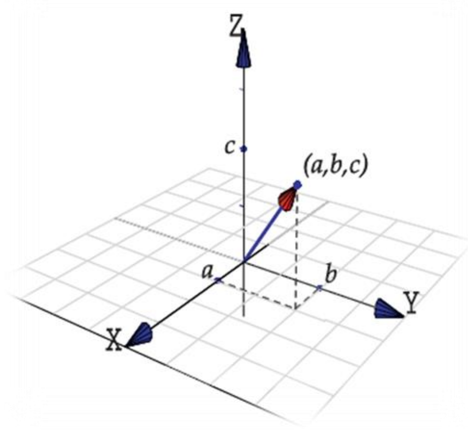
Curso corto: Vectores en $\mathbb{R}^3$

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

Profesor: Edis Alberto Flores



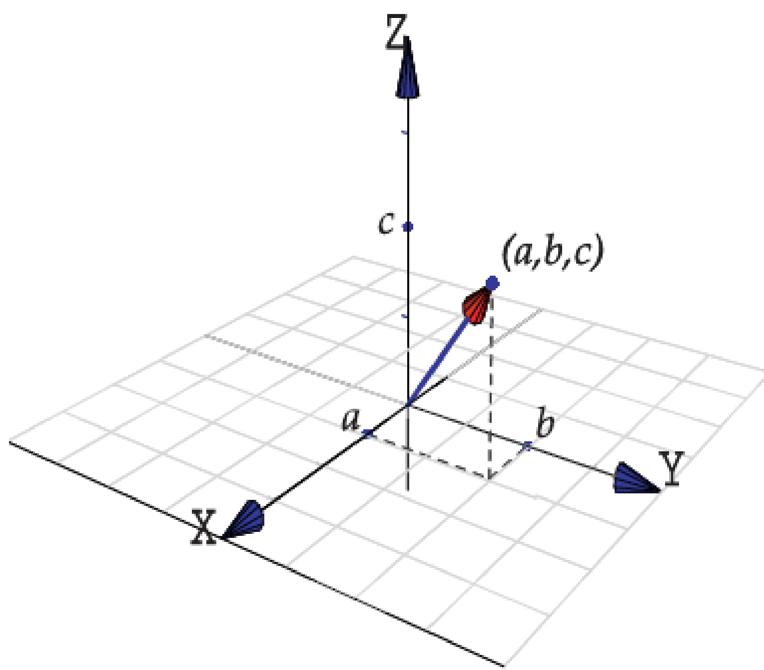
Objetivos:

1. Definir el concepto de vector
2. Representar geométricamente un vector en $\mathbb{R}^3$
3. Determinar magnitud y dirección de un vector en $\mathbb{R}^3$
4. Realizar operaciones con vectores en $\mathbb{R}^3$
5. Definir el producto escalar entre dos vectores
6. Determinar el ángulo entre dos vectores
7. Calcular el vector proyección entre dos vectores.
8. El producto cruz de dos vectores.
9. Calcular el área de un paralelogramo generado por dos vectores
10. Calcular el volumen del paralelepípedo sustentado por tres vectores.

1.1 DEFINICIÓN

Un vector de R^3 es una terna ordenada de números reales. Denotada de la siguiente manera:

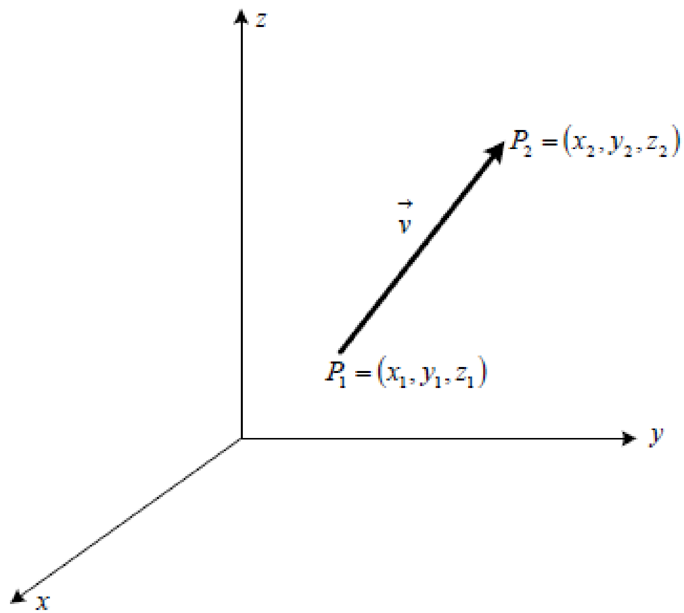
$$\vec{v} = (x, y, z)$$



1.2 ENFOQUE GEOMÉTRICO

Geométricamente a un vector de R^3 se lo representa en el Espacio como un segmento de recta dirigido.

Suponga que se tienen los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Si trazamos un segmento de recta dirigido desde P_1 hacia P_2 tenemos una representación del vector $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1 \, , y_2 - y_1, z_1 - z_2)$



1.2.1 Magnitud o norma

Sea $\vec{v} = (x, y, z)$. La *magnitud o norma* de $\vec{v}$ denotada como $\left\|\vec{v}\right\|$, se define como:

$$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Note que la norma sería la longitud del segmento de recta que define el vector. Es decir, sería la distancia entre los puntos que lo definen.

Para $\vec{v} = (x_2 - x_1\ , y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ sería:

$$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Propiedades

Consideremos los vectores $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$, *entonces*

1. $||\overrightarrow{v}|| \geq 0$ *y* $||\overrightarrow{v}|| = 0$ *si y sólo si* $\overrightarrow{v} = 0$

2. $||\alpha \overrightarrow{v}|| = |\alpha| \, ||\overrightarrow{v}||$

3. $||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}||$

4. $||\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}|| \leq ||\overrightarrow{v}|| + \overrightarrow{w}||$ *(desigualdad triangular)*

5. $|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}| \leq ||\overrightarrow{v}|| \, ||\overrightarrow{w}||$ *(desigualdad de Cauchy-Schwarz)*

Vector Unitario

Un vector se dice unitario si su norma es 1.

- Observe que si $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ entonces $\dfrac{w}{||w||}$ es unitario.

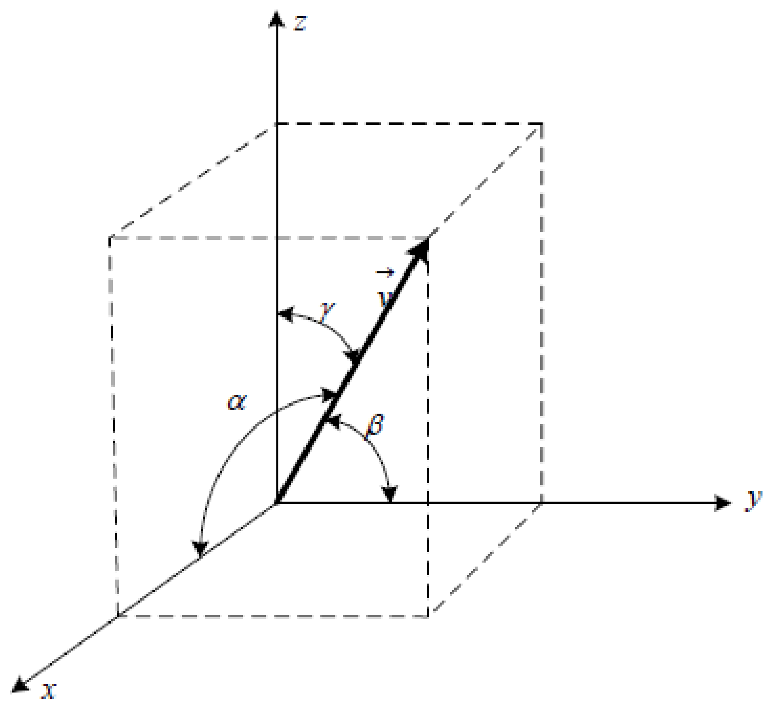
- El vector $\overrightarrow{w} = (\cos\theta, \sin\theta)$ es unitario.

$$Sea\ \ \overrightarrow{w} = (1,0,2)\ \ entonces$$

$$\left|\left|\frac{w}{||w||}\right|\right| = \left|\frac{1}{||w||}\right|\,||w|| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

1.2.2 Dirección

La *dirección* de $\vec{v} = (x, y, z)$ está definida por la medida de los ángulo que forma la línea de acción del segmento de recta con los ejes x, y, z



Los ángulos α, β y γ son llamados **Ángulos Directores.**

Observe que:

$$Cos\,\alpha = \frac{x}{\left\|\vec{v}\right\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$Cos\,\beta = \frac{y}{\left\|\vec{v}\right\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$Cos\,\gamma = \frac{y}{\left\|\vec{v}\right\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Demostrar que $\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$

1.2.3 Sentido

El *sentido* de $\vec{v}$ lo define la flecha dibujada sobre el segmento de recta.

1.3 IGUALDAD DE VECTORES DE R^3

Dos vectores $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ son iguales si y sólo si $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ y $z_1 = z_2$

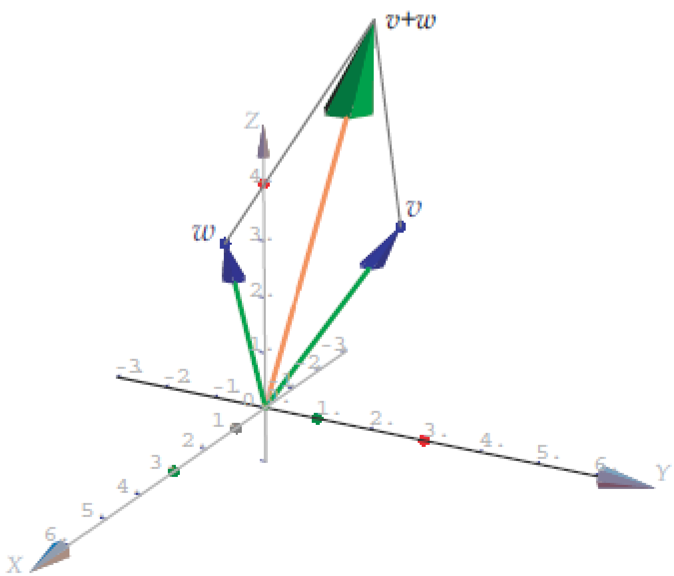
1.4 OPERACIONES

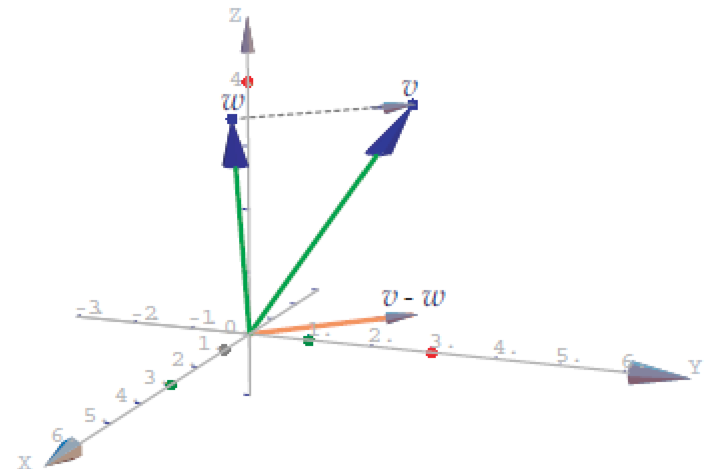
1.4.1 Suma

Sean $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ dos vectores de R^3 tales que $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ entonces la suma de $\vec{v_1}$ con $\vec{v_2}$, denotada como $\vec{v_1} + \vec{v_2}$, se define como:

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Suma de dos vectores $v + w$ Diferencia de dos vectores $v - w$





Sea $\overrightarrow{v} = (1,3,4)$ *y* $\overrightarrow{w} = (3,1,4)$, *entonces*

$$i.)\ \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (4,4,8)$$

$$ii.)\ \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = (-2,2,0)$$

Observación

Cualquier vector de R^3, $\vec{v}=(x,y,z)$, puede ser expresado en combinación lineal de los vectores $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ y $\vec{k}=(0,0,1)$

$$\vec{v}=(x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$$

$$\vec{v}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$$

1.4. 3. Producto Escalar. Producto Punto o Producto Interno

Sean $\vec{v_1}=(x_1,y_1,z_1)$ y $\vec{v_2}=(x_2,y_2,z_2)$ vectores de R^3. El Producto escalar de $\vec{v_1}$ con $\vec{v_2}$ denotado como $\vec{v_1}\bullet\vec{v_2}$ se define como:

$$\vec{v_1}\bullet\vec{v_2}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

Ejemplo

Si $\vec{v_1} = (3,1,-2)$ y $\vec{v_2} = (-1,4,0)$ entonces

$$\vec{v_1} \bullet \vec{v_2} = (3)(-1) + (1)(4) + (-2)(0) = -3 + 4 + 0 = 1$$

1.4.3.1 Propiedades

Sean $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ vectores de R^3. Entonces:

1. $\vec{v_1} \bullet \vec{v_2} = \vec{v_2} \bullet \vec{v_1}$

$$2.\ \vec{v}_1 \bullet \left(\vec{v}_2 + \vec{v}_3\right) = \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2$$

$$3.\ \left(\alpha \vec{v}_1\right) \bullet \left(\beta \vec{v}_2\right) = \alpha\beta\left(\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2\right)$$

Si $\vec{v} = (x, y, z)$ entonces:

$$\vec{v} \bullet \vec{v} = (x, y, z) \bullet (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Por lo tanto $\vec{v} \bullet \vec{v} = \left\|\vec{v}\right\|^2$ o también $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}$

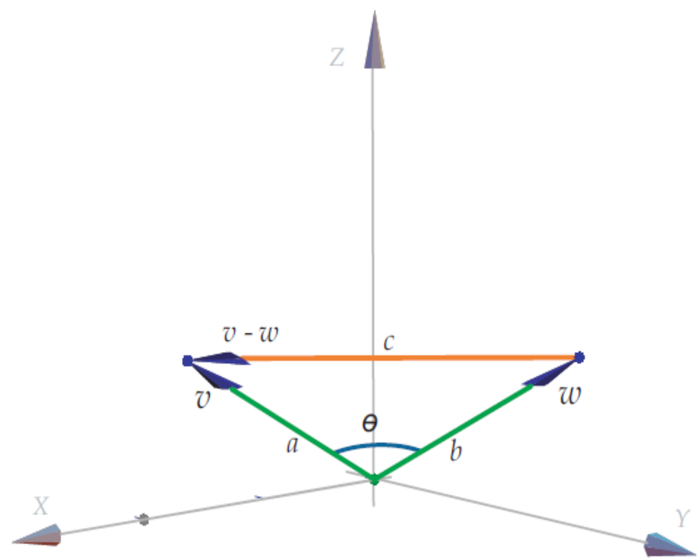
Angulo entre dos Vectores

A partir de la *Ley de los cosenos* podemos establecer una relación entre el producto punto, normas y ángulos, como se muestra a continuación.

Ley de los cosenos. Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo arbitrario, se tiene la relación

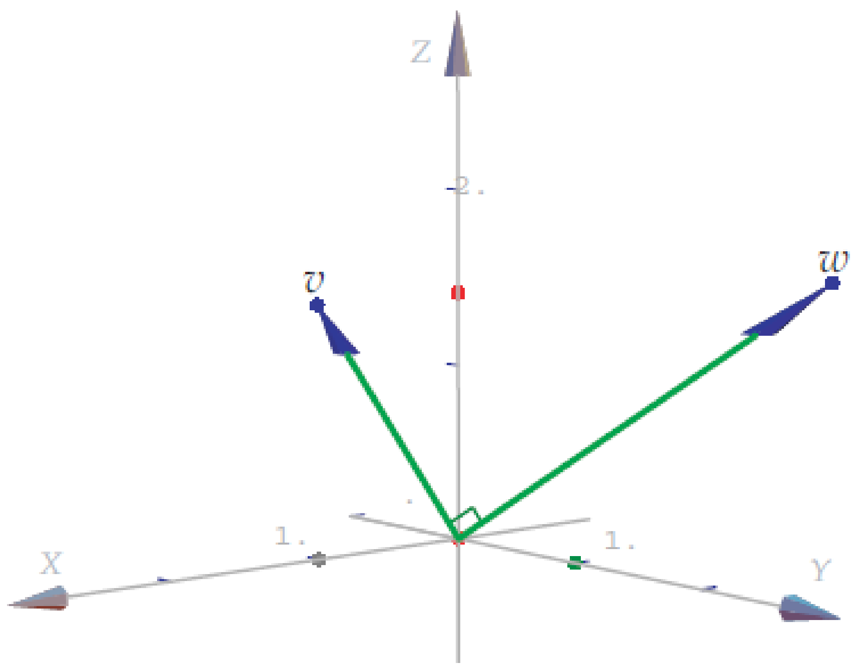
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre los lados de longitud a y b.



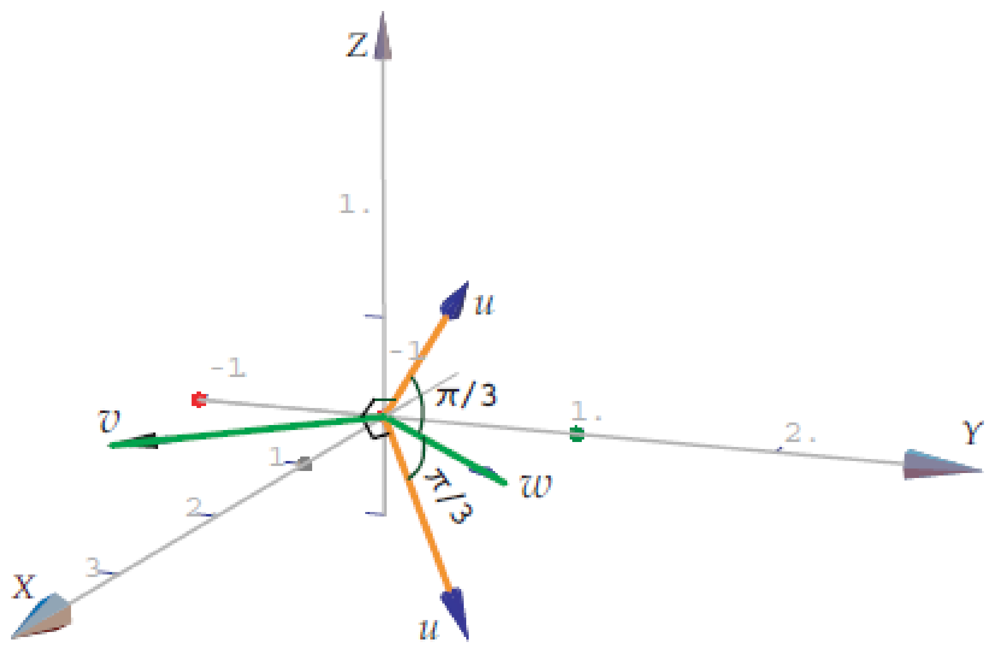
Teorema: Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ son ortogonales si y sólo si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Sean $\overrightarrow{w} = (1,0,\sqrt{2})$ *y* $\overrightarrow{v} = (-2,1,\sqrt{2})$ *entonces* $\overrightarrow{w}$ *y* $\overrightarrow{v}$ *son ortogonales pues* $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = -2+2=0$



Sean $\overrightarrow{v} = (1,-1,0)$ *y* $\overrightarrow{w} = (1,1,0)$. *Consideremos el problema de encontrar un vector* $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ *que cumpla las tres condiciones siguientes*

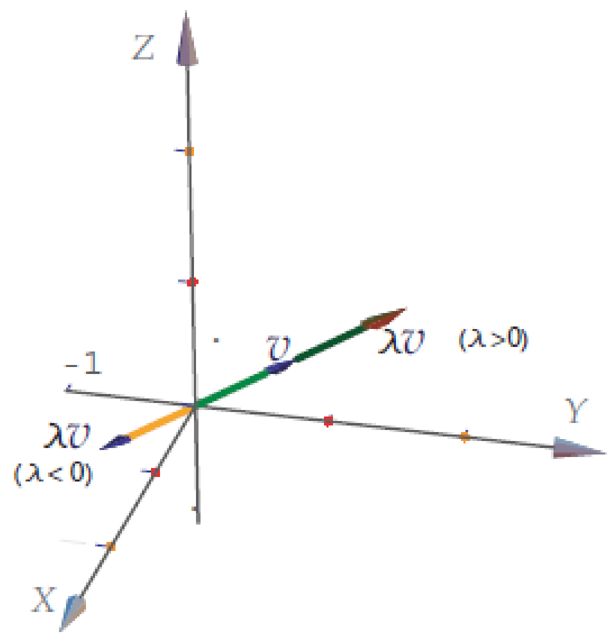
$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}, \quad ||\overrightarrow{u}|| = 4, \quad \angle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} = \frac{\pi}{3}$$



Dos vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ *distintos de cero*

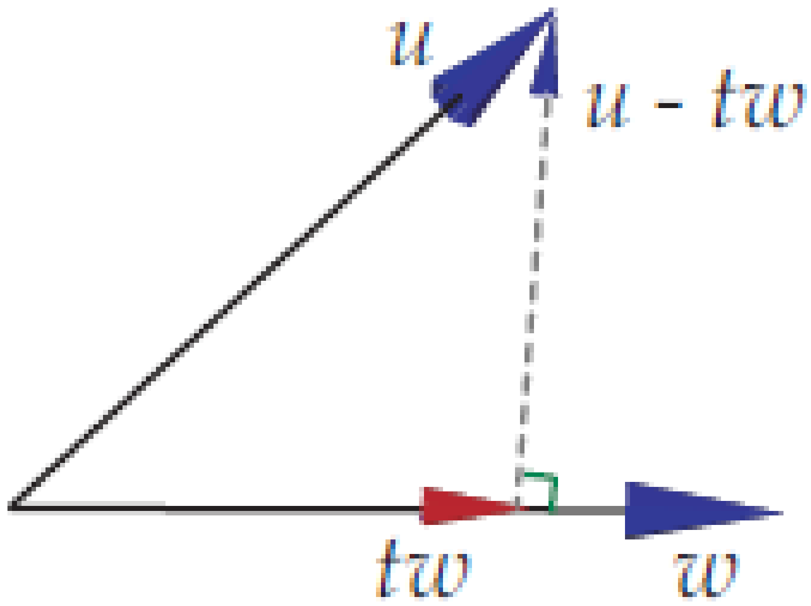
1. *Son paralelos si el ángulo entre ellos es* 0 *o* π. *En este caso*

$$\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



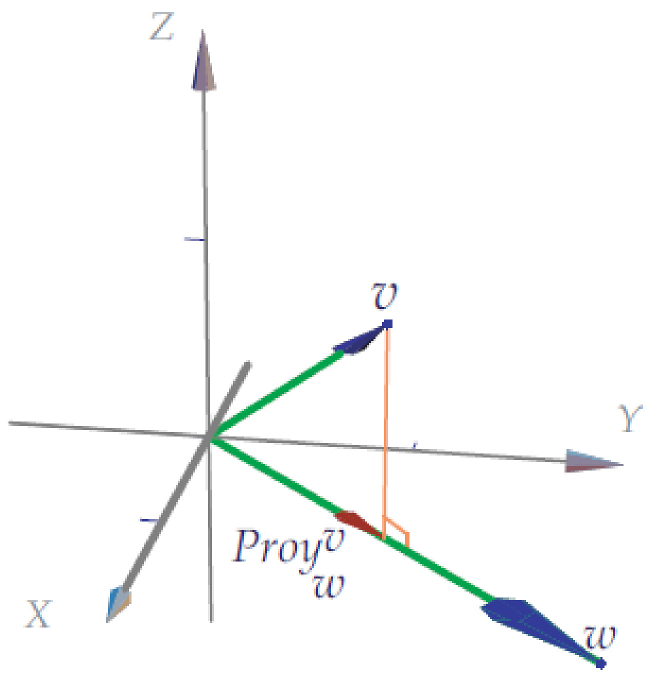
PROYECCIÓN ORTOGONAL

Geométricamente lo que queremos es determinar un vector que se obtiene al proyectar ortogonalmente el vector $\overrightarrow{u} \neq 0$ sobre el vector $\overrightarrow{w}$. Si denotamos a este vector con $\text{proy}_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{u}}$ entonces, de acuerdo con la figura, se debe cumplir que



Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ *con* $\overrightarrow{w} \neq 0$, *se llama proyección ortogonal de* $\overrightarrow{u}$ *sobre* $\overrightarrow{w}$ *al vector*

$$proy_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{u}} = \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}} \overrightarrow{w}$$

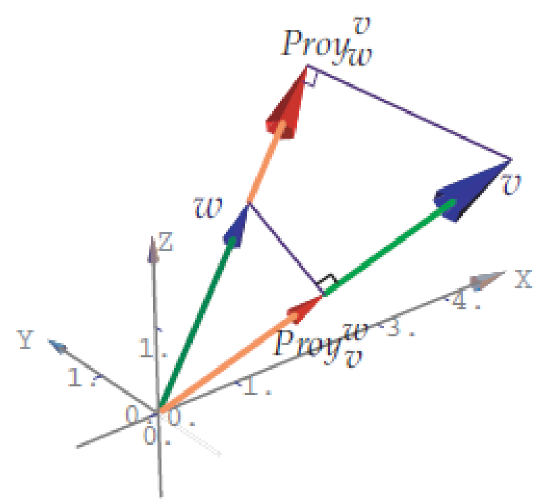


- Al vector $\overrightarrow{u} - \text{proy}_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{u}}$ se le conoce como la componente de $\overrightarrow{u}$ ortogonal a $\overrightarrow{w}$.

Sean $\overrightarrow{u} = (5, 0, \sqrt{2})$ *y* $\overrightarrow{v} = (2, 1, \sqrt{2})$ *entonces*

$$proy_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{u}} = \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}} \overrightarrow{w} = \frac{12}{7}(2, 1, \sqrt{2}) = \left(\frac{24}{7}, \frac{12}{7}, \frac{12\sqrt{2}}{7} \right)$$

$$proy_{\overrightarrow{u}}^{\overrightarrow{w}} = \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} \overrightarrow{u} = \frac{12}{27}(5, 0, \sqrt{2}) = \left(\frac{60}{27}, 0, \frac{12\sqrt{2}}{27} \right)$$



Producto Vectorial. Producto Cruz

Sean $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ vectores de R^3. El Producto Vectorial de $\vec{v_1}$ con $\vec{v_2}$ denotado como $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$ se define como:

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

Una manera práctica para obtener el resultado de la operación Producto Cruz entre dos vectores es resolver el siguiente determinante, para la primera fila:

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo.

Sea $\vec{v}_1 = (1,2,-1)$ y $\vec{v}_2 = (2,-1,0)$ entonces

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -i - 2j - 5k$$

Propiedades.

Sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ vectores de R^3

1. El vector $\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right)$ es tanto perpendicular a $\vec{v}_1$ como a $\vec{v}_2$
2. El sentido del vector $\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right)$ se lo puede obtener empleando la mano derecha. Mientras los dedos se dirigen desde $\vec{v}_1$ hacia $\vec{v}_2$, el pulgar indica la dirección de $\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right)$.

3. $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\left(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1\right)$

4. $\vec{v}_1 \times \vec{v}_1 = \vec{0}$

5. Si $\vec{v}_1 // \vec{v}_2$ entonces $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$

6. $\left(\alpha_1 \vec{v}_1\right) \times \left(\alpha_2 \vec{v}_2\right) = \alpha_1 \alpha_2 \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right)$

7. $\vec{v}_1 \times \left(\vec{v}_2 + \vec{v}_3\right) = \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right) + \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_3\right)$

8. $\left\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right\|^2 = \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 - \left(\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2\right)^2$

De la última expresión, empleando la propiedad del producto escalar, se obtiene un resultado muy importante:

$$\left\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right\|^2 = \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 - \left(\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2\right)^2$$

$$= \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 - \left(\left\|\vec{v}_1\right\| \left\|\vec{v}_2\right\| \cos\theta\right)^2$$

$$= \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 - \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 \cos^2\theta$$

$$= \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 \left[1 - \cos^2\theta\right]$$

$$\left\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right\|^2 = \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 sen^2\theta$$

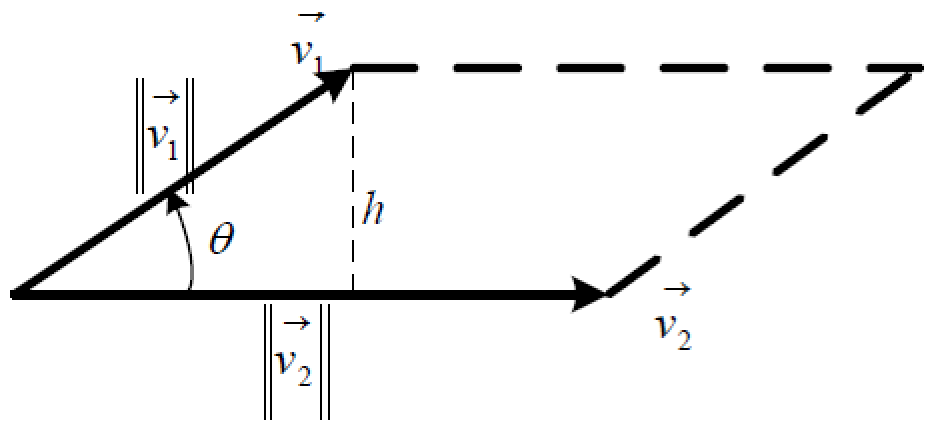
Finalmente:

$$\boxed{\left\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right\| = \left\|\vec{v}_1\right\| \left\|\vec{v}_2\right\| sen\,\theta}$$

APLICACIONES

CALCULO DEL ÁREA DEL PARALELOGRAMO SUSTENTADO POR DOS VECTORES.

Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ dos vectores, no paralelos. Observe la figura:



Tomando como base a $\vec{v}_2$, tenemos:

$$Area = base \bullet altura$$

$$= \left\|\vec{v}_2\right\| h$$

$$= \left\| \vec{v}_2 \right\| h$$

Observe que $\boxed{sen\,\theta = \frac{h}{\left\| \vec{v}_1 \right\|}}$ entonces $\boxed{Area = \left\| \vec{v}_2 \right\| \left\| \vec{v}_1 \right\| sen\,\theta}$

Y por la propiedad del producto cruz:

$$Area = \left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|$$

Ejemplo 1

Hallar el área del triángulo sustentado por los vectores $\vec{v}_1 = (1, 2, -1)$ y $\vec{v}_2 = (2, -1, 0)$

SOLUCIÓN:

El área del triángulo sustentado por dos vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ es la mitad del área del paralelogramo sustentado por los vectores, es decir:

$$Area\ Triángulo = \frac{\left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|}{2}$$

Como $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -i - 2j - 5k$

entonces

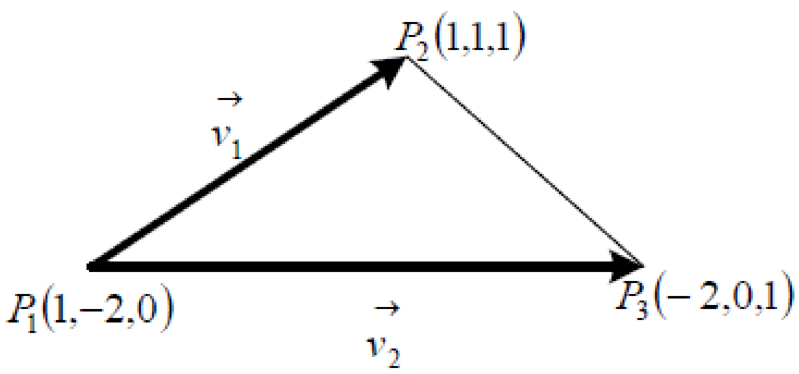
$$Area\ Triángulo = \frac{\left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|}{2} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

Ejemplo 2

Hallar el área del triángulo que tiene por vértices los puntos $(1,-2,0)$, $(1,1,1)$ y $(-2,0,1)$

SOLUCIÓN:

Primero se forman dos vectores entre los puntos dados, tomando arbitrariamente el orden de estos puntos; luego se procede de manera análoga a lo mencionado anteriormente debido a que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo.



En este caso, $\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = (1-1,\, 1-(-2),\, 1-0) = (0,3,1)$

$$\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_2P_3} = (-2-1,\, 0-(-2),\, 1-0) = (-3,2,1)$$

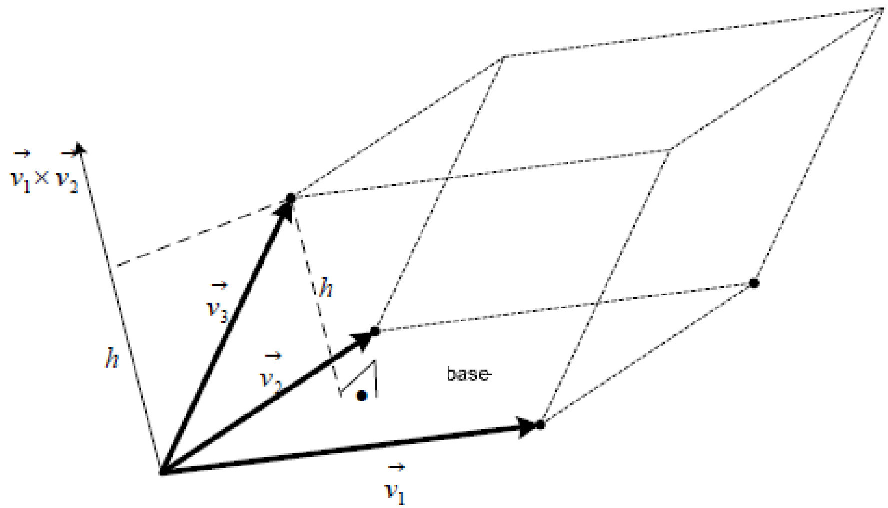
Entonces,

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i - 3j - 9k$$

$$Area\ Triángulo = \frac{\left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|}{2} = \frac{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (9)^2}}{2} = \frac{\sqrt{91}}{2}$$

CALCULO DEL VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO SUSTENTADO POR TRES VECTORES

Sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ tres vectores. Observe la figura.



Tomando como base el paralelogramo sustentado por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, la altura h del paralelepípedo será la proyección escalar $\vec{v}_3$ sobre $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, entonces:

$$Volumen = Area\ base \times altura$$

Donde $Area\ base = \left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|$

$$altura = h = \left| \operatorname{Proy}_{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2} \vec{v}_3 \right| = \left| \frac{\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right) \bullet \vec{v}_3}{\left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|} \right|$$

Por tanto.

$$Volumen = \left| \left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\| \frac{\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right) \bullet \vec{v}_3}{\left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|} \right|$$

Finalmente, simplificando resulta:

$$\boxed{Volumen = \left| \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right) \bullet \vec{v}_3 \right|}$$

Esta última expresión es denominada, EL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$, y su interpretación es el volumen del paralelepípedo sustentado por los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$. Observe además que no importa el orden de operación de los vectores, ¿por qué?.

Ejemplo

Hallar el volumen del paralelepípedo sustentado por los vectores $\vec{v_1} = (1,-2,1)$, $\vec{v_2} = (2,0,-1)$ y $\vec{v_3} = (1,2,3)$.

SOLUCIÖN.

Por lo definido anteriormente,

$$Volumen = \left| \left(\vec{v_1} \times \vec{v_2} \right) \bullet \vec{v_3} \right| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 14 + 4 = 20u^3$$

Eso es todo por Hoy…muchas gracias