\begin{aligned}
y_2 &= e^{mx}\int \frac{e^{\frac{-b}{a}x}}{e^{\left(2\frac{-b}{2a}x\right)}}\,dx \\
&= e^{mx}\int dx = xe^{mx}
\end{aligned}
$$

luego la solución general es: $y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$

Ejemplo 13. $4y'' - 4y' + y = 0$ Hallar la solución general.
<u>Solución</u>:

Ecuación característica: $4m^2 - 4m + 1 = 0 = (2m-1)^2 = 0$ por lo tanto $m = \frac{1}{2}$ (con multiplicidad 2)

La solución general es: $y = C_1e^{\frac{x}{2}} + C_2xe^{\frac{x}{2}}$

Caso 3. **Raices complejas y conjugadas**

Supongamos que $m_1 = \alpha + \beta i$ es una raíz de la ecuación auxiliar y por tanto su conjugada $m_2 = \alpha - \beta i$ es la otra raíz, donde α es la parte real y β es la parte imaginaria; recordando que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ (Fórmula de Euler) entonces la solución general es

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)} = C_1 e^{\alpha x} e^{\beta i x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-\beta i x} \\ &= e^{\alpha x}(C_1 e^{\beta i x} + C_2 e^{-\beta i x}) = e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\,\mathrm{sen}\,\beta x] \\ &= e^{\alpha x}[K_1 \cos\beta x + K_2\,\mathrm{sen}\,\beta x] \end{aligned}$$

Ejemplo 4. $y'' - 2y' + 3y = 0$

Ecuación característica: $m^2 - 2m + 3 = 0$

sus raices son $m_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \sqrt{2}i$

o sea que $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{2}$.

La solución general es

$$y = K_1 e^x \cos\sqrt{2}x + K_2 e^x\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}x$$

Ejercicios. Hallar la solución general o la solución particular de los siguientes ejercicios:

1. $(D^2 + 2D - 3)y = 0$
   (**Rta.:** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$)

2. $D^2 - 2D - 3)y = 0$ con $y(0) = 0,\ \ y'(0) = -4$
   (**Rta.:** $y = e^{-x} - e^{3x}$)

3. $(D^2 - 6D + 9)y = 0$
   (**Rta.:** $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$)

4. $(D^2 + 4D + 4)y = 0$ con $y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1$
   (**Rta.:** $y = (1 + x)e^{-2x}$)

5. $(D^2 - 2D + 2)y = 0$
   (**Rta.:** $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \operatorname{sen} x$)

6. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + k^2 x = 0,\ \ k > b > 0$ con $x(0) = 0,\ x'(0) = v_0$
   (**Rta.:** $x = (\frac{v_0}{a})e^{-bt} \operatorname{sen} at$, donde $a = \sqrt{k^2 - b^2}$)

Ejemplo 5. $2\frac{d^5y}{dx^5} - 7\frac{d^4y}{dx^4} + 12\frac{d^3y}{dx^3} + 8\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

En la E.D. reemplazo en cada $\frac{d^iy}{dx^i}$ por m^i y obtengo la ecuación característica:

$$2m^5 - 7m^4 + 12m^3 + 8m^2 = 0$$

$$m^2(2m^3 - 7m^2 + 12m + 8) = m^2(2m + 1)(m^2 - 4m + 8) = 0$$

luego las raices son $m_1 = 0$ con multiplicidad 2, $m_2 = -\frac{1}{2}$

$$m_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = \frac{4 + 4i}{2} = 2 \pm 2i \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 2$$

Para el factor m^2, como el grado es 2, empezamos con la solución básica e^{0x} y luego multiplicamos por x y así sucesivamente. O sea que las soluciones serían: $e^{0x} = 1$, $xe^{0x} = x$

Para $2m - 1$ la solución sería: $e^{-\frac{x}{2}}$

Para $m^2 - 4m + 8$ las soluciones serían: $e^{2x}\cos 2x$, $e^{2x}\operatorname{sen} 2x$.

Solución general: $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-\frac{x}{2}} + C_4e^{2x}\cos(2x) + C_5e^{2x}\operatorname{sen}(2x)$

Hallar la solución general o la solución particular según el caso en los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $y^{(5)} + 5y^{(4)} - 2y''' - 10y'' + y' + 5y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + C_5e^{-5x}$)

Ejercicio 2. $16\frac{d^4y}{dx^4} + 24\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2x \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4x \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x$)

Ejercicio 3. $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0$
(**Rta.:** $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-\frac{1}{3}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4e^{-\frac{1}{3}x} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x$)

Ejercicio 4. $\frac{d^4y}{dx^4} - 7\frac{d^2y}{dx^2} - 18y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3 \cos \sqrt{x} + C_4 \operatorname{sen} \sqrt{x}$)

Ejercicio 5. $\frac{d^4y}{dx^4} + y = 0$, (Ayuda: Completar cuadrados).
(**Rta.:** $y = C_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_3e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}x$)

Ejercicio 6. $(D^2 + 4D + 4)y = 0$ tal que tenga una solución que pase por los puntos $(0, 2)$, $(2, 0)$
(**Rta.:** $y = (2 - x)e^{-2x}$)