Una **progresión geométrica** es una sucesión en que cada término (menos el primero) se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad fija **r**, llamada **razón** de la progresión. Este número **r,** se obtiene dividiendo el término posterior entre el anterior, es decir: $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Por ejemplo (1) en la progresión geométrica : $2,4,8,16,32,\cdots$

Tenemos que: $r = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$

Ahora observemos, además que esta misma progresión podemos escribirla de esta forma:

$$2(1), 2(2^1), 2(2^2), 2(2^3), 2(2^3), \cdots,$$

$$\Rightarrow 2(2^0), 2(2^1), 2(2^2), 2(2^3), 2(2^3), \cdots, \cdots 2(2^{n-1})$$

en general

$$\Rightarrow ar^0, ar^1, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5, ar^6, \cdots, \cdots ar^{n-1}$$

Es decir que:

$$\begin{gathered} a_1 = ar^0 \\ a_2 = ar^1 \\ a_3 = ar^2 \\ a_4 = ar^3 \\ a_5 = ar^4 \\ a_6 = ar^5 \\ a_7 = ar^6 \\ \vdots \\ a_n = ar^{n-1} \end{gathered}$$

Entonces nuestro ***n*-ésimo** término se calcula:

$$[a_n = ar^{n-1}]*$$

Suma de los *n*-ésimo términos

Llamemos S_n la suma de los n –ésimos de una progresión geométrica, esto es:

$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots, +ar^{n-1}$ y luego multiplicamos ésta misma expresión por la razón $\boldsymbol{r}$

$r \cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 \cdots, +ar^n$, y calculamos la diferencia

$$S_n - r \cdot S_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a - ar^n \quad (\boldsymbol{factorizando\ por\ S_n})$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad r < 1 \quad *$$

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, \quad r > 1 \quad **$$

Ejemplos:

1. Determine el décimo término y la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica:

   4,8,16, 32, ...

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$a = 4, \qquad r = \frac{8}{4} = 2\,, \qquad n = 10$$

$$a_{10} = 4(2)^{10-1} = 4(2^9) = 4(512) = 2048$$

   Y la suma

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1},\ \ r > 1$$

$$S_{10} = \frac{4(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{4(2^{10} - 1)}{1} = \frac{4(1024 - 1)}{1} = 4(1023) = 4092,$$

2. Determine el 12° término y la suma de 8 primeros términos de la progresión geométrica:

   $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, \cdots$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$a = 1, \qquad r = \frac{-\frac{1}{4}}{1} = -\frac{1}{4}\,, \qquad n = 12$$

$$a_{12} = 1\left(-\frac{1}{4}\right)^{12-1} = 1\left(-\frac{1}{4}\right)^{11} = -\frac{1}{4^{11}} = -\frac{1}{4194304}$$

   Y la suma

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r},\ \ r < 1$$

$$S_8 = \frac{1\left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^8\right)}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{1}{65536}\right)}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{65536 - 1}{65536}}{\frac{4 + 1}{4}} = \frac{\frac{65535}{65536}}{\frac{5}{4}} = \frac{65535}{65536} \times \frac{4}{5} = \frac{13107}{16384} \approx 0.79999$$

Ejercicios:

1. Encontrar el 8° término y la suma de los 8 primeros términos de la progresión geométrica 1,3,9, 27, ... $\Longrightarrow a_8 = 2187 \ \ y \ \ S_8 = 3280$
2. Hallar la suma de los 15 primeros términos de la progresión geométrica $1, (1.03), (1.03)^2, (1.03)^3, \cdots \quad \Longrightarrow S_{15} \approx 18{,}60$

3. Determine la suma de los 12 primeros términos de la progresión geométrica $(1.04)^{-1}, (1.04)^{-2}, (1.04)^{-3}, \cdots (1.04)^{-12}, \cdots \Longrightarrow S_{12} \approx 9.39$
4. Una máquina costó \$2000. La depreciación mensual al final de cualquier mes es calculada en 5% del valor al comienzo del mes. ¿Qué valor tendrá la máquina al cabo de 24 meses de usos?

   $(Use: V_s = C_0(1-d)^t)$ *donde* $\boldsymbol{V_s}$ *es el valor de salvamento,* $\boldsymbol{C_0}$ *el costo original,* $\boldsymbol{d}$ *la tasa de depreciación y* $\boldsymbol{t}$ *el tiempo*) $\Longrightarrow V_{24} = \$583{,}99$
5. Una máquina nueva cuesta \$3150 y se deprecia hasta \$650, en 8 años. Hallar:
   a. La tasa de depreciación anual. $\Longrightarrow d = 17{,}90\ \%$
   b. El valor contable al final de los 5 años. $\Longrightarrow V_5 = \$1174{,}70$
6. Un motor con costo inicial de \$1050 se deprecia a la tasa de 7.5% anual. Determine su valor contable al final del 7° año $\Longrightarrow V_7 = 608{,}39$
7. A una locomotora con costo de \$150 000 se le ha estimado un valor de salvamento de \$5000 y una vida útil de 30 años. Determine:
   a. La tasa de depreciación anual $\Longrightarrow$ 10,718%
   b. El valor en libros al final del 20° año $\Longrightarrow$ \$15 536
   c. El cargo por depreciación del 25° año $\Longrightarrow$ \$ 1058,10
8. Determine la suma infinita de las progresiones geométricas siguientes:
   a. $\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}} \cdots \quad \Longrightarrow \frac{2}{3}$
   b. $0.4, 0.04, 0.004, 0.0004 \ldots \Longrightarrow \frac{4}{9}$
   c. $\frac{1}{1+i}, \frac{1}{(1+i)^2}, \frac{1}{(1+i)^3}, \frac{1}{(1+i)^4}, \ldots \Longrightarrow \frac{1}{i}$

<u>Fórmulas importantes</u>

1) $a_n = ar^{n-1}$ (el valor de la n-enésima posición)
2) $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \ r < 1 \ ; \ S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, \ r > 1$ (la suma de los primeros n-enésimo términos)
3) $S_\infty = \frac{a}{1-r}, r < 1 \ (suma\ infinita)$
4) $V_s = C_0(1-d)^t$ (el valor de salvamento o valor en libro)
5) $d = 1 - \left(\frac{V_s}{C_0}\right)^{\frac{1}{t}}$ (tasa de depreciación)
6) $t = \frac{\log V_s - \log C_0}{\log(1-d)}$ (tiempo de salvamento o en libro)