Capítulo

4

ESPACIOS VECTORIALES

4.1 INTRODUCCIÓN

Como se observó en el capítulo anterior, los conjuntos $\mathbb{R}^2$ (vectores en el plano) y $\mathbb{R}^3$ (vectores en el espacio) cuentan con diversas propiedades peculiares. Se puede sumar dos vectores en $\mathbb{R}^2$ y obtener otro vector en $\mathbb{R}^2$. En la suma, los vectores en $\mathbb{R}^2$ obedecen las leyes conmutativa y asociativa. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Se puede multiplicar vectores en $\mathbb{R}^2$ por escalares y obtener las leyes distributivas. En $\mathbb{R}^3$ se cumplen las mismas propiedades.

Los conjuntos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ junto con las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar se denominan *espacios vectoriales*. Se puede decir, de forma intuitiva, que un espacio vectorial es un conjunto de objetos con dos operaciones que obedecen las reglas que acaban de escribirse.

En el presente capítulo habrá un cambio, en apariencia grande, del mundo concreto de la solución de ecuaciones y del manejo sencillo de los vectores que se visualizan, al mundo abstracto de los espacios vectoriales arbitrarios. Existe una ventaja en este cambio. Una vez que, en términos generales, se establecen los hechos sobre los espacios vectoriales se pueden aplicar estos hechos a *todos* los espacios de esta naturaleza. De otro modo, tendría que probarse cada hecho una y otra vez para cada nuevo espacio vectorial que nos encontráramos (y existe un sin fin de ellos). Pero como se verá más adelante, muchos de los teoremas abstractos que se demostrarán, en términos reales no son más difíciles que los que ya se han estudiado.

4.2 DEFINICIÓN Y PROPIEDADES BÁSICAS

DEFINICIÓN 1 **Espacio vectorial real**

Un **espacio vectorial real** V es un conjunto de objetos, denominados **vectores**, junto con dos operaciones binarias llamadas **suma** y **multiplicación por un escalar** y que satisfacen los diez axiomas enumerados a continuación.

Notación. Si **x** y **y** están en V y si α es un número real, entonces la suma se escribe como $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ y el producto escalar de α y **x** como $\alpha\mathbf{x}$.

Antes de presentar la lista de las propiedades que satisfacen los vectores en un espacio vectorial deben mencionarse dos asuntos de importancia. En primer lugar, mientras que puede ser útil pensar en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ al manejar un espacio vectorial, con frecuencia ocurre que el espacio vectorial parece ser muy diferente a estos cómodos espacios (en breve tocaremos este tema). En segunda instancia, la definición 1 ofrece una definición de un espacio vectorial *real*. La palabra "real" significa que los escalares que se usan son números reales. Sería igualmente sencillo definir un espacio vectorial *complejo* utilizando números complejos en lugar de reales. Este libro está dedicado principalmente a espacios vectoriales reales, pero las generalizaciones a otros conjuntos de escalares presentan muy poca dificultad.

Axiomas de un espacio vectorial

i. Si $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{y} \in V$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ **(cerradura bajo la suma)**.

ii. Para todo **x**, **y** y **z** en V, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
(ley asociativa de la suma de vectores).

iii. Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$
(el **0** se llama **vector cero** o **idéntico aditivo**).

iv. Si $\mathbf{x} \in V$, existe un vector $-\mathbf{x}$ en $\in V$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
($-\mathbf{x}$ se llama **inverso aditivo** de **x**).

v. Si **x** y **y** están en V, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
(ley conmutativa de la suma de vectores).

vi. Si $\mathbf{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\mathbf{x} \in V$
(cerradura bajo la multiplicación por un escalar).

vii. Si **x** y **y** están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
(primera ley distributiva).

viii. Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
(segunda ley distributiva).

ix. Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
(ley asociativa de la multiplicación por escalares).

x. Para cada vector $\mathbf{x} \in V$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Nota. En los problemas 23 y 24 se estudian la propiedad de unicidad sobre el elemento neutro aditivo y el elemento inverso aditivo en un espacio vectorial.

EJEMPLO 1 El espacio $\mathbb{R}^n$

$$\text{Sea } V = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Cada vector en $\mathbb{R}^n$ es una matriz de $n \times 1$. Según la definición de suma de matrices dada en la página 48, $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es una matriz de $n \times 1$ si **x** y **y** son matrices de $n \times 1$. Haciendo $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y

$-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$, se observa que los axiomas *ii*) a *x*) se obtienen de la definición de suma de vectores (matrices) y el teorema 1.5.1 en la página 50.

Nota. Los vectores en $\mathbb{R}^n$ se pueden escribir indistintamente como vectores renglón o vectores columna.

EJEMPLO 2 **Espacio vectorial trivial**

Sea $V = \{0\}$. Es decir, V consiste sólo en el número 0. Como $0 + 0 = 1 \cdot 0 = 0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0 = 0$, se ve que V es un espacio vectorial. Con frecuencia se le otorga el nombre de espacio vectorial **trivial**.

EJEMPLO 3 **Conjunto que no es un espacio vectorial**

Sea $V = \{1\}$. Es decir, V consiste únicamente del número 1. Éste *no* es un espacio vectorial ya que viola el axioma *i*) —el axioma de cerradura—. Para verlo con más claridad, basta con observar que $1 + 1 = 2 \notin V$. También viola otros axiomas, sin embargo, con tan sólo demostrar que viola al menos uno de los diez axiomas queda probado que V no es un espacio vectorial.

Nota. Verificar los diez axiomas puede ser laborioso. En adelante se verificarán únicamente aquellos axiomas que no son obvios.

EJEMPLO 4 **El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que se encuentran en una recta que pasa por el origen constituye un espacio vectorial**

Sea $V = \{(x, y): y = mx$, donde m es un número real fijo y x es un número real arbitrario$\}$.

Es decir, V consiste en todos los puntos que están sobre la recta $y = mx$ que pasa por el origen y tiene pendiente m. Para demostrar que V es un espacio vectorial, se puede verificar que se cumple cada uno de los axiomas. Observe que los vectores en $\mathbb{R}^2$ se han escrito como renglones en lugar de columnas, lo que en esencia es lo mismo.

i. Suponga que $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$ están en V. Entonces $y_1 = mx_1$, $y_2 = mx_2$, y

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, mx_1) + (x_2, mx_2) &= (x_1 + x_2, mx_1 + mx_2)\\ &= (x_1 + x_2, m(x_1 + x_2)) \in V\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple el axioma *i*).

ii. Suponga que $(x, y) \in V$. Entonces $y = mx$ y $-(x, y) = -(x, mx) = (-x, m(-x))$, de manera que $-(x, y)$ también pertenece a V y $(x, mx) + (-x, m(-x)) = (x - x, m(x - x)) = (0, 0)$.

Todo vector en V es un vector en $\mathbb{R}^2$, y $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial, como se muestra en el ejemplo 1. Como $(0, 0) = \mathbf{0}$ está en V (explique por qué) todas las demás propiedades se deducen del ejemplo 1. Entonces V es un espacio vectorial.

EJEMPLO 5 **El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que se encuentran sobre una recta que no pasa por el origen constituye un espacio vectorial**

Sea $V = \{(x, y): y = 2x + 1, x \in \mathbb{R}\}$. Es decir, V es el conjunto de puntos que están sobre la recta $y = 2x + 1$. V *no* es un espacio vectorial porque no se cumple la cerradura bajo la suma, como sucede en el ejemplo 3. Para ver esto, suponga que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están en V. Entonces,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Si el vector del lado derecho estuviera en V, se tendría

$$y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) + 1 = 2x_1 + 2x_2 + 1$$

Pero $y_1 = 2x_1 + 1$ y $y_2 = 2x_2 + 1$ de manera que

$$y_1 + y_2 = (2x_1 + 1) + (2x_2 + 1) = 2x_1 + 2x_2 + 2$$

Por lo tanto, se concluye que

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \notin V \text{ si } (x_1, y_1) \in V \text{ y } (x_2, y_2) \in V$$

Por ejemplo, (0,1) y (3, 7) están en V, pero (0, 1) + (3, 7) = (3, 8) no está en V porque $8 \neq 2 \cdot 3 + 1$. Una forma más sencilla de comprobar que V no es un espacio vectorial es observar que $\mathbf{0} = (0, 0)$ no se encuentra en V porque $0 \neq 2 \cdot 0 + 1$. No es difícil demostrar que el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que está sobre cualquier recta que no pasa por (0, 0) no constituye un espacio vectorial.

EJEMPLO 6 El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran en un plano que pasa por el origen constituye un espacio vectorial

Sea $V = \{(x, y, z): ax + by + cz = 0\}$. Esto es, V es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que está en el plano con vector normal (a, b, c) y que pasa por el origen. Al igual que en el ejemplo 4, los vectores se escriben como renglones en lugar de columnas.

Suponga que (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) están en V. Entonces $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in V$ porque

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = (ax_1 + by_1 + cz_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2) = 0 + 0 = 0$$

Por lo tanto, el axioma *i*) se cumple. Los otros axiomas se verifican fácilmente. De este modo, el conjunto de puntos que se encuentra en un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, constituye un espacio vectorial.

EJEMPLO 7 El espacio vectorial P_n

Sea $V = P_n$, el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n.[†] Si $p \in P_n$, entonces

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde cada a_i es real. La suma de $p(x) + q(x)$ está definida de la manera usual: si $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, entonces

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Es obvio que la suma de dos polinomios de grado menor o igual a n es otro polinomio de grado menor o igual a n, por lo que se cumple el axioma *i*). Las propiedades *ii*) y *v*) a *x*) son claras. Si se define el polinomio $\mathbf{0} = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0$, entonces $0 \in P_n$ y el axioma *iii*) se cumple. Por último, sea $-p(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$, se ve que el axioma *iv*) se cumple, con lo que P_n es un espacio vectorial real.

[†] Se dice que las funciones constantes (incluyendo la función $f(x) = 0$) son polinomios de **grado cero**.

EJEMPLO 8 **Los espacios vectoriales $C[0, 1]$ y $C[a, b]$**

† CÁLCULO Sea $V = C[0, 1]$ = el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas en el intervalo $[0, 1]$. Se define

$$(f + g)x = f(x) + g(x) \text{ y } (\alpha f)(x) = \alpha[f(x)]$$

Como la suma de funciones continuas es continua, el axioma *i*) se cumple y los otros axiomas se verifican fácilmente con $\mathbf{0}$ = la función cero y $(-f)(x) = -f(x)$. Del mismo modo, $C[a, b]$, el conjunto de funciones de valores reales definidas y continuas en $[a, b]$, constituye un espacio vectorial.

EJEMPLO 9 **El espacio vectorial M_{nm}**

Si $V = M_{mn}$ denota el conjunto de matrices de $m \times n$ con componentes reales, entonces con la suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales, se puede verificar que M_{mn} es un espacio vectorial cuyo neutro aditivo es la matriz de ceros de dimensiones $m \times n$.

EJEMPLO 10 **Un conjunto de matrices invertibles puede no formar un espacio vectorial**

Sea S_3 el conjunto de matrices invertibles de 3×3. Se define la "suma" $A \oplus B$ por $A \oplus B = AB$.‡ Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible (por el teorema 1.8.3, página 96) de manera que el axioma *i*) se cumple. El axioma *ii*) es sencillamente la ley asociativa para la multiplicación de matrices (teorema 1.6.2, página 63); los axiomas *iii*) y *iv*) se satisfacen con $\mathbf{0} = I_3$ y $-A = A^{-1}$. Sin embargo, $AB \neq BA$ en general (vea la página 61), entonces el axioma *v*) no se cumple y por lo tanto S_3 no es un espacio vectorial.

EJEMPLO 11 **Un conjunto de puntos en un semiplano puede no formar un espacio vectorial**

Sea $V = \{(x, y): y \geq 0\}$. V consiste en los puntos en $\mathbb{R}^2$ en el semiplano superior (los primeros dos cuadrantes). Si $y_1 \geq 0$ y $y_2 \geq 0$, entonces $y_1 + y_2 \geq 0$; así, si $(x_1, y_1) \in V$ y $(x_2, y_2) \in V$, entonces $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in V$. Sin embargo, V no es un espacio vectorial ya que el vector $(1, 1)$, por ejemplo, no tiene un inverso en V porque $(-1, -1) \notin V$. Más aún, el axioma *vi*) falla, ya que si $(x, y) \alpha V$, entonces $\alpha (x, y) \alpha V$ si $\alpha < 0$.

EJEMPLO 12 **El espacio $\mathbb{C}^n$**

Sea $V = \mathbb{C}^n = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n): c_i$ es un número complejo para $i = 1, 2, \ldots, n\}$ y el conjunto de escalares es el conjunto de números complejos. No es difícil verificar que $\mathbb{C}^n$, también es un espacio vectorial.

Como lo sugieren estos ejemplos, existen diferentes tipos de espacios vectoriales y muchas clases de conjuntos que *no* son espacios vectoriales. Antes de terminar esta sección, se demostrarán algunos resultados sobre los espacios vectoriales.

† CÁLCULO Este símbolo se usa en todo el libro para indicar que el problema o ejemplo utiliza conceptos de cálculo.

‡ Se usa un signo más *encirculado* para evitar confusión con el signo más normal que denota la suma de matrices.

TEOREMA 1

Sea V un espacio vectorial. Entonces

i. $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo escalar α.

ii. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in V$.

iii. Si $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\alpha = 0$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (o ambos).

iv. $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in V$.

DEMOSTRACIÓN

i. Por el axioma *iii*), $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$; y del axioma *vii*),

$$\alpha\mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0} \tag{1}$$

Sumando $-\alpha\mathbf{0}$ en los dos lados de (1) y usando la ley asociativa (axioma *ii*), se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{0} + (-\alpha\mathbf{0}) &= [\alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0}] + (-\alpha\mathbf{0}) \\ \mathbf{0} &= \alpha\mathbf{0} + [\alpha\mathbf{0} + (-\alpha\mathbf{0})] \\ \mathbf{0} &= \alpha\mathbf{0} + \mathbf{0} \\ \mathbf{0} &= \alpha\mathbf{0} \end{aligned}$$

ii. Se usa, esencialmente, la misma prueba que en la parte *i*). Se comienza con $0 + 0 = 0$ y se usa el axioma *vii*) para ver que $0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x}$ o $0\mathbf{x} + (-0\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} + [0\mathbf{x} + (-0\mathbf{x})]$ o $\mathbf{0} = 0\mathbf{x} + \mathbf{0} = 0\mathbf{x}$.

iii. Sea $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si $\alpha \neq 0$, se multiplican ambos lados de la ecuación por $1/\alpha$ para obtener $(1/\alpha)(\alpha\mathbf{x}) = (1/\alpha)\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$ [por la parte *i*)].Pero $(1/\alpha)(\alpha\mathbf{x}) = 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (por el axioma *ix*), de manera que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

iv. Primero se usa el hecho de que $1 + (-1) = 0$. Después, usando la parte *ii*), se obtiene

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{x} = [1 + (-1)]\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} \tag{2}$$

Se suma $-\mathbf{x}$ en ambos lados de (2) para obtener

$$\begin{aligned} -\mathbf{x} = \mathbf{0} + (-\mathbf{x}) &= \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) + (-1)\mathbf{x} \\ &= \mathbf{0} + (-1)\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} \end{aligned}$$

De este modo, $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$. observe que el orden de la suma en la ecuación anterior se pudo invertir utilizando la ley conmutativa (axioma *v*).

Observación. La parte *iii*) del teorema 1 no es tan obvia como parece. Existen situaciones conocidas en las que $xy = 0$ no implica que x o y sean cero. Como ejemplo, se tiene la multiplicación de matrices de 2×2. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en donde ni A ni B son cero y, como se puede verificar, $AB = 0$, el resultado del producto de estas matrices es la matriz cero.

Problemas 4.2

AUTOEVALUACIÓN

De las siguientes afirmaciones, indique si son falsas o verdaderas:

I. El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ con $y = -3x$ es un espacio vectorial real.

II. El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ con $y = -3x + 1$ es un espacio vectorial real.

III. El conjunto de matrices invertibles de 5×5 forma un espacio vectorial (con "+" definido como en la suma matrices ordinaria).

IV. El conjunto de múltiplos constantes de la matriz idéntica de 2×2 es un espacio vectorial (con "+" definido como en III).

V. El conjunto de matrices idénticas de $n \times n$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$ es un espacio vectorial (con "+" definido como en III).

VI. El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ con $2x - y - 12z = 0$ es un espacio vectorial real.

VII. El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ con $2x - y - 12z = 1$ es un espacio vectorial real.

VIII. El conjunto de polinomios de grado 3 es un espacio vectorial real (con "+" definido como la suma de polinomios ordinaria).

De los problemas 1 al 22 determine si el conjunto dado es un espacio vectorial. De no ser así proporcione una lista de los axiomas que no se cumplen.

1. El conjunto de matrices diagonales de $n \times n$ bajo la suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales.

2. El conjunto de matrices diagonales de $n \times n$ bajo la multiplicación (es decir, $A \oplus B = AB$).

3. $\{(x, y): y \leq 0; x, y \text{ reales}\}$ con la suma de vectores y multiplicación por un escalar usuales.

4. Los vectores en el plano que está en el primer cuadrante.

5. El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ de la forma (x, x, x).

6. El conjunto de polinomios de grado 4 bajo las operaciones del ejemplo 7.

7. El conjunto de polinomios de grado 5 bajo las operaciones del ejemplo 7.

8. El conjunto de matrices simétricas de $n \times n$ (vea la sección 1.9) bajo la suma y multiplicación por un escalar usuales.

9. El conjunto de matrices de 2×2 que tienen la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ bajo la suma y multiplicación por un escalar usuales.

10. El conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ con las operaciones de matrices de suma y multiplicación por un escalar.

11. El conjunto que consiste en un solo vector $(0, 0)$ bajo las operaciones usuales en símbolo $\mathbb{R}^2$.

12. El conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con término constante cero.

13. El conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con término constante a_0 positivo.

14. El conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con término constante a_0 negativo.

15. El conjunto de funciones continuas de valores reales definidas en [0, 1] con $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$ bajo las operaciones del ejemplo 8.

16. El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran sobre una recta que pasa por el origen.

17. El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran sobre la recta $x = t + 1$, $y = 2t$, $z = t - 1$.

18. $\mathbb{R}^2$ con la suma definida por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$ y la multiplicación por un escalar ordinaria.

† CÁLCULO **19.** El conjunto del problema 18 con la multiplicación por un escalar definida por $\alpha(x, y) = (\alpha + \alpha x - 1, \alpha + \alpha y - 1)$.

20. El conjunto que consiste en un objeto con la suma definida por *objeto* + *objeto* = *objeto* y la multiplicación por un escalar definida por α (*objeto*) = *objeto*.

†21. El conjunto de funciones diferenciables definidas en [0, 1] con las operaciones del ejemplo 8.

***22.** El conjunto de números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, donde a y b son números racionales, bajo la suma de números reales usual y la multiplicación por un escalar definida sólo para escalares racionales.

23. Demuestre que en un espacio vectorial el elemento idéntico aditivo es único.

24. Demuestre que en un espacio vectorial todo vector tiene un inverso aditivo único.

25. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores en un espacio vectorial V, demuestre que existe un vector único $\mathbf{z} \in V$ tal que $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y}$.

26. Demuestre que el conjunto de números reales positivos forma un espacio vectorial bajo las operaciones $x + y = xy$ y $\alpha x = x^\alpha$.

† CÁLCULO **27.** Considere la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas. Demuestre que el conjunto de soluciones de la ecuación es un espacio vectorial bajo las reglas usuales para la suma de funciones y multiplicación por un escalar.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. V II. F III. F IV. V V. F VI. V VII. F VIII. F

MATLAB 4.2

M **1.** El archivo *vctrsp.m* es una demostración sobre la geometría de algunas propiedades de los espacios vectoriales de vectores en $\mathbb{R}^2$.

A continuación se presenta el código de la función *vctrsp.m*

```
function vctrsp(x,y,z,a)
% VCTRSP funcion que ilustra las propiedades geometricas
%        de conmutatividad y asociatividad de la suma de
%        vectores.
%        Tambien la propiedad de distributiva de la
%        multiplicacion
%        por un escalar de la suma de vectores
```

† CÁLCULO Este símbolo se usa para indicar que el problema o ejemplo usa conceptos de cálculo.

```
%
%        x: vector 2x1
%        y: vector 2x1
%        z: vector 2x1
%        a: escalar

% Inicializacion de datos usados en la funcion
origen=[0;0];
Ox=[origen,x];
Oy=[origen,y];
Oz=[origen,z];
xy=[x,y+x];
yx=[y,x+y];
yz=[y,y+z];
Oyz=[origen,y+z];
Oxy=[origen,x+y];
xyMz=[x+y,x+y+z];
yzMx=[y+z,x+y+z];
Oxyz=[origen,x+y+z];

% Borrar ventana de comandos y cerrar todas la ventanas
% de figuras abiertas
clc;
disp('Funcion VCTRSP')
disp(' ')
close all;
% Conmutatividad
figure(1)
hold off
subplot(121)
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,min(aa([1,3]))-
1,max(aa([2,4]))+1])
title('Vectores originales')
subplot(122)
hold off
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
hold on
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'r:',xy(1,:),xy(2,:),'r:',Oxy(1,:),Oxy
(2,:),'-m*');
set(h,'LineWidth',2)
```

```
h=plot(Oy(1,:),Oy(2,:),'g:',yx(1,:),yx(2,:),'g:',Oxy(1,:),
Oxy(2,:),'-m*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
text(xy(1,2)/2,xy(2,2)/2,'\bf x+y=y+x')
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,min(aa([1,3]))-1,
max(aa([2,4]))+1])
title('Suma de vectores, conmutatividad')
hold off
disp('Oprima alguna tecla para continuar figura 2');
pause;
% Asociatividad
figure(2)
hold off
subplot(131)
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),'b--*',Oz(1,:),
Oz(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
text(z(1)/2,z(2)/2,'\bf z');
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,min(aa([1,3]))-1,
max(aa([2,4]))+1])
title('Vectores originales')
subplot(132)
hold off
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),
'b--*',Oz(1,:),Oz(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
hold on
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'r:',xy(1,:),xy(2,:),'r:',Oxy(1,:),
Oxy(2,:),'-m*');
set(h,'LineWidth',2)
h=plot(Oxy(1,:),Oxy(2,:),':g*',xyMz(1,:),xyMz(2,:),':m*');
set(h,'LineWidth',2)
h=plot(Oxyz(1,:),Oxyz(2,:),'--c*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
text(z(1)/2,z(2)/2,'\bf z');
text(xy(1,2)/2,xy(2,2)/2,'\bf x+y')
```

```
text(xyMz(1,2)/2,xyMz(2,2)/2,'\bf (x+y)+z')
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,min(aa([1,3]))-1,
max(aa([2,4]))+1])
title('Suma de vectores, (x+y)+z')
hold off
subplot(133)
hold off
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),'b--*',
Oz(1,:),Oz(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
hold on
h=plot(Oy(1,:),Oy(2,:),'r:',yz(1,:),yz(2,:),'r:',Oyz(1,:),
Oyz(2,:),'-m*');
set(h,'LineWidth',2)
h=plot(Oyz(1,:),Oyz(2,:),':g*',yzMx(1,:),yzMx(2,:),':m*');
set(h,'LineWidth',2)
h=plot(Oxyz(1,:),Oxyz(2,:),'--c*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
text(z(1)/2,z(2)/2,'\bf z');
text(yz(1,2)/2,yz(2,2)/2,'\bf y+z')
text(yzMx(1,2)/2,yzMx(2,2)/2,'\bf x+(y+z)')
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,min(aa([1,3]))-1,
max(aa([2,4]))+1])
title('Suma de vectores, x+(y+z)')
hold off
disp('Oprima alguna tecla para continuar figura 3');
pause;
% Distributibidad de multiplicacion por escalar sobre suma de
  vectores
figure(3)
hold off
subplot(131)
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
```

```
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,min(aa([1,3]))-
1,max(aa([2,4]))+1])
title('Vectores originales')
subplot(132)
hold off
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
hold on
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'r:',xy(1,:),xy(2,:),'r:',Oxy(1,:)*a,Oxy
(2,:)*a,'-m*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
text(xy(1,2)/2*a,xy(2,2)/2*a,'\bf a(x+y)')
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,min(aa([1,3]))-
1,max(aa([2,4]))+1])
title('Suma de vectores, a(x+y)')
hold off
subplot(133)
hold off
h=plot(Ox(1,:)*a,Ox(2,:)*a,'b--*',Oy(1,:)*a,Oy(2,:)*a,'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
hold on
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:)*a,'r:',xy(1,:)*a,xy(2,:)*a,'r:',Oxy(1,:)
*a,Oxy(2,:)*a,'-m*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2*a,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2*a,'\bf y');
text(xy(1,2)/2*a,xy(2,2)/2*a,'\bf a(x+y)')
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,min(aa([1,3]))-
1,max(aa([2,4]))+1])
title('Suma de vectores, ax+ay')
hold off
```

Después de escribir en un archivo con nombre **vctrsp.m**, dé **doc vctrsp** para ver una descripción del uso de la función.

Introduzca los vectores **x**, **y** y **z**, y el escalar **a** dados enseguida y después dé el comando **vctrsp(x,y,z,a)**. La demostración ilustrará la geometría de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de vectores y de la propiedad distributiva de la multiplicación por un escalar sobre la suma de vectores. Puede resultar útil para la mejor visualización de las figuras maximizar la ventana de interés.

a) x = [3;0], **y** = [2;2], **z** = [−2;4]. Use $a = 2$, a = ½ y a = −2.

b) $\mathbf{x} = [-5;5]$, $\mathbf{y} = [0;-4]$, $\mathbf{z} = [4;4]$. Use $a = 2$, $a = {}^1/_3$ y $a = {}^{-3}/_2$.

c) Su propia elección de **x**, **y**, **z** y/o a.

2. *a*) Elija algunos valores para n y m y genere tres matrices aleatorias de $n \times m$, llamadas X, Y y Z. Genere dos escalares aleatorios a y b (por ejemplo, **a = 2*rand(1)-1**). Verifique todas las propiedades del espacio vectorial para estas matrices y escalares. Para demostrar $A = B$, demuestre que $A - B = 0$; para la propiedad *iii*) decida cómo generar el idéntico aditivo para matrices de $n \times m$. Repita para otros tres juegos de X, Y, Z, a y b (para las mismas n y m).

b) (*Lápiz* y *papel*) Pruebe las propiedades del espacio vectorial para M_{nm}, las matrices de $n \times m$.

c) (*Lápiz* y *papel*) ¿Cuál es la diferencia entre los incisos *a*) y *b*)?

4.3 Subespacios

Del ejemplo 4.2.1 de la página 282, se sabe que $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \text{ y } y \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial. En el ejemplo 4.2.4 de la página 283, se vio que $V = \{(x, y): y = mx\}$ también es un espacio vectorial. Adicionalmente, es evidente que $V \subset \mathbb{R}^2$. Esto es, $\mathbb{R}^2$ tiene un subconjunto que también es un espacio vectorial. De hecho, todos los espacios vectoriales tienen subconjuntos que también son espacios vectoriales. En esta sección se examinarán estos importantes subconjuntos.

Definición 1 **Subespacio**

Sea H un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V y suponga que H es en sí un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en V. Entonces se dice que H es un **subespacio** de V.

Se puede decir que el subespacio H **hereda** las operaciones del espacio vectorial "padre" V.

Existen múltiples ejemplos de subespacios en este capítulo; sin embargo, en primer lugar, se demostrará un resultado que hace relativamente sencillo determinar si un subconjunto de V es en realidad un subespacio de V.

Teorema 1 **Subespacio**

Un subconjunto no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si se cumplen las dos reglas de cerradura:

Reglas de cerradura para ver si un subconjunto no vacío es un subespacio

i. Si $\mathbf{x} \in H$ y $\mathbf{y} \in H$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$.

ii. Si $\mathbf{x} \in H$, entonces $\alpha\mathbf{x} \in H$ para todo escalar α.

Demostración

Es obvio que si H es un espacio vectorial, entonces las dos reglas de cerradura deben cumplirse. De lo contrario, para demostrar que H es un espacio vectorial, debe demostrarse que los axiomas *i*) a *x*) en la página 282 se cumplen bajo las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar definidas en V. Las dos operaciones de cerradura [axiomas *i*) y *iv*)] se cumplen por hipótesis. Como los vectores en H son también vectores en V, las identidades asociativa, conmutativa, distributiva y multiplicativa [axiomas *ii*), *v*), *vii*), *viii*), *ix*) y *x*)] se cumplen. Sea $\mathbf{x} \in H$. Entonces $0\mathbf{x} \in H$ por hipótesis *ii*). Pero por el teorema 4.2.1 de la página 286, (parte *ii*), $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De este modo, $\mathbf{0} \in H$ y se cumple el axioma *iii*). Por último, por la parte *ii*), $(-1)\mathbf{x} \in H$ para todo $\mathbf{x} \in H$. Por el teorema 4.2.1 (parte *iv*), $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} \in H$ de manera que se cumple el axioma *iv*) y la prueba queda completa.

Este teorema demuestra que para probar si H es o no es un subespacio de V, es suficiente verificar que

$$\boxed{\mathbf{x} + \mathbf{y} \text{ y } \alpha\mathbf{x} \text{ están en } H \text{ cuando } \mathbf{x} \text{ y } \mathbf{y} \text{ están en } H \text{ y } \alpha \text{ es un escalar.}}$$

La prueba anterior contiene un hecho que por su importancia merece ser mencionado de forma explícita:

$$\boxed{\text{Todo subespacio de un espacio vectorial } V \text{ contiene al } \mathbf{0}.} \qquad (1)$$

Este hecho con frecuencia facilitará la averiguación de si un subconjunto de V en particular *no* es un subespacio de V. Es decir, si un subconjunto no contiene al $\mathbf{0}$, entonces no es un subespacio. Note que el vector cero en H, un subespacio de V, es el mismo que el vector cero en V.

A continuación se mostrarán algunos ejemplos de subespacios.

EJEMPLO 1 **El subespacio trivial**

Para cualquier espacio vectorial V, el subconjunto $\{\mathbf{0}\}$ que consiste en el vector cero es únicamente un subespacio ya que $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo número real α [parte *i*) del teorema 4.2.1]. Esto se denomina el **subespacio trivial**.

EJEMPLO 2 **Un espacio vectorial es un subespacio en sí mismo**

Para cada espacio vectorial V, V es un subespacio de sí mismo.

SUBESPACIOS PROPIOS

Los primeros dos ejemplos muestran que todo espacio vectorial V contiene dos subespacios, $\{\mathbf{0}\}$ y V (que coinciden si $V = \{\mathbf{0}\}$). Es más interesante encontrar otros subespacios. Los subespacios distintos a $\{\mathbf{0}\}$ y $\mathbf{V}$ se denominan **subespacios propios**.

EJEMPLO 3 **Un subespacio propio de $\mathbb{R}^2$**

Sea $H = \{(x, y): y = mx\}$ (vea el ejemplo 4.2.4 de la página 283). Entonces, como ya se dijo, H es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. En la sección 4.6 (problema 15, página 339) se verá que si H es cualquier subespacio propio de $\mathbb{R}^2$, entonces H consiste en el conjunto de puntos que se encuentran sobre una recta que pasa por el origen; es decir, un conjunto de puntos que se encuentra sobre una recta que pasa por el origen es el único tipo de subespacio propio de $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 4 **Un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$**

Sea $H = \{(x, y, z): x = at, y = bt \text{ y } z = ct; a, b, c, t \text{ reales}\}$. Entonces H consiste en los vectores en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran sobre una recta que pasa por el origen. Para ver que H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, sea $\mathbf{x} = (at_1, bt_1, ct_1) \in H$ y $\mathbf{y} = (at_2, bt_2, ct_2) \in H$. Entonces

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (a(t_1 + t_2), b(t_1 + t_2), c(t_1 + t_2)) \in H$$

y

$$\alpha\mathbf{x} = (a(\alpha t_1), b(\alpha t_2), c(\alpha t_3)) \in H.$$

Así, H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 5 **Otro subespacio propio de $\mathbb{R}^3$**

Sea $\pi = \{(x, y, z): ax + by + cz = 0; a, b, c \text{ reales}\}$. Entonces, como se vio en el ejemplo 4.2.6 de la página 284, π es un espacio vectorial; así, π es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

En la sección 4.6 se demostrará que los conjuntos de vectores que se encuentran sobre rectas y planos que pasan por el origen son los únicos subespacios propios de $\mathbb{R}^3$.

Antes de analizar más ejemplos, es importante observar que *no todo espacio vectorial tiene subespacios propios.*

EJEMPLO 6 **$\mathbb{R}$ no tiene subespacios propios**

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}$.[†] Si $H \neq \{\mathbf{0}\}$, entonces H contiene un número real α diferente de cero. Por el axioma *vi*), $1 = (1/\alpha)\,\alpha \in H$ y $\beta 1 = \beta \in H$ para todo número real β. Así, si H no es el subespacio trivial, entonces $H = \mathbb{R}$. Es decir, $\mathbb{R}$ **no** tiene subespacios propios.

EJEMPLO 7 **Algunos subespacios propios de P_n**

Si P_n denota el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a n (ejemplo 4.2.7, página 284), y si $0 \leq m < n$, entonces P_m es un subespacio propio de P_n como se verifica fácilmente.

EJEMPLO 8 **Un subespacio propio de M_{mn}**

Sea M_{mn} (ejemplo 4.2.10, página 285) el espacio vectorial de matrices de $m \times n$ con componentes reales y sea $H = \{A \in M_{mn}: a_{11} = 0\}$. Por la definición de suma de matrices y multiplicación por un escalar, es obvio que los dos axiomas de cerradura se cumplen de manera que H es un subespacio.

EJEMPLO 9 **Un subconjunto que no es un subespacio propio de M_{mn}**

Sea $V = M_{nn}$ (las matrices de $n \times n$) y sea $H = \{A \in M_{nn}: A \text{ es invertible}\}$. Entonces H no es un subespacio ya que la matriz cero de $n \times n$ no está en H.

EJEMPLO 10 **Un subespacio propio de $C[0, 1]$**

CÁLCULO

$P_n[0, 1]$[‡] $\subset C[0, 1]$ (vea el ejemplo 4.2.8 de la página 285) porque todo polinomio es continuo y P_n es un espacio vectorial para todo entero n de manera que cada $P_n[0, 1]$ es un subespacio de $C[0, 1]$.

[†] Observe que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real; es decir, $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial en donde los escalares se toman como los números reales. Este es el ejemplo 4.2.1, página 282, con $n = 1$.

[‡] $P_n[0, 1]$ denota el conjunto de polinomios de grado menor o igual a n, definidos en el intervalo $[0, 1]$.

EJEMPLO 11 **$C^1[0, 1]$ es un subespacio propio de $C[0, 1]$**

CÁLCULO

Sea $C^1[0, 1]$ el conjunto de funciones con primeras derivadas continuas definidas en $[0, 1]$. Como toda función diferenciable es continua, se tiene $C^1[0, 1] \subset C[0, 1]$. Puesto que la suma de dos funciones diferenciables es diferenciable y un múltiplo constante de una función diferenciable es diferenciable, se ve que $C^1[0, 1]$ es un subespacio de $C[0, 1]$. Se trata de un subespacio propio porque no toda función continua es diferenciable.

EJEMPLO 12 **Otro subespacio propio de $C[0, 1]$**

CÁLCULO

Si $f \in C[0, 1]$, entonces $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe. Sea $H = \{f \in C[0, 1]: \int_0^1 f(x)\,dx = 0\}$. Si $f \in H$ y $g \in H$, entonces $\int_0^1 [f(x) + g(x)]\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx = 0 + 0 = 0$ y $\int_0^1 \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Así $f + g$ y αf están en H para todo número real α. Esto muestra que H es un subespacio propio de $C[0, 1]$.

Como lo ilustran los últimos tres ejemplos, un espacio vectorial puede tener un número grande y variado de subespacios propios. Antes de terminar esta sección, se demostrará un hecho interesante sobre subespacios.

TEOREMA 2

Sea H_1 y H_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. Entonces $H_1 \cap H_2$ es un subespacio de V.

DEMOSTRACIÓN

Observe que $H_1 \cap H_2$ es no vacío porque contiene al $\mathbf{0}$. Sea $\mathbf{x}_1$ $H_1 \cap H_2$ y $\mathbf{x}_2 \in H_1 \cap H_2$. Entonces como H_1 y H_2 son subespacios, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H_1$, y $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H_2$. Esto significa que $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H_1 \cap H_2$. De manera similar $\alpha\mathbf{x}_1 \in H_1 \cap H_2$. Por lo tanto, se cumplen los dos axiomas de cerradura y $H_1 \cap H_2$ es un subespacio.

EJEMPLO 13 **La intersección de dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ es un subespacio**

En $\mathbb{R}^3$ sea $H_1 = \{(x, y, z): 2x - y - z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): x + 2y + 3z = 0\}$. Entonces H_1 y H_2 consisten en vectores que se encuentran sobre planos que pasan por el origen y son, según el ejemplo 5, subespacios de $\mathbb{R}^3$. $H_1 \cap H_2$ es la intersección de los dos planos que se calculan como en el ejemplo 9 de la sección 3.5:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

reduciendo renglones, se tiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & 0 \end{array}\right)$$

De este modo, todas las soluciones al sistema homogéneo están dadas por $\left(-\frac{1}{5}z, -\frac{7}{5}z, z\right)$. Haciendo $z = t$, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta L en $\mathbb{R}^3$: $x = -\frac{1}{5}t$, $y = -\frac{7}{5}t$, $z = t$. Como se observó en el ejemplo 4, el conjunto de vectores sobre L constituye un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Observación. No es necesariamente cierto que si H_1 y H_2 son subespacios de V, $H_1 \cup H_2$ es un subespacio de V (puede o no serlo). Por ejemplo, $H_1 = \{(x, y): y = 2x\}$ y $\{(x, y): y = 3x\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$, pero $H_1 \cup H_2$ *no* es un subespacio. Para ver esto, observe que $(1, 2) \in H_1$ y $(1, 3) \in H_2$ de manera que tanto $(1, 2)$ como $(1, 3)$ están en $H_1 \cup H_2$. Pero $(1, 2) + (1, 3) = (2, 5) \notin H_1 \cup H_2$ porque $(2, 5) \notin H_1$ y $(2, 5) \in H_2$. Así, $H_1 \cup H_2$ no es cerrado bajo la suma y por lo tanto no es un subespacio.

Problemas 4.3

Autoevaluación

De las siguientes aseveraciones, evalúe si son falsas o verdaderas.

I. Conjunto de vectores de la forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

II. El conjunto de vectores de la forma $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

III. El conjunto de matrices diagonales de 3×3 es un subespacio de M_{33}.

IV. El conjunto de matrices triangulares superiores de 3×3 es un subespacio de M_{33}.

V. El conjunto de matrices triangulares de 3×3 es un subespacio de M_{33}.

VI. Sea H un subespacio de M_{22}. Entonces $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ debe estar en H.

VII. Sea $H = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + 3y - z = 0\right\}$ y $K = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y + 5z = 0\right\}$, entonces $H \cup K$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

VIII. Si H y K son los subconjuntos del problema VII, entonces $H \cap K$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

IX. El conjunto de polinomios de grado 2 es un subespacio de P_3.

De los problemas 1 al 26 determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V.

1. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); y \geq 0\}$

2. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); x = y\}$

3. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); y = 2y\}$

4. $V = \mathbb{R}^3$; $H =$ el plano xy

5. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$

6. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y) : x^2 + y^3 < 1\}$

7. $V = M_{nn}$; $H = \{D \in M_{nn}$; D es diagonal$\}$

8. $V = M_{nn}$; $H = \{T \in M_{nn}$; T es triangular superior$\}$

9. $V = M_{nn}$; $H = \{T : T$ es triangular inferior$\}$

10. $V = M_{nn}$; $H = \{S \in M_{nn}$: S es simétrica$\}$

11. $V = M_{nn}$; $H = \{A \in M_{nn}$: $a_{ij} = 0\}$

12. $V = M_{22}$; $H = \left\{A \in M_{22} : A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}\right\}$

13. $V = M_{22}$; $H = \left\{ A \in M_{22}: A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

14. $V = M_{22}$; $H = \left\{ A \in M_{22}: A = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

15. $V = M_{22}$; $H = \left\{ A \in M_{22}: A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\}$

16. $V = P_4$; $H = \{p \in P_4: \text{grado } p = 4\}$

17. $V = P_n$; $H = \{p \in P_n: p(0) = 0 \text{ y } p'(0) = 0\}$

18. $V = P_4$; $H = \{p \in P_4: p(0) = 0\}$

19. $V = P_n$; $H = \{p \in P_n: p(0) = 0\}$

20. $V = P_n$; $H = \{p \in P_n: p(0) = 1\}$

21. $V = C[0, 1]$; $H = \{f \in C[0, 1]: f(0) = f(1) = 0\}$

22. $V = C[0, 1]$; $H = \{f \in C[0, 1]: f(0) = 2\}$

CÁLCULO 23. $V = C^1[0, 1]$; $H = \{f \in C^1[0, 1]: f'(0) = 0\}$

CÁLCULO 24. $V = C[a, b]$; donde a y b son números reales y $a < b$; $H = \{f \in C[a, b]: \int_a^b f(x)\,dx = 0\}$

CÁLCULO 25. $V = C[a, b]$; $H = \{f \in C[a, b]: \int_a^b f(x)\,dx = 1\}$

26. $V = C[a, b]$; $H = \left\{ f \in C[a, b]: \int_a^b f^2(x)dx \right\}$

27. Sea $V = M_{22}$; sean $H_1 = \{A \in M_{22}: a_{11} = 0\}$ y $H_2 = \left\{ A \in M_{22}: A = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} \right\}$.

a) Demuestre que H_1 y H_2 son subespacios.

b) Describa el subconjunto de $H = H_1 \cap H_2$ y muestre que es un subespacio.

CÁLCULO 28. Si $V = C[0, 1]$, sea H_1 el subespacio del ejemplo 10 y H_2 el subespacio del ejemplo 11. Describa el conjunto $H_1 \cap H_2$ y demuestre que es un subespacio.

29. Sea A una matriz de $n \times m$ y sea $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m: A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^m$. H se llama **espacio nulo** de la matriz A.

30. En el problema 29 sea $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m: A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$. Demuestre que H no es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

31. Sea $H = \{(x, y, z, w): ax + by + cz + dw = 0\}$, donde a, b, c y d son números reales, no todos cero. Demuestre que H es un subespacio propio de $\mathbb{R}^4$. H se llama un **hiperplano** en $\mathbb{R}^4$ que pasa por el origen.

32. Sea $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales no todos cero. Demuestre que H es un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$. Al igual que en el problema 31, H se llama un **hiperplano** en $\mathbb{R}^n$.

33. Sean H_1 y H_2 subespacios de un espacio vectorial V. Sea $H_1 + H_2 = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \text{ con } \mathbf{v}_1 \in H_1 \text{ y } \mathbf{v}_2 \in H_2\}$. Demuestre que H_1 y H_2 es un subespacio de V.

34. Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que $H = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2; a, b \text{ reales}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

*35. En el problema 34 demuestre que si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son no colineales, entonces $H = \mathbb{R}^2$.

*36. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores arbitrarios en un espacio vectorial V. Sea $H = \{\mathbf{v} \in V: \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n, \text{ donde } a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ son escalares}\}$. Demuestre que H es un subespacio de V. H se llama el subespacio **generado** por los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Respuestas a la autoevaluación

I. F	II. V	III. V	IV. V	V. F	VI. V
VII. F	VIII. V	IX. F			

MATLAB 4.3

1. *a*) Genere una matriz aleatoria A de 4×4 y sea **S = triu(A) + triu(A)′**. Verifique que S es simétrica.

   b) Usando el inciso *a*), genere dos matrices aleatorias de 4×4 reales simétricas, S y T, y un escalar aleatorio, a. Verifique que aS y $S + T$ también son simétricas. Repita para otros cuatro juegos de S, T y a.

   c) ¿Por qué se puede decir que se ha reunido evidencia de que el subconjunto de matrices simétricas de 4×4 es un subespacio de M_{44}?

   d) (*Lápiz y papel*) Pruebe que el subconjunto de matrices simétricas de $n \times n$ es un subespacio de M_{nn}.

4.4 Combinación lineal y espacio generado

Se ha visto que todo vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$ en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir en la forma

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

En cuyo caso se dice que $\mathbf{v}$ es una *combinación lineal* de los tres vectores **i**, **j** y **k**. De manera más general, se tiene la siguiente definición.

Definición 1 **Combinación lineal**

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma

$$\boxed{a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n} \qquad (1)$$

donde, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares se denomina una **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Ejemplo 1 **Una combinación lineal en $\mathbb{R}^3$**

En $\mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ya que $\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2 **Una combinación lineal en M_{23}**

En M_{23}, $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ lo que muestra que $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 3 **Combinaciones lineales en P_n**

En P_n todo polinomio se puede escribir como una combinación lineal de los "monomios" $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

DEFINICIÓN 2 **Conjunto generador**

Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ de un espacio vectorial V **generan** a V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de los mismos. Es decir, para todo $\mathbf{v} \in V$, existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\boxed{\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n} \qquad \textbf{(2)}$$

EJEMPLO 4 **Conjunto de vectores que generan $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$**

En la sección 3.1 se vio que los vectores $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan $\mathbb{R}^2$. En la sección 3.3 se vio que $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan $\mathbb{R}^3$.

Ahora se verá brevemente la generación de algunos otros espacios vectoriales.

EJEMPLO 5 **$n + 1$ vectores que generan a P_n**

Del ejemplo 3 se deduce que los monomios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ generan a P_n.

EJEMPLO 6 **Cuatro vectores que generan a M_{22}**

Como $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, vemos que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generan a M_{22}.

EJEMPLO 7 **Ningún conjunto finito de polinomios generan a P**

Sea P el espacio vectorial de polinomios. Entonces ningún conjunto *finito* de polinomios genera a P. Para ver esto, suponga que $p_1, p_2, \ldots, p_m$ son polinomios. Sea p_k el polinomio de mayor grado en este conjunto y sea N = grado(p_k). Entonces el polinomio $p(x) = x^{N+1}$ no se puede escribir como una combinación lineal de $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Por ejemplo si $N = 3$, entonces $x^4 \neq c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ para cualesquiera escalares c_0, c_1, c_2 y c_3.

Ahora se analizará otra forma de encontrar subespacios de un espacio vectorial V.

DEFINICIÓN 3 **Espacio generado por un conjunto de vectores**

Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, k vectores de un espacio vectorial V. El **espacio generado** por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es el conjunto de combinaciones lineales $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Es decir

$$\boxed{\text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k\}} \tag{3}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son escalares arbitrarios.

TEOREMA 1 Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un subespacio de V.

DEMOSTRACIÓN La prueba es sencilla y se deja como ejercicio (vea el problema 16).

EJEMPLO 8 El espacio generado por dos vectores en $\mathbb{R}^3$

Sea $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$ y $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 6)$. Entonces $H = \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a_1(2, -1, 4) + a_2(4, 1, 6)\}$.

¿Cuál es la apariencia de H? Si $\mathbf{v} = (x, y, z) \in H$, entonces se tiene $x = 2a_1 + 4a_2$, $y = -a_1 + a_2$ y $z = 4a_1 + 6a_2$. Si se piensa que (x, y, z) está fijo, entonces estas ecuaciones se pueden ver como un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas a_1, a_2. Este sistema se resuelve en la forma usual:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 6 & x+2y \\ 0 & 10 & z+4y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{6}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 1 & (x+2y)/6 \\ 0 & 10 & z+4y \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 10R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x/6 - 2y/3 \\ 0 & 1 & x/6 + y/3 \\ 0 & 0 & -5x/3 + 2y/3 + z \end{array}\right)$$

Desde el capítulo 1 se observa que el sistema tiene una solución únicamente si $-5x/3 + 2y/3 + z = 0$; o multiplicando por -3, si

$$5x - 2y - 3z = 0 \tag{4}$$

La ecuación (4) es la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

Este último ejemplo se puede generalizar para probar el siguiente hecho interesante:

El espacio generado por dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$ que no son paralelos es un plano que pasa por el origen.

En los problemas 22 y 23 se encuentra la sugerencia de una demostración.

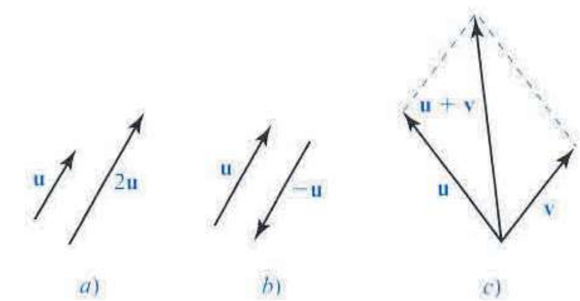


Figura 4.1
$\mathbf{u} + \mathbf{v}$ se obtiene de la regla del paralelogramo.

Se puede dar una interpretación geométrica de este resultado. Vea los vectores de la figura 4.1. Se conoce (de la sección 3.1) la interpretación geométrica de los vectores $2\mathbf{u}$, $-\mathbf{u}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, por ejemplo. Haciendo uso de éstos, se observa que cualquier otro vector en el plano de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se puede obtener como una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. La figura 4.2 muestra cuatro situaciones diferentes en las que un tercer vector $\mathbf{w}$ en el plano de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se puede escribir como $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ para valores adecuados de α y β.

Observación. En las definiciones 2 y 3 se uilizaron dos términos diferentes: "genera" y "espacio generado". Se hace hincapié en que un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *genera* a V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$; pero

El *espacio generado* por los n vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ es el conjunto de combinaciones lineales de estos vectores.

Estos dos conceptos son diferentes —aun cuando los términos se parezcan—.

Se cierra esta sección con la mención de un resultado útil. Su demostración no es difícil y se deja como ejercicio (vea el problema 24).

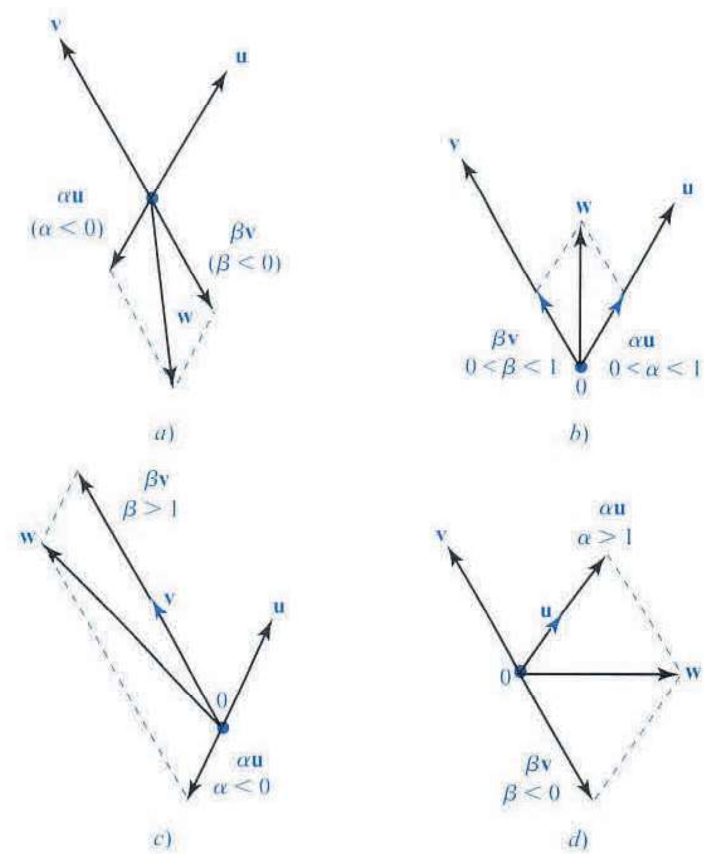


Figura 4.2
En cada caso $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ para valores adecuados de α y β.

Teorema 2 Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$, $n+1$ vectores que están en un espacio vectorial V. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ genera a V, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ también genera a V. Es decir, si se agregan uno o más vectores a un conjunto generador se obtiene otro conjunto generador.

Problemas 4.4

Autoevaluación

I. ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores no pueden generar a $\mathbb{R}^2$?

a) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

II. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de polinomios generan a P_2?

a) $1, x^2$ *b)* $3, 2x, -x^2$ *c)* $1+x, 2+2x, x^2$ *d)* $1, 1+x, 1+x^2$

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos

III. $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ está en el espacio generado por $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}$.

IV. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ está en el espacio generado por $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$.

V. $\left\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{10\,000}\right\}$ genera a P.

VI. $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ genera a M_{22}.

VII. gen $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\0\\8\\2\end{pmatrix}\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

VIII. gen $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\0\\8\\2\end{pmatrix}\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

IX. Si $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$ genera a $\mathbb{R}^2$, entonces $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\right\}$ también genera $\mathbb{R}^2$.

De los problemas 1 al 16 determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.

1. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

2. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

3. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

4. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

5. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$

6. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\5\end{pmatrix}$

7. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

8. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\3\\5\end{pmatrix}$

9. En $\mathbb{R}^3$: $(1, -1, 2), (1, 1, 2), (0, 0, 1)$

10. En $\mathbb{R}^3$: $(1, -1, 2), (-1, 1, 2), (0, 0, 1)$

11. En P_2: $1 - x, 3 - x^2$

12. En P_2: $1 - x, 3 - x^2, x$

13. En P_2: $x^2 + 1; x^2 - 1; x + 6$

14. En M_{22}: $\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$

15. En M_{22}: $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 & -1\\3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2 & 5\\6 & 0\end{pmatrix}$

16. En M_{23}: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

17. Demuestre que dos polinomios de grado menor o igual a dos, no pueden generar P_2.

*18. Si $p_1, p_2, \ldots, p_m$ genera P_m, demuestre que $m \geq n + 1$.

19. Demuestre que si **u** y **v** están en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\alpha\mathbf{u}$ están en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. [*Sugerencia:* Utilizando la definición de espacio generado escriba $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\alpha\mathbf{u}$ como combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.]

20. Demuestre que el conjunto infinito $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ genera P, el espacio vectorial de polinomios.

21. Sea H un subespacio de V que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Demuestre que gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq H$. Es decir, gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es el subespacio *más pequeño* de V que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

22. Sean $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que si $\mathbf{v}_2 = c\mathbf{v}_1$, entonces gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una recta que pasa por el origen.

**23. En el problema 22 suponga que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ no son paralelos. Demuestre que H = gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es un plano que pasa por el origen. ¿Cuál es la ecuación del plano? [*Sugerencia:* Si $(x, y, z) \in H$, escriba $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ y encuentre una condición respecto a x, y y z tal que el sistema de 3×2 resultante tenga una solución.]

24. Pruebe el teorema 2. [*Sugerencia:* Si $\mathbf{v} \in V$, escriba **v** como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ con el coeficiente de $\mathbf{v}_{n+1}$ igual a cero.]

25. Demuestre que M_{22} se puede generar con matrices invertibles.

26. Sean $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos n-vectores en un espacio vectorial V. Suponga que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{12}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{u}_n \\
\mathbf{v}_2 &= a_{21}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{u}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_n &= a_{n1}\mathbf{u}_1 + a_{n2}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{u}_n
\end{aligned}$$

Demuestre que si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ = gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

Respuestas a la autoevaluación

I. *a, b, d* **II.** *b, d* **III.** V **IV.** F **V.** V **VI.** V
VII. F **VIII.** V **IX.** V

MATLAB 4.4

M 1. Visualización de las combinaciones lineales

a) Vuelva a trabajar con los problemas 2 y 3 de MATLAB 3.1.

b) (*Use el archivo combo.m*) El archivo *combo.m* ilustra la combinación lineal $a * \mathbf{u1} + b * \mathbf{u2} + c * \mathbf{u3}$. A continuación se presenta el código de la función **combo.m**:

```
function combo(x,y,z,a,b,c)
% COMBO funcion que grafica la combinacion lineal
%       w= ax + by + cz
%
%       x: vector de 2x1
%       y: vector de 2x1
%       z: vector de 2x1
%       a: escalar
%       b: escalar
%       c: escalar

origen=[0;0];
Ox=[origen,x];
Oy=[origen,y];
Oz=[origen,z];
xy=[a*x,a*x+b*y];
yx=[b*y,a*x+b*y];
OxMy=[origen,a*x+b*y];
T=a*x+b*y;
OTMz=[origen,T+c*z];

clc;
disp('COMBO')
figure(1)
clf
```

```
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),'b--
*',Oz(1,:),Oz(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
text(z(1)/2,z(2)/2,'\bf z');
axis square
hold on
disp('Vectores originales')
disp('Oprima alguna tecla para continuar')
disp(' ')
pause
plot(Ox(1,:)*a,Ox(2,:)*a,'r:',Oy(1,:)*b,Oy(2,:)*b,'r:',...
   xy(1,:),xy(2,:),'r:',yx(1,:),yx(2,:),'r:');
h=plot(OxMy(1,:),OxMy(2,:),'g-*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2*a,x(2)/2*a,'\bf ax');
text(y(1)/2*b,y(2)/2*b,'\bf by');
text(OxMy(1,2)/2,OxMy(2,2)/2,'\bf T')
Tz=[T,T+c*z];
zT=[z*c,T+c*z];
plot(Tz(1,:),Tz(2,:),':k',c*Oz(1,:),c*Oz(2,:),':
k',zT(1,:),zT(2,:),':k')
h=plot(OTMz(1,:),OTMz(2,:),'-m*');
set(h,'LineWidth',2)
text(z(1)/2*c,z(2)/2*c,'\bf cz')
text(OTMz(1,2)/2,OTMz(2,2)/2,'\bf w')
title('T=a x + b y ')
xlabel('w = T + c z = a x + b y + c z')
disp('Combinacion lineal de vectores originales')
```

Con **doc combo** se obtiene una descripción. Dados tres vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ y tres escalares a, b y c, **combo(ul,u2,u3,a,b,c)** ilustra la geometría de la combinación lineal anterior. Hay pausas durante el despliegue de pantallas; para continuar, oprima cualquier tecla.

i. **u1** = [1;2], **u2** = [−2:3], **u3** = [5;4], $a = -2$, $a = 2$, $b = 2$, $c = -1$

ii. **u1** = [1;1], **u2** = [−1;1], **u3** = [3;0], $a = 2$, $b = -1$, $c = .5$

iii. Vectores de su elección

2. ***a)*** (*Lápiz y papel*) Decir que $\mathbf{w}$ está en gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ significa que existen escalares c_1 y c_2 tales que $\mathrm{w} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}$. Para los conjuntos de vectores dados, escriba $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}$, interprete esto como un sistema de ecuaciones para las incógnitas c_1 y c_2, verifique que la matriz aumentada para el sistema sea $[\mathbf{u}\ \mathbf{v}|\mathbf{w}]$, y resuelva el sistema.

i. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

iii. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

M

b) (*Utilice el archivo lincomb.m*) Verifique los resultados (y observe la geometría) introduciendo primero los vectores **u**, **v** y **w** y después dando **lincomb(u,v,w)** para cada uno de los conjuntos de vectores en el inciso *a*).

3. *a*) (*Lápiz y papel*) Decir que **w** está en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ significa que existen escalares c_1, c_2 y c_3 tales que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$. Para cada conjunto de vectores dado, escriba $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$, interprételo como un sistema de ecuaciones para las incógnitas c_1, c_2 y c_3, verifique que la matriz aumentada para el sistema sea $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3|\mathbf{w}]$ y resuelva el sistema. Observe que habrá un número infinito de soluciones.

i. $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

ii. $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) (*Lápiz y papel*) Este inciso y el inciso *c*) exploran el "significado" de tener un número infinito de soluciones. Para cada conjunto de vectores en el inciso *a*):

i. Haga $c_3 = 0$ y despeje c_2 y c_1. Escriba **w** como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

ii. Haga $c_2 = 0$ y despeje c_1 y c_3. Escriba **w** como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3$.

iii. Haga $c_1 = 0$ y despeje c_2 y c_3. Escriba **w** como combinación lineal de $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.

c) (Utilice el archivo *combine2.m*) A continuación se presenta el código de la función *combine2.m*:

```
function combine2(v1,v2,v3,w);
% COMBINE2 funcion que grafica las combinaciones lineales de
  pares de
%          vectores (v1,v2), (v2,v3), (v1,v3) para producir al
           vector w
%          los pares de vectores no debe ser paralelos
%
%     v1: vector 2x1
%     v2: vector 2x1
%     v3: vector 2x1
%      w: vector 2x1

origen=[0;0];
Ov1=[origen,v1];
Ov2=[origen,v2];
Ov3=[origen,v3];
Ow=[origen,w];

wv1v2=[v1,v2]\w;
wv2v3=[v2,v3]\w;
wv1v3=[v1,v3]\w;

Ov1Mv2w=[origen,wv1v2(1)*v1,wv1v2(2)*v2,[v1,v2]*wv1v2];
Ov2Mv3w=[origen,wv2v3(1)*v2,wv2v3(2)*v3,[v2,v3]*wv2v3];
Ov1Mv3w=[origen,wv1v3(1)*v1,wv1v3(2)*v3,[v1,v3]*wv1v3];
```

```
clc;
close all
figure(1)
subplot(221)
plot_vectores_originales(Ov1,Ov2,Ov3,Ow);
title('Vectores Originales')
axis square
subplot(222)
plot_vectores_originales(Ov1,Ov2,Ov3,Ow);
hold on
plot_vectores_comb(Ov1Mv2w)
texto=['w = (',convierte(wv1v2(1)),')v_1 + (',convierte(wv1v2
(2)),')v_2'];
title(texto)
axis square
subplot(223)
plot_vectores_originales(Ov1,Ov2,Ov3,Ow);
hold on
plot_vectores_comb(Ov2Mv3w)
texto=['w = (',convierte(wv2v3(1)),')v_2 + (',convierte(wv2v3
(2)),')v_3'];
title(texto)
axis square
subplot(224)
plot_vectores_originales(Ov1,Ov2,Ov3,Ow);
hold on
plot_vectores_comb(Ov1Mv3w)
texto=['w = (',convierte(wv1v3(1)),')v_1 + (',convierte(wv1v3
(2)),')v_3'];
title(texto)
axis square

%------------------------------
function plot_vectores_originales(v1,v2,v3,w)
% PLOT_VECTORES_ORIGINALES función auxiliar que grafica
  vectores
%
%     v1,v2,v3,2: matrices de 2x2, primera columna coordenadas
      del punto de partida
%         segunda columna coordenadas de punto final

h=plot(v1(1,:),v1(2,:),'b--*',v2(1,:),v2(2,:),'b--*',...
   v3(1,:),v3(2,:),'b--*',w(1,:),w(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
text(v1(1,2)/2,v1(2,2)/2,'\bf v_1');
text(v2(1,2)/2,v2(2,2)/2,'\bf v_2');
text(v3(1,2)/2,v3(2,2)/2,'\bf v_3');
text(w(1,2)/2,w(2,2)/2,'\bf w');

%------------------------------
function plot_vectores_comb(AA)
```

```
% PLOT_VECTORES_COMB funcion que grafica un cuadrado a partir
  de las
%                     columnas de la matriz AA
%
%     AA: matriz de 2x4, donde las columnas son las
%         coordenadas de los vertices

plot(AA(1,1:2),AA(2,1:2),'r:',AA(1,[1,3]),AA(2,[1,3]),'r:',...
   AA(1,[2,4]),AA(2,[2,4]),'r:',AA(1,[3,4]),AA(2,[3,4]),'r:');

%------------------------------

function str=convierte(num)
% CONVIERTE dado un numero regresa la representacion racional
  como una
% cadena de caracteres
%
%          num: escalar
%          str: cadena de caracters con la representacion
%          racional de num

[temp1N,temp1D]=rat(num);
if temp1D~=1
   str=[num2str(temp1N),'/',num2str(temp1D)];
else
   str=num2str(temp1N);
end
```

Dando **help combine2** se obtiene una descripción. Para cada conjunto de vectores en el inciso *a*), introduzca los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{w}$ y después dé **combine2(v$_1$,v$_2$,v$_3$,w)**. Con esto se demuestra la geometría de las observaciones del inciso *b*).

Nota. Es importante observar que los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ tomados por pares no son paralelos.

4. ***a***) (*Lápiz y papel*) Para el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y el vector $\mathbf{w}$ en *i*) del inciso *c*), escriba la ecuación expresando $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$, como un sistema de ecuaciones con c_1, c_2 y c_3 como incógnitas. Escriba la matriz aumentada para este sistema de ecuaciones y verifique que sea $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3|\mathbf{w}]$. Explique por qué $\mathbf{w}$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ si y sólo si el sistema tiene solución.

b) Para cada conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ y $\mathbf{w}$ en el inciso *c*), encuentre la matriz aumentada $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k|\mathbf{w}]$ y resuelva el sistema correspondiente usando el comando **rref**. Forme $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$, una solución al sistema de ecuaciones si existe la solución.

c) Para cada caso trabajado en el inciso *b*), escriba una conclusión diciendo si $\mathbf{w}$ es o no es una combinación lineal de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ y por qué. De ser así, verifique que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$, donde $c_1, \ldots, c_k$ sean las componentes del vector solución $\mathbf{c}$ en el inciso *b*).

i. $\left\{\begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\1\\-8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}\right\}$ $\quad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}3\\-3\\25\end{pmatrix}$

ii. $\left\{\begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\0\\13\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}\right\}$ $\quad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}3\\-3\\25\end{pmatrix}$

iii. $\left\{\begin{pmatrix}8\\5\\-5\\-9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-3\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\-3\\-5\\10\end{pmatrix}\right\}$ $\quad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}10.5\\2\\-14\\3.5\end{pmatrix}$

iv. en el mismo conjunto que en *iii*); $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

v. $\left\{\begin{pmatrix}4\\5\\3\\-9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\8\\-5\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\2\\11\\-17\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-7\\0\\8\end{pmatrix}\right\}$ $\quad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}-19\\-9\\-46\\74\end{pmatrix}$

vi. en el mismo conjunto que en *i*); $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

vii. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ $\quad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

5. ***a***) Para $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ dados, sea $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k]$ y encuentre **rref(A)**. Argumente por qué habrá una solución al sistema $[A|\mathbf{w}]$ para cualquier **w** en el $\mathbb{R}^n$ indicado. Explique por qué se puede concluir que el conjunto genera a todo ese $\mathbb{R}^n$.

i. $\mathbb{R}^3$ $\left\{\begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\1\\-8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}\right\}$

ii. $\mathbb{R}^3$ $\left\{\begin{pmatrix}9\\-9\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\7\\-7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-10\\4\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix}\right\}$

b) Para $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ dados, sea $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k]$ y encuentre **rref(A)**. Argumente por que habrá alguna **w** en el $\mathbb{R}^n$ indicado para el que no hay una solución al sistema $[A|\mathbf{w}]$. Experimente usando MATLAB para encontrar dicha **w**. Explique por qué puede concluir que el conjunto no genera todo $\mathbb{R}^n$.

i. $\mathbb{R}^4$ $\left\{\begin{pmatrix}10\\0\\-5\\-8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\-9\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\8\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

ii. $\mathbb{R}^4$ $\left\{\begin{pmatrix}4\\5\\3\\-9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\8\\-5\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\11\\-17\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-7\\0\\8\end{pmatrix}\right\}$

iii. $\mathbb{R}^3$ $\left\{\begin{pmatrix}9\\-9\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}14\\-2\\12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\16\\2\end{pmatrix}\right\}$

6. Considere las matrices en el problema 2 de MATLAB 1.8. Pruebe la invertibilidad de cada matriz. Para cada matriz, decida si las columnas de A generarían o no todo $\mathbb{R}^n$ (el tamaño de la matriz es $n \times n$). Escriba una conclusión respecto a la relación entre la invertibilidad de una matriz de $n \times n$ y si las columnas de la matriz generan todo $\mathbb{R}^n$.

7. Recuerde de problemas anteriores que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$; es decir, $\mathbf{w}$ está en gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ siempre que $\mathbf{c} = \begin{pmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_k\end{pmatrix}$ es una solución al sistema de ecuaciones cuya matriz aumentada es $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k|\mathbf{w}]$.

a) Para el siguiente conjunto de vectores, muestre que cualquier $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^4$ estará en el espacio generado por el conjunto de vectores pero habrá un número infinito de maneras de escribir $\mathbf{w}$ como una combinación lineal del conjunto de vectores; es decir, habrá un número infinito de maneras de elegir los coeficientes $c_1, \ldots, c_k$.

$$\left\{\begin{pmatrix}3\\-7\\4\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\-7\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\2\\9\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}14\\-5\\27\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-5\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

b) Para cada $\mathbf{w}$ dada:

i. Resuelva el sistema para encontrar los coeficientes necesarios para escribir $\mathbf{w}$ como una combinación lineal del conjunto de vectores y escriba la soluciones en términos de variables arbitrarias naturales (es decir, las variables correspondientes a las columnas en la **rref** sin pivotes).

ii. Establezca variables arbitrarias iguales a cero y escriba $\mathbf{w}$ como una combinación lineal de los vectores en el conjunto.

iii. Verifique que $\mathbf{w}$ es igual a la combinación lineal que encontró:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix}23\\-15\\33\\-5\end{pmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix}-13\\18\\-45\\18\end{pmatrix}$$

c) A partir de los resultados del inciso *b)*, ¿qué vectores del conjunto original no fueron necesarios al escribir $\mathbf{w}$ como combinación lineal del conjunto de vectores? ¿Por qué? ¿Cómo pueden reconocerse en la forma escalonada por renglones reducidos de la matriz cuyas columnas son el conjunto de vectores?

d) Considere el subconjunto de los vectores originales obtenido eliminando los vectores no necesarios. Demuestre que cada vector no necesario está en el espacio generado por este subconjunto de vectores. Argumente la razón por la que cualquier vector **w** en $\mathbb{R}^4$ estará en el espacio generado por este subconjunto de vectores y por la que los coeficientes de la combinación lineal son únicos.

e) Repita los incisos *a*) a *d*) para el siguiente conjunto de vectores y los vectores **w** dados en $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{pmatrix}10\\8\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-10\\-4\\19\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\-7\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}32\\32\\-5\end{pmatrix}\right\} \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix}26\\31\\17\end{pmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix}2\\20\\52\end{pmatrix}$$

8. Aplicación Una compañía de concreto almacena las tres mezclas básicas, que se presentan a continuación. Las cantidades se miden en gramos y cada "unidad" de mezcla pesa 60 gramos. Puede formular mezclas especiales revolviendo combinaciones de las tres mezclas básicas; entonces las mezclas especiales posibles pertenecen al espacio generado por los tres vectores que representan las tres mezclas básicas.

	A	B	C
Cemento	20	18	12
Agua	10	10	10
Arena	20	25	15
Grava	10	5	15
Tobas	0	2	8

a) ¿Se puede hacer una mezcla que consiste en 1000 g de cemento, 200 g de agua, 1000 g de arena 500 g de grava y 300 g de tobas? ¿Por qué sí o por qué no? De ser posible, ¿cuántas unidades de cada una de las mezclas *A*, *B* y *C* se necesitan para formular la mezcla especial?

b) Suponga que desea preparar 5000 g de concreto con una razón de agua a cemento de 2 a 3, con 1 250 g de cemento. Si debe incluir 1 500 g de arena y 1 000 g de grava en las especificaciones, encuentre la cantidad de tobas para hacer 5000 g de concreto. ¿Se puede formular ésta como una mezcla especial? De ser así, ¿cuántas unidades de cada mezcla se necesitan para formular la mezcla especial?

Nota. Este problema fue tomado de "Teaching Elementary Linear Algebra with MATLAB to Engineering Students" de Deborah P. Levinson, en *Proceedings of the Fifth International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, 1992.

9. Si nos fijamos únicamente en los coeficientes, es posible representar polinomios como vectores. Sea $p(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1$. $p(x)$ se puede representar como el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\\5\end{pmatrix}$.

En esta representación, la primera componente es el término constante, la segunda componente es el coeficiente del término x, la tercera el coeficiente de x^2 y la cuarta el de x^3.

a) (*Lápiz y papel*) Explique por qué $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}-5\\3\\0\\1\end{pmatrix}$ representa el polinomio $q(x) = x^3 + 3x - 5$

b) Encuentre el polinomio $r(x) = 2p(x) - 3q(x)$. Encuentre el vector $\mathbf{w} = 2\mathbf{v} - 3\mathbf{u}$ y explique por qué $\mathbf{w}$ representa a $r(x)$.

Para los incisos *c)* a *e)*, primero represente cada polinomio por un vector como se describió. Después conteste las preguntas sobre el espacio generado como si se tratara de un conjunto de vectores.

c) En P_2, ¿está $p(x) = 2x - 1$ en el espacio generado por $\{-5x^2 - 2, -6x^2 - 9x + 8, -x^2 - 7x + 9\}$? Si así es, escriba $p(x)$ como una combinación de los polinomios en el conjunto. ¿Genera el conjunto de polinomios a todo P_2? ¿Por qué?

d) En P_3, ¿está $p(x) = x^3 + 3x^2 + 29x - 17$ en el espacio generado por $\{-2x^3 - 7x^2 + 8x - 8, 7x^3 + 9x^2 + 3x + 5, -7x^3 + 6x^2 - x - 3\}$? Si así es, escriba $p(x)$ como una combinación lineal de los polinomios del conjunto. ¿Genera el conjunto de polinomios a todo P_3? ¿Por qué?

e) ¿Genera a P_3 el siguiente conjunto de polinomios? ¿Por qué?

$$\{x^3 - x + 2, x^3 + x^2 + 3x + 1, 2x^3 + x^2 + 2x + 1, -x^2 + 1\}$$

10. Suponga que $A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ b_1 & d_1 & f_1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 & e_2 \\ b_2 & d_2 & f_2 \end{pmatrix}$.

Sean $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ e_1 \\ f_1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ e_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Observe que $\mathbf{v}$ representa a la matriz A en el sentido de que está construido a partir de A, comenzando con el elemento (1, 1) de A, enumerando los elementos de la primera columna en orden, continuando la lista con los elementos de la segunda columna y terminando con los de la tercera. Observe también que $\mathbf{w}$ representa a B de la misma manera.

a) (*Lápiz y papel*) Escriba la matriz $C = A - 2B$. Escriba el vector que representa a C en la forma descrita y verifique que este vector sea igual a $\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$.

Para los incisos *b)* y *d)*, primero represente cada matriz por un vector como el que se describió. Después conteste las preguntas relativas al espacio generado como si se refirieran a vectores.

b) ¿Está $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 29 & -17 \end{pmatrix}$ en el espacio generado por el siguiente conjunto de matrices? De ser así, escríbala como una combinación lineal:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$$

¿Genera este conjunto a todo M_{22}? ¿Por qué?

c) ¿Está $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -10 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ en el espacio generado por el siguiente conjunto de matrices? De ser así, escríbala como una combinación lineal.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 9 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & -10 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} \right\}$$

¿Genera este conjunto a todo M_{23}? ¿Por qué?

d) ¿Genera el siguiente conjunto de matrices todo M_{23}? ¿Por qué?

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

4.5 INDEPENDENCIA LINEAL

En el estudio del álgebra lineal, una de las ideas centrales es la de dependencia o independencia lineal de los vectores. En esta sección se define el significado de independencia lineal y se muestra su relación con la teoría de sistemas homogéneos de ecuaciones y determinantes.

¿Existe una relación especial entre los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$? Por supuesto, se puede apreciar que $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$; o si se escribe esta ecuación de otra manera,

$$2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{1}$$

En otras palabras, el vector cero se puede escribir como una combinación no trivial de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (es decir, donde los coeficientes en la combinación lineal no son ambos cero). ¿Qué tienen de especial los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}$? La respuesta a esta pregunta es más difícil a simple vista. Sin embargo, es sencillo verificar que $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$; rescribiendo esto se obtiene

$$3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \tag{2}$$

Se ha escrito el vector cero como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Parece que los dos vectores en la ecuación (1) y los tres vectores en la ecuación (2) tienen una relación más cercana que un par arbitrario de 2-vectores o una terna arbitraria de 3-vectores. En cada caso, se dice que los vectores son *linealmente dependientes*. En términos generales, se tiene la importante definición que a continuación se presenta.

DEFINICIÓN 1

Dependencia e independencia lineal

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son **linealmente dependientes** si existen n escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *no todos cero* tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{3}$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes**.

Para decirlo de otra forma, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes si la ecuación $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ se cumple únicamente para $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Son linealmente dependientes si el vector cero en V se puede expresar como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ con coeficientes no todos iguales a cero.

Nota. Se dice que los *vectores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *son* linealmente independientes (o dependientes), o que *el conjunto* de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *es* linealmente independiente (o dependiente). Esto es, se usan las dos frases indistintamente.

¿Cómo se determina si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente? El caso de 2-vectores es sencillo.

TEOREMA 1 **Dependencia e independencia lineal**

Dos vectores en un espacio vectorial son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

DEMOSTRACIÓN Primero suponga que $\mathbf{v}_2 = c\mathbf{v}_1$ para algún escalar $c \neq 0$. Entonces $c\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente dependientes. Por otro parte, suponga que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente dependientes. Entonces existen constantes c_1 y c_2 al menos uno distinto de cero, tales que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Si $c_1 \neq 0$, entonces dividiendo entre c_1 se obtiene $\mathbf{v}_1 + (c_2/c_1)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, o sea,

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)\mathbf{v}_2$$

Es decir, $\mathbf{v}_1$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}_2$. Si $c_1 = 0$, entonces $c_2 \neq 0$ y, por lo tanto, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1$.

EJEMPLO 1 **Dos vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^4$**

Los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes ya que $\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{v}_1$.

EJEMPLO 2 **Dos vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$**

Los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes; si no lo fueran, se tendría $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ 4c \end{pmatrix}$. Entonces $2 = c$, $5 = 2c$ y $-3 = 4c$, lo cual es evidentemente imposible para cualquier número c.

EJEMPLO 3 **Determinación de la dependencia o independencia lineal de tres vectores en $\mathbb{R}^3$**

Determine si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución Suponga que $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces multiplicando y sumando se obtiene $\begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ -2c_1 - 2c_2 + c_3 \\ 3c_1 + 7c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Esto lleva al sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas c_1, c_2 y c_3:

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 \qquad &= 0 \\ -2c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 \\ 3c_1 \qquad + 7c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

De este modo, los vectores serán linealmente dependientes si y sólo si el sistema (4) tiene soluciones no triviales. Se escribe el sistema (4) usando una matriz aumentada y después se reduce por renglones. La forma escalonada reducida por renglones de

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right) \text{es} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Este último sistema de ecuaciones se lee $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Por lo tanto, (4) no tiene soluciones no triviales y los vectores dados son linealmente independientes.

EJEMPLO 4 **Determinación de la dependencia lineal de tres vectores en $\mathbb{R}^3$**

Determine si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución La ecuación $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ conduce al sistema homogéneo

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 + 11c_3 &= 0 \\ -3c_1 \qquad - 6c_3 &= 0 \\ 4c_2 + 12c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Escribiendo el sistema (5) en la forma de matriz aumentada y reduciendo por renglones, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 9 & 27 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nos podemos detener aquí ya que la teoría de la sección 1A muestra que el sistema (5) tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, la última matriz aumentada se lee

$$\begin{aligned} c_1 \qquad + 2c_3 &= 0 \\ c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Si se hace $c_3 = 1$, se tiene $c_2 = -3$ y $c_1 = -2$, de manera que, como puede verificarse,

$-2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y los vectores son linealmente dependientes.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DEPENDENCIA LINEAL EN $\mathbb{R}^3$

En el ejemplo 3 se encontraron tres vectores en $\mathbb{R}^3$ que eran linealmente independientes. En el ejemplo 4 se encontraron tres vectores que eran linealmente dependientes. ¿Qué significado geométrico tiene esto?

Suponga que **u**, **v** y **w** son tres vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$. Se pueden tratar los vectores como si tuvieran un punto terminal en el origen. Entonces existen constantes c_1, c_2 y c_3, no todas cero, tales que

$$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Suponga que $c_3 \neq 0$ (un resultado similar se cumple si $c_1 \neq 0$ o $c_2 \neq 0$). Entonces se pueden dividir ambos lados de (6) entre c_3 y reacomodar los términos para obtener

$$\mathbf{w} = -\frac{c_1}{c_3}\mathbf{u} - \frac{c_2}{c_3}\mathbf{v} = A\mathbf{u} + B\mathbf{v}$$

donde $A = -c_1/c_3$ y $B = -c_2/c_3$. Ahora se demostrará que **u**, **v** y **w** son coplanares. Se calcula

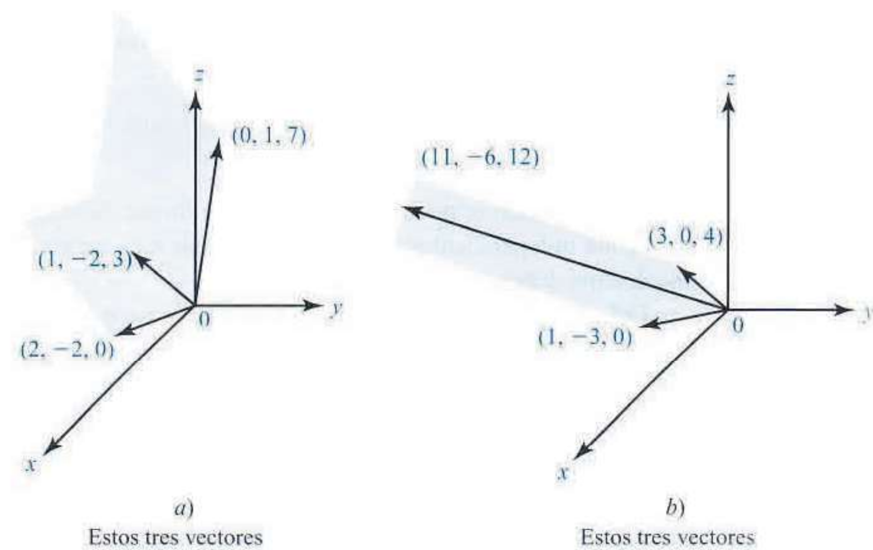
$$\begin{aligned}\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (A\mathbf{u} \times B\mathbf{v}) = \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = A[\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})] + B[\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})] \\ &= A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

porque **u** y **v** son ambos ortogonales a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (vea la página 255). Sea $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Si $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, entonces por el teorema 3.4.2 parte *vii*) **u** y **v** son paralelos (y colineales). Así **u**, **v** y **w** están en cualquier plano que contiene tanto a **u** como a **v** y por consiguiente son coplanares. Si $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, entonces **u** y **v** están en el plano que consiste en aquellos vectores que pasan por el origen que son ortogonales a **n**. Pero **w** está en el mismo plano porque $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$. Esto muestra que **u**, **v** y **w** son coplanares.

En el problema 66 se pide al lector que demuestre que si **u**, **v** y **w** son coplanares, son linealmente dependientes. Se concluye que

Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes si y sólo si son coplanares.

La figura 4.3 ilustra este hecho utilizando los vectores en los ejemplos 3 y 4.



a)
Estos tres vectores son independientes y no coplanares

b)
Estos tres vectores son independientes y coplanares

Figura 4.3
Dos conjuntos de tres vectores.

La teoría de sistemas homogéneos nos habla acerca de la dependencia o independencia lineal de los vectores.

TEOREMA 2

Un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^m$ es siempre linealmente dependiente si $n > m$.

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en $\mathbb{R}^m$ e intentemos encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{7}$$

Sea $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Entonces la ecuación (7) se convierte en

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n &= 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad & \vdots \ \ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Pero el sistema (8) es el sistema (1.4.1) de la página 38 y, según el teorema 1.4.1, tiene un número infinito de soluciones si $n > m$. De esta forma, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero, que satisfacen (8) y, por lo tanto, los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes.

EJEMPLO 5 Cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$ que son linealmente dependientes

Los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes ya que constituyen un conjunto de cuatro vectores de 3 elementos.

Existe un corolario importante (y obvio) del teorema 2.

COROLARIO

Un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ contiene a lo más n vectores.

Nota. El corolario se puede expresar de otra forma. Si se tienen n vectores de dimensión n linealmente independientes, no se pueden incluir más vectores sin convertir el conjunto en uno linealmente dependiente.

Del sistema (8) se puede hacer otra observación importante cuya prueba se deja como ejercicio (refiérase al problema 32 de la presente sección).

TEOREMA 3

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces las columnas de A consideradas como vectores, son linealmente dependientes si y sólo si el sistema (8), que se puede escribir como $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$, tiene soluciones no triviales.

Aquí $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 6 **Soluciones a un sistema homogéneo escritas como combinaciones lineales de vectores solución linealmente independientes**

Considere el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(9)}$$

Solución Haciendo una reducción de renglones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

El último sistema es

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 9x_3 + 6x_4 &= 0 \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Se ve que este sistema tiene un número infinito de soluciones, que se escriben como una combinación lineal de los vectores columna:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_3 - 6x_4 \\ -4x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(10)}$$

Observe que $\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones linealmente independientes para (9) porque ninguno de los dos es múltiplo del otro (el lector debe verificar que sean soluciones). Como x_3 y x_4 son números reales arbitrarios, se ve de (10) que el conjunto de soluciones al sistema (9) es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por estos dos vectores solución linealmente independientes.

Los siguientes dos teoremas se deducen directamente del teorema 3.

Teorema 4

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en $\mathbb{R}^n$ y sea A una matriz de $n \times n$ cuyas columnas son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Entonces, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes si y sólo si la única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Demostración

Éste es el teorema 3 para el caso $m = n$.

Teorema 5

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces $\det A \neq 0$ si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.

Demostración

Del teorema 4 y del teorema de resumen (página 208), las columnas de A son linealmente independientes $\Leftrightarrow$ $\mathbf{0}$ es la única solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Aquí, $\Leftrightarrow$ significa "si y sólo si".

El teorema 5 nos lleva a extender nuestro teorema de resumen.

Teorema 6

Teorema de resumen (punto de vista 5)

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las ocho afirmaciones siguientes son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras siete (de manera que si una es cierta, todas son ciertas).

- **i.** A es invertible.
- **ii.** La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
- **iii.** El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.
- **iv.** A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.
- **v.** A es el producto de matrices elementales.
- **vi.** La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
- **vii.** $\det A \neq 0$.
- **viii.** Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

Demostración

La única parte que no se ha demostrado hasta el momento es que los renglones de A son linealmente independientes $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. Las columnas son independientes $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A^t = \det A \neq 0$ (vea el teorema 2.2.4 de la página 185) $\Leftrightarrow$ las columnas de A^t son linealmente independientes. Pero las columnas de A^t son los renglones de A. Esto completa la prueba.

El siguiente teorema combina las ideas de independencia lineal y conjuntos generadores en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 7

Cualquier conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$.

Demostración

Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$, vectores linealmente independientes y sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, un vector en $\mathbb{R}^n$. Debemos demostrar que existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(11)}$$

En (11) se multiplican componentes, se igualan y se suman para obtener un sistema de n ecuaciones con n incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_{12} + \ldots + a_{1n}c_n &= x_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n &= x_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \ldots + a_{nn}c_n &= x_n \end{aligned} \qquad \textbf{(12)}$$

Se puede escribir (12) como $A\mathbf{c} = \mathbf{v}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Pero det $A \neq 0$ ya que las columnas de A son linealmente independientes. De manera que el sistema (12) tiene una solución única $\mathbf{c}$ por el teorema 6 y el teorema queda demostrado.

Observación. Esta demostración no sólo muestra que $\mathbf{v}$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, sino también que esto se puede lograr *de una sola manera* (ya que el vector solución $\mathbf{c}$ es único).

EJEMPLO 7 Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ generan $\mathbb{R}^3$ si su determinante es diferente de cero

Los vectores $(2, -1, 4)$, $(1, 0, 2)$ y $(3, -1, 5)$ generan $\mathbb{R}^3$ porque $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ y, por lo tanto, son independientes.

Todos los ejemplos que se han dado hasta ahora han sido en el espacio $\mathbb{R}^n$. Esto no representa una restricción tan grande como parece. En la sección 5.4 (teorema 6) se demostrará que diferentes espacios vectoriales de apariencia muy distinta tienen, en esencia, las mismas propiedades. Por ejemplo, se verá que el espacio P_n es fundamentalmente el mismo que $\mathbb{R}^{n+1}$. Se dirá que dos espacios vectoriales con esta forma son *isomórficos*.

Este importante resultado tendrá que esperar hasta el capítulo 5. Mientras tanto, se darán algunos ejemplos en espacios diferentes a $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 8 Tres matrices linealmente independientes en M_{23}

En M_{23}, sean $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determine si A_1, A_2 y A_3 son linealmente dependientes o independientes.

Solución Suponga que $c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} c_1 - c_2 - c_3 & c_2 & 2c_1 + 4c_2 + c_3 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 & c_1 + 3c_2 + 2c_3 & -c_1 + c_3 \end{pmatrix}$$

Esto nos proporciona un sistema homogéneo de seis ecuaciones con tres incógnitas, c_1, c_2 y c_3 en el cual reulta bastante sencillo verificar que la única solución es $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. De este modo, las tres matrices son linealmente independientes.

EJEMPLO 9 **Cuatro polinomios linealmente independientes en P_3**

En P_3 determine si los polinomios 1, x, x^2 y x^3 son linealmente dependientes o independientes.

Solución Suponga que $c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 = 0$. Esto debe cumplirse para todo número real x. En particular, si $x = 0$, se obtiene $c_1 = 0$. Entonces, haciendo $x = 1, -1, 2$ se obtiene, sucesivamente,

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \\ -c_2 + c_3 - c_4 &= 0 \\ 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 &= 0 \end{aligned}$$

El determinante de este sistema homogéneo es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

De manera que el sistema tiene una solución única $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ y los cuatro polinomios son linealmente independientes. Esto se puede ver de otra forma. Se sabe que cualquier polinomio de grado 3 tiene a lo más tres raíces reales. Pero si $c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 = 0$ para algunas constantes diferentes de cero c_1, c_2, c_3, y c_4 y para todo número real x, entonces se ha construido un polinomio cúbico para el que todo número real es una raíz, lo cual es imposible.

EJEMPLO 10 **Tres polinomios linealmente independientes en P_2**

En P_2, determine si los polinomios $x - 2x^2$, $x^2 - 4x$ y $-7x + 8x^2$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución Sea $c_1(x - 2x^2) + c_2(x^2 - 4x) + c_3(-7x + 8x^2) = 0$. Reacomodando los términos se obtiene

$$\begin{aligned} (c_1 - 4c_2 - 7c_3)x &= 0 \\ (-2c_1 + c_2 + 8c_3)x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se cumplen para todo x si y sólo si

$$c_1 - 4c_2 - 7c_3 = 0$$

y

$$-2c_1 + c_2 + 8c_3 = 0$$

Pero para el teorema 1.4.1 de la página 38, este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas tiene un número infinito de soluciones. Lo que muestra que los polinomios son linealmente dependientes.

Si se resuelve este sistema homogéneo, se obtiene, sucesivamente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -7 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{25}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & 0 \end{array}\right)$$

Así, se puede dar un valor arbitrario a c_3, $c_1 = \frac{25}{7}c_3$ y $c_2 = -\frac{6}{7}c_3$. Si, por ejemplo, $c_3 = 7$, entonces $c_1 = 25$, $c_2 = -6$ y se tiene

$$25(x - 2x^2) - 6(x^2 - 4x) + 7(-7x + 8x^2) = 0$$

Problemas 4.5

Autoevaluación

I. ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores son linealmente independientes?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

II. ¿Cuál de los siguientes pares de vectores es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

III. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de vectores *debe* ser linealmente dependiente?

a) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix}$

Aquí $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$, y l son números reales.

Indique si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas

IV. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ también son linealmente independientes.

V. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n-1}$ también son linealmente dependientes.

VI. Si A es una matriz de 3×3 y $\det A = 0$, entonces los renglones de A son vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$.