I. Conceptos Fundamentales

1) **Definición:** Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ***ecuación diferencial***.

2) **Definición**: Si la ecuación contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces la ecuación se dice que es una ***ecuación diferencial ordinaria*** (E.D.O).

3) **Definición:** Si la ecuación contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variable independiente, entonces la ecuación se dice que es una ***ecuación en derivadas parciales***.

4) **Definición:** El ***orden*** de una ecuación diferencial es la derivada de mayor orden en la ecuación

5) **Definición:** El ***grado*** de una ecuación diferencial es el exponente que abarca el término del orden de la ecuación diferencial.

6) **Definición**: Una ***ecuación diferencial ordinaria*** se dice que es ***lineal*** si tiene la forma:
$a_n(x)y^n + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$
Donde los $a_n(x)$ y $f(x)$ son funciones de la variable independiente y la variable dependiente y sus derivadas son de grado uno. Si no cumple con estas condiciones entonces se dicen no lineales.

7) **Definición**: Se dice que una función f con dominio en un intervalo I es ***solución a una ecuación diferencial*** en el intervalo I, si la función satisface la ecuación diferencial en el intervalo I.

8) **Teorema de Picard**: Sea R una región rectangular en el plano XY definida por, $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe un intervalo I con centro en x_0 y una única función $y(x)$ definida en I que satisface el problema de valor inicial $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$.

9) **Definición**: Si todas las soluciones de la ecuación diferencial $F(x,y,y',\ldots y^n) = 0$ en un intervalo pueden obtenerse de $G(x,y,c_1,\ldots,c_n)$, con $c_i \in R$ (parámetros), mediante valores apropiados de c_i, entonces a $G(x,y,c_1,\ldots,c_n)$ se le llama la ***solución general***. Si la solución no contiene los parámetros c_i se le llama la ***solución particular***, es decir, que la solución particular es generada por valores de los parámetros c_i. Por otro lado, una solución que no pueda obtenerse a partir de la solución general se le llama ***solución singular***.

II. EDO de primer orden y sus aplicaciones

10) **Definición**: Una ***ecuación diferencial de primer orden*** es de la forma :
$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$
O escrita en su forma canónica
$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Variables Separables

11) **Definición**: Una ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ se dice de ***variables separables*** si, la podemos escribir de la forma $f(x,y) = h(x)k(y)$ para integrar a ambos lados.

Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

12) **Definición**: Una ***función*** $f(x,y)$ se dice que es ***homogénea*** de grado n si existe un $t \in R$ tal que $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$

13) **Definición**: Una ***ecuación*** de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es ***homogénea*** si tanto $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado. Es decir si:
$M(tx,ty) = t^n M(x,y)$
Y
$N(tx,ty) = t^n N(x,y)$

14) **Teorema**: Dada la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado; mediante la sustitución $y = ux$ ó $x = vy$ (donde u y v son nuevas variables dependientes), puede transformarse en una ecuación diferencial de variable separable.

15) **Teorema**: Si la estructura algebraica de N es más sencilla que la de M, entonces es conveniente usar la sustitución $y = ux$ y la fórmula:

$$ln|x| + \int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)} du = 0$$

En caso contrario, usaremos la sustitución $x = vy$ y la fórmula

$$ln|y| + \int \frac{M(v,1)}{N(v,1) + vM(v,1)} dv = 0$$

Ecuaciones Diferenciales Cuasi homogéneas

16) **Caso 1**: Ecuaciones de la Forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$$

Para este tipo de ecuaciones haremos la sustitución $z = ax+by+c$ para convertirla en una ecuación diferencial de variable separable, sustituyendo en la fórmula:

$$\int \frac{dz}{bf(z)+a} = x+c$$

17) **Caso 2**: Ecuaciones de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$$

Para está ecuación estudiaremos dos posibilidades:

- Que las ***rectas*** sean ***paralelas***: Para este caso usamos la sustitución $z = ax+by$ y procedemos de la misma forma que en el caso 1, sustituyendo en la fórmula:

$$\int \frac{dz}{bf\left(\frac{z+c}{kz+C}\right)+a} = x+c$$

- Que las ***rectas*** sean ***incidentes***: Supongamos que su intersección es el punto $P_0(h,k)$, entonces con la sustitución $x = X+h$ y $y = Y+k$ (una traslación al origen), nuestra ecuación se transforma en una ecuación diferencial homogénea.

Ecuaciones Diferenciales Exactas

18) **Definición**: Si $z = f(x,y)$, entonces

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

es la ***diferencial total*** de f; pero si consideramos $z = c = f(x,y)$ (la familia de curvas uniparamétricas en el plano XY), entonces

$$dz = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

19) **Definición**: La forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una ***diferencial exacta*** en una región R del plano XY, si corresponde a la diferencial total de alguna función $f(x,y)$. La ***ecuación*** $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, es ***exacta*** si es la diferencial total de alguna función $f(x,y) = c$.

20) **Teorema**: ***Criterio para Ecuaciones Diferenciales Exactas***.
Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una región R del plano XY, entonces la condición necesaria y suficiente para que la forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ sea un diferencial exacta es que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

21) **Método de Solución de las Ecuaciones Diferenciales Exactas**.

i. Comprobaremos en primer lugar que la ecuación es exacta.

ii. De ser exacta, esto implica que existe una función $f(x,y) = c$ tal que

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

iii. Consideramos una de las dos expresiones para determinar nuestra función $f(x,y) = c$, integrando respecto a x ó bien respecto a y según sea la igualdad que escojamos.
Usemos la primera para determinar la función $f(x,y) = c$.

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\int \partial f = \int M \partial x$$
$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$

iv. Derivamos con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y)$$

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

v. Finalmente integramos con respecto a y

Factor Integrante

22) **Teorema**: Sea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ y $\mu(x,y)$ un factor integrante, con $M(x,y)$, $N(x,y)$ y $\mu(x,y)$ continuas y con primeras derivadas parciales continuas, entonces

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{d\mu}{dx} = -M\frac{d\mu}{dy}$$

23) **Factor Integrante**:
$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ no es exacta. Luego existe $\mu(x,y)$ tal que $\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ es exacta. Entonces,

$$u(x) = e^{\int \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\partial x}{N}} \quad \text{ó}$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\partial y}{-M}}$$

Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden

24) **Definición**: Una ***ecuación*** de la forma $A_1(x)\frac{dy}{dx} + A_2(x)y = g(x)$ se dice ***lineal de primer orden***, donde $A_i : i = 0,1$, son funciones de la variable independiente. Esta ecuación puede presentarse también en forma estándar como:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Donde $P(x)=\frac{A_2(x)}{A_1(x)}$ y $f(x)=\frac{g(x)}{A_1(x)}$.

25) **Solución General**: de las ecuaciones lineales respecto a la variable x:

$$e^{\int P(x)dx}y=\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx+c_0$$

Y respecto a la variable y:

$$e^{\int P(y)dy}x=\int e^{\int P(y)dy}g(y)dy+c_0$$

Ecuaciones Diferenciales de Bernoullí

26) **Definición**: Una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$, $n\neq 0$ y $n\neq 1$, se le llama una ***ecuación diferencial de Bernoullí***. (no es lineal) Esta ecuación con la sustitución $z=y^{1-n}$ se transforma en una ecuación diferencial lineal.

27) **Teorema**: Dada la ecuación

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$, $n\neq 0$ y $n\neq 1$, entonces la solución de la ecuación diferencial de Bernoullí es:

$$y^{1-n}e^{(1-n)\int P(x)dx}=(1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx+c$$

28) **Teorema**: Dada la ecuación

$\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)x^n$, $n\neq 0$ y $n\neq 1$, entonces la solución de la ecuación diferencial de Bernoullí es:

$$x^{1-n}e^{(1-n)\int P(y)dy}=(1-n)\int Q(y)e^{(1-n)\int P(y)dy}dy+c$$

Ecuaciones Diferenciales de Ricatti

29) **Definición**: Una ecuación de la forma

$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$ se llama ***ecuación de Ricatti***. En la solución de esta ecuación se supone una solución particular conocida y_1 y se hace la sustitución $y=y_1+\frac{1}{v}$ la cual transforma la ecuación en una lineal respecto a v.

30) **Solución General de Ricatti**:

$$ve^{\int[2P(x)y_1+Q(x)]dx}=-\int P(x)e^{\int[2P(x)y_1+Q(x)]dx}dx+c$$

con $v=\frac{1}{y-y_1}$.

Ecuaciones Diferenciales de LaGrange

31) **Definición**:

La ***ecuación de LaGrange*** tiene la forma $y=x\varphi(y')+\Psi(y')$

Haciendo $y'=p$, diferenciando y sustituyendo dy por pdx, reducimos esta ecuación a otra que considerada en x como función de p es lineal. Resolviendo esta última $x=r(p,c)$, obtenemos la solución general de la ecuación inicial en forma paramétrica:

Sol. $\left.\begin{aligned} x&=r(p,C)\\ y&=r(p,C)\varphi(p)+\Psi(p)\end{aligned}\right\}$

(p es un parámetro)

La ecuación de LaGrange puede tener soluciones singulares de la forma $y=\varphi(C)x+\Psi(C)$ donde C es una raíz de la ecuación $C=\varphi(C)$

Ecuaciones Diferenciales de Clairaut

32) **Definición**: El método de resolución es el mismo que para las ecuaciones de Lagrange. La solución general de la ecuación de Clairaut tiene la forma:

$y=Cx+\Psi(p)$

Puede tener solución particular que se obtiene eliminando p entre las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} y&=xp+\psi(p)\\ x+\psi'(p)&=0\end{aligned}\right\}$$

Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

33) **Trayectorias Isogonales y Ortogonales**

Dada una familia de curvas $f(x,y,c)=0$, existe otra familia $g(x,y,c)=0$ que corta a la familia f bajo un mismo ángulo γ. A la familia g se le llama la familia de ***trayectorias isogonales*** de f y $g(x,y,c)=0$ es solución de la ecuación diferencial.

$$\begin{aligned} \tan\gamma&=\tan(\alpha-\beta)\\ &=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\ &=\frac{f'(x)-g'(x)}{1+f'(x)g'(x)}\\ &=\frac{f'(x)-y'}{1+f'(x)y'}\end{aligned}$$

Luego, $\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)-\tan\gamma}{\tan\gamma\, f'(x)+1}$

En particular, cuando $\gamma=90^o$, a g se le llama la familia de ***trayectorias ortogonales*** de f y en este caso, g es solución de la ecuación diferencial.

$$\tan\alpha\tan\beta=f'(x)g'(x)=-1=f'(x)y'$$

34) **Ley de Enfriamiento de Newton**:

Si se tiene un cuerpo a una temperatura T, sumergido en un medio de tamaño infinito de temperatura T_m (T_m no varía apreciablemente con el tiempo). El enfriamiento de este cuerpo se comporta de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial. $\frac{d\theta}{dt}=-k\theta$

donde $\theta=T-T_m$

$T\rightarrow$ Temperatura del cuerpo en el tiempo

$T_0\rightarrow$ Temperatura inicial

$T_m\rightarrow$ Temperatura del medio ambiente

$k\rightarrow$ Constante de proporcionalidad

$$\frac{dT}{dt}=k\left(T-T_m\right)$$

$$T(t)=ce^{kt}+T_m$$

35) <u>**Ley de Absorción de Lambert**</u>: Esta ley dice que la tasa de

36) absorción de luz con respecto a una profundidad x de un material translúcido es proporcional a la intensidad de la luz a una profundidad x; es decir, si I es la intensidad de la luz a una profundidad x, entonces $\frac{dI}{dx}=-kI$

37) <u>**Mezcla o Soluciones Químicas:**</u>

$Q(t)\rightarrow$ Cantidad de sal en t

$V(t)\rightarrow$ Volumen en t

$C(t)\rightarrow$ Concentración en t

$a\rightarrow$ Libras de sal que contiene la solución salina inicial

$e\rightarrow$Taza con la que se vierte la otra solución salina

$b\rightarrow$ Libras de sal que contiene la otra solución salina

$f\rightarrow$Taza con la que sale la solución bien mezclada

$$\frac{dQ}{dt}=R_1-R_2$$

$$R_1=\left(b\,{}^{lib}\!/_{gal}\right)\left(e\,{}^{gal}\!/_{min}\right)=be\,{}^{lib}\!/_{mi}$$

$$R_2=\left(C(t)\,{}^{lib}\!/_{gal}\right)\left(f\,{}^{gal}\!/_{min}\right)=C(t)f\,{}^{lib}\!/$$

$$C(t)=\frac{Q(t)}{V(t)}=\frac{Q(t)}{V_0+t(e-f)}$$

$$\begin{aligned}V(t)&=V_0+V_E-V_S\\&=V_0+et-ft\\&=V_0+t(e-f)\end{aligned}$$

$$Q(t)e^{f\int\frac{dt}{V_0+t(e-f)}}=be\int e^{f\int\frac{dt}{V_0+t(e-f)}}dt+C_0$$

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

38) <u>**Definición:**</u> Se dice que una ecuación diferencial lineal de n – ésimo orden de la forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.....+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

es homogénea si $g(x)=0$

39) <u>**Solución general de una EDH**</u>

Si $y_1,y_2,.....y_n$ es un conjunto fundamental de soluciones de la EDH entonces la solución general es $y_c=c_1y_1+c_2y_2+......+c_ny_n$

40) <u>**Observación**</u>: $y_1,y_2,.....y_n$ es un conjunto fundamental de soluciones si $W(y_1,y_2,.....y_n)\neq 0$, esto es si

$$W(y_1,y_2,.....y_n)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n'\\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n''\\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1}\end{vmatrix}\neq 0$$

41) <u>**Solución General de una Ecuación Diferencial No homogénea**</u>

Digamos que $y_1,y_2,.....y_n$ es un conjunto fundamental de soluciones de (*). Entonces la solución general de la EDNH es

$$y_c=c_1y_1+c_2y_2+......+c_ny_n+y_p$$

Es decir: $y_G=y_c+y_p$

42) <u>**Definición:**</u> Si $ay''+by'+cy=0$ llamamos ecuación característica o auxiliar de la ED a:

$$am^2+bm+c=0$$

Con las raíces de la ecuación característica suceden tres casos.

Caso 1: Raíces Reales y diferentes

Si las raíces son m_1 y m_2, $m_1\neq m_2$

$y_1=e^{m_1x}$, $y_2=e^{m_2x}$ por tanto la solución general es

$$y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}$$

Caso 2: Raíces Reales e iguales

Si las raíces son m_1 y m_2, $m_1=m_2$

$y_1=e^{m_1x}$, $y_2=xe^{m_2x}$ por tanto la solución general es

$$y=C_1e^{m_1x}+C_2xe^{m_2x}$$

Caso 3: Raíces imaginarias

Si las raíces son m_1 y m_2, $m_1=\alpha+\beta i$ y $m_2=\alpha-\beta i$ la solución general está dada por

$$y=e^{\alpha x}\left[C_1\cos\beta x+C_2 sen\beta x\right]$$

Método de Coeficientes Indeterminados

43) <u>**Definición**</u>: ***No homogénea***

$$a_1(x)y''+a_2(x)y'+a_3(x)y=f(x)$$

Homogénea asociada

$$a_1(x)y''+a_2(x)y'+a_3(x)y=0$$

44) <u>**Pasos a seguir:**</u>

1.Determine la solución general de la edo. homogénea asociada (solución complementaria $y_c(x)$.

2.Determine una solución particular de la no homogénea $y_p(x)$. (Determine A, B, C)

3.La solución general es $y=y_c+y_p$

Ecuaciones con Variación de Parámetros

45) <u>**Pasos para resolver la ecuación en forma canónica:**</u>

$$y''+p(x)y'+g(x)y=f(x)$$

1.Hallamos y_1 y y_2 soluciones linealmente independientes de la homogénea asociada:

$$y''+p(x)y'+g(x)y=0$$

2.Hallamos $W(y_1,y_2)$

3.Determinamos

$$u_1'=-\frac{y_2f(x)}{W(y_1,y_2)} \quad \text{y}$$

$$u_2'=\frac{y_1f(x)}{W(y_1,y_2)}$$

4.Integramos $u_1=\int u_1'dx$ y $u_2=\int u_2'dx$

5.La solución particular $y_p=u_1y_1+u_2y_2$

6.La solución general $y_G=y_c+y_p=C_1y_1+C_2y_2+u_1y_1+u_2y_2$

Otro enfoque:

$$y_p=u_1y_1+u_2y_2$$

Donde

$$u_1 = \int \frac{w_1}{w}dx \qquad u_2 = \int \frac{w_2}{w}dx$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Ecuaciones de Cauchy Euler

46) **Definición:** Forma General

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + x^2 y'' + xy' + y = f(x)$$

La solución está dada por:

$$y_h(x) = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + ... + c_n x^{m_n}$$

Polinomio característico:

$$m^2 + (b-a)m + c = 0$$

- Si las raíces son reales y distintas entonces la solución homogénea es de la forma $y_h(x) = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$
- Si las raíces son reales e iguales (multiplicidad) entonces la solución homogénea es de la forma $y_h(x) = c_1 x^m + c_2 \ln x \, x^m$
- Si las raíces son imaginarias entonces la solución homogénea es de la forma

$$y_h(x) = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2 x^\alpha sen(\beta \ln x)$$

Ecuaciones Diferenciales por Series de Potencias

47) **Ejemplos de Series de Potencias:**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - .... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - .... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$senhx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

48) **Solución en Puntos Ordinarios:**

Supongamos que la ecuación

$$a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0$$

Se puede escribir así:

$$y'' + \frac{a_2(x)}{a_1(x)}y' + \frac{a_3(x)}{a_1(x)}y = 0$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

49) **Definición:** Punto ordinario

Se dice que $x = a$ es un punto ordinario de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas en $x = a$; es decir, si $P(x)$ y $Q(x)$ se pueden expandir en series de potencias de $x - a$ con un radio de convergencia positivo.

Teorema: Si $x = a$ es un punto ordinario de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Siempre podemos encontrar dos soluciones distintas LI en serie de potencias; soluciones que son de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$$

Una solución en serie de potencias converge por lo menos para $|x-a| < R_1$, donde R_1 es la distancia de a al punto singular más cercano.

Nota: Para simplificar supondremos que el punto ordinario es $a = 0$, si no lo es, se hace la sustitución $t = x - a$. Esta sustitución convierte la ED en otra ED con punto ordinario $t = 0$.

Transformada de Laplace

50) **Teorema:**

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{f(t)\}$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{-1}{t} L^{-1}\{F'(s)\}$$

51) **Primer Teorema de traslación:**

$$L\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a) = F(s)_{s \to s-a}$$

Puesto que $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = F(s)$

52) **Función Unitaria Heviside:**

$$H\{t-a\} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < a \\ 1 & \text{si } t \ge a \end{cases}$$

53) **Teorema:**

$$\begin{cases} h_1(t) & \text{si } 0 \le t < a \\ h_2(t) & \text{si } a \le t < b \\ h_3(t) & \text{si } t \ge b \end{cases}$$

$$f(t) = h_1(t) + [h_2(t) - h_1(t)]H(t-a) + [h_3(t) - h_2(t)]H(t-b)$$

54) **Segundo Teorema de Traslación:**

$$L\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as} L\{f(t)\}$$

Observación:

$$sentH(t-2\pi) = sen(t-2\pi)$$

55) **Corolario:**

$$L\{H(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

56) **Forma alternativa del Segundo teorema de traslación:**

$$L\{f(t)H(t-a)\} = e^{-as} L\{f(t+a)\}$$

57) **Teorema:**

$$f(t)H(t-a) = L^{-1}\{e^{-as} F(s)\}$$

$$f(t-a)H(t-a) = L^{-1}\{e^{-as} F(s)\}$$

Teorema:

$$L\{e^{at} f(t)\} = L\{f(t)\}_{s \to s-a}$$

58) **Teorema de la Derivada:**

- $L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$
- $L\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$