SP Solución de problemas

1. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+\varepsilon}$$

donde k y ε son constantes positivas, se denomina como la **ecuación del día final**.

a) Resolver la ecuación del día final

$$\frac{dy}{dt} = y^{1.01}$$

dado que $y(0) = 1$. Encontrar el tiempo T en el cual

$$\lim_{t\to T^-} y(t) = \infty.$$

b) Resolver la ecuación del día final

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+\varepsilon}$$

dado que $y(0) = y_0$. Explicar por qué esta ecuación se denomina ecuación del día final.

2. Un termómetro se lleva desde una habitación a 72° F hacia el exterior, donde la temperatura es 20° F. La lectura cae a 48° F después de 1 minuto. Determinar la lectura del termómetro después de 5 minutos.

3. Considerar que S representa las ventas de un nuevo producto (en miles de unidades), L es el nivel máximo de ventas (en miles de unidades) y t el tiempo (en meses). La razón de cambio de S con respecto a t varía al mismo tiempo que el producto S y $L - S$.

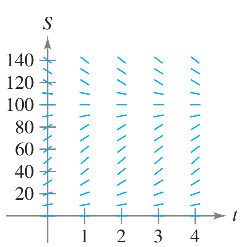
a) Escribir la ecuación diferencial para el modelo de ventas si $L = 100$, $S = 10$ cuando $t = 0$ y $S = 20$ cuando $t = 1$. Verificar que

$$S = \frac{L}{1 + Ce^{-kt}}.$$

b) ¿En qué tiempo se incrementa más rápidamente el crecimiento en ventas?

c) Usar una herramienta de graficación para representar la función de ventas.

d) Representar gráficamente la solución del inciso *a*) sobre el campo de pendiente mostrado en la figura de abajo.



e) Si el nivel máximo de ventas estimado es correcto, usar el campo de pendientes para describir la forma de las curvas solución para ventas si, en algún periodo, las ventas exceden a L.

4. Otro modelo que se puede usar para representar el crecimiento de la población es la **ecuación de Gompertz**, la cual es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = k \ln\left(\frac{L}{y}\right)y$$

donde k es una constante y L es la capacidad límite o de soporte.

a) Resolver la ecuación diferencial.

b) Utilizar una herramienta de graficación para presentar el campo de pendientes para la ecuación diferencial cuando $k = 0.05$ y $L = 1\,000$.

c) Describir el comportamiento de la gráfica cuando $t \to \infty$.

d) Trazar la gráfica de la ecuación diferencial que se encontró en el apartado *a*) para $L = 5\,000$, $y_0 = 500$ y $k = 0.02$. Determinar la concavidad de la gráfica y cómo se compara con la solución general de la ecuación diferencial logística.

5. Demostrar que la ecuación logística $y = L/(1 + be^{-kt})$ se puede escribir como

$$y = \frac{1}{2}L\left[1 + \tanh\left(\frac{1}{2}k\left(t - \frac{\ln b}{k}\right)\right)\right].$$

¿Qué se puede concluir acerca de la gráfica de la ecuación logística?

6. Aunque es verdad para algunas funciones f y g, un error común en el cálculo es creer que la regla del producto en derivadas es $(fg)' = f'g'$.

a) Dado $g(x) = x$, encontrar f tal que $(fg)' = f'g'$.

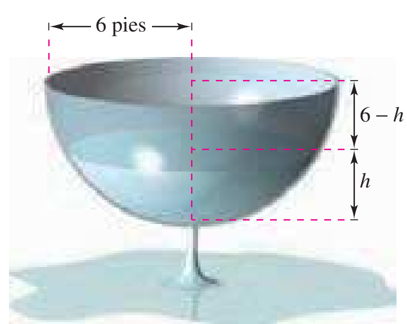
b) Dada una función arbitraria g, encontrar una función f tal que $(fg)' = f'g'$.

c) Describir qué pasa si $g(x) = e^x$.

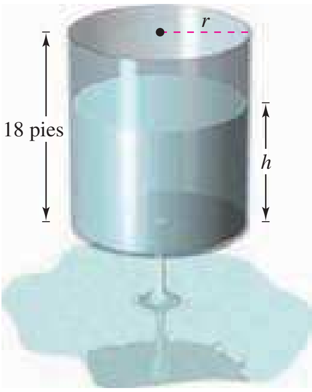
7. **La ley de Torricelli** establece que el agua fluirá desde una abertura en la parte inferior del tanque con la misma velocidad que alcanzaría al caer desde la superficie del agua a la abertura. Una de las formas de la ecuación de Torricelli es

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{2gh}$$

donde h es la altura del agua en el tanque, k es el área de la abertura de la parte inferior del tanque, $A(h)$ es el área de la sección transversal a la altura h, y g es la aceleración debida a la gravedad ($g \approx 32$ pies/s^2). Un tanque de agua hemisférico tiene un radio de 6 pies. Cuando el tanque está lleno, una válvula circular con un radio de 1 pulgada se abre en la parte inferior, como se muestra en la figura. ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?



8. El tanque cilíndrico de agua mostrado en la figura tiene una altura de 18 pies. Cuando el tanque está lleno, una válvula circular se abre en la parte inferior del tanque. Después de 30 minutos, la profundidad del agua es de 12 pies.



a) ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?
b) ¿Cuál es la profundidad del agua en el tanque después de 1 hora?

9. Suponer que el tanque del ejercicio 8 tiene una altura de 20 pies, un radio de 8 pies, y la válvula circular tiene un radio de 2 pulgadas. El tanque está completamente lleno cuando la válvula está abierta. ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?

10. En áreas montañosas, la recepción de la radio puede ser débil. Considerar una situación donde una emisora de FM se localiza en el punto (–1, 1) detrás de un monte representado por la gráfica de

$$y = x - x^2$$

y el receptor de radio está en el lado opuesto del monte. (Suponer que el eje x representa el nivel de referencia en la base del monte.)

a) ¿Cuál es la posición más cercana de la radio $(x, 0)$ respecto al monte para que no haya interferencias?
b) Escribir la posición de la radio más cercana $(x, 0)$ con x representada como una función de h si la emisora se localiza a $(-1, h)$.
c) Usar una herramienta de graficación para x en el inciso *b*). Determinar la asíntota vertical de la función e interpretar el resultado.

11. La biomasa es una medida de la cantidad de la materia viviente en un ecosistema. Suponer que la biomasa $s(t)$ en un ecosistema dado se incrementa a una tasa aproximada de 3.5 toneladas por año, y decrece, aproximadamente, 1.9% por año. La situación se puede calcular mediante la ecuación diferencial

$$\frac{ds}{dt} = 3.5 - 0.019s.$$

a) Resolver la ecuación diferencial.
b) Usar una herramienta de graficación para presentar el campo de pendientes de la ecuación diferencial. ¿Qué se observa?
c) Explicar qué sucede cuando $t \to \infty$.

En los ejercicios 12 a 14, un investigador médico quiere determinar la concentración *C* (en moles por litro) de un medicamento marcador inyectado en un fluido en movimiento. Resolver este problema al considerar un modelo de dilución de un compartimento simple (ver la figura). Suponer que el fluido está siendo mezclado y que el volumen de éste en el compartimento es constante.

Figura para 12 a 14

12. Si el marcador es inyectado instantáneamente en el tiempo $t = 0$, entonces la concentración del fluido en el compartimento se empieza a diluir según la ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = \left(-\frac{R}{V}\right)C, \quad C = C_0 \text{ cuando } t = 0.$$

a) Resolver la ecuación diferencial para encontrar la concentración C como función de t.
b) Encontrar el límite de C cuando $t \to \infty$.

13. Usar la solución de la ecuación diferencial en el ejercicio 12 para encontrar la concentración C como función del tiempo t y usar una herramienta de graficación para presentar la función.

a) $V = 2$ litros, $R = 0.5$ litros por minuto y $C_0 = 0.6$ moles por litro.
b) $V = 2$ litros, $R = 1.5$ litros por minuto y $C_0 = 0.6$ moles por litro.

14. En los ejercicios 12 y 13, se supuso que había una inyección simple inicial del medicamento marcador dentro del compartimento. Ahora considerar el caso en el cual el marcador es continuamente inyectado (iniciando en $t = 0$) a una tasa de Q moles por minuto. Si considera Q despreciable comparada con R, usar la ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q}{V} - \left(\frac{R}{V}\right)C, \quad C = 0 \text{ cuando } t = 0.$$

a) Resolver esta ecuación diferencial para encontrar la concentración C como función del tiempo t.
b) Encontrar el límite de C cuando $t \to \infty$.

7 Aplicaciones de la integral

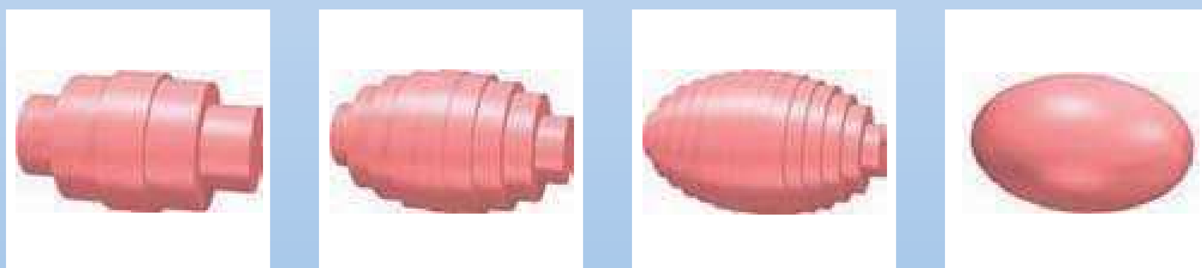
La integral tiene una amplia variedad de aplicaciones. Para cada una de las aplicaciones presentadas en este capítulo, se comenzará con una fórmula conocida, tal como el área de una región rectangular, el volumen de un disco circular o el trabajo realizado por una fuerza constante. Entonces el lector aprenderá cómo el límite de una suma da lugar a nuevas fórmulas que involucran la integral.

En este capítulo se aprenderá:

- Cómo usar una integral definida para encontrar el área de una región acotada por dos curvas. (7.1)
- Cómo encontrar el volumen de un sólido de revolución por el método de los discos y el método de las capas. (7.2 y 7.3)
- Cómo encontrar la longitud de una curva y el área de una superficie de revolución. (7.4)
- Cómo encontrar el trabajo realizado por una fuerza constante y una fuerza variable. (7.5)
- Cómo encontrar centros de masa y centroides. (7.6)
- Cómo encontrar la presión y la fuerza de un fluido. (7.7)

Eddie Hironaka/Getty Images

Un cable eléctrico se cuelga entre dos torres que están a 200 pies de distancia. El cable tiene la forma de catenaria. ¿Cuál es la longitud del cable entre las dos torres? (Ver sección 7.4, ejemplo 5.)



El *método de los discos* es un método que se usa para encontrar el volumen de un sólido. Este método requiere encontrar la suma de los volúmenes de discos representativos para aproximar el volumen del sólido. Cuando se incrementa el número de discos, la aproximación tiende a ser más exacta. En la sección 7.2 se usarán los límites para escribir el volumen exacto del sólido como una integral definida.

7.1 Área de una región entre dos curvas

- Encontrar el área de una región entre dos curvas usando integración.
- Encontrar el área de una región entre curvas que se intersecan usando integración.
- Describir la integración como un proceso de acumulación.

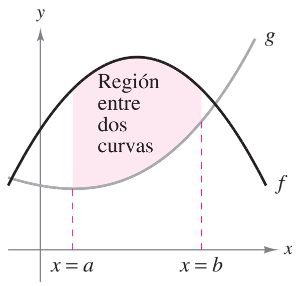
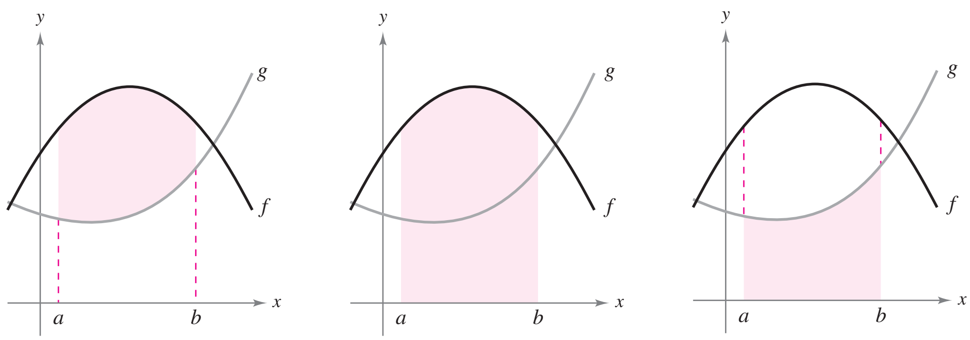


Figura 7.1

Área de una región entre dos curvas

A partir de unas modificaciones se puede extender la aplicación de las integrales definidas para el área de una región *bajo* una curva al área de una región *entre* dos curvas. Considerar dos funciones f y g que son continuas en el intervalo $[a, b]$. Si, como en la figura 7.1, las gráficas de f y g están sobre el eje x y la gráfica de g debajo de la gráfica de f, se puede interpretar geométricamente el área de la región entre las gráficas como el área de la región bajo la gráfica de g sustraída del área de la región bajo la gráfica f, como se muestra en la figura 7.2.



Área de la región entre f y g	=	Área de la región bajo f	−	Área de la región bajo g
$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$	=	$\int_a^b f(x)\,dx$	−	$\int_a^b g(x)\,dx$

Figura 7.2

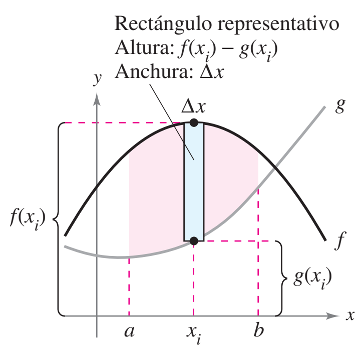


Figura 7.3

Para verificar que el resultado mostrado en la figura 7.2 es razonable, se puede dividir el intervalo $[a, b]$ entre n subintervalos, cada uno de anchura Δx. Entonces, como se muestra en la figura 7.3, se traza un **rectángulo representativo** de anchura Δx y altura $f(x_i) - g(x_i)$, donde x_i es un punto del i-ésimo subintervalo. El área de este rectángulo representativo es

$$\Delta A_i = (\text{altura})(\text{anchura}) = [f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x.$$

Por adición de las áreas de los n rectángulos y tomando el límite cuando $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x.$$

Porque f y g son continuas en $[a, b]$, $f - g$ también es continua en $[a, b]$ y el límite existe. Así que, el área de la región dada es

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.\end{aligned}$$

ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \le f(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

En la figura 7.1, las gráficas de f y g se muestran sobre el eje x. Esto, sin embargo, no es necesario. El mismo integrando $[f(x) - g(x)]$ puede usarse con tal de que f y g sean continuas y $g(x) \le f(x)$ para todo x en el intervalo $[a, b]$. Este resultado se resume en la figura 7.4. Observar en la figura 7.4 que la altura de un rectángulo representativo es $f(x) - g(x)$ con respecto de la posición relativa del eje x.

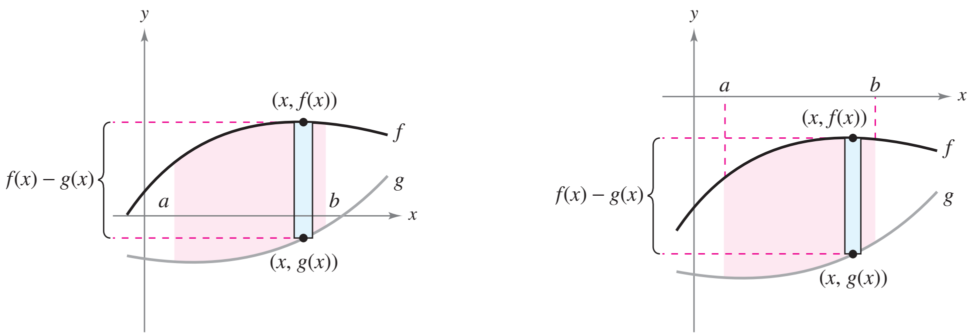


Figura 7.4

Se usan los rectángulos representativos a lo largo de este capítulo en varias aplicaciones de la integral. Un rectángulo vertical (de anchura Δx) implica la integral con respecto a x, mientras que un rectángulo horizontal (de anchura Δy) implica la integral con respecto a y.

EJEMPLO 1 Encontrar el área de una región entre dos curvas

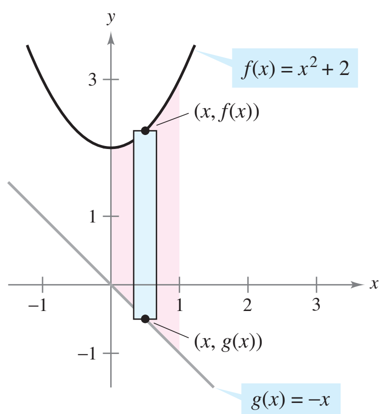
Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución Sean $g(x) = -x$ y $f(x) = x^2 + 2$. Entonces $g(x) \le f(x)$ para todo x en $[0, 1]$, como se muestra en la figura 7.5. Así, el área del rectángulo representativo es

$$\begin{aligned}\Delta A &= [f(x) - g(x)]\,\Delta x\\ &= [(x^2 + 2) - (-x)]\,\Delta x\end{aligned}$$

y el área de la región es

$$\begin{aligned}A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx &= \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)]\, dx\\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\\ &= \frac{17}{6}.\end{aligned}$$



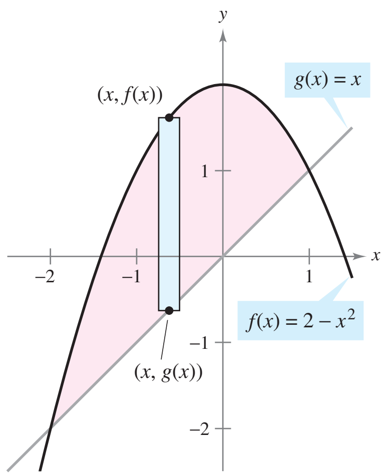
Región comprendida por la gráfica de f, la gráfica de g, $x = 0$ y $x = 1$
Figura 7.5

Área de una región entre curvas que se intersecan

En el ejemplo 1, las gráficas de $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -x$ no se intersecan, y los valores de a y b se dan explícitamente. Un problema más común involucra el área de una región comprendida entre dos gráficas que se *intersecan* donde los valores de a y b deben calcularse.

EJEMPLO 2 Región determinada por dos gráficas que se intersecan

Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x$.



Región comprendida por la gráfica de f y la gráfica de g
Figura 7.6

Solución En la figura 7.6 se observa que las gráficas de f y g tienen dos puntos de intersección. Para encontrar las coordenadas x de estos puntos, se hace $f(x)$ y $g(x)$ iguales y se resuelve para x.

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= x && \text{Igualar } f(x) \text{ con } g(x). \\ -x^2 - x + 2 &= 0 && \text{Escribir en forma general.} \\ -(x + 2)(x - 1) &= 0 && \text{Factorizar.} \\ x &= -2 \text{ o } 1 && \text{Despejar para } x. \end{aligned}$$

Así, $a = -2$ y $b = 1$. Porque $g(x) \le f(x)$ para todo x en el intervalo $[-2, 1]$, el rectángulo representativo tiene un área de

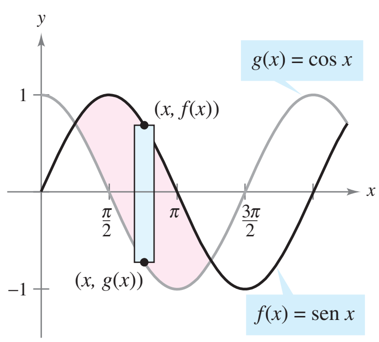
$$\begin{aligned} \Delta A &= [f(x) - g(x)]\,\Delta x \\ &= [(2 - x^2) - x]\,\Delta x \end{aligned}$$

y el área de la región es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Región determinada por dos gráficas que se intersecan

El seno y coseno de las curvas se intersecan infinitas veces, acotando regiones de áreas iguales, como se muestra en la figura 7.7. Encontrar el área de una de estas regiones.



Una de las regiones acotada por las gráficas de las funciones del seno y coseno
Figura 7.7

Solución

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \cos x && \text{Igualar } f(x) \text{ a } g(x). \\ \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} &= 1 && \text{Dividir cada lado por el coseno de } x. \\ \tan x &= 1 && \text{Identidad trigonométrica.} \\ x &= \frac{\pi}{4} \text{ o } \frac{5\pi}{4}, \quad 0 \le x \le 2\pi && \text{Despejar para } x. \end{aligned}$$

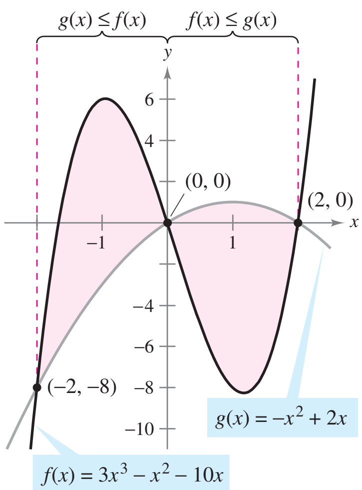
Así, $a = \pi/4$ y $b = 5\pi/4$. Porque $\operatorname{sen} x \ge \cos x$ para todo x en el intervalo $[\pi/4, 5\pi/4]$, el área de la región es

$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} [\operatorname{sen} x - \cos x]\,dx = \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Si dos curvas se intersecan en más de dos puntos, entonces para encontrar el área de la región comprendida entre las curvas, se deben encontrar todos los puntos de intersección y verificar en cada uno de los intervalos determinados por esos puntos, cuál de las gráficas está encima de la otra.

EJEMPLO 4 Curvas que se intersecan en más de dos puntos

Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.



Sobre $[-2, 0]$, $g(x) \le f(x)$, y sobre $[0, 2]$, $f(x) \le g(x)$

Figura 7.8

Solución Empezar igualando $f(x)$ y $g(x)$ y resolviendo para x. Así se obtienen las coordenadas de x en cada punto de intersección de las dos gráficas.

$$
\begin{aligned}
3x^3 - x^2 - 10x &= -x^2 + 2x && \text{Igualar } f(x) \text{ a } g(x).\\
3x^3 - 12x &= 0 && \text{Escribir en forma general.}\\
3x(x-2)(x+2) &= 0 && \text{Factorizar.}\\
x &= -2, 0, 2 && \text{Despejar para } x.
\end{aligned}
$$

Así, las dos gráficas se cortan cuando $x = -2$, 0 y 2. En la figura 7.8 se observa que $g(x) \le f(x)$ en el intervalo $[-2, 0]$. Sin embargo, las dos gráficas cambian en el origen, y $f(x) \le g(x)$ en el intervalo $[0, 2]$. Así, se necesitan dos integrales, una para el intervalo $[-2, 0]$ y otra para el intervalo $[0, 2]$.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx\\
&= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)\,dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)\,dx\\
&= \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-3x^4}{4} + 6x^2\right]_{0}^{2}\\
&= -(12 - 24) + (-12 + 24) = 24
\end{aligned}
$$

NOTA En el ejemplo 4 se observa que se obtiene un resultado incorrecto si se integra de -2 a 2. Tal integral produce

$$\int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-2}^{2} (3x^3 - 12x)\,dx = 0.$$

Si la gráfica de una función de y es una frontera de una región, es a menudo conveniente usar rectángulos representativos *horizontales* y encontrar el área integrando en la variable y. En general, para determinar el área entre dos curvas, se usan

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{[(\text{curva de arriba}) - (\text{curva de abajo})]}_{\text{en la variable } x}\,dx \qquad \text{Rectángulos verticales.}$$

$$A = \int_{y_1}^{y_2} \underbrace{[(\text{curva derecha}) - (\text{curva izquierda})]}_{\text{en la variable } y}\,dy \qquad \text{Rectángulos horizontales.}$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son los puntos adyacentes de intersección de las dos curvas implicadas o puntos sobre las rectas de la frontera especificadas.

EJEMPLO 5 Rectángulos representativos horizontales

Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $x = 3 - y^2$ y $x = y + 1$.

Solución Considerar

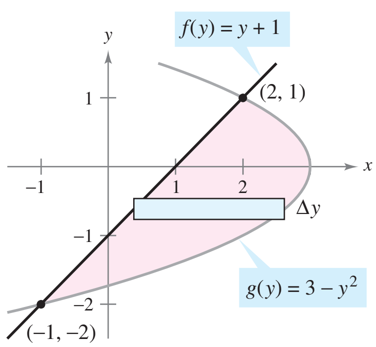
$$g(y) = 3 - y^2 \quad \text{y} \quad f(y) = y + 1.$$

Estas dos curvas se intersecan cuando $y = -2$ y $y = 1$, como se muestra en la figura 7.9. Porque $f(y) \leq g(y)$ en este intervalo, se tiene

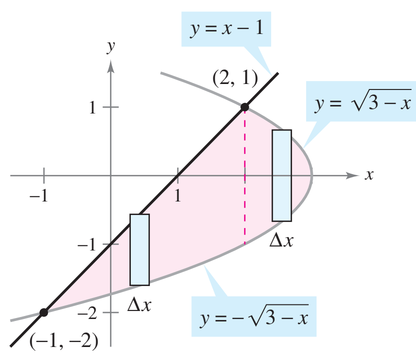
$$\Delta A = [g(y) - f(y)]\,\Delta y = [(3 - y^2) - (y + 1)]\,\Delta y.$$

Así, el área es

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{1} [(3 - y^2) - (y + 1)]\,dy \\
&= \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)\,dy \\
&= \left[\frac{-y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-2}^{1} \\
&= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) \\
&= \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$



Rectángulos horizontales (integración con respecto a y)
Figura 7.9



Rectángulos verticales (integración con respecto a x)
Figura 7.10

En el ejemplo 5 se observa que integrando con respecto a y se necesita sólo una integral. Si se integran con respecto a x, se necesitarían dos integrales porque la frontera superior habría cambiado en $x = 2$, como se muestra en la figura 7.10.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2} \left[(x - 1) + \sqrt{3 - x}\right] dx + \int_{2}^{3} \left(\sqrt{3 - x} + \sqrt{3 - x}\right) dx \\
&= \int_{-1}^{2} [x - 1 + (3 - x)^{1/2}]\,dx + 2\int_{2}^{3} (3 - x)^{1/2}\,dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{(3 - x)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^{2} - 2\left[\frac{(3 - x)^{3/2}}{3/2}\right]_{2}^{3} \\
&= \left(2 - 2 - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{16}{3}\right) - 2(0) + 2\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

La integración como un proceso de acumulación

En esta sección, la fórmula de la integral para el área entre dos curvas se desarrolló usando un rectángulo como el *elemento representativo*. Para cada nueva aplicación en las secciones restantes de este capítulo, se construirá un elemento representativo apropiado a partir de las fórmulas previas al cálculo que ya se conocen. Cada fórmula de la integración se obtendrá sumando o acumulando estos elementos representativos.

Fórmula conocida previa al cálculo ⇨ Elemento representativo ⇨ Nueva fórmula de integración

Por ejemplo, en esta sección la fórmula del área se desarrolla como sigue.

$A = (\text{altura})(\text{ancho})$ ⇨ $\Delta A = [f(x) - g(x)]\,\Delta x$ ⇨ $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

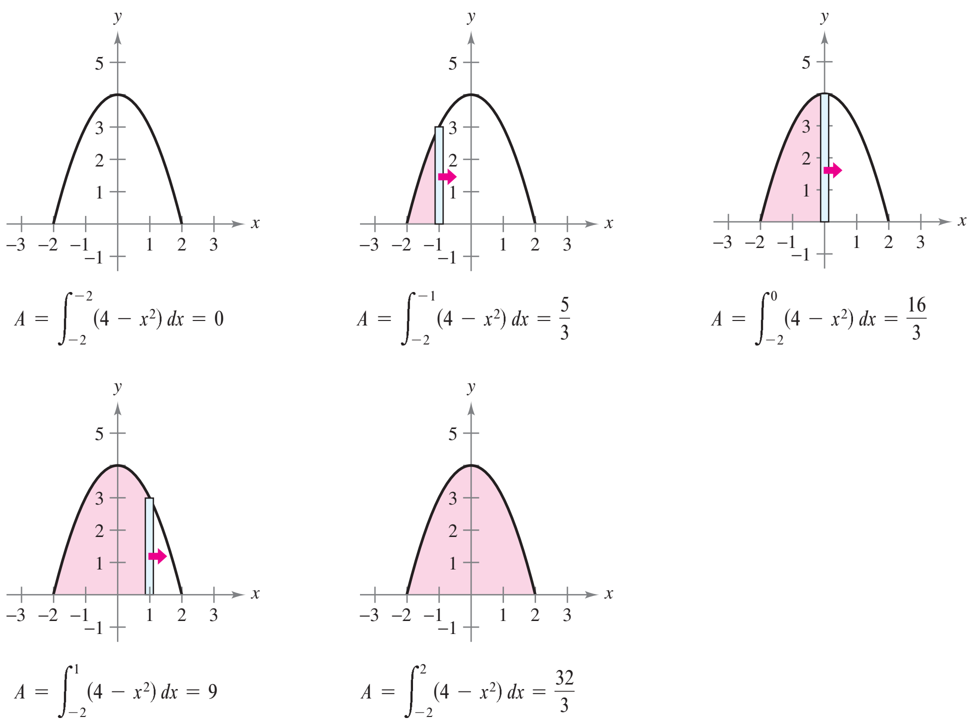
EJEMPLO 6 Descripción de la integración como un proceso de acumulación

Encontrar el área de la región acotada por la gráfica de $y = 4 - x^2$ y el eje x. Describir la integración como un proceso de acumulación.

Solución El área de la región está dada por

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx.$$

Se piensa en la integración como una acumulación de las áreas de los rectángulos formados al ir desplazando los rectángulos representativos de $x = -2$ a $x = 2$, como se muestra en la figura 7.11.



$A = \int_{-2}^{-2} (4 - x^2)\,dx = 0$

$A = \int_{-2}^{-1} (4 - x^2)\,dx = \frac{5}{3}$

$A = \int_{-2}^{0} (4 - x^2)\,dx = \frac{16}{3}$

$A = \int_{-2}^{1} (4 - x^2)\,dx = 9$

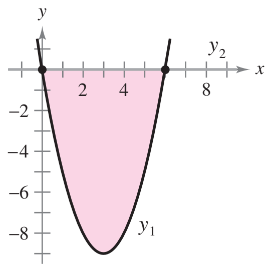
$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \frac{32}{3}$

Figura 7.11

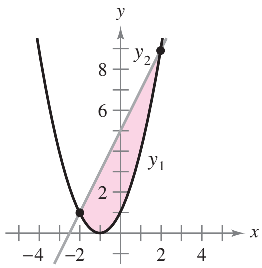
7.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, formular la integral definida que da el área de la región.

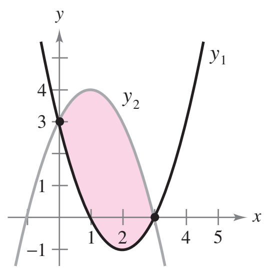
1. $y_1 = x^2 - 6x$
$y_2 = 0$



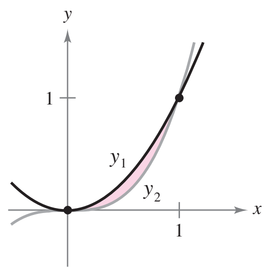
2. $y_1 = x^2 + 2x + 1$
$y_2 = 2x + 5$



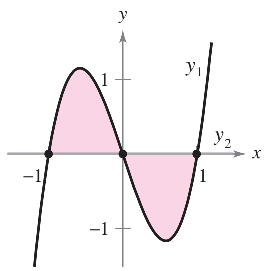
3. $y_1 = x^2 - 4x + 3$
$y_2 = -x^2 + 2x + 3$



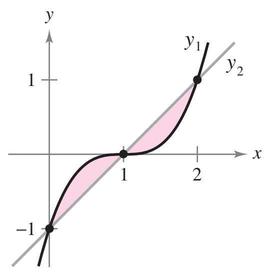
4. $y_1 = x^2$
$y_2 = x^3$



5. $y_1 = 3(x^3 - x)$
$y_2 = 0$



6. $y_1 = (x-1)^3$
$y_2 = x - 1$



En los ejercicios 7 a 14, el integrando de la integral definida es una diferencia de dos funciones. Dibujar la gráfica de cada función y sombrear la región cuya área está representada por la integral.

7. $\displaystyle\int_0^4 \left[(x+1) - \frac{x}{2}\right] dx$

8. $\displaystyle\int_{-1}^1 [(2 - x^2) - x^2]\, dx$

9. $\displaystyle\int_0^6 \left[4(2^{-x/3}) - \frac{x}{6}\right] dx$

10. $\displaystyle\int_2^3 \left[\left(\frac{x^3}{3} - x\right) - \frac{x}{3}\right] dx$

11. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2 - \sec x)\, dx$

12. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec^2 x - \cos x)\, dx$

13. $\displaystyle\int_{-2}^1 [(2 - y) - y^2]\, dy$

14. $\displaystyle\int_0^4 \left(2\sqrt{y} - y\right) dy$

Para pensar **En los ejercicios 15 y 16, determinar qué valor se aproxima mejor al área de la región acotada por las gráficas de *f* y *g*. (Hacer la selección con base en un dibujo de la región sin haber hecho algún cálculo.)**

15. $f(x) = x + 1, \quad g(x) = (x-1)^2$

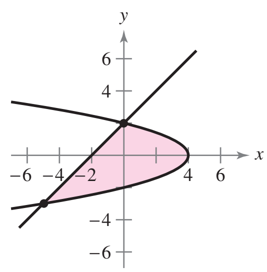
a) −2 *b)* 2 *c)* 10 *d)* 4 *e)* 8

16. $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x, \quad g(x) = 2 - \sqrt{x}$

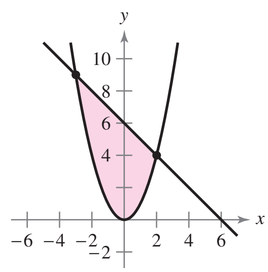
a) 1 *b)* 6 *c)* −3 *d)* 3 *e)* 4

En los ejercicios 17 y 18, encontrar el área de la región integrando *a*) con respecto a *x* y *b*) con respecto a *y*. *c*) comparar sus resultados. ¿Cuál método es más simple? En general, este método siempre será más sencillo en uno que en otro. ¿Por qué sí o por qué no?

17. $x = 4 - y^2$
$x = y - 2$



18. $y = x^2$
$y = 6 - x$



En los ejercicios 19 a 36, trazar la región acotada por las gráficas de las funciones algebraicas y encontrar el área de la región.

19. $y = x^2 - 1,\ y = -x + 2,\ x = 0,\ x = 1$

20. $y = -x^3 + 3,\ y = x,\ x = -1,\ x = 1$

21. $y = \frac{1}{2}x^3 + 2,\ \ y = x + 1,\ \ x = 0,\ \ x = 2$

22. $y = -\frac{3}{8}x(x - 8),\ \ y = 10 - \frac{1}{2}x,\ \ x = 2,\ \ x = 8$

23. $f(x) = x^2 - 4x,\ \ g(x) = 0$

24. $f(x) = -x^2 + 4x + 1,\ \ g(x) = x + 1$

25. $f(x) = x^2 + 2x,\ g(x) = x + 2$

26. $f(x) = -x^2 + \frac{9}{2}x + 1,\ g(x) = \frac{1}{2}x + 1$

27. $y = x,\ \ y = 2 - x,\ \ y = 0$

28. $y = 1/x^2,\ \ y = 0,\ \ x = 1,\ \ x = 5$

29. $f(x) = \sqrt{x} + 3,\ g(x) = \frac{1}{2}x + 3$

30. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1},\ \ g(x) = x - 1$

31. $f(y) = y^2,\ \ g(y) = y + 2$

32. $f(y) = y(2 - y),\ \ g(y) = -y$

33. $f(y) = y^2 + 1,\ \ g(y) = 0,\ \ y = -1,\ \ y = 2$

34. $f(y) = \dfrac{y}{\sqrt{16 - y^2}},\ \ g(y) = 0,\ \ y = 3$

35. $f(x) = \dfrac{10}{x},\ \ x = 0,\ \ y = 2,\ \ y = 10$

36. $g(x) = \dfrac{4}{2 - x},\ \ y = 4,\ \ x = 0$

En los ejercicios 37 a 46, *a*) usar una herramienta de graficación para representar la región comprendida por las gráficas de las ecuaciones, *b*) encontrar el área de la región y *c*) usar las capacidades de integración de una herramienta de graficación para verificar los resultados.

37. $f(x) = x(x^2 - 3x + 3), \quad g(x) = x^2$

38. $f(x) = x^3 - 2x + 1, \quad g(x) = -2x, \quad x = 1$

39. $y = x^2 - 4x + 3, \quad y = 3 + 4x - x^2$

40. $y = x^4 - 2x^2, \quad y = 2x^2$

41. $f(x) = x^4 - 4x^2, \quad g(x) = x^2 - 4$

42. $f(x) = x^4 - 4x^2, \quad g(x) = x^3 - 4x$

43. $f(x) = 1/(1 + x^2), \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2$

44. $f(x) = 6x/(x^2 + 1), \quad y = 0, \quad 0 \le x \le 3$

45. $y = \sqrt{1 + x^3}, \quad y = \frac{1}{2}x + 2, \quad x = 0$

46. $y = x\sqrt{\dfrac{4 - x}{4 + x}}, \quad y = 0, \quad x = 4$

En los ejercicios 47 a 52, trazar la región acotada por las gráficas de las funciones, y encontrar el área de la región.

47. $f(x) = \cos x, \quad g(x) = 2 - \cos x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

48. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos 2x, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

49. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \tan x, \quad -\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{3}$

50. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{4} \tan \dfrac{\pi x}{4}, \quad g(x) = \left(\sqrt{2} - 4\right)x + 4, \quad x = 0$

51. $f(x) = xe^{-x^2}, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le 1$

52. $f(x) = 3^x, \quad g(x) = 2x + 1$

En los ejercicios 53 a 56, *a*) usar una herramienta de graficación para trazar la gráfica de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, *b*) encontrar el área de la región y *c*) usar las funciones de integración de la herramienta de graficación para verificar los resultados.

53. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le \pi$

54. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x, \quad y = 0, \quad 0 < x \le \pi$

55. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{1/x}, \quad y = 0, \quad 1 \le x \le 3$

56. $g(x) = \dfrac{4 \ln x}{x}, \quad y = 0, \quad x = 5$

En los ejercicios 57 a 60, *a*) usar una herramienta de graficación para trazar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, *b*) explicar por qué el área de la región es difícil de encontrar a mano y *c*) usar las funciones de integración de la herramienta de graficación para verificar los resultados con cuatro decimales significativos.

57. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{4 - x}}, \quad y = 0, \quad x = 3$

58. $y = \sqrt{x}\, e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

59. $y = x^2, \quad y = 4 \cos x$

60. $y = x^2, \quad y = \sqrt{3 + x}$

En los ejercicios 61 a 64, encontrar la función de acumulación F. Entonces evaluar F en cada valor de la variable independiente y gráficamente mostrar el área dada por cada valor de F.

61. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\tfrac{1}{2}t + 1\right) dt$ *a*) $F(0)$ *b*) $F(2)$ *c*) $F(6)$

62. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\tfrac{1}{2}t^2 + 2\right) dt$ *a*) $F(0)$ *b*) $F(4)$ *c*) $F(6)$

63. $F(\alpha) = \displaystyle\int_{-1}^{\alpha} \cos \frac{\pi\theta}{2}\, d\theta$ *a*) $F(-1)$ *b*) $F(0)$ *c*) $F\left(\tfrac{1}{2}\right)$

64. $F(y) = \displaystyle\int_{-1}^{y} 4e^{x/2}\, dx$ *a*) $F(-1)$ *b*) $F(0)$ *c*) $F(4)$

En los ejercicios 65 a 68, usar la integración para encontrar el área de la figura que tiene los vértices dados.

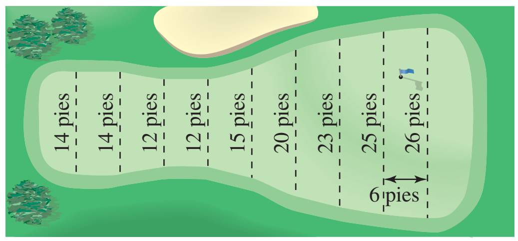
65. $(2, -3), (4, 6), (6, 1)$

66. $(0, 0), (a, 0), (b, c)$

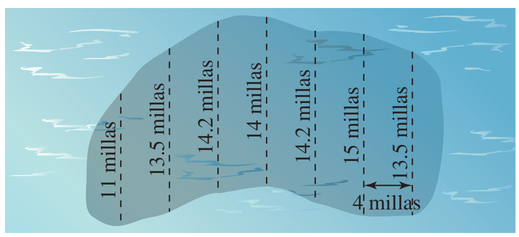
67. $(0, 2), (4, 2), (0, -2), (-4, -2)$

68. $(0, 0), (1, 2), (3, -2), (1, -3)$

69. ***Integración numérica*** Estimar el área de la superficie del *green* de golf usando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.



70. ***Integración numérica*** Estimar el área de la superficie del derrame de petróleo usando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.



En los ejercicios 71 y 72, evaluar la integral e interpretar ésta como el área de la región. Después usar una computadora para graficar la región.

71. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} |\operatorname{sen} 2x - \cos 4x|\, dx$

72. $\displaystyle\int_0^2 \left|\sqrt{x + 3} - 2x\right| dx$

En los ejercicios 73 a 76, formular y evaluar la integral definida que da el área de la región acotada por la gráfica de la función y la recta tangente para la gráfica en el punto dado.

73. $f(x) = x^3, \quad (1, 1)$

74. $y = x^3 - 2x, \quad (-1, 1)$

75. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}, \quad \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

76. $y = \dfrac{2}{1 + 4x^2}, \quad \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$

Desarrollo de conceptos

77. Las gráficas $y = x^4 - 2x^2 + 1$ y $y = 1 - x^2$ se intersecan en tres puntos. Sin embargo, el área entre las curvas *puede* encontrarse por una sola integral. Explicar por qué es así, y escribir una integral para esta área.

78. El área de la región acotada por las gráficas de $y = x^3$ y $y = x$ *no puede* encontrarse por una integral única $\int_{-1}^{1}(x^3 - x)\,dx$. Explicar por qué esto es así. Usar la simetría para escribir una sola integral que representa el área.

79. Un graduado de la universidad tiene dos ofertas de trabajo. El sueldo de arranque para cada una es \$32 000 y después de 8 años de servicio cada una pagará \$54 000. El aumento del sueldo para cada oferta se muestra en la figura. Dar un punto de vista estrictamente monetario de qué oferta es mejor. Explicar.

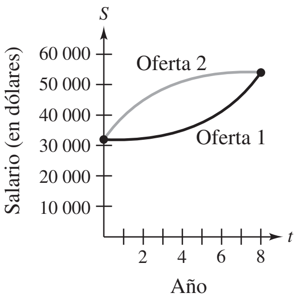


Figura para 79

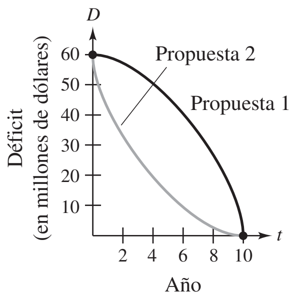


Figura para 80

80. Una legislatura estatal está debatiendo dos propuestas para eliminar el déficit del presupuesto anual para el año 2010. La tasa de disminución del déficit para cada propuesta se muestra en la figura. Desde el punto de vista de minimizar el déficit estatal acumulativo ¿cuál es la mejor propuesta? Explicar.

81. Se prueban dos coches en una pista recta con velocidades v_1 y v_2 (en metros por segundo). Considerar lo siguiente.

$$\int_0^5 [v_1(t) - v_2(t)]\,dt = 10 \qquad \int_0^{10} [v_1(t) - v_2(t)]\,dt = 30$$

$$\int_{20}^{30} [v_1(t) - v_2(t)]\,dt = -5$$

a) Escribir una interpretación verbal de cada integral.

b) ¿Es posible determinar la distancia entre los dos coches cuando $t = 5$ segundos? ¿Por qué sí? o ¿por qué no?

c) Suponiendo que ambos coches arrancan al mismo tiempo y lugar, ¿qué coche va por delante en $t = 10$ segundos? ¿Qué tan adelante está el coche?

d) Suponiendo que el coche 1 tiene una velocidad v_1 y está al frente del coche 2 por 13 metros en $t = 20$ segundos, ¿qué tan adelante o atrás está el coche 1 cuando $t = 30$ segundos?

Para discusión

82. Sean f y g una función continua en $[a, b]$ y $g(x) \le f(x)$ para toda x en $[a, b]$. Escribir el área obtenida para $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$. ¿La interpretación del área de esta integral cambia cuando $f(x) \ge 0$ y $g(x) \le 0$?

En los ejercicios 83 y 84, encontrar b tal que la recta $y = b$ divide la región intersecada por las gráficas de las dos ecuaciones en dos regiones de área igual.

83. $y = 9 - x^2, \quad y = 0$

84. $y = 9 - |x|, \quad y = 0$

En los ejercicios 85 y 86, encontrar a tal que la recta $x = a$ divida la región intersecada por las gráficas de las ecuaciones en dos regiones de área igual.

85. $y = x, \quad y = 4, \quad x = 0$

86. $y^2 = 4 - x, \quad x = 0$

En los ejercicios 87 y 88, evaluar el límite y dibujar la gráfica de la región cuya área se representa por el límite.

87. $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^2)\,\Delta x$, donde $x_i = i/n$ y $\Delta x = 1/n$

88. $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (4 - x_i^2)\,\Delta x$, donde $x_i = -2 + (4i/n)$ y $\Delta x = 4/n$

En los ejercicios 89 y 90, *a*) encontrar los dos puntos de inflexión de la gráfica de f, *b*) determinar la ecuación de la recta que interseca ambos puntos y *c*) calcular el área de las tres regiones acotada por la gráfica de f y la recta. ¿Qué se observa?

89. $f(x) = x^4 + 4x^3 + x + 7$

90. $f(x) = 2x^4 - 12x^2 + 3x - 1$

Ingresos **En los ejercicios 91 y 92 se dan dos modelos R_1 y R_2 para el ingreso (en miles de millones de dólares por año) para una corporación grande. El modelo R_1 da los ingresos anuales proyectados de 2008 a 2013, con $t = 8$ que corresponden a 2008, y R_2 da los ingresos proyectados si hay una disminución en la proporción de crecimiento de ventas corporativas sobre el periodo. Aproximar la reducción total en el ingreso si las ventas corporativas son realmente más cercanas al ejemplo R_2.**

91. $R_1 = 7.21 + 0.58t$
$R_2 = 7.21 + 0.45t$

92. $R_1 = 7.21 + 0.26t + 0.02t^2$
$R_2 = 7.21 + 0.1t + 0.01t^2$

93. ***Curva de Lorenz*** Los economistas usan la *curva de Lorenz* para ilustrar la distribución del ingreso en un país. Una curva de Lorenz, $y = f(x)$, representa la distribución del ingreso real en el país. En este modelo, x representa el porcentaje de familias en el país y y representa el porcentaje de ingreso total. El modelo $y = x$ representa un país en que cada familia tiene el mismo ingreso. El área entre estos dos modelos, donde $0 \le x \le 100$, indica la "desigualdad del ingreso" de un país. La tabla muestra el porcentaje de ingreso y para los porcentajes seleccionados de x familias en un país.

x	10	20	30	40	50
y	3.35	6.07	9.17	13.39	19.45

x	60	70	80	90
y	28.03	39.77	55.28	75.12

a) Usar una herramienta de graficación para encontrar un modelo cuadrático para la curva de Lorenz.

b) Trazar una gráfica de los datos y del modelo.

c) Representar el modelo $y = x$. ¿Cómo se compara este modelo con respecto al modelo *a*)?

d) Usar las capacidades de la integración de una calculadora para aproximar la “desigualdad del ingreso”.

94. ***Beneficios*** El departamento de contabilidad de una compañía informa que los beneficios durante el último año fiscal fueron de 15.9 millones de dólares. El departamento predice que los beneficios por crecimiento continuo durante los próximos 5 años generarán una tasa anual continua entre $3\frac{1}{2}$ y 5%. Estimar la diferencia acumulativa en los beneficios durante los 5 años basados en el rango predicho de tasas de crecimiento.

95. ***Área*** La región sombreada en la figura consiste en todos los puntos cuyas distancias del centro del cuadrado es menor que las distancias a los bordes del cuadrado. Encontrar el área de la región.

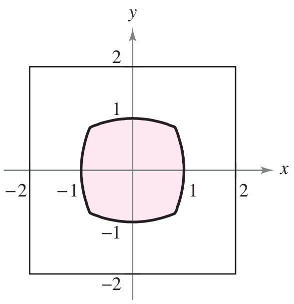


Figura para 95

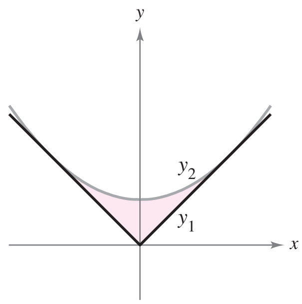


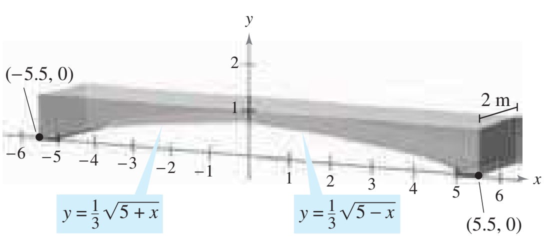
Figura para 96

96. ***Diseño mecánico*** La superficie de una parte de una máquina es la región entre las gráficas de $y_1 = |x|$ y $y_2 = 0.08x^2 + k$ (véase la figura).

a) Encontrar k si la parábola es tangente a la gráfica de y_1.

b) Encontrar el área de la superficie de la parte de la máquina.

97. ***Diseño de construcción*** Las secciones de concreto (hormigón) para un nuevo edificio tienen las dimensiones (en metros) y la forma mostrada en la figura.



a) Encontrar el área de la cara adosada en el sistema de la coordenada rectangular.

b) Encontrar el volumen de concreto en una de las secciones multiplicando el área obtenida en el apartado *a*) por 2 metros.

c) Un metro cúbico de concreto pesa 5 000 libras. Encontrar el peso de la sección.

98. ***Diseño de construcción*** Para disminuir el peso y ayudar en el proceso del endurecimiento, las secciones de concreto en el ejercicio 97 no son a menudo sólidas. Rehacer el ejercicio 97 haciendo orificios cilíndricos como los mostrados en la figura.

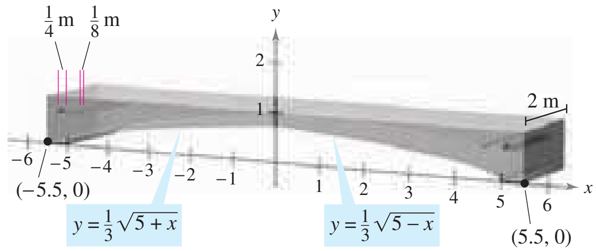


Figura para 98

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 99 a 102, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un contraejemplo.**

99. Si el área de la región limitada por las gráficas de f y g es 1, entonces el área de la región acotada por las gráficas de $h(x) = f(x) + C$ y $k(x) = g(x) + C$ también es 1.

100. Si $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = A$, entonces $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = -A$.

101. Si las gráficas de f y g se intersecan a la mitad del camino entre $x = a$ y $x = b$, entonces, $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = 0$.

102. La recta $y = \left(1 - \sqrt[3]{0.5}\right)x$ divide la región debajo de la curva $f(x) = x(1 - x)$ para $[0, 1]$ en dos regiones de igual área.

103. ***Área*** Encontrar el área entre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y el segmento de recta que une los puntos (0, 0) y $\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$, como se muestra en la figura.

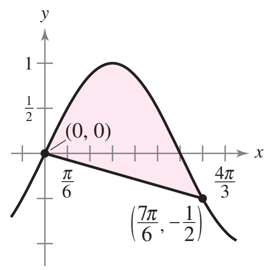


Figura para 103

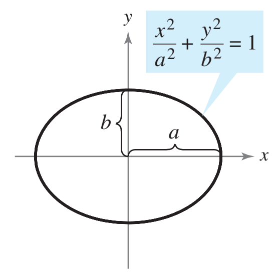
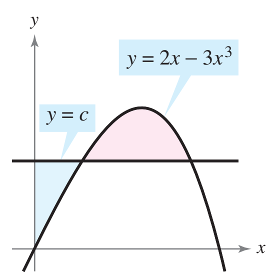


Figura para 104

104. ***Área*** Sea $a > 0$ y $b > 0$. Mostrar que el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es πab (ver la figura).

Preparación del examen Putnam

105. La recta horizontal $y = c$ interseca la curva $y = 2x - 3x^3$ en el primer cuadrante como se muestra en la figura. Encontrar c para que las áreas de las dos regiones sombreadas sean iguales.

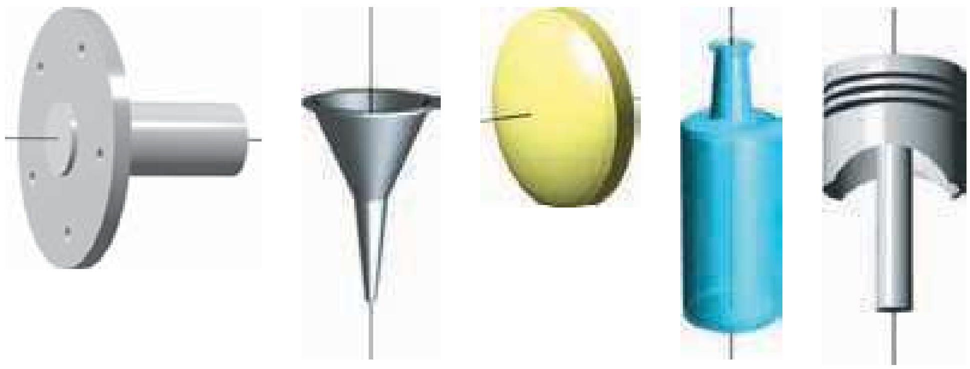


7.2 Volumen: el método de los discos

- Encontrar el volumen de un sólido de revolución usando el método de los discos.
- Encontrar el volumen de un sólido de revolución usando el método de las arandelas.
- Encontrar el volumen de un sólido con las secciones transversales conocidas.

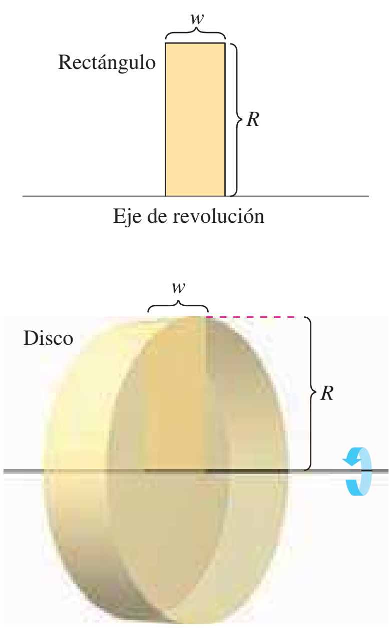
Método de los discos

Anteriormente se mencionó que el área es una de las *muchas* aplicaciones de la integral definida. Otra aplicación importante es su uso para encontrar el volumen de un sólido tridimensional. En esta sección se estudiará un tipo particular de un sólido tridimensional cuyas secciones transversales son similares. Por lo común se emplean sólidos de revolución en ingeniería y manufactura. Algunos ejemplos son ejes, embudos, píldoras, botellas y pistones, como se muestra en la figura 7.12.



Sólidos de revolución
Figura 7.12

Si una región en el plano gira alrededor de una recta, el sólido resultante es un **sólido de revolución**, y la recta se llama **eje de revolución**. El sólido más simple es un cilindro circular recto o **disco** que se forma al girar un rectángulo en torno a uno de sus lados como se muestra en la figura 7.13. El volumen de tal disco es



Volumen de un disco: $\pi R^2 w$
Figura 7.13

$$\begin{aligned}\text{Volumen del disco} &= (\text{área de disco})(\text{anchura de disco})\\ &= \pi R^2 w\end{aligned}$$

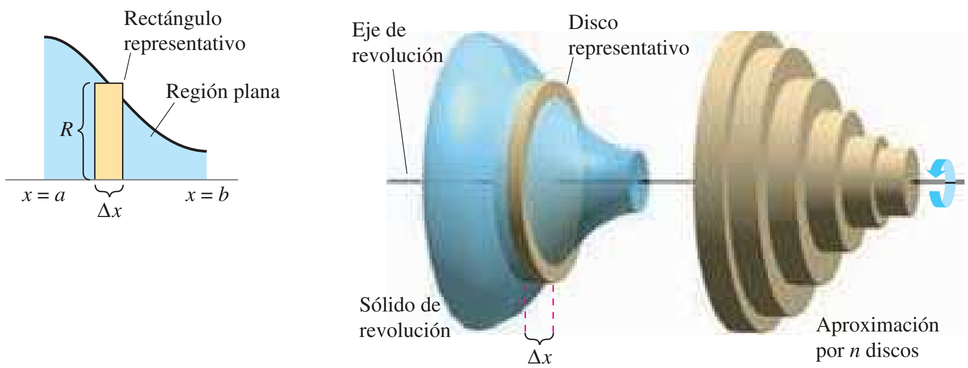
donde R es el radio del disco y w es la anchura.

Para observar cómo usar el volumen de un disco para encontrar el volumen de un sólido general de revolución, considerar un sólido de revolución formado al girar la región plana en la figura 7.14 alrededor del eje indicado. Para determinar el volumen de este sólido, considerar un rectángulo representativo en la región plana. Cuando este rectángulo gira alrededor del eje de revolución, genera un disco representativo cuyo volumen es

$$\Delta V = \pi R^2 \Delta x.$$

Aproximando el volumen del sólido por el de los n discos de anchura Δx y radio $R(x_i)$ produce

$$\begin{aligned}\text{Volumen del sólido} &\approx \sum_{i=1}^{n} \pi [R(x_i)]^2 \, \Delta x\\ &= \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2 \, \Delta x.\end{aligned}$$



Método de los discos
Figura 7.14

Esta aproximación parece mejor y aún más cuando $\|\Delta\| \to 0 (n \to \infty)$. Así, se puede definir el volumen del sólido como

$$\text{Volumen del disco} = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2 \, \Delta x = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx.$$

Esquemáticamente, el método del disco es como sigue

Fórmula conocida		*Elemento representativo*		*Nueva fórmula de integración*
Volumen del disco $V = \pi R^2 w$	⇨	$\Delta V = \pi [R(x_i)]^2 \, \Delta x$	⇨	Sólido de revolución $V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$

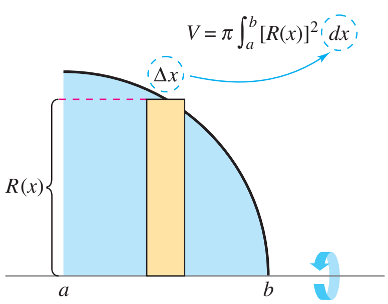
Una fórmula similar puede derivarse si el eje de revolución es vertical.

Método de los discos

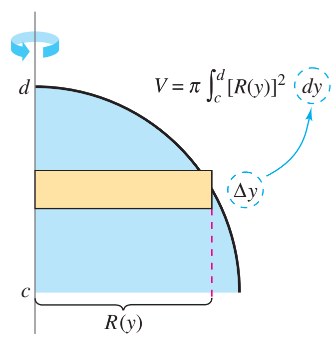
Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el **método de los discos**, usar una de las fórmulas siguientes, como se muestra en la figura 7.15.

Eje de revolución horizontal	*Eje de revolución vertical*
$\text{Volumen} = V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$	$\text{Volumen} = V = \pi \int_c^d [R(y)]^2 \, dy$

NOTA En la figura 7.15, observar que se puede determinar la variable de integración tomando un rectángulo representativo en la región plana "perpendicular" al eje de revolución. Si la anchura del rectángulo es Δx, integrar con respecto a x, y si la anchura del rectángulo es Δy, integrar con respecto a y. ■



Eje de revolución horizontal



Eje de revolución vertical

Figura 7.15

La aplicación más simple del método de los discos involucra una región plana acotada por la gráfica de f y el eje x. Si el eje de revolución es el eje x, el radio $R(x)$ simplemente es $f(x)$.

EJEMPLO 1 Uso del método de los discos

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

y el eje x $(0 \le x \le \pi)$ alrededor del eje x.

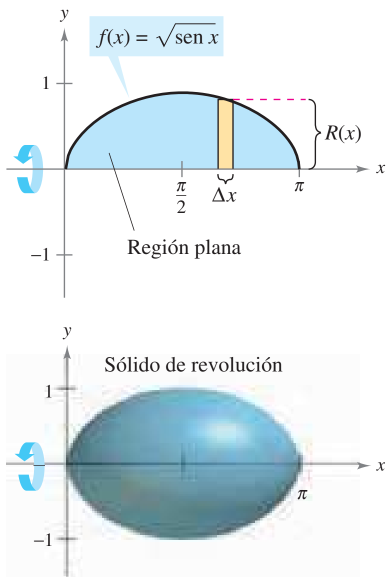


Figura 7.16

Solución Del rectángulo representativo en la gráfica superior en la figura 7.16, se puede ver que el radio de este sólido es

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) \\ &= \sqrt{\operatorname{sen} x}. \end{aligned}$$

Así, el volumen del sólido de revolución es

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\,dx &= \pi \int_0^{\pi} \left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)^2 dx && \text{Aplicar el método de los discos.} \\ &= \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx && \text{Simplificar.} \\ &= \pi \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} && \text{Integrar.} \\ &= \pi(1 + 1) \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Eje de revolución alrededor de una recta que no es un eje de coordenadas

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por

$$f(x) = 2 - x^2$$

y $g(x) = 1$ alrededor de la recta $y = 1$, como se muestra en la figura 7.17.

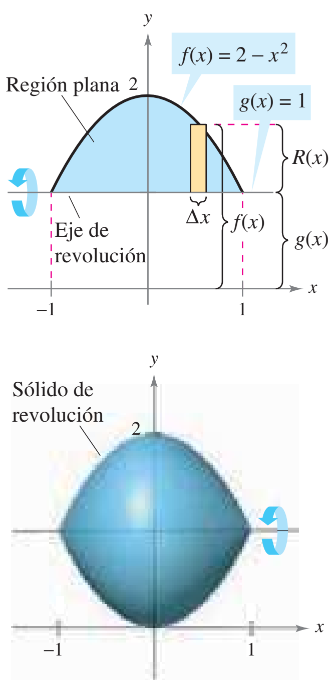


Figura 7.17

Solución Al igualar $f(x)$ y $g(x)$, se puede determinar que las dos gráficas se intersecan cuando $x = \pm 1$. Para encontrar el radio, restar $g(x)$ de $f(x)$.

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (2 - x^2) - 1 \\ &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

Por último, integrar entre -1 y 1 para encontrar el volumen.

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\,dx &= \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2\,dx && \text{Aplicar el método de los discos.} \\ &= \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,dx && \text{Simplificar.} \\ &= \pi \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} && \text{Integrar.} \\ &= \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

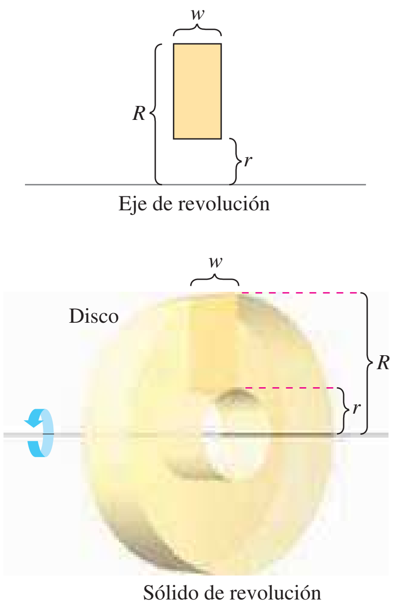


Figura 7.18

Método de las arandelas (anillos)

El método de los discos puede extenderse para cubrir sólidos de revolución huecos reemplazando el disco con una **arandela** (anillos). La arandela se forma al girar un rectángulo alrededor del eje, como se muestra en la figura 7.18. Si r y R son los radios interiores y exteriores de la arandela y w es la anchura, el volumen está dado por

$$\text{Volumen de la arandela} = \pi(R^2 - r^2)w.$$

Para ver cómo este concepto puede usarse para encontrar el volumen de un sólido de revolución, considerar una región acotada por un **radio exterior** $R(x)$ y un **radio interior** $r(x)$, como se muestra en la figura 7.19. Si la región se gira alrededor de su eje de revolución, el volumen del sólido resultante está dado por

$$V = \pi\int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\, dx. \qquad \text{Método de las arandelas.}$$

Observar que la integral que contiene el radio interior representa el volumen del hueco y se *resta* de la integral que contiene el radio exterior.

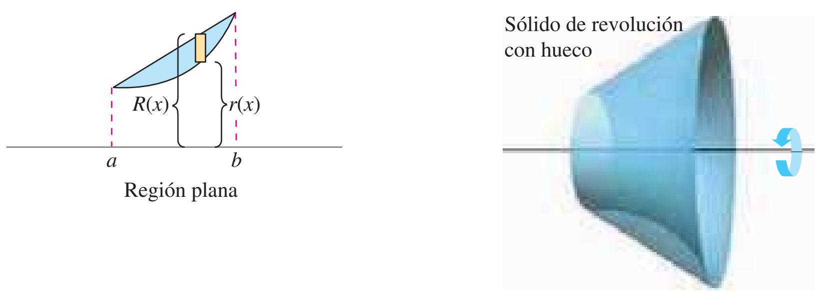
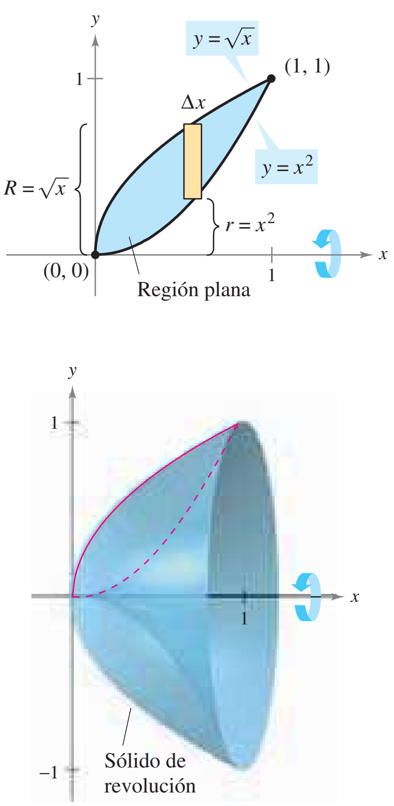


Figura 7.19



Sólido de revolución
Figura 7.20

EJEMPLO 3 Uso del método de las arandelas (anillos)

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ alrededor del eje x, como se muestra en la figura 7.20.

Solución En la figura 7.20 se puede observar que los radios exteriores e interiores son:

$$R(x) = \sqrt{x} \qquad \text{Radio exterior.}$$
$$r(x) = x^2 \qquad \text{Radio interior.}$$

Integrando entre 0 y 1 produce

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\, dx && \text{Aplicar el método de las arandelas.}\\ &= \pi\int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^2)^2\right] dx \\ &= \pi\int_0^1 (x - x^4)\, dx && \text{Simplificar.}\\ &= \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 && \text{Integrar.}\\ &= \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$

Hasta ahora, en cada ejemplo el eje de revolución ha sido *horizontal* y se integraba con respecto a x. En el próximo ejemplo, el eje de revolución será *vertical* y se integrará con respecto a y. En este ejemplo, se necesita efectuar dos integrales separadas para calcular el volumen.

EJEMPLO 4 Integración con respecto a y, con dos integrales

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje y, como se muestra en la figura 7.21.

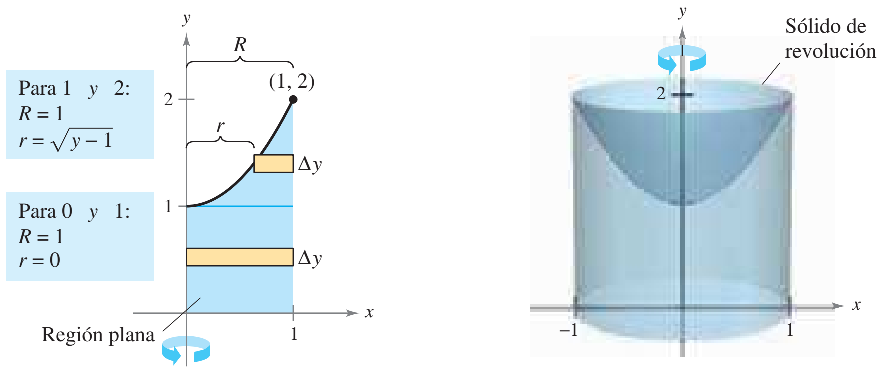


Figura 7.21

Solución Para la región mostrada en la figura 7.21, el radio exterior es $R = 1$. No hay, sin embargo, una fórmula única que represente el radio interior. Cuando $0 \leq y \leq 1$, $r = 0$, pero cuando $1 \leq y \leq 2$, r es determinado por la ecuación $y = x^2 + 1$ lo cual implica que $r = \sqrt{y - 1}$.

$$r(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq 1 \\ \sqrt{y-1}, & 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Con esta definición del radio interior se utilizan dos integrales para encontrar el volumen.

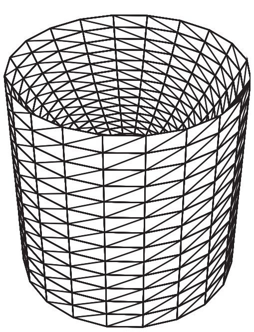
$$V = \pi\int_0^1 (1^2 - 0^2)\,dy + \pi\int_1^2 \left[1^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2\right]dy \qquad \text{Aplicar el método de las arandelas.}$$

$$= \pi\int_0^1 1\,dy + \pi\int_1^2 (2 - y)\,dy \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= \pi\Big[y\Big]_0^1 + \pi\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 \qquad \text{Integrar.}$$

$$= \pi + \pi\left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

Observar que la primera integral $\pi\int_0^1 1\,dy$ representa el volumen de un cilindro circular recto de radio 1 y altura 1. Esta porción del volumen podría ser determinada sin recurrir a la integración.



Generado por Mathematica

Figura 7.22

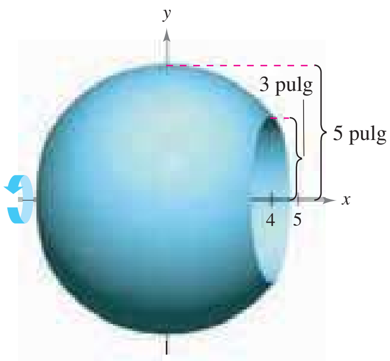
TECNOLOGÍA Algunas herramientas de graficación tienen la capacidad para generar (o tienen el software capaz de generar) un sólido de revolución. Si tiene acceso a tal herramienta, usarla para hacer la gráfica de algunos de los sólidos de revolución descritos en esta sección. Por ejemplo, el sólido en el ejemplo 4 podría aparecer como el mostrado en la figura 7.22.

EJEMPLO 5 Diseño de manufactura

Un fabricante taladra un orificio a través del centro de una esfera de metal de 5 pulgadas de radio, como se muestra en la figura 7.23*a*. El orificio tiene un radio de 3 pulgadas. ¿Cuál es el volumen del objeto de metal resultante?

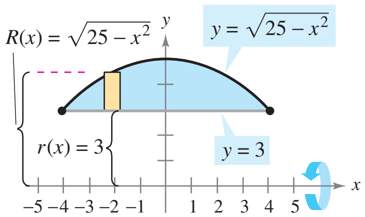
Solución Suponer el objeto generado por un segmento de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 25$, como se muestra en la figura 7.23*b*). Porque el radio del orificio es 3 pulgadas, sea $y = 3$ resolver la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ para determinar que los límites de integración son $x = \pm 4$. Así que, los radios interiores y exteriores son $r(x) = 3$ y $R(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y el volumen está dado por

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\, dx &= \pi \int_{-4}^{4} \left[\left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 - (3)^2\right] dx \\ &= \pi \int_{-4}^{4} (16 - x^2)\, dx \\ &= \pi \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4} \\ &= \frac{256\pi}{3} \text{ pulgadas cúbicas.} \end{aligned}$$



Sólido de revolución

a)



Región plana

b)

Figura 7.23

Sólidos con secciones transversales conocidas

Con el método de los discos, se puede encontrar el volumen de un sólido teniendo una sección transversal circular cuya área es $A = \pi R^2$. Este método puede generalizarse para los sólidos cuyas secciones, que son arbitrarias, sean de área conocida. Algunas secciones transversales comunes son cuadrados, rectángulos, triángulos, semicírculos y trapecios.

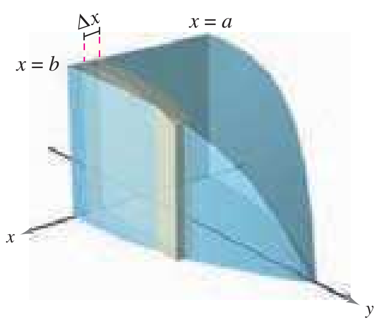
Volumen de sólidos con secciones transversales conocidas

1. Para secciones transversales de área $A(x)$ perpendiculares al eje x,

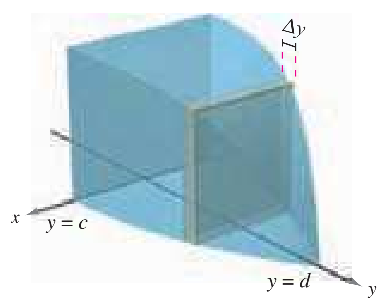
$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x)\, dx.$$ Ver figura 7.24*a*.

2. Para secciones transversales de área $A(y)$ perpendiculares al eje y,

$$\text{Volumen} = \int_c^d A(y)\, dy.$$ Ver figura 7.24*b*.

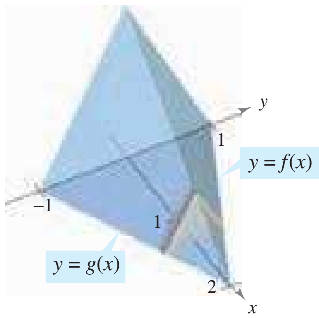


a) Secciones transversales perpendiculares al eje *x*

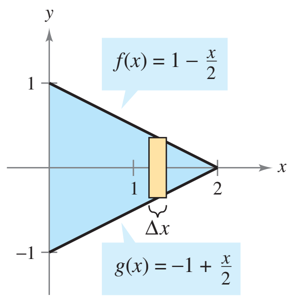


b) Secciones transversales perpendiculares al eje *y*

Figura 7.24



Las secciones transversales son triángulos equiláteros



Base triangular en el plano *xy*
Figura 7.25

EJEMPLO 6 Secciones transversales triangulares

Encontrar el volumen del sólido mostrado en la figura 7.25. La base del sólido es la región acotada por las rectas

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \qquad g(x) = -1 + \frac{x}{2}, \qquad \text{y} \qquad x = 0.$$

Las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros.

Solución La base y el área de cada sección transversal triangular son:

$$\text{Base} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(-1 + \frac{x}{2}\right) = 2 - x \qquad \text{Longitud de la base.}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{base})^2 \qquad \text{Área de triángulo equilátero.}$$

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2 \qquad \text{Área de sección transversal.}$$

Porque x varía entre 0 a 2, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V = \int_a^b A(x)\,dx &= \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2\,dx \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{(2 - x)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Una aplicación geométrica

Demostrar que el volumen de una pirámide con una base cuadrada es $V = \frac{1}{3}hB$, donde h es la altura de la pirámide y B es el área de la base.

Solución Como se muestra en la figura 7.26, se puede cortar o intersecar la pirámide con un plano de altura paralelo a la base a la altura y para formar una sección transversal cuadrada cuyos lados son de longitud b'. Por semejanza de triángulos, se puede mostrar que

$$\frac{b'}{b} = \frac{h - y}{h} \qquad \text{o} \qquad b' = \frac{b}{h}(h - y)$$

donde b es la longitud de los lados de la base de la pirámide. Así,

$$A(y) = (b')^2 = \frac{b^2}{h^2}(h - y)^2.$$

Integrando entre 0 y h se obtiene

$$\begin{aligned} V = \int_0^h A(y)\,dy &= \int_0^h \frac{b^2}{h^2}(h - y)^2\,dy \\ &= \frac{b^2}{h^2}\int_0^h (h - y)^2\,dy \\ &= -\left(\frac{b^2}{h^2}\right)\left[\frac{(h - y)^3}{3}\right]_0^h \\ &= \frac{b^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}hB. \qquad B = b^2. \end{aligned}$$

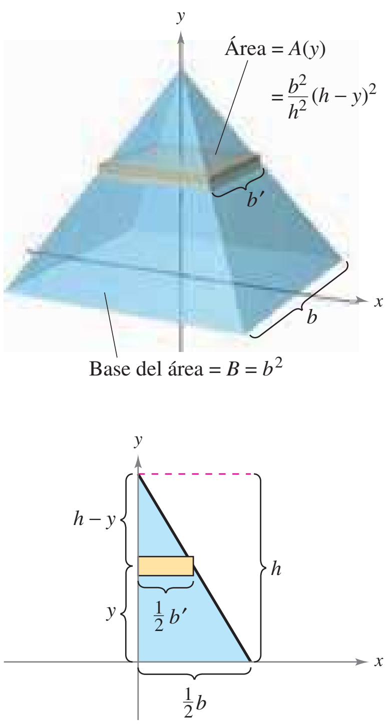
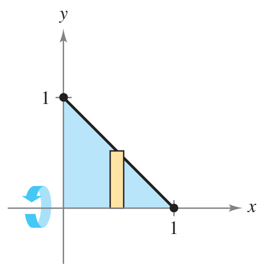


Figura 7.26

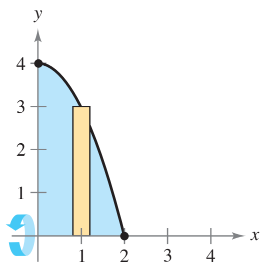
7.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje x.

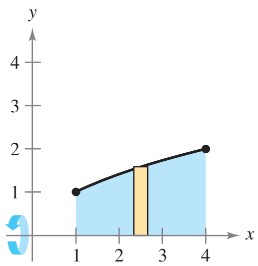
1. $y = -x + 1$



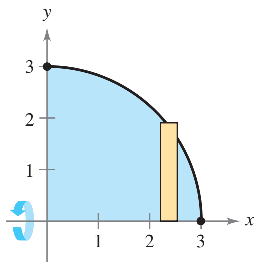
2. $y = 4 - x^2$



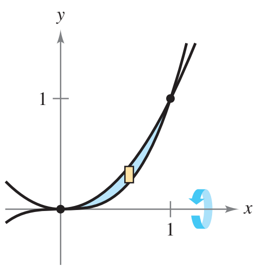
3. $y = \sqrt{x}$



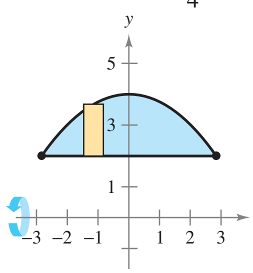
4. $y = \sqrt{9 - x^2}$



5. $y = x^2,\ y = x^3$

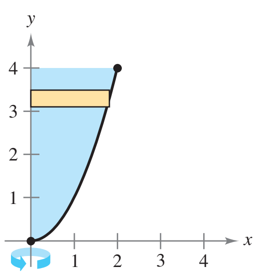


6. $y = 2,\ y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$

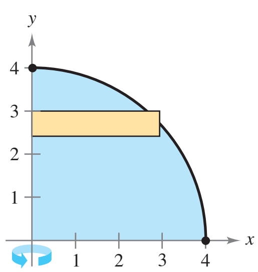


En los ejercicios 7 a 10, formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje y.

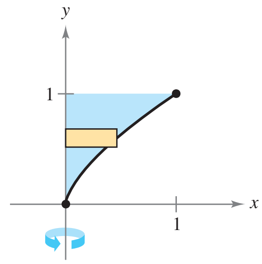
7. $y = x^2$



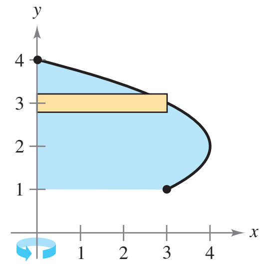
8. $y = \sqrt{16 - x^2}$



9. $y = x^{2/3}$



10. $x = -y^2 + 4y$



En los ejercicios 11 a 14, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de las rectas dadas.

11. $y = \sqrt{x},\quad y = 0,\quad x = 3$

a) el eje x *b)* el eje y
c) la recta $x = 3$ *d)* la recta $x = 6$

12. $y = 2x^2,\quad y = 0,\quad x = 2$

a) el eje y *b)* el eje x
c) la recta $y = 8$ *d)* la recta $x = 2$

13. $y = x^2,\quad y = 4x - x^2$

a) el eje x *b)* la recta $y = 6$

14. $y = 6 - 2x - x^2,\quad y = x + 6$

a) el eje x *b)* la recta $y = 3$

En los ejercicios 15 a 18, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de la recta $y = 4$.

15. $y = x,\quad y = 3,\quad x = 0$

16. $y = \frac{1}{2}x^3,\quad y = 4,\quad x = 0$

17. $y = \dfrac{3}{1 + x},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 3$

18. $y = \sec x,\quad y = 0,\quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$

En los ejercicios 19 a 22, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de la recta $x = 5$.

19. $y = x,\quad y = 0,\quad y = 4,\quad x = 5$

20. $y = 5 - x,\quad y = 0,\quad y = 4,\quad x = 0$

21. $x = y^2,\quad x = 4$

22. $xy = 5,\quad y = 2,\quad y = 5,\quad x = 5$

En los ejercicios 23 a 30, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor del eje x.

23. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 4$

24. $y = x\sqrt{9 - x^2},\quad y = 0$

25. $y = \dfrac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3$

26. $y = \dfrac{2}{x+1}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 6$

27. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

28. $y = e^{x/2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 4$

29. $y = x^2 + 1, \quad y = -x^2 + 2x + 5, \quad x = 0, \quad x = 3$

30. $y = \sqrt{x}, \quad y = -\frac{1}{2}x + 4, \quad x = 0, \quad x = 8$

En los ejercicios 31 y 32, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor del eje *y*.

31. $y = 3(2 - x), \quad y = 0, \quad x = 0$

32. $y = 9 - x^2, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 3$

En los ejercicios 33 a 36, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor del eje *x*. Verificar los resultados usando las capacidades de integración de una herramienta de graficación.

33. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi$

34. $y = \cos 2x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

35. $y = e^{x-1}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

36. $y = e^{x/2} + e^{-x/2}, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 2$

En los ejercicios 37 a 40, usar las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones alrededor de *x*.

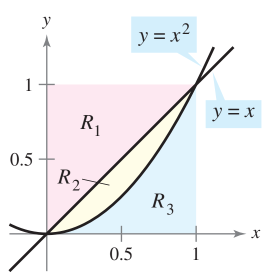
37. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$

38. $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3$

39. $y = 2 \arctan(0.2x), \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 5$

40. $y = \sqrt{2x}, \quad y = x^2$

En los ejercicios 41 a 48, encontrar el volumen generado por el giro de la región sobre la recta especificada.



41. R_1 sobre $x = 0$

42. R_1 sobre $x = 1$

43. R_2 sobre $y = 0$

44. R_2 sobre $y = 1$

45. R_3 sobre $x = 0$

46. R_3 sobre $x = 1$

47. R_2 sobre $x = 0$

48. R_2 sobre $x = 1$

Para pensar **En los ejercicios 49 y 50, determinar qué valor se aproxima mejor al volumen de un sólido generado por el giro de una región acotada por las gráficas de la ecuación sobre el eje *x* (marcar su selección sobre la base de un esbozo de los sólidos y *no* por el desempeño de cualquier cálculo).**

49. $y = e^{-x^2/2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$

a) 3 *b*) -5 *c*) 10 *d*) 7 *e*) 20

50. $y = \arctan x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

a) 10 *b*) $\frac{3}{4}$ *c*) 5 *d*) -6 *e*) 15

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 51 y 52, la integral representa el volumen de un sólido. Describir el sólido.

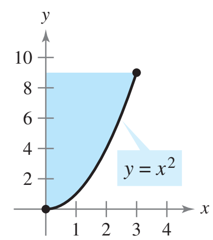
51. $\pi \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx$

52. $\pi \displaystyle\int_2^4 y^4 \, dy$

53. Una región acotada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje x gira alrededor del eje x. Una segunda región acotada por la parábola $y = 4 - x^2$ y el eje x se gira alrededor del eje x. Sin integrar, ¿cómo se comparan los volúmenes de los sólidos? Explicar.

54. La región en la figura se gira alrededor del eje y recta indicada. Ordenar los volúmenes de los sólidos resultantes de menor a mayor. Explicar el razonamiento.

a) eje x *b*) eje y *c*) $x = 3$



55. Discutir la validez de los siguientes enunciados.

a) Para un sólido formado mediante el giro de la región bajo una gráfica alrededor del eje x, las secciones transversales perpendiculares al eje x son discos circulares.

b) Para un sólido formado mediante el giro de la región entre dos gráficas alrededor del eje x, las secciones transversales perpendiculares al eje x son discos circulares.

Para discusión

56. Identificar la integral que representa el volumen del sólido obtenido por rotación del área entre $y = f(x)$ y $y = g(x)$, $a \le x \le b$, sobre el eje x. [Suponiendo que $f(x) \ge g(x) \ge 0$.]

a) $\pi \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx$ *b*) $\pi \displaystyle\int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx$

57. Si la porción de la recta $y = \frac{1}{2}x$ que queda en el primer cuadrante se gira alrededor del eje x, se genera un cono. Encontrar el volumen del cono que se extiende de $x = 0$ a $x = 6$.

58. Usar el método de los discos para verificar que el volumen de un cono circular recto es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h es la altura.

59. Usar el método de los discos para verificar que el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

60. Una esfera de radio r es cortada por un plano situado h $(h < r)$ unidades sobre el ecuador. Encontrar el volumen del sólido (el segmento esférico) sobre el plano.

61. Un cono de altura H con una base de radio r es cortado en un plano paralelo a la base y situado h unidades sobre ella. Encontrar el volumen del sólido (el tronco de un cono) que queda debajo del plano.

62. La región acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$ se gira alrededor del eje x.

a) Encontrar el valor de x en el intervalo [0, 4] que divide el sólido en dos partes de volumen igual.

b) Encontrar los valores de x en el intervalo [0, 4] que divide al sólido en tres partes de volumen igual.

63. ***El volumen de un tanque de combustible*** Un tanque en el ala de un avión de motor de reacción tiene la forma de un sólido de revolución generado al girar la región acotada por la gráfica $y = \frac{1}{8}x^2\sqrt{2 - x}$ y el eje x $(0 \le x \le 2)$ alrededor del eje x, donde x y y son medidos en metros. Utilizar una calculadora para graficar la función y calcular el volumen del tanque.

64. ***El volumen de un recipiente de vidrio*** Un recipiente de vidrio se modela al girar la gráfica de

$$y = \begin{cases} \sqrt{0.1x^3 - 2.2x^2 + 10.9x + 22.2}, & 0 \le x \le 11.5 \\ 2.95, & 11.5 < x \le 15 \end{cases}$$

alrededor del eje x donde x y y son medidos en centímetros. Representar la función en la computadora y encontrar el volumen del recipiente.

65. Encontrar el volumen del sólido generado si la mitad superior de la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ se gira sobre *a*) el eje x para formar un esferoide prolato (en forma de un balón de futbol americano), y *b*) el eje y para formar un esferoide oblato (en forma de la mitad de un dulce).

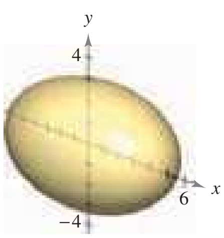


Figura para 65*a*

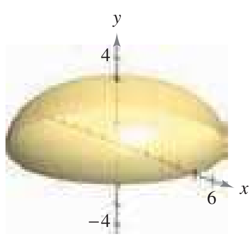


Figura para 65*b*

66. ***Profundidad del agua en un tanque*** Un tanque de agua es una esfera de 50 pies de radio. Determinar las profundidades del agua cuando el tanque se llena a un cuarto y tres cuartos de su capacidad total. (*Nota:* Calcular la raíz con una herramienta de graficación después de evaluar la integral definida.)

67. ***Volumen mínimo*** El arco de $y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$ en el intervalo [0, 4] se gira alrededor de la recta $y = b$ (ver la figura).

a) Encontrar el volumen del sólido resultante como una función de b.

b) Representar la función en una calculadora para el apartado *a*), y usar la gráfica para aproximar el valor de b que hace mínimo el volumen del sólido.

c) Usar cálculo para encontrar el valor de b que hace mínimo el volumen del sólido, y comparar el resultado con la respuesta del apartado *b*).

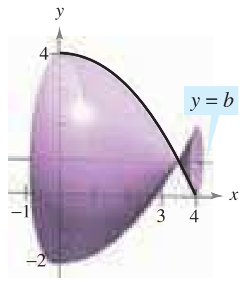


Figura para 67

Figura para 68

68. ***Modelo matemático*** A un dibujante se le pide determinar la cantidad de material requerida para producir una pieza de una máquina (véase la figura en la primera columna). Los diámetros d de la pieza en los puntos x uniformemente espaciados se listan en la tabla. Las medidas están dadas en centímetros.

x	0	1	2	3	4	5
d	4.2	3.8	4.2	4.7	5.2	5.7

x	6	7	8	9	10
d	5.8	5.4	4.9	4.4	4.6

a) Usar estos datos con la regla de Simpson para aproximar el volumen de la pieza.

b) Usar regresión en una calculadora para encontrar un polinomio de cuarto grado a través de los puntos que representan el radio del sólido. Trazar los datos y el modelo.

c) Usar una herramienta de graficación para aproximar la integral definida que da el volumen de la pieza. Comparar el resultado con la respuesta del apartado *a*).

69. ***Para pensar*** Emparejar cada integral con el sólido cuyo volumen representa, y dar las dimensiones de cada sólido.

a) Cilindro circular recto *b*) Elipsoide

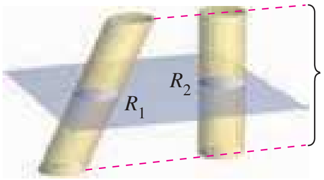
c) Esfera *d*) Cono circular recto *e*) Toro

i) $\pi\displaystyle\int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$ *ii*) $\pi\displaystyle\int_0^h r^2\, dx$

iii) $\pi\displaystyle\int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$ *iv*) $\pi\displaystyle\int_{-b}^{b} \left(a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\right)^2 dx$

v) $\pi\displaystyle\int_{-r}^{r} \left[\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\right] dx$

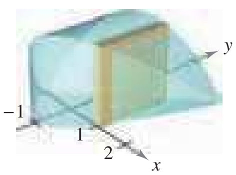
70. ***El teorema de Cavalieri*** Demostrar que si la altura de dos sólidos son iguales y todas las secciones del plano paralelas a sus bases y a distancias iguales de sus bases tienen áreas iguales, entonces los sólidos tienen el mismo volumen (ver la figura).



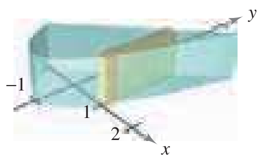
Área de R_1 = área de R_2

71. Encontrar el volumen del sólido cuya base es acotada por las gráficas de $y = x + 1$ y $y = x^2 - 1$, con las secciones transversales indicadas perpendiculares al eje x.

a) Cuadrados

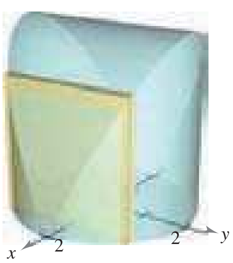


b) Rectángulos de altura 1

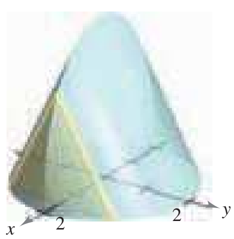


72. Encontrar el volumen del sólido cuya base es acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 4$ con las secciones transversales indicadas perpendiculares al eje x.

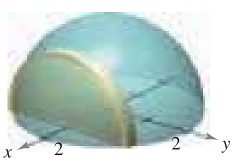
a) Cuadrados



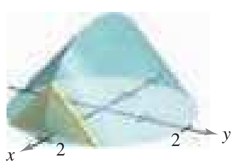
b) Triángulos equiláteros



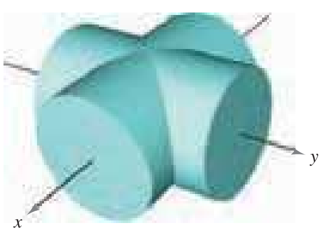
c) Semicírculos



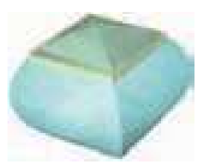
d) Triángulos isósceles rectos



73. Encontrar el volumen del sólido de intersección (el sólido común a ambos) de los cilindros circulares rectos de radio r cuyos ejes se encuentran en los ángulos rectos (ver la figura).



Intersección de dos cilindros


Sólido de intersección

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este problema, ver el artículo "Estimating the Volumes of Solid Figures with Curves Surfaces", de Donald Cohen en *Mathematics Teacher*.

74. La base de un sólido es limitada por $y = x^3$, $y = 0$ y $x = 1$. Encontrar el volumen del sólido para cada una de las secciones transversales siguientes (perpendiculares al eje y): *a*) cuadrados, *b*) semicírculos, *c*) triángulos equiláteros y *d*) semielipses cuyas alturas son dos veces las longitudes de sus bases.

75. Un operador taladra un orificio a través del centro de una esfera de metal de radio R. El orificio tiene un radio r. Encontrar el volumen del anillo resultante.

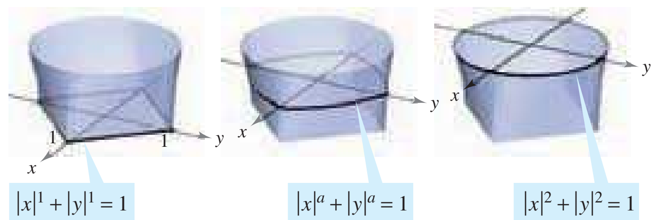
76. Para la esfera de metal del ejercicio 75, sea $R = 6$. ¿Qué valor de r producirá un anillo cuyo volumen es exactamente la mitad del volumen de la esfera?

77. La región acotada por las gráficas $y = 8x/(9 + x^2)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 5$ se gira sobre el eje x. Usar una computadora y la regla de Simpson (con $n = 10$) para aproximar el volumen del sólido.

78. El sólido mostrado en la figura tiene las secciones transversales acotadas por la gráfica $|x|^a + |y|^a = 1$, donde $1 \le a \le 2$.

a) Describir la sección tranversal cuando $a = 1$ y $a = 2$.

b) Describir un procedimiento para aproximar el volumen del sólido.



79. Dos planos cortan un cilindro circular recto para formar una cuña. Un plano es perpendicular al eje del cilindro y el segundo forma un ángulo de θ grados con el primero (ver la figura).

a) Encontrar el volumen de la cuña si $\theta = 45°$.

b) Encontrar el volumen de la cuña para un ángulo θ arbitrario. Asumiendo que el cilindro tiene la longitud suficiente, ¿cómo cambia el volumen de la cuña cuando θ aumenta de 0° a 90°?

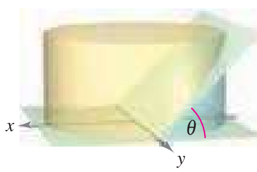


Figura para 79

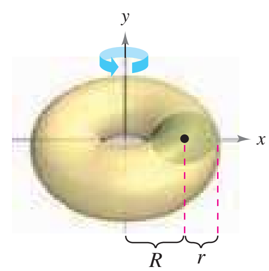


Figura para 80

80. *a*) Demostrar que el volumen del toro está dado por la integral

$$8\pi R\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\,dy, \text{ donde } R > r > 0.$$

b) Encontrar el volumen del toro.

7.3 Volumen: el método de las capas

- **Encontrar el volumen de un sólido de revolución mediante el método de las capas.**
- **Comparar los usos del método de los discos y el método de las capas.**

Método de las capas

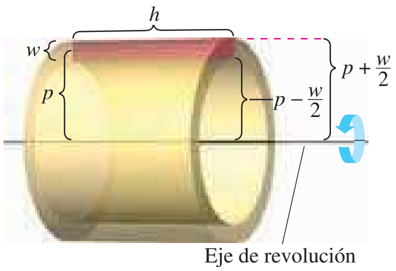


Figura 7.27

En esta sección se estudiará un método alternativo para encontrar el volumen de un sólido de revolución. Este método se llama el **método de las capas** porque usa capas cilíndricas. Una comparación de las ventajas de los métodos de los discos y de las capas se da más adelante en esta sección.

Para empezar, considerar un rectángulo representativo como se muestra en la figura 7.27, donde w es la anchura del rectángulo, h es la altura, y p es la distancia entre el eje de revolución y el *centro* del rectángulo. Cuando este rectángulo gira alrededor de su eje de revolución, forma una capa cilíndrica (o tubo) de espesor w. Para encontrar el volumen de esta capa, considerar dos cilindros. El radio del cilindro más grande corresponde al radio exterior de la capa y el radio del cilindro más pequeño corresponde al radio interno de la capa. Porque p es el radio medio de la capa, se sabe que el radio exterior es $p + (w/2)$ y el radio interno es $p - (w/2)$.

$$p + \frac{w}{2} \qquad \text{Radio externo.}$$

$$p - \frac{w}{2} \qquad \text{Radio interno.}$$

Así que, el volumen de la capa es

$$\begin{aligned}
\text{Volumen de la capa} &= (\text{volumen del cilindro}) - (\text{volumen del hueco}) \\
&= \pi\left(p + \frac{w}{2}\right)^2 h - \pi\left(p - \frac{w}{2}\right)^2 h \\
&= 2\pi phw \\
&= 2\pi\,(\text{radio medio})(\text{altura})(\text{espesor})
\end{aligned}$$

Esta fórmula se puede usar para encontrar el volumen de un sólido de revolución. Asumir que la región plana en la figura 7.28 gira alrededor de una recta para formar el sólido indicado. Si se considera un rectángulo horizontal de anchura Δy, entonces, cuando la región plana gira alrededor de una recta paralela al eje x, el rectángulo genera una capa representativa cuyo volumen es

$$\boxed{\Delta V = 2\pi[p(y)h(y)]\,\Delta y.}$$

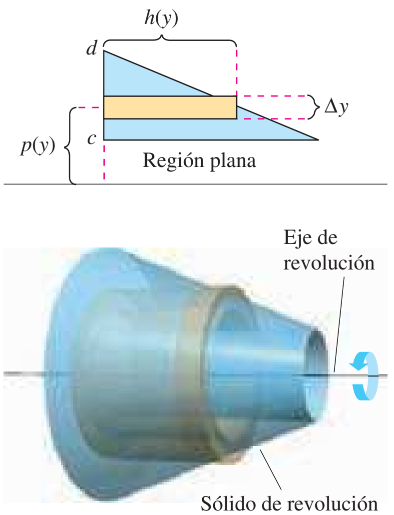


Figura 7.28

Se puede aproximar el volumen del sólido por n capas de espesor Δy, de altura $h(y_i)$ y radio medio $p(y_i)$.

$$\text{Volumen del sólido} \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi[p(y_i)h(y_i)]\,\Delta y = 2\pi\sum_{i=1}^{n}[p(y_i)h(y_i)]\,\Delta y$$

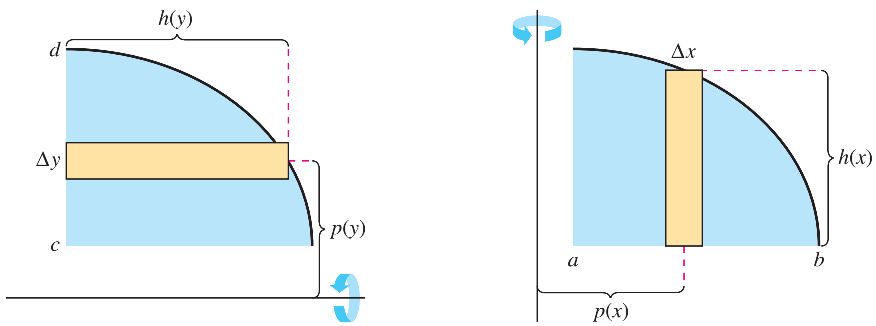
Esta aproximación parece mejorar al hacer $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Así, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned}
\text{Volumen del sólido} &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} 2\pi\sum_{i=1}^{n}[p(y_i)h(y_i)]\,\Delta y \\
&= 2\pi\int_c^d [p(y)h(y)]\,dy.
\end{aligned}$$

Método de las capas

Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el **método de las capas**, usar alguna de las fórmulas siguientes, como se muestra en la figura 7.29.

Eje de revolución horizontal	*Eje de revolución vertical*
$\text{Volumen} = V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\,dy$	$\text{Volumen} = V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx$



Eje de revolución horizontal

Eje de revolución vertical

Figura 7.29

EJEMPLO 1 Uso del método de las capas para encontrar un volumen

Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por

$$y = x - x^3$$

y el eje x $(0 \le x \le 1)$ alrededor del eje y.

Solución Porque el eje de revolución es vertical, usar un rectángulo representativo vertical, como se muestra en la figura 7.30. La anchura Δx indica que x es la variable de integración. La distancia del centro del rectángulo al eje de revolución es $p(x) = x$, y la altura del rectángulo es

$$h(x) = x - x^3.$$

Porque x varía de 0 a 1, el volumen del sólido es

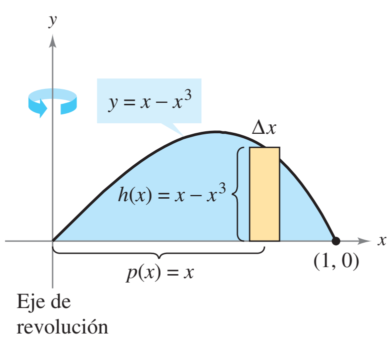


Figura 7.30

$$\begin{aligned} V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx &= 2\pi \int_0^1 x(x - x^3)\,dx && \text{Aplicar el método de las capas.}\\ &= 2\pi \int_0^1 (-x^4 + x^2)\,dx && \text{Simplificar.}\\ &= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 && \text{Integrar.}\\ &= 2\pi\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)\\ &= \frac{4\pi}{15}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Uso del método de las capas para encontrar un volumen

Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por la gráfica de

$$x = e^{-y^2}$$

y el eje y ($0 \le y \le 1$) alrededor del eje x.

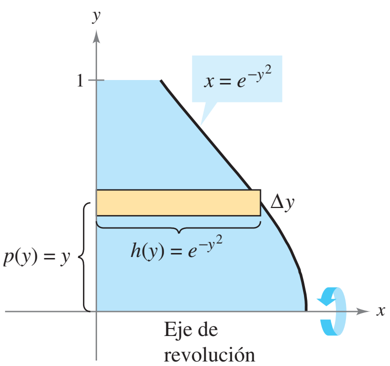


Figura 7.31

Solución Porque el eje de revolución es horizontal, usar un rectángulo representativo horizontal, como se muestra en la figura 7.31. La anchura Δy indica que y es la variable de integración. La distancia del centro del rectángulo al eje de revolución es $p(y) = y$, y la altura del rectángulo es $h(y) = e^{-y^2}$. Porque y va de 0 a 1, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\,dy = 2\pi \int_0^1 ye^{-y^2}\,dy && \text{Aplicar el método de las capas.} \\ &= -\pi\Big[e^{-y^2}\Big]_0^1 && \text{Integrar.} \\ &= \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right) \\ &\approx 1.986. \end{aligned}$$

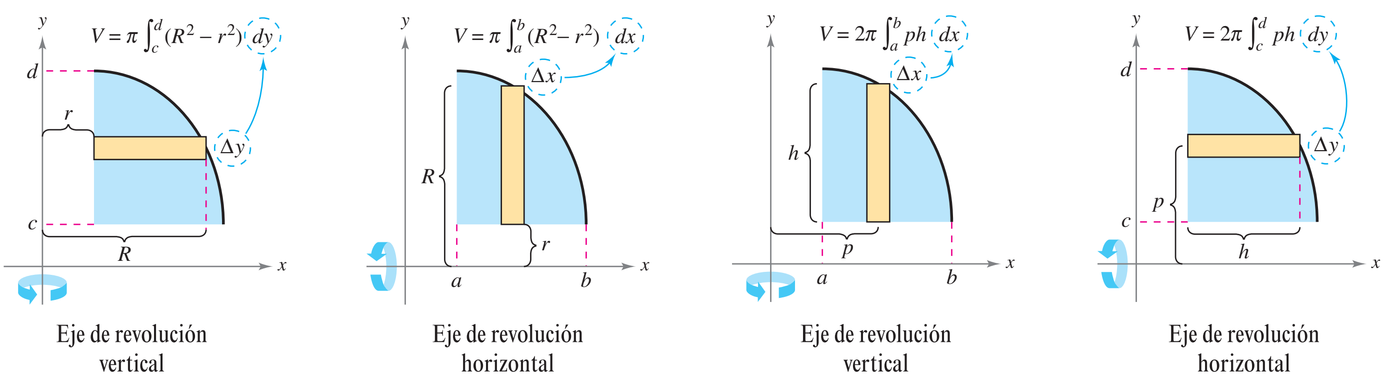
NOTA Para apreciar la ventaja de usar el método de las capas en el ejemplo 2, resolver la ecuación $x = e^{-y^2}$ para y.

$$y = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1/e \\ \sqrt{-\ln x}, & 1/e < x \le 1 \end{cases}$$

Entonces usar esta ecuación para encontrar el volumen del sólido utilizando el método de los discos.

Comparación de los métodos de los discos y de las capas

Los métodos de los discos y de las capas pueden distinguirse porque para usar el método de los discos, el rectángulo representativo siempre es *perpendicular* al eje de revolución, y para el método de las capas, el rectángulo representativo siempre es *paralelo* al eje de revolución, como se muestra en la figura 7.32.



Método del disco: El rectángulo representativo es perpendicular al eje de revolución

Método de las capas: El rectángulo representativo es paralelo al eje de revolución

Figura 7.32

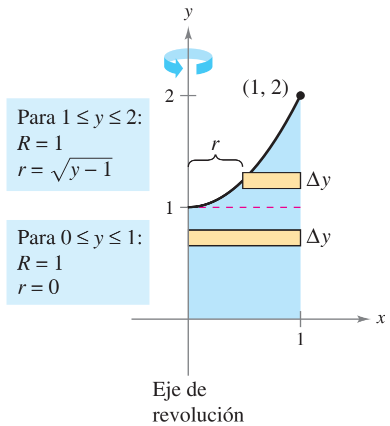
A menudo, es más conveniente usar un método que el otro. El ejemplo siguiente ilustra un caso en que el método de las capas es preferible.

EJEMPLO 3 Caso en que es preferible el método de las capas

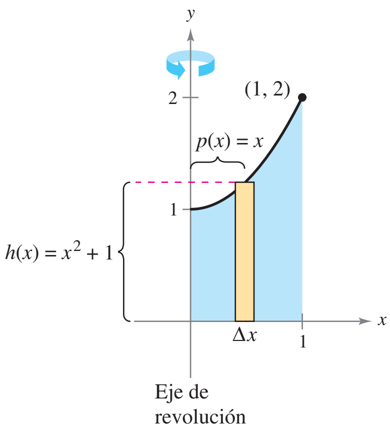
Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de

$$y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 1$$

alrededor del eje y.



a) Método de los discos



b) Método de las capas
Figura 7.33

Solución En el ejemplo 4 en la sección precedente, se observó que el método de las arandelas requiere dos integrales para determinar el volumen de este sólido. Ver la figura 7.33*a*.

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^1 (1^2 - 0^2)\,dy + \pi\int_1^2 \left[1^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2\right] dy && \text{Aplicar el método de las arandelas o del anillo.}\\
&= \pi\int_0^1 1\,dy + \pi\int_1^2 (2-y)\,dy && \text{Simplificar.}\\
&= \pi\Big[y\Big]_0^1 + \pi\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 && \text{Integrar.}\\
&= \pi + \pi\left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

En la figura 7.33*b* se puede observar que el método de las capas requiere sólo una integral para encontrar el volumen.

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_a^b p(x)h(x)\,dx && \text{Aplicar el método de las capas o del anillo.}\\
&= 2\pi\int_0^1 x(x^2+1)\,dx\\
&= 2\pi\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 && \text{Integrar.}\\
&= 2\pi\left(\frac{3}{4}\right)\\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

Si la región del ejemplo 3 se hiciese girar alrededor de la recta vertical $x = 1$, ¿el sólido de revolución resultante habría tenido un volumen mayor o un volumen menor que el sólido en el ejemplo 3? Sin integrar, se puede razonar que el sólido resultante tendría un volumen menor porque "más" de la región que gira quedaría más cercana al eje de revolución. Para confirmar esto, se debe calcular la integral siguiente, la cual da el volumen del sólido.

$$V = 2\pi\int_0^1 (1-x)(x^2+1)\,dx \qquad p(x) = 1 - x$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre los métodos de los discos y de las capas, ver el artículo "The Disk and Shell Method" de Charles A. Cable en *The American Mathematical Monthly*.

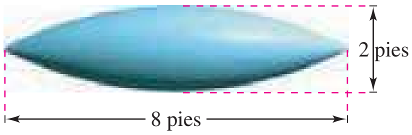


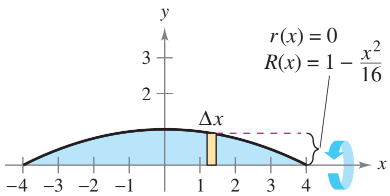
Figura 7.34

EJEMPLO 4 Volumen de un pontón

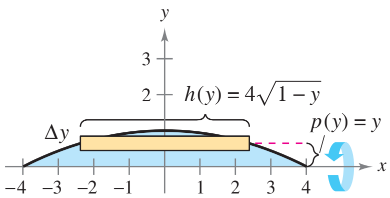
Un pontón se ha hecho en la forma mostrada en la figura 7.34. El pontón se diseña girando la gráfica de

$$y = 1 - \frac{x^2}{16}, \qquad -4 \le x \le 4$$

alrededor del eje x donde x y y son medidos en pies. Encontrar el volumen del pontón.



***a*)** Método de los discos



***b*)** Método de las capas

Figura 7.35

Solución Ver la figura 7.35*a* y usar

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-4}^{4} \left(1 - \frac{x^2}{16}\right)^2 dx && \text{Aplicar el método de los discos.} \\ &= \pi \int_{-4}^{4} \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{256}\right) dx && \text{Simplificar.} \\ &= \pi \left[x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{1\,280}\right]_{-4}^{4} && \text{Integrar.} \\ &= \frac{64\pi}{15} \approx 13.4 \text{ pies cúbicos} \end{aligned}$$

Probar usando la figura 7.35*b* para formular la integral para el volumen mediante el método de las capas. ¿La integral parece más complicada?

Para el método de las capas en el ejemplo 4, se tendría que resolver para x en términos de y en la ecuación

$$y = 1 - (x^2/16).$$

A veces, despejar x es muy difícil (o incluso imposible). En tales casos se debe usar un rectángulo vertical (de anchura Δx), haciendo así la variable de integración a x. La posición (horizontal o vertical) del eje de revolución determina el método a utilizar. Esto se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Caso en que es necesario el método de las capas

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^3 + x + 1$, $y = 1$, y $x = 1$ alrededor de la recta $x = 2$, como se muestra en la figura 7.36.

Solución En la ecuación $y = x^3 + x + 1$, no se puede resolver fácilmente para x en términos de y. (Ver la sección 3.8 en el método de Newton.) Por consiguiente, la variable de integración debe ser x, y elegir un rectángulo representativo vertical. Porque el rectángulo es paralelo al eje de revolución, usar el método de las capas y obtener

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx = 2\pi \int_0^1 (2 - x)(x^3 + x + 1 - 1)\,dx && \text{Aplicar el método de las capas.} \\ &= 2\pi \int_0^1 (-x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x)\,dx && \text{Simplificar.} \\ &= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 && \text{Integrar.} \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) \\ &= \frac{29\pi}{15}. \end{aligned}$$

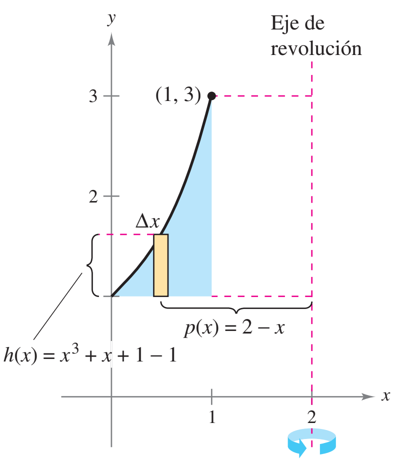
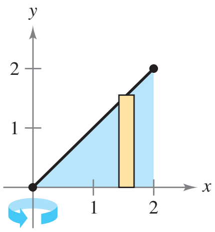


Figura 7.36

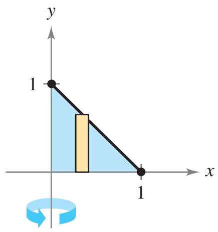
7.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 14, usar el método de las capas para formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido generado al girar la región plana alrededor del eje y.

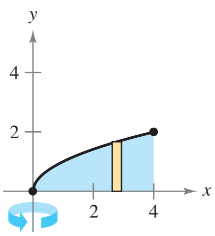
1. $y = x$



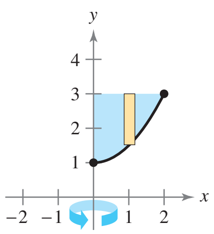
2. $y = 1 - x$



3. $y = \sqrt{x}$



4. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$



5. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 3$

6. $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 0, \quad x = 6$

7. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

8. $y = 4 - x^2, \quad y = 0$

9. $y = 4x - x^2, \quad x = 0, \quad y = 4$

10. $y = 3x, \quad y = 6, \quad x = 0$

11. $y = \sqrt{x - 2}, \quad y = 0, \quad x = 4$

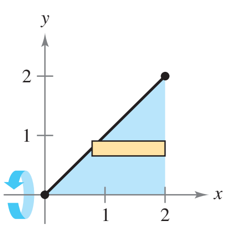
12. $y = -x^2 + 1, \quad y = 0$

13. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

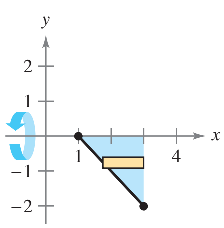
14. $y = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi$

En los ejercicios 15 a 22, usar el método de las capas para formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido generado al girar la región plana alrededor del eje x.

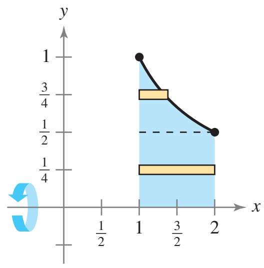
15. $y = x$



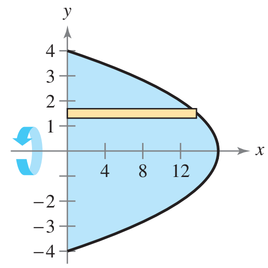
16. $y = 1 - x$



17. $y = \dfrac{1}{x}$



18. $x + y^2 = 16$



19. $y = x^3, \quad x = 0, \quad y = 8$

20. $y = x^2, \quad x = 0, \quad y = 9$

21. $x + y = 4, \quad y = x, \quad y = 0$

22. $y = \sqrt{x + 2}, \quad y = x, \quad y = 0$

En los ejercicios 23 a 26, usar el método de las capas para encontrar el volumen del sólido generado al girar la región plana alrededor de la recta dada.

23. $y = 4x - x^2, \quad y = 0$, alrededor de la recta $x = 5$

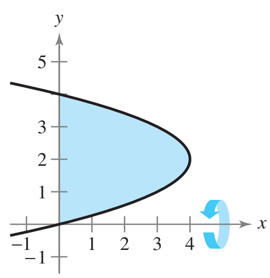
24. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4$, alrededor de la recta $x = 6$

25. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$, alrededor de la recta $x = 4$

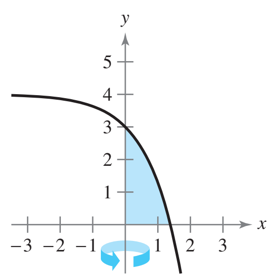
26. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$, alrededor de la recta $x = 2$

En los ejercicios 27 y 28, decidir si es más conveniente usar el método de los discos o el método de las capas para encontrar el volumen del sólido de revolución. Explicar el razonamiento. (No encontrar el volumen.)

27. $(y - 2)^2 = 4 - x$



28. $y = 4 - e^x$



En los ejercicios 29 a 32, usar el método de los discos *o* el de las capas para encontrar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones alrededor de cada recta dada.

29. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2$

a) el eje x *b*) el eje y *c*) la recta $x = 4$

30. $y = \dfrac{10}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 5$

a) el eje x *b*) el eje y *c*) la recta $y = 10$

31. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}, \quad x = 0, \quad y = 0$

a) el eje x *b*) el eje y *c*) la recta $x = a$

30. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$ (hipocicloide)
a) el eje x *b*) el eje y

En los ejercicios 33 a 36, *a*) usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la región plana limitada por las gráficas de las ecuaciones, y *b*) usar calculadora para aproximar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje *y*.

33. $x^{4/3} + y^{4/3} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, primer cuadrante
34. $y = \sqrt{1 - x^3}$, $y = 0$, $x = 0$
35. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2(x-6)^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$
36. $y = \dfrac{2}{1 + e^{1/x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

Para pensar **En los ejercicios 37 y 38, determinar qué valor se aproxima mejor al volumen del sólido generado al girar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones alrededor del eje *y*. (Hacer la selección con base en un esquema del sólido y *sin* realizar ningún cálculo.)**

37. $y = 2e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$
a) $\frac{3}{2}$ *b*) -2 *c*) 4 *d*) 7.5 *e*) 15

38. $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$
a) 3.5 *b*) $-\frac{9}{4}$ *c*) 8 *d*) 10 *e*) 1

Desarrollo de conceptos

39. La región en la figura está girada alrededor de los ejes y las rectas indicadas. Ordenar los volúmenes de los sólidos resultantes desde el menor al mayor. Explicar el razonamiento.
a) eje x *b*) eje y *c*) $x = 4$

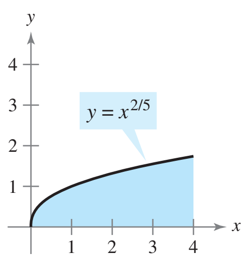


Figura para 39

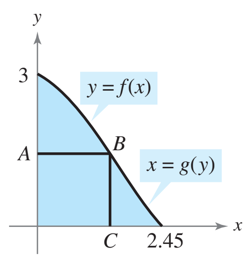


Figura para 40

40. *a*) Describir la figura generada por el giro del segmento AB alrededor del eje y (ver figura).
b) Describir la figura generada por el giro del segmento BC alrededor del eje y.
c) Suponer que la curva en la figura se puede describir como $y = f(x)$ o $x = g(y)$. Un sólido es generado por el giro de la región comprendida por la curva, $y = 0$ y $x = 0$ alrededor del eje y. Crear integrales para encontrar el volumen de este sólido usando el método de los discos y el método de las capas (no integrar).

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

En los ejercicios 41 y 42, dar un argumento geométrico que explique por qué las integrales tienen valores iguales.

41. $\pi \displaystyle\int_1^5 (x - 1)\,dx = 2\pi \int_0^2 y[5 - (y^2 + 1)]\,dy$

42. $\pi \displaystyle\int_0^2 [16 - (2y)^2]\,dy = 2\pi \int_0^4 x\left(\frac{x}{2}\right)dx$

43. Considerar un sólido que se genera al girar una región plana alrededor del eje y. Describir la posición de un rectángulo representativo al usar *a*) el método de las capas y *b*) el método de los discos para encontrar el volumen del sólido.

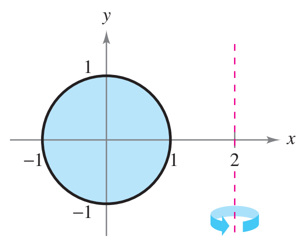
Para discusión

44. Considerar la región plana acotada por las gráficas $y = k$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$, donde $k > 0$ y $b > 0$. ¿Cuáles son las alturas y radios de los cilindros generados cuando esta región gira alrededor de *a*) el eje x y *b*) el eje y?

45. *Diseño industrial* Un sólido se genera al girar la región acotada por $y = \frac{1}{2}x^2$ y $y = 2$ alrededor del eje y. Un hueco, centrado a lo largo del eje de revolución, se taladra a través de este sólido tal que se pierde un cuarto del volumen. Encontrar el diámetro del hueco.

46. *Diseño industrial* Un sólido se genera al girar la región acotada por $y = \sqrt{9 - x^2}$ y $y = 0$ alrededor del eje y. Un hueco, centrado a lo largo del eje de revolución, se taladra a través de este sólido tal que se pierde un tercio del volumen. Encontrar el diámetro del hueco.

47. *Volumen de un toro* Un toro se forma al girar la región acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ alrededor de la recta $x = 2$ (ver la figura). Encontrar el volumen de este sólido en "forma de rosquilla". (*Sugerencia:* La integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$ representa el área de un semicírculo.)



48. *Volumen de un toro* Repetir el ejercicio 47 para un toro formado al girar la región limitada por $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de la recta $x = R$, donde $r < R$.

En los ejercicios 49 a 52, la integral representa el volumen de un sólido de revolución. Identificar *a*) la región plana que se gira y *b*) el eje de revolución.

49. $2\pi \displaystyle\int_0^2 x^3\,dx$ **50.** $2\pi \displaystyle\int_0^1 y - y^{3/2}\,dy$

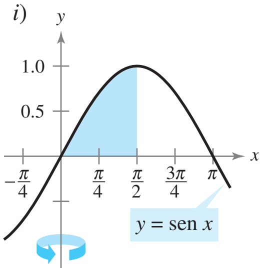
51. $2\pi \displaystyle\int_0^6 (y + 2)\sqrt{6 - y}\,dy$ **52.** $2\pi \displaystyle\int_0^1 (4 - x)e^x\,dx$

53. *a*) Usar la derivada para verificar que

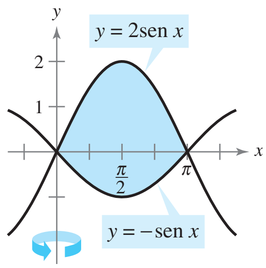
$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C.$$

b) Usar el resultado del apartado *a*) para encontrar el volumen del sólido generado al girar cada región plana alrededor del eje y.

i)



ii)

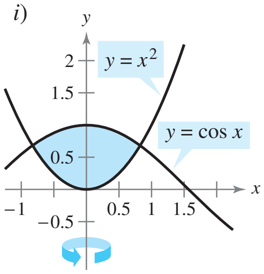


54. *a*) Usar la derivada para verificar que

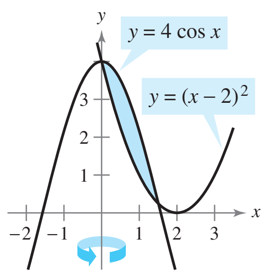
$$\int x \cos x \, dx = \cos x + x \operatorname{sen} x + C.$$

b) Usar el resultado del inciso *a*) para encontrar el volumen del sólido generado al girar cada región plana alrededor del eje y. (*Sugerencia:* Empezar aproximando los puntos de intersección.)

i)



ii)



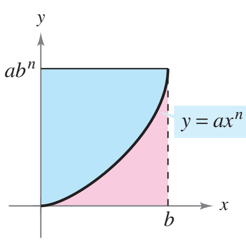
55. ***Volumen de un casquete de una esfera*** Sea una esfera de radio r que se corta por un plano, formando un casquete esférico de altura h. Mostrar que el volumen de este segmento es $\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

56. ***Volumen de un elipsoide*** Considerar el plano acotado por la región

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

donde $a > 0$ y $b > 0$. Mostrar que el volumen del elipsoide formado cuando esta región se gira alrededor del eje y es $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. ¿Cuál es el volumen cuando la región está girada alrededor del eje x?

57. ***Exploración*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = ax^n$ y $y = ab^n$ y $x = 0$ (ver la figura).



a) Encontrar la razón $R_1(n)$ entre el área de la región y el área del rectángulo circunscrito.

b) Encontrar $\lim\limits_{n\to\infty} R_1(n)$ y comparar el resultado con el área del rectángulo circunscrito.

c) Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región alrededor del eje y. Encontrar la razón $R_2(n)$ entre este volumen y el volumen del cilindro circular recto circunscrito.

d) Encontrar $\lim\limits_{n\to\infty} R_2(n)$ y comparar el resultado con el volumen del cilindro circunscrito.

e) Usar los resultados de los apartados *b*) y *d*) para hacer una conjetura sobre la forma de la gráfica de $y = ax^n$ $(0 \le x \le b)$ como $n \to \infty$.

58. ***Para pensar*** Emparejar cada integral con el sólido cuyo volumen representa, y dar las dimensiones de cada sólido.

a) Cono circular recto *b*) Toro *c*) Esfera

d) Cilindro circular recto *e*) Elipsoide

i) $2\pi \int_0^r hx \, dx$ *ii*) $2\pi \int_0^r hx\left(1 - \frac{x}{r}\right) dx$

iii) $2\pi \int_0^r 2x\sqrt{r^2 - x^2} \, dx$ *iv*) $2\pi \int_0^b 2ax \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} \, dx$

v) $2\pi \int_{-r}^r (R - x)\left(2\sqrt{r^2 - x^2}\right) dx$

59. ***El volumen de un cobertizo de almacenamiento*** Un cobertizo de almacenamiento tiene una base circular con diámetro de 80 pies (ver la figura). A partir del centro, su profundidad es medida cada 10 pies y registrada en la tabla.

x	0	10	20	30	40
Altura	50	45	40	20	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el volumen del cobertizo.

b) Observar que la recta del tejado consiste en dos segmentos de la recta. Encontrar las ecuaciones de los segmentos de la recta y usar la integración para encontrar el volumen del cobertizo.

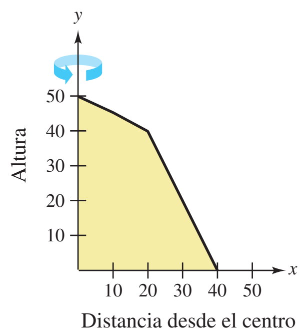


Figura para 59

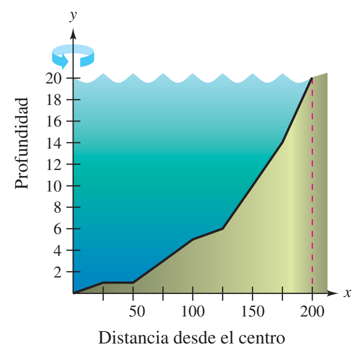


Figura para 60

60. ***Modelo matemático*** Un estanque es aproximadamente circular, con un diámetro de 400 pies (ver la figura). Empezando en el centro, la profundidad del agua es medida cada 25 pies y registrada en la tabla.

x	0	25	50	75	100	125	150	175	200
Profundidad	20	19	19	17	15	14	10	6	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el volumen de agua en el estanque.

b) Usar las capacidades de la regresión en una calculadora para encontrar un modelo cuadrático para las profundidades registradas en la tabla. Usar una herramienta de graficación para trazar las profundidades y la gráfica del modelo.

c) Usar las capacidades de la integración en una herramienta de graficación y el modelo en el apartado *b*) para aproximar el volumen de agua en el estanque.

d) Usar el resultado del apartado *c*) para aproximar el número de galones de agua en el estanque si un pie cúbico de agua es aproximadamente 7.48 galones.

61. Sean V_1 y V_2 los volúmenes de los sólidos que resultan cuando la región plana limitada por $y = 1/x$, $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, y $x = c$ $(c > \frac{1}{4})$ se gira alrededor del eje x y el eje y, respectivamente. Encontrar el valor de c para el cual $V_1 = V_2$.

62. La región acotada por $y = r^2 - x^2$, $y = 0$ y $x = 0$ está girada alrededor del eje y para formar un paraboloide. Un orificio, centrado a lo largo del eje de revolución, está taladrado alrededor de este sólido. El orificio tiene un radio k, $0 < k < r$. Encontrar el volumen del anillo resultante *a*) mediante integración con respecto a x y *b*) mediante integración con respecto a y.

63. Considerar la gráfica $y^2 = x(4 - x)^2$ (ver la figura). Encontrar los volúmenes de los sólidos que se generan cuando la espira de esta gráfica se gira alrededor *a*) del eje x, *b*) del eje y y *c*) la recta $x = 4$.

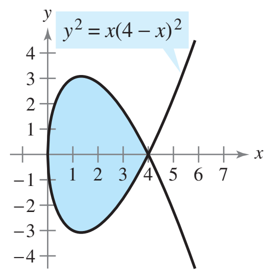


Figura para 63

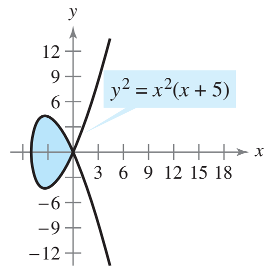


Figura para 64

64. Considerar la gráfica de $y^2 = x^2(x + 5)$ (ver la figura). Encontrar el volumen del sólido que se genera cuando la espira de esta gráfica se gira alrededor *a*) del eje x, *b*) del eje y y *c*) la recta $x = -5$.

PROYECTO DE TRABAJO

Saturno

La no esfericidad de Saturno Saturno es el menos esférico de los nueve planetas en nuestro sistema solar. Su radio ecuatorial es 60 268 kilómetros y su radio polar es 54 364 kilómetros. El color acentuado en la fotografía de Saturno se tomó por el Voyager 1. En la fotografía, la no esfericidad de Saturno es claramente visible.

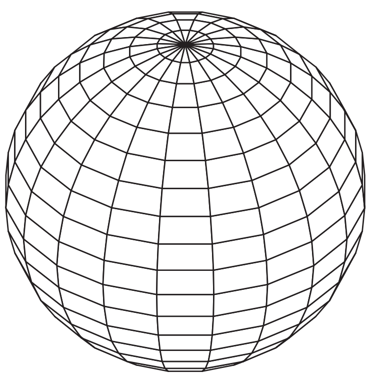
a) Encontrar la razón entre los volúmenes de la esfera y el elipsoide achatado mostrado abajo.

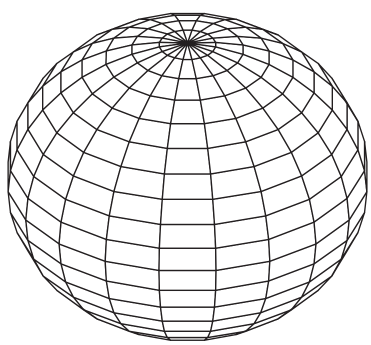
b) Si un planeta esférico tuviera el mismo volumen que Saturno, ¿qué radio tendría?


NSSDC

Modelo de computadora de un "Saturno esférico" cuyo radio ecuatorial es igual que su radio polar. La ecuación de la sección transversal que atraviesa el polo es

$$x^2 + y^2 = 60\,268^2.$$





Modelo de computadora de un "Saturno achatado" cuyo radio ecuatorial es mayor que su radio polar. La ecuación de la sección transversal que atraviesa el polo es

$$\frac{x^2}{60\,268^2} + \frac{y^2}{54\,364^2} = 1.$$

7.4 Longitud de arco y superficies de revolución

- Encontrar la longitud del arco de una curva suave.
- Encontrar el área de una superficie de revolución.

fiefffi anfiCfirfiifi

CHRISTIAN HUYGENS (1629-1695)
El matemátic h landés Christian Huygens, invent r del rel j de péndul , y el matemátic esc cés James Greg ry (163 -1675), c ntribuyer n decisivamente a res lver el pr blema de hallar la l ngitud de arc de una curva rectificable.

Longitud de arco

fi n effia fiección fie fifian fiafi infefirafiefi fiefinifiafi fiara encfinfrar fiafi ffinfiiffiefi fie arcfi fie fiafi cfirvafi fi fiafi áreafi fie fiifierficiefi fie revfiffiición fifi n afi fififi caffiffifin arcfi ffin fiefifi enffi fie fina cfirvafi fie afirfifiifi a fifir fiefifi enffifi fie recfia cfifiafi ffinfiiffiefi ffin fiafiafi fifir fia fórfi fifia fie fia fiiffiancia cfinficifia

$$d = \sqrt{fix_2 - x_{fi}ff^2 + fiy_2 - y_{fi}ff^2}\ fi$$

Una cfirva **rectificable** efi afifieffa fifie fiene fina ffinfiiffifi fie arcfi finifiafifie verá fifie fina cfinfiición ffificienfe fiara fifie fia firáfica fie fina ffinción f fiea recfificafife enfre fiafif fiaffi fi fibfif fibffi efi fifie f' fiea cfinfinfia fifiire fiafibffi Dicfia ffinción fiene fierivafia cfinfinfia fifiire fiafibffifi ffi firáfica en efiinfervaffi fiafibfiefi fina **curva suave**fi

Cfinfifierar fina ffinción $y = f$ fixfi fiafifie fiene fierivafia cfinfinfia en efiinfervaffi fiafibffi fie fifiefie afirfifiifi ar fia firáfica fie f fifir n fiefifi enffifi fie recfia cfififi fifinffifi ferfi inafiefi ffin fieferfi inafififi fifir fia fiarfición

$$a = x_{fi} < x_{fi} < x_2 < \ fi fi fi < x_n = b$$

cfifi fi fie fi fieffira en fia fifira fiffififiea $\Delta x_i = x_i - x_{i-fi}$ fi $\Delta y_i = yi - y_{i-fi}$ fifie fifiefie afirfifiifi ar fia ffinfiiffifi fie fia firáfica fifir

$$\begin{aligned} s &\approx \sum_{i=fi}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-fi})^2 + (y_i - y_{i-fi})^2} \\ &= \sum_{i=fi}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sum_{i=fi}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2} \\ &= \sum_{i=fi}^{n} \sqrt{fi + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ (\Delta x_i) fi \end{aligned}$$

fiffia afirfifiifi ación fiarece fier fi effir afifiacer $\|\Delta\| \to fi$ fin $\to \infty$ffi Afiífifia ffinfiiffifi fie fia firáfica efi

$$s = \lim_{\|\Delta\| \to fi} \sum_{i=fi}^{n} \sqrt{fi + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ (\Delta x_i) fi$$

Pfirfifie f'fixfiefiifife fiara fffifi x en $fix_{i-fi}fix_i$ffiefifiefirefi a fie vaffir fi efiifi fiaranfifia fia efiiffencia fie c_i en $fix_{i-fi}fix_i$fi fiafififie

$$\begin{aligned} f(x_i) - f(x_{i-fi}) &= f'(c_i)(x_i - x_{i-fi}) \\ \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} &= f'(c_i) fi \end{aligned}$$

Pfirfifie f' efi cfinfinfia en fiafibffifie fiene fifie $\sqrt{fi + fif'fixff^2}$ fiafi fiién efi cfinfinfia ffi fifir cfinfiifi fifiienfe infefirafiefien fiafibfiffi fifie ifi fifica fifie

$$\begin{aligned} s &= \lim_{\|\Delta\| \to fi} \sum_{i=fi}^{n} \sqrt{fi + [f'(c_i)]^2}\ (\Delta x_i) \\ &= \int_a^b \sqrt{fi + [f'(x)]^2}\ dx \end{aligned}$$

fifinfie s efi ffiafi afia fia **longitud del arco** fie f enfre a fi $b$fi

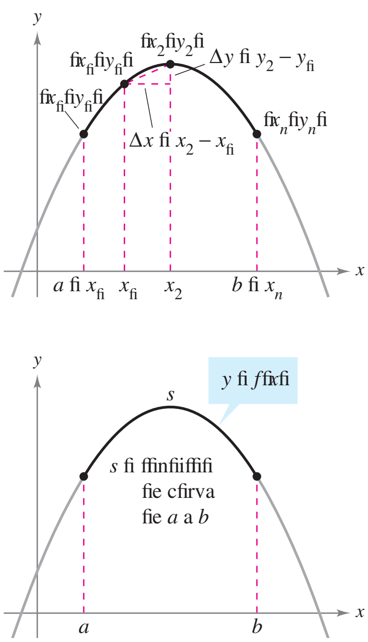


Figura 7.37

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para ver cófi fi fa ffinfiiffifi fie arcfi fifiefie fier fifafia fiara fiefinir fafi ffinfi cifinefi frififinfifi éfricaffiver efiarfícfifi "Trifiinfifi efrfi fi efifiirefi Cafcfiffifififi fifi fi ice fierfia" fie fi vefi fi ieverfieffien ffifi *UMAP Modules*fi

DEFINICIÓN DE LONGITUD DE ARCO

fiea fa ffinción fiafia fifir $y = f(x)$ fifie refirefienfe fina cfirva fifiave en efi infervaffi $[a, b]$fi La **longitud de arco** fie f enfre a fi b efi

$$s = \int_a^b \sqrt{fi + [f'(x)]^2}\, dx fi$$

fifi ifarfi enfefiifiara fina cfirva fifiave fiafia fifir $x = g(y)$ fifia **longitud de arco** fie g enfre c fi d efi

$$s = \int_c^d \sqrt{fi + [g'(y)]^2}\, dy fi$$

Pfirfifie fa fiefinición fie ffinfiiffifi fie arcfi fifiefie afificarfie a fina ffinción fineaffiefififififie cfifi firfifiar fifie effia nfieva fiefinición fie cfirreffifinfie cfin fa fórfi fifa effiánfiar fie fa fiiffiancia fiara fa ffinfiiffifi fie fin fiefifi enffi fie fa recfafifi ffifi fie fi fiefiffra en efiefefi fiffi fifi

EJEMPLO 1 Longitud de un segmento de recta

fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fie (x_fi, y_fi) a (x_2, y_2) en fa firáfica fie $f(x) = mx + b$ ficfifi fi fie fi fiefiffra en fa fififira fiffififi

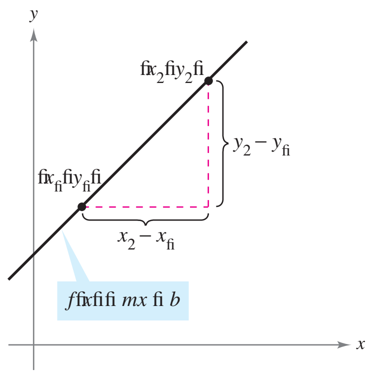
Solución Pfirfifie

$$m = f'(x) = \frac{y_2 - y_fi}{x_2 - x_fi}$$

fie fiene fifie

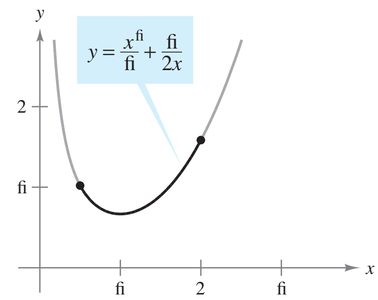
$$\begin{aligned}
s &= \int_{x_fi}^{x_2} \sqrt{fi + [f'(x)]^2}\, dx && \text{fiórfi fifa fiara ffinfiiffifi fie arcfi}\\
&= \int_{x_fi}^{x_2} \sqrt{fi + \left(\frac{y_2 - y_fi}{x_2 - x_fi}\right)^2}\, dx\\
&= \sqrt{\frac{(x_2 - x_fi)^2 + (y_2 - y_fi)^2}{(x_2 - x_fi)^2}}\,(x)\Big]_{x_fi}^{x_2} && \text{finfefirar fi fiifi fififiicarfi}\\
&= \sqrt{\frac{(x_2 - x_fi)^2 + (y_2 - y_fi)^2}{(x_2 - x_fi)^2}}\,(x_2 - x_fi)\\
&= \sqrt{(x_2 - x_fi)^2 + (y_2 - y_fi)^2}
\end{aligned}$$

fifie efi fa fórfi fifa fiara fa fiiffiancia enfre fifi fi finfifi en efi fifanfi



La longitud de arco de la gráfica f de (x_1, y_1) a (x_2, y_2) es igual que la fórmula estándar de la distancia
Figura 7.38

TECNOLOGÍA Lafi infefirafefi fiefinifiafi fifie refirefienfen fa ffinfiiffifi fie arcfi a fi enfifi ffin fi fifi fiifícifefi fie evaffiarfifin effia fiección fie firefienfan efefi fiffififin efifirófiifi fi cafiifi ffiffificfin fafi fécnicafi fie infefiración fi áfi avanfiafiafifie fifiirán enfrenfar ffifi firfififefi afi fie ffinfiiffifi fie arcfi fi áfi fiifícifefifi fi nfrefanffifi recfirfiar fifie fiefi fire fie fifiefie fifiar fin firfifirafi a fie infefiración nfifi éricfi fiara afirfififi ar fina ffinfiiffifi fie arcfiPfir efefi fiffifi fifiar efirecfirffi fie *integración numérica* fie fina cafcfifafifira fiara afirfififi ar fafiffinfiiffifiefi fie arcfi en ffifi efefi fiffifi 2 fi fifi



L ngitud de arc de la gráfica de y en $[\frac{1}{2}, 2]$
Figura 7.39

EJEMPLO 2 Cálculo de la longitud de arco

fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fiefi

$$y = \frac{x^{fi}}{fi} + \frac{fi}{2x}$$

en efiinfervaffi $fi\frac{1}{2}$fi2ffficfifi fi fie fi fieffira en fa fifiira fiffifi

Solución Ufianfifi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{fix^2}{fi} - \frac{fi}{2x^2} = \frac{fi}{2}\left(x^2 - \frac{fi}{x^2}\right)$$

fie fiene fina ffinfiiffifi fie arcfi fie

$$\begin{aligned}
s &= \int_a^b \sqrt{fi + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_{fi/2}^{2} \sqrt{fi + \left[\frac{fi}{2}\left(x^2 - \frac{fi}{x^2}\right)\right]^2}\,dx && \text{fiórfi fifa fie ffinfiiffifi fie arcfi}\\
&= \int_{fi/2}^{2} \sqrt{\frac{fi}{fi}\left(x^{fi} + 2 + \frac{fi}{x^{fi}}\right)}\,dx\\
&= \int_{fi/2}^{2} \frac{fi}{2}\left(x^2 + \frac{fi}{x^2}\right)dx && \text{fiifi fifificarfi}\\
&= \frac{fi}{2}\left[\frac{x^{fi}}{fi} - \frac{fi}{x}\right]_{fi/2}^{2} && \text{fnfefirarfi}\\
&= \frac{fi}{2}\left(\frac{fifi}{fi} + \frac{fifi}{2fi}\right)\\
&= \frac{fifi}{fifi}fi
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Cálculo de la longitud de arco

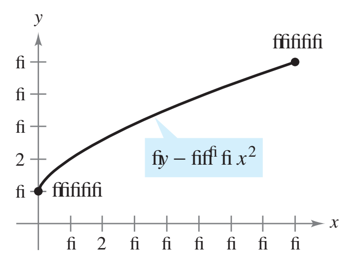
fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fiefify $-$ fiff^{fi} $= x^2$ en efiinfervaffi ffififfficfifi fi fie fi fieffira en fa fifiira fiffifi

Solución fifi fiefiar reffifivienfifi fiara x en férfi infifi fie $y$fi$x = \pm$ fiy $-$ fiff$^{/2}$fifi fefiir efivaffir fififiifivfi fie x firfififice

$$\frac{dx}{dy} = \frac{fi}{2}(y - fi)^{fi/2}fi$$

fi fiinfervaffi x ffififificfirrefiifinfie afiinfervaffi y ffififfi fi fa ffinfiiffifi fie arcfi efi

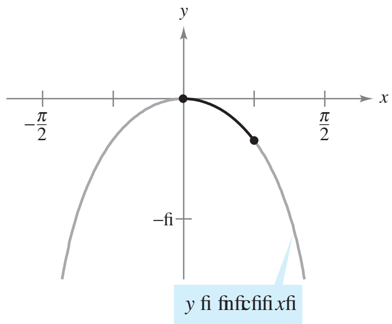
$$\begin{aligned}
s &= \int_c^d \sqrt{fi + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_{fi}^{fi} \sqrt{fi + \left[\frac{fi}{2}(y - fi)^{fi/2}\right]^2}\,dy && \text{fiórfi fifa fiara ffinfiiffifi fie arcfi}\\
&= \int_{fi}^{fi} \sqrt{\frac{fi}{fi}y - \frac{fi}{fi}}\,dy\\
&= \frac{fi}{2}\int_{fi}^{fi} \sqrt{fiy - fi}\,dy && \text{fiifi fifificarfi}\\
&= \frac{fi}{fifi}\left[\frac{(fiy - fi)^{fi/2}}{fi/2}\right]_{fi}^{fi} && \text{fnfefirarfi}\\
&= \frac{fi}{2fi}\left(fifi^{fi/2} - fi^{fi/2}\right)\\
&\approx fifififi
\end{aligned}$$



L ngitud de arc de la gráfica de y en [0,]
Figura 7.40

EJEMPLO 4 Cálculo de la longitud de arco

fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fie $y =$ finfcfifi x fifie $x =$ fi fiara $x = \pi/$fi cfifi fi fie fi fiefifra en fa fififira fifififi



L ngitud de arc de la gráfica de y en $[0, \frac{\pi}{4}]$
Figura 7.41

Solución Ufianfifi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\text{fien } x}{\text{cfifi } x} = -\text{fian } x$$

fie fiene fina ffinfiiffifi fie arcfi fie

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{\text{fi} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{\text{fi}}^{\pi/\text{fi}} \sqrt{\text{fi} + \text{fian}^2 x}\, dx && \text{fiórfi fifa fiara ffinfiiffifi fie arcfi} \\ &= \int_{\text{fi}}^{\pi/\text{fi}} \sqrt{\text{fiec}^2 x}\, dx && \text{ffienfifiafi frifififinfifi éfricafi} \\ &= \int_{\text{fi}}^{\pi/\text{fi}} \text{fiec } x\, dx && \text{fiifi fifificarfi} \\ &= \Big[\text{fin}\,|\text{fiec } x + \text{fian } x|\Big]_{\text{fi}}^{\pi/\text{fi}} && \text{finfefirarfi} \\ &= \text{fin}\left(\sqrt{2} + \text{fi}\right) - \text{fin fi} \\ &\approx \text{fififififi} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Longitud de un cable

Un cafife efécfrricfi cfieffia enfre fifififfirrefifie efifán a 2fifi fiiefifie fiiffanciafcfifi fi fie fi fiefifra en fa fififira fiffi2fifi ficafife ffifi a fa ffirfi a fie fina cafenaria cfiffa ecfiación efi

$$y = \text{fifi}(e^{x/\text{fififi}} + e^{-x/\text{fififi}}) = \text{fififi cfifi} \frac{x}{\text{fififi}}\text{fi}$$

fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fieficafife enfre fafi fififi ffirrefi

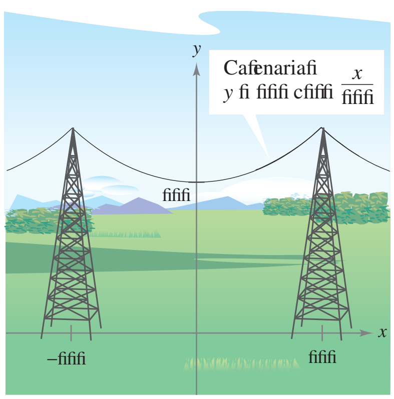


Figura 7.42

Solución Pfirfifie $y' = \frac{\text{fi}}{2}(e^{x/\text{fififi}} - e^{-x/\text{fififi}})$fififiefie eficrifiir

$$(y')^2 = \frac{\text{fi}}{\text{fi}}(e^{x/\text{fifi}} - 2 + e^{-x/\text{fifi}})$$

fi

$$\text{fi} + (y')^2 = \frac{\text{fi}}{\text{fi}}(e^{x/\text{fifi}} + 2 + e^{-x/\text{fifi}}) = \left[\frac{\text{fi}}{2}(e^{x/\text{fififi}} + e^{-x/\text{fififi}})\right]^2\text{fi}$$

Pfir cfinfiifiiienfefifa ffinfiiffifi fie arcfi fieficafife efi

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{\text{fi} + (y')^2}\, dx = \frac{\text{fi}}{2}\int_{-\text{fififi}}^{\text{fififi}} (e^{x/\text{fififi}} + e^{-x/\text{fififi}})\, dx && \text{fiórfi fifa fiara ffinfiiffifi fie arcfi} \\ &= \text{fifi}\Big[e^{x/\text{fififi}} - e^{-x/\text{fififi}}\Big]_{-\text{fififi}}^{\text{fififi}} && \text{finfefirarfi} \\ &= \text{fififi}\,(e^{2/\text{fi}} - e^{-2/\text{fi}}) \\ &\approx 2\text{fifi fiiefifi} \end{aligned}$$

Área de una superficie de revolución

fin fafi feccifinefi fi2 fi fifififa infefiración ffie fifafia fiara cafcfifar efivfifffi en fie fin fiófififi fie revfifficiónfifie efiffifiiará fin firficefiifi ienffi fiara encfinfrar efiárea fie fina fiffierficie fie revfiffición.

DEFINICIÓN DE SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

fii fa firáfica fie fina ffinción cfinfinfia fiira afrefiefifir fie fina recfafifa fiffierficie refiffifanfe efi fina **superficie de revolución**fi

---

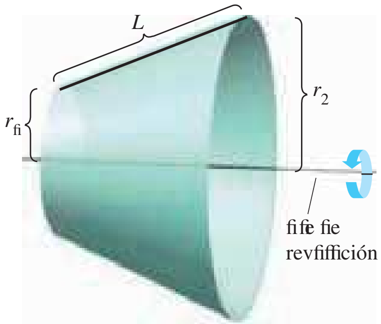


Figura 7.43

fi fiárea fie fina fiffierficie fie revfiffición fie fieriva fie fa fiórfi fifa fiara efiárea fie fa fiffierfi ficie fafierafifie fin frfincfi fie fin cfinfi refifinfifi recffifiCfinfifierar efifiefifi enffi fie fa recfa en fa fififira fifififififinfie L efi fa ffinfiifffi fiefifiefifi enffi fie fa recfafi r_{fi} efi efirafiifi en efiefifrefi fi ififfiierfifi fiefifiefifi enffi fie fa recfafifi r_2 efi efirafiifi en efiefifrefi fi fierecfifi fiefifiefifi enffi fie fa recfafiCfianfifi efifiefifi enffi fie fa recfa fiira afrefiefifir fie fifi efe fie revfifficiónfiffirfi a fin frfincfi fie fin cfinfi refifinfifi recffificfin

$$S = 2\pi r L \qquad \text{Área fafierafifiefifrfincfifi}$$

n e

$$r = \frac{}{2}(r \ \ + r_2) \qquad \text{a i e i e r nc}$$

ffin efiefercicifi fi2fife fiifie verificar fa fiórfi fifa fiara Sffi

fifififiner fiife fa firáfica fie fina ffinción $f$fi fiene fina fierivafia cfinfinfia en efi infervaffi fafi $a$fi$b$ffifiifie fe fiira afrefiefifir fiefiefe x fiara ffirfi ar fina fiffierficie fie revfifficiónficfifi fi fe fi fieffira en fa fififira fifififififiea Δ fina fiarfición fie fafi$a$fi$b$fficfin fifiinfervaffifi fie ancfifira Δx_ifi finffincefi efifiefifi enffi fie fa recfa fie ffinfiifffi

$$\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

fienera fin frfincfi fie fin cfinfififiea r_i efirafiifi fi efiifi fie effe frfincfifiPfir efifiefirefi a fiefivaffir inferfi efiififfin fifinffi d_i efiifife fen efi$i$féfiifi fi fifiinfervaffifi fafifie $r_i = f$ fi$d_i$fifififi fiárea fie fa fiffierficie fafierafiΔS_i fiefifrfincfi efi

$$\begin{aligned}
\Delta S_i &= 2\pi r_i \, \Delta L_i \\
&= 2\pi f(d_i)\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\
&= 2\pi f(d_i)\sqrt{\text{fi} + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i \text{fi}
\end{aligned}$$

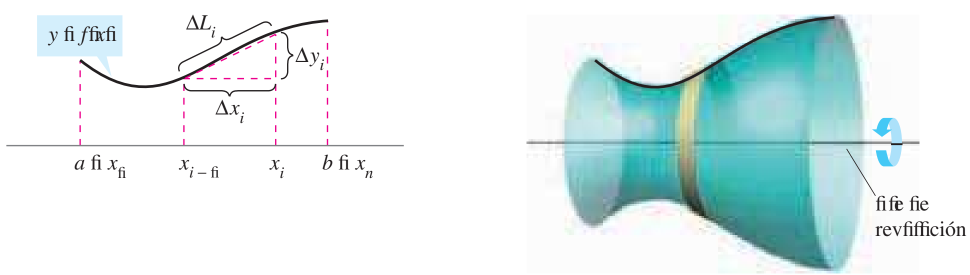


Figura 7.44

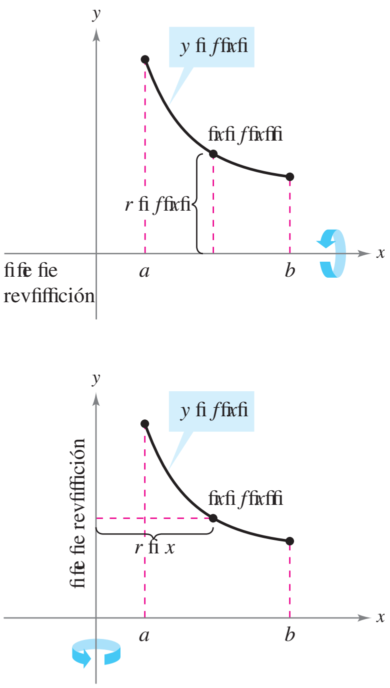


Figura 7.45

Pfir efiefirefi a fiefivaffir fi efiifififin fifinffi c_i efiiffie en fix_{i-fi}fi$x_i$fi fiafiifie

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-fi})}{x_i - x_{i-fi}} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}fi$$

Afiifi $\Delta S_i = 2\pi f fi d_i fi \sqrt{fi + fi f'fi c_i fiffi^2}\,\Delta x_i$fi fi efi área fie fa ffifierficie ffifafi fifiefie afirfifiifi arfie fifir

$$S \approx 2\pi \sum_{i=fi}^{n} f(d_i)\sqrt{fi + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i fi$$

Pfiefie fi fiffirarfie fifie efiffi ife fiefifi iefi firfi fie fa fierecfia cfifi fi $\|\Delta\| \to$ fi fi$n \to \infty$fiefi

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{fi + [f'(x)]^2}\,dx fi$$

De fina fi anera fiffi ifarfifii fa firáfica fie f fie fiira afrefiefifir fiefiefie $y$fienffincefi S efi

$$S = 2\pi\int_a^b x\sqrt{fi+[f'(x)]^2}\,dx fi$$

fin afi fiafi fórfi fifafi fiara S fifie fifiefien cfinfiifierar ffifi firfifificffifi $2\pi f$fi$x$fi fi $2\pi x$ cfifi fi fa cirfi cfinferencia fieficírcfiffi frafiafia fifir fin fifinffi fi$x$fi$y$fi en fa firáfica fie f afifiirar afrefiefifir fiefi efie x fi y fifififira fifififififin fin caffi efirafiifi efi $r = f$fi$x$fififi en efififirfi caffi efirafiifi efi $r = x$fi fi fi áffi affififanfifi r afirfifiiafiafi enfefifie fifiefie fienerafifiar fa fórfi fifa fiara efi área fie fa ffifierficie fiara cfiffir *cualquier* efie fifirififinfafifi verficafie revfifficiónfcfifi fi fie infiica en fa fiefinición fififiienfefi

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

fiea $y = f$fi$x$fi cfin fierivafia cfinfinfia en efi infervaffi fi$a$fi$b$fiffifi fi área S fie fa ffifierficie fie refi vfiffición ffirfi afia afifiirar fa firáfica fie f afrefiefifir fie fin efie fifirififinfafifi verficafiefi

$$S = 2\pi\int_a^b r(x)\sqrt{fi+[f'(x)]^2}\,dx$$

y efi fina ffinción fie *x*fi

fifinfie $r$fi$x$fi efi fa fiiffiancia enfre fa firáfica fie f fi efiefie fie revfifficiónfifii $x = g$fi$y$fi en efi infervaffi fi$c$fi$d$ffi enffincefi efi área fie fa ffifierficie efi

$$S = 2\pi\int_c^d r(y)\sqrt{fi+[g'(y)]^2}\,dy$$

x efi fina ffinción fie *y*fi

fifinfie $r$fi$y$fi efi fa fiiffiancia enfre fa firáfica fie g fi efiefie fie revfifficiónfi

Lafi fórfi fifafi en effia fiefinición a vecefi fie efcrifien cfifi fi

$$S = 2\pi\int_a^b r(x)\,ds$$

y efi fina ffinción fie *x*fi

fi

$$S = 2\pi\int_c^d r(y fi ds$$

x efi fina ffinción fie *y*fi

fifinfie $ds = \sqrt{fi+[f'(x)]^2}\,dx$ fi $ds = \sqrt{fi + [g'(y)]^2}\,dy$ firefifiecfivafi enfefi

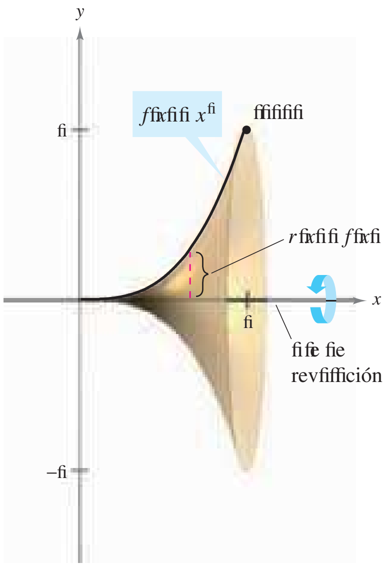


Figura 7.46

EJEMPLO 6 Área de una superficie de revolución

fincfinfrar efiárea fie fa fififierficie ffirfi afia afiﬁirar fa firáfica fie

$$f(x) = x^{\text{fi}}$$

en efiinfervafi fifififiafiﬁirar afrefiefifir fiefiefe $x$ficfifi fi fe fi fiefifra en fa fififira fififififi

Solución La fiififfancia enfre efiefe x fi fa firáfica fie f efi $r$fixfi $= f$ fixffifi fifirfifie f'fixfi $=$ fix^2fi efiárea fie fa fififierficie efi

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_a^b r(x)\sqrt{\text{fi} + [f'(x)]^2}\,dx && \text{fiórfi fifa fiefiárea fie fina fififierficiefi}\\
&= 2\pi\int_{\text{fi}}^{\text{fi}} x^{\text{fi}}\sqrt{\text{fi} + (\text{fi}x^2)^2}\,dx\\
&= \frac{2\pi}{\text{fifi}}\int_{\text{fi}}^{\text{fi}} (\text{fifi}x^{\text{fi}})(\text{fi} + \text{fi}x^{\text{fi}})^{\text{fi}/2}\,dx && \text{fifi fifificarfi}\\
&= \frac{\pi}{\text{fifi}}\left[\frac{(\text{fi} + \text{fi}x^{\text{fi}})^{\text{fi}/2}}{\text{fi}/2}\right]_{\text{fi}}^{\text{fi}} && \text{fnfefirarfi}\\
&= \frac{\pi}{2\text{fi}}(\text{fifi}^{\text{fi}/2} - \text{fi})\\
&\approx \text{fifififififi}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Área de una superficie de revolución

fincfinfrar efiárea fie fa fififierficie ffirfi afia afiﬁirar fa firáfica fie

$$f(x) = x^2$$

en efiinfervafi $[\text{fifi}\sqrt{2}]$ afrefiefifir fiefiefe $y$ficfifi fi fe fi fiefifra en fa fififira fififififi

Solución fin effe cafififia fiififfancia enfre fa firáfica fie f fi efiefe y efi $r$fixfi $= x$fiUfianfifi f'fixfi $= 2x$fife fifiefie fiefierfi inar fifie efiárea fie fa fififierficie efi

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_a^b r(x)\sqrt{\text{fi} + [f'(x)]^2}\,dx && \text{fiórfi fifa fiefiárea fie fina fififierficiefi}\\
&= 2\pi\int_{\text{fi}}^{\sqrt{2}} x\sqrt{\text{fi} + (2x)^2}\,dx\\
&= \frac{2\pi}{\text{fi}}\int_{\text{fi}}^{\sqrt{2}} (\text{fi} + \text{fi}x^2)^{\text{fi}/2}(\text{fi}x)\,dx && \text{fifi fifificarfi}\\
&= \frac{\pi}{\text{fi}}\left[\frac{(\text{fi} + \text{fi}x^2)^{\text{fi}/2}}{\text{fi}/2}\right]_{\text{fi}}^{\sqrt{2}} && \text{fnfefirarfi}\\
&= \frac{\pi}{\text{fi}}[(\text{fi} + \text{fi})^{\text{fi}/2} - \text{fi}]\\
&= \frac{\text{fifi}\pi}{\text{fi}}\\
&\approx \text{fififififififi}
\end{aligned}$$

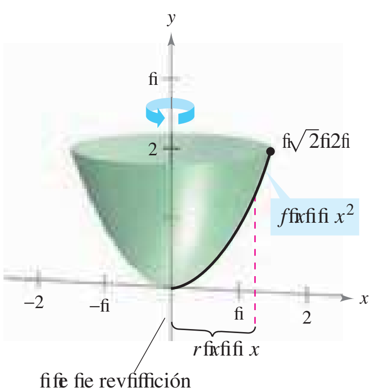


Figura 7.47

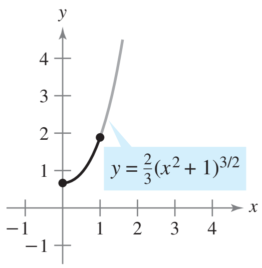
7.4 Ejercicios

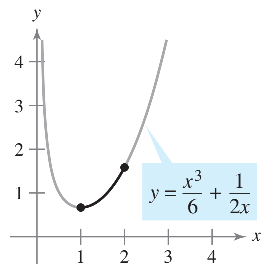
En los ejercicios 1 y 2, encontrar la distancia entre los puntos usando *a*) la fórmula de la distancia y *b*) la integraciónfi

1. ffifififfi ffififififi **2.** ffifi2ffi ffifififi

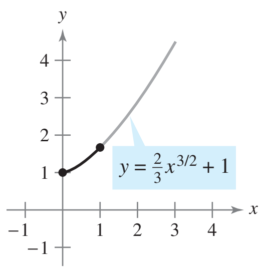
En los ejercicios 3 a 16, encontrar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicadofi

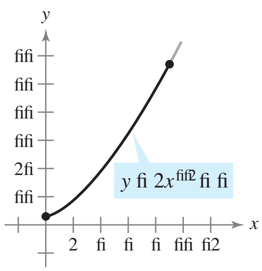
3. $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$ **4.** $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$





5. $y = \frac{2}{3}x^{3/2} + 1$ **6.** $y = 2x^{fi/2} + fi$





7. $y = \frac{3}{2}x^{2/3}, \quad [1, 8]$ **8.** $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}, \quad [1, 3]$

9. $y = \frac{x^{fi}}{fifi} + \frac{fi}{fix^{fi}}$fi [2fifi] **10.** $y = \frac{fi}{2}x^{2/fi} + fifi$ [fifi2fi]

11. $y = $ fin(fien x)fi $\left[\frac{\pi}{fi}fi\frac{fi\pi}{fi}\right]$ **12.** $y = $ fin(cfifi x)fi $\left[fifi\frac{\pi}{fi}\right]$

13. $y = \frac{fi}{2}(e^x + e^{-x})$fi [fifi2]

14. $y = $ fin$\left(\frac{e^x + fi}{e^x - fi}\right)$fi [fin 2fifin fi]

15. $x = \frac{fi}{fi}(y^2 + 2)^{fi/2}$fi $fi \le y \le fi$

16. $x = \frac{fi}{fi}\sqrt{y}(y - fi)$fi $fi \le y \le fi$

En los ejercicios 17 a 26, *a*) representar la función, resaltando la parte indicada por el intervalo dado, *b*) encontrar una integral definida que represente la longitud de arco de la curva sobre el intervalo indicado y observar que la integral no puede evaluarse con las técnicas estudiadas hasta ahora y *c*) usar las capacidades de la integración en una calculadora para aproximar la longitud de arcofi

17. $y = fi - x^2$fi fi x 2

18. $y = x^2 + x - 2$fi $-2 \le x \le fi$

19. $y = \frac{fi}{x}$fi $fi \le x \le fi$

20. $y = \frac{fi}{x + fi}$fi $fi \le x \le fi$

21. $y = $ fien $x$fi $fi \le x \le \pi$

22. $y = $ cfifi $x$fi $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

23. $x = e^{-y}$fi $fi \le y \le 2$

24. $y = $ fin $x$fi $fi \le x \le fi$

25. $y = 2$ arcfian $x$fi $fi \le x \le fi$

26. $x = \sqrt{fifi - y^2}$fi $fi \le y \le fi$

Aproximación **En los ejercicios 27 y 28, determinar qué valor se aproxima mejor a la longitud de arco representada por la integral. (Hacer la selección con base en un esquema del arco y *no* realizando cualquier cálculo.)**

27. $\int_{fi}^{2} \sqrt{fi + \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{fi}{x^2 + fi}\right)\right]^2}\, dx$

*a*fi 2fi *b*fi fi *c*fi 2 *d*fi $-$fi *e*fi fi

28. $\int_{fi}^{\pi/fi} \sqrt{fi + \left[\frac{d}{dx}(\text{fian } x)\right]^2}\, dx$

*a*fi fi *b*fi -2 *c* fi fi *d*fi $\frac{fi\pi}{fi}$ *e*fi fi

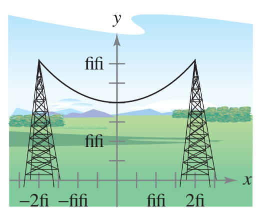
Aproximación **En los ejercicios 29 y 30, aproximar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo [0, 4] de cuatro maneras. *a*) Usar la fórmula de la distancia para encontrar la distancia entre los puntos terminales del arco. *b*) Usar la fórmula de la distancia para encontrar las longitudes de los cuatro segmentos de recta que conectan los puntos en el arco cuando $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$ y $x = 4$. Encontrar la suma de las cuatro longitudes. *c*) Usar la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral que dé la longitud del arco indicada. *d*) Usar las capacidades de la integración de una calculadora para aproximar la integral que dé la longitud del arco indicadafi**

29. $f(x) = x^{fi}$ **30.** $f(x) = (x^2 - fi)^2$

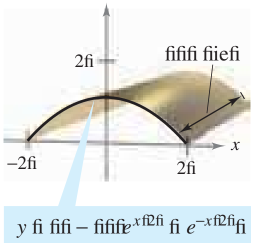
31. ***Longitud de una catenaria*** Cafifiefiefécfricfififfifiifienfiifififienfire fifififfirrefiffirfi an fina cafenaria fiver fififirafifi fiiefafia fi efiianfe fa ecfiación

$$y = 20 \cosh \frac{x}{20}, \quad -20 \le x \le 20$$

fifinfie x fi y fie fi ifien en fi efrfififiLa fiefiaración fie fafi ffirrefiefi fie fifi fi efrfififincfinfrar fa ffinfiiffifi fieficafife fififfienfiifififi



32. ***Área de un techo*** Un firanerfi fiene fififi fiiefi fie farfifi fi fifi fie ancfifi fiver fa fifififirafifiUna fiección franfiverfafifiefiefefafifi efi fina cafenaria inverfifia $y = $ fifi $-$ fififie$^{x/2fi} + e^{-x/2fi}$fifi fincfinfrar efi núfi erfi fie fiiefi cfiafirafififi fie fecfifi en efifiranerfifi

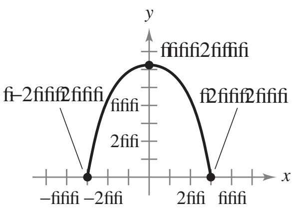


33. ***Longitud del arco Gateway*** fifiArcfi fie fi afefi afi en fifiLfifiifi fi ifififirififie fi fifiefa fifir

$y = $ fififififififi $-$ fifififi2 cfifi fifififififififi$x$fi

$-$2fififi22fifi $\le x \le$ 2fififi22fifi

fifier fa fiección fififiPrfifiecfi fie frafiafifiArcfi fifiLfifiifi fi nfi cfinfrar fa fifinfiifi fie efifa cfirva fiver fa fififirafifi



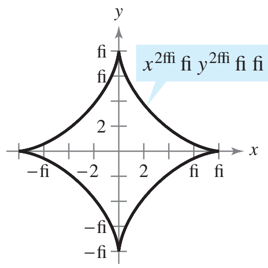


Figura para 33 **Figura para 34**

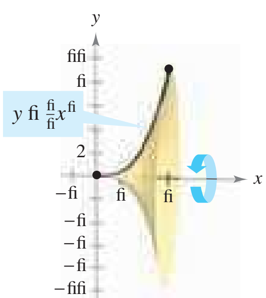
34. ***Astroide*** fincfinfrar fa fifinfiifi fifafie fa firáfica fiefiafifrfiifie $x^{2/fi} + y^{2/fi} = $ fifi

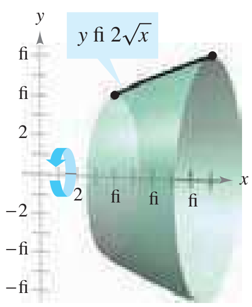
35. fincfinfrar fa fifinfiifi fie arcfi fiefie fifififien fienfififi fiirarifi fiafifa $(2fi\sqrt{fi})$ a fi farfifi fiefiícírcfifi $x^2 + y^2 = $ fifi

36. fincfinfrar fa fifinfiifi fie arcfi fiefie fi−fififien fienfififi fiirarifi fiafifa fifififia fi farfifi fiefiícírcfifi $x^2 + y^2 = $ 2fifi fifirar fiie efi refififafifi efi fin cfiarfi fie fa circfinferencia fiefiícírcfifi

En los ejercicios 37 a 42, formular y evaluar la integral definida para el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje ***x*fi**

37. $y = \frac{fi}{fi}x^{fi}$ **38.** $y = 2\sqrt{x}$





39. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, \quad 1 \le x \le 2$

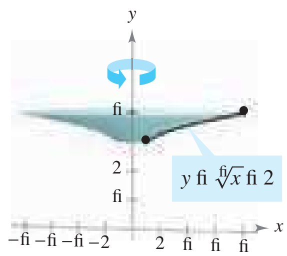
40. $y = \frac{x}{2}, \quad 0 \le x \le 6$

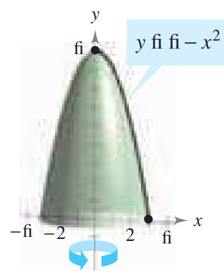
41. $y = \sqrt{4 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1$

42. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad -2 \le x \le 2$

En los ejercicios 43 a 46, formular y evaluar la integral definida para el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje ***y*fi**

43. $y = \sqrt[fi]{x} + 2$ **44.** $y = $ fi $- x^2$





45. $y = 1 - \frac{x^2}{4}, \quad 0 \le x \le 2$ **46.** $y = 2x + 5, \quad 1 \le x \le 4$

En los ejercicios 47 y 48, usar las capacidades de la integración de una herramienta de graficación para aproximar el área de la superficie del sólido de revoluciónfi

Función	*Intervalo*
47. $y = $ fien x	fifificfiπfi
fiira afrefiefifir fiefiefie x	
48. $y = $ fin x	fifiefi
fiira afrefiefifir fiefiefie y	

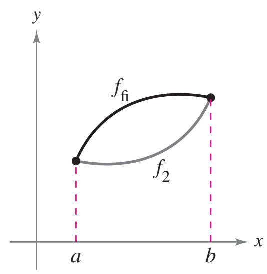
Desarrollo de conceptos

49. Definir fina cfirva recfificafifefi

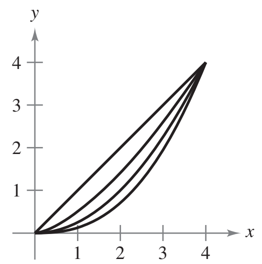
50. ¿fi fié fórfi fifa fie firecáfcfifi fi efefi enfi refirefienfafivfi fie fififiifian fiara fiefiarrfifiar fa fórfi fifa fie infefiración fiara fa fifinfiifi fie arcfi

51. ¿fi fié fórfi fifa fie firecáfcfifi fi efefi enfi refirefienfafivfi fie fififiifian fiara fiefiarrfifiar fa fórfi fifa fie infefiración fiara efi área fie fina fifiierficie fie revfifición fi

52. La fifira fi fiefifra fafi firáficafi fie fafi fifincifinefi f_{fi} fi f_2 en efi infervafi fi$a$fi $b$fifi La firáfica fie cafia fina fie fiira afrefiefifir fiefiefie $x$fi ¿fi fié fifierficie fie revfifición fiene efiárea fie fa fifierficie fi afifirfi fififificarfi



53. ***Para pensar*** La fififira fi fieffira fafi firáficafi fie fafi fffincifinefi $y_1 = x,\ y_2 = \frac{1}{2}x^{3/2},\ y_3 = \frac{1}{4}x^2$ fi $y_4 = \frac{1}{8}x^{5/2}$ fififire efiinfervaffi fffififfi



*a*fi ffienfificar fafi fffincifineffi

*b*fi Liffar fafi fffincifinefi cfin efifin fie increfi enfar fa ffinfiiffifi fie arcfifi

*c*fi fierificar ffi reffifieffa en efiafiarfafifi *b*fiafirfifiifi anfifi fa efiacfi fiffifi fie cafia ffinfiiffifi fie arcfi a frefi fffiarefi fiecifi afefi

Para discusión

54. ***Para pensar*** fifiificar fifir fifié fafi fifiinfefirafefi ffin ifiiafefi

$$\int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\,dx$$

Ufar fa fiafiififiafi fie infefiración fie fina cfifi fifiafifira fiara verificar fifie fafi infefirafefi ffin ifiiafefi

55. Un cfinfi circfifar recffi efi fienerafifi fifir efifiirfi fie fa refiión acfifi fafia fifir $y = 3x/4$, $y = 3$ fi $x =$ fi afrefiefifir fiefiefe *y*fi fincfinfrar efiárea fie fa fffifierficie faferafifiefiefcfinfifi

56. Un cfinfi circfifar fiirecffi fe fienera afifiirar fa refiión acfifiafia fifir $y = hx/r$fi$y = h$ fi $x =$ fi afrefiefifir fiefiefe *y*fifierificar fifie efiárea fie fa fffifierficie faferafifiefiefcfinfi efi

$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$fi

57. fincfinfrar efiárea fie fa fifirción fie fina effiera ffirfi afia afifiirar fa firáfica afrefiefifir fie $y = \sqrt{fi - x^2}$fifi $\leq x \leq$ 2fiafrefiefifir fiefi efe *y*fi

58. fincfinfrar efiárea fie fa fifina fie fina effiera ffirfi afia afifiirar fa firáfica afrefiefifir fie $y = \sqrt{r^2 - x^2}$fifi $\leq x \leq$ *a*fi afrefiefifir fiefi efe *y*fiAffifi ir fifie $a < r$fi

59. ***Modelado matemático*** La circfinferencia *C* fen fifiifiafiaffifie fin farrón efi fi efiifia a infervaffifi fie frefi fifiifiafiafi efi fiefianfifi en ffi fiafefiLafi fi efiifiafi fe fi fieffiran en fa fafifa fifinfie *y* efi fa fiiffancia verficafen fififfiafiafi a fa fiafefi

y	0	3	6	9	12	15	18
C	50	65.5	70	66	58	51	48

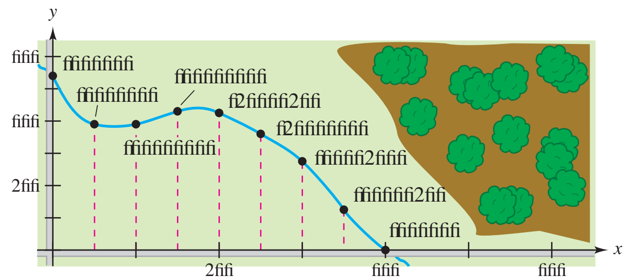
*a*fi Ufar ffifi fiaffifi fiara afirfifiifi ar efi vfiffifi en fiefifarrón fififi fi anfifi ffifi vfiffifi enefi fie ffifi fiifcfifi afirfifiifi anfefifi

*b*fi Ufar ffifi fiaffifi fiara afirfifiifi ar efi área fie fa fffifierficie efiferna fefcffifienfifi fa fiafefiefiefiarrón fififi anfifi fafi áreafi fie fa fffifierficie efiferna fiara afirfifiifi ar efifrfincfi fie cfinfifi afirfifiifi anfefifi

*c*fi Ufar fafi cafiacifiafiefi fie refirefiión fie fina fierrafi ienfa fie firaficación fiara encfinfrar fin fi fiefiefi cúfiicfi fiara fifififinffifi fiyfir fififinfie $r = C/$fi2πfifiUfar fina cafcfifafifira fiara frafar ffifi fifinffifi fi refirefenfar efifi fifieffifi

*d*fi Ufar efifi fifieffi en efiafiarfafifi *c*fi fi fafi cafiacifiafiefi fie fa infefiración fie fina fierrafi ienfa fie firaficación fiara afirfifiifi fi ar efivffifi en fi efiárea fffiera fie fa fffifierficie fiefifiarrónfi Cfifi fiarar fffirefiffifafifificfin fafirefiffiefiefffafen ffifiafiarfafifi *a*fi fi *b*fifi

60. ***Modelado matemático*** La fififira fi fieffira fin ferrenfi acfifafifi fifir fififi cafi infifi fierfienfiicfifiarefi fi fin arrfififififTfiiafi fafi fiiffanfi ciafi ffin fi efiifiafi en fiiefifi



*a*fi Ufar fafi cafiacifiafiefi fie fa refirefiión fie fina fierrafi ienfa fie firaficación fiara affiffar fin fififinfifi ifi fie cfiarffi firafifi aficafi infi fiefiarrfififi

*b*fi Ufar efifi fifieffi en efiafiarfafifi *a*fifiara afirfifiifi ar efiárea fie fa firfifiiefiafi en acrefifi

*c*fi Ufar fafi cafiacifiafiefi fie infefiración fie fina fierrafi ienfa fie firaficación fiara encfinfrar fa ffinfiiffifi fiefiarrfififi fifie fifi ifa fa firfifiiefiafifi

61. fiea *R* fa refiión acfifafia fifir $y =$ fi$/x$fiefiefe *x*fi$x =$ fififi $x = b$fi fifinfie $b >$ fifiea *D* efifiófififi fffirfi afifi cfianfifi *R* fe fiira afrefiefifir fiefiefe *x*fi

*a*fi fincfinfrar efivffifi en *V* fie *D*fi

*b*fi fifcrifiir efiárea fie fa fffifierficie *S* cfifi fi fina infefirafifi

*c*fi fi fiffrar fifie *V* fe acerca a fin ffi ife finiffi cfifi fi $b \to \infty$fi

*d*fi Defi fiffrar fifie $S \to \infty$ cfifi fi $b \to \infty$fi

62. *a*fi Dafifi fin fecffir circfifar cfin rafiifi *L* fi ánfifiifi cenfrafi θ fivéafe fa fififirafffi fi fiffrar fifir fifié efiárea fiefi fecffir efiá fiafia fifir

$$S = \frac{fi}{2}L^2\theta fi$$

*b*fi Afifinir ffifi fifirfiefi fie fa recfa fiefifecffir en efiafiarfafifi *a*fifi fin cfinfi circfifar recffi efi ffirfi afifi fiver fa fififirafifi efiárea fie fa fffifierficie faferafi fiefi cfinfi efi ifiiafi fifie efiárea fiefi fecffirfifi fiffrar fifie efiárea efi $S = \pi rL$fifiinfie *r* efi efirafiifi fie fa fiafe fiefcfinfififi*Sugerencia:* La ffinfiiffifi fie arcfi fiefi fecffir efi ifiiafia fa circfinferencia fie fa fiafe fiefcfinfifi

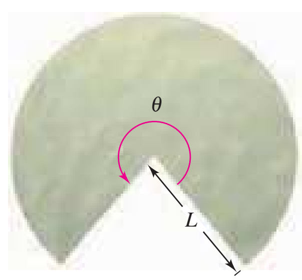


Figura para 62*a*

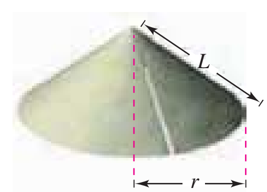
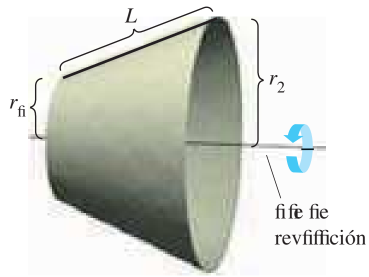


Figura para 62*b*

*c*fi Ufiar efi refiffiafifi fiefi afiarfafifi *b*fi fiara verificar fiie fa fórfi fifa fiara efiárea fie fa fiifierficie fafierafiefifrfincfi fie fin cfinfi cfin fa afffira incfinafia L fi rafiifi r_{fi} fi r_2 fiver fa fiifirafiefi $S = \pi(r_{fi} + r_2)L$fi *Nota:* fi ffia fórfi fifa ffie fifiafi fia fiara fiefarrfiffar fa infefirafifiara encfinfrar efiárea fie fa fiifierficie fie fina fiifierficie fie revfifición fi



63. ***Para pensar*** Cfinfiifierar fa ecfiación $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

*a*fi Ufiar fina cfifi fifiafifira fiara firaficar fa ecfiaciónfi

*b*fi fiifirfi fiar fa infefirafifiefinifia fiara encfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fie efa fiáfica en efiafiarfafifi *a*fi

*c*fi Cfifi fiarar efi infervaffi fie infefiración en efiafiarfafifi *b*fi fi efifififi inifi fiefiinfefiranfififi¿fi fi fifififie evaffiar fa infefirafi fiefinifiafi¿fi fifififiifie fiifiar fa refiffa fie fiifi ffifin fiara cafcfifiar fa infefirafifiefinifiafi fi fiificarffiie afirenfierá a evaffiar efte fifi fie infefirafien fa fiección fiffifi

64. ***Redacción*** Leer efiarfícfiffi "Arc LenfiffiifiArea anfi ffie Arcfine fiincfifin" fie Anfirefi fi fifi fickeffien fa *Mathematics Magazine*fi finffincefi efcrifiir fin fiárraffi fiie efififififie cófi fi fa ffinción fiefi arcfifienfi fiiefie fiefinirfe en férfi infifiie fina ffinfiiffifi fie arcfi

En los ejercicios 65 a 68, formular la integral definida para encontrar la longitud de arco indicada o área superficial. Entonces usar la capacidad de integración de una computadora para aproximar la longitud de arco o área superficial. (Se aprenderá a evaluar este tipo de integral en la sección 8.8.)

65. ***Longitud de persecución*** Un fififeffi fiifie fiifie fiarfe fiefifirifien fi fie fi fieve afiefe y fiver fiifiirafffiAfii iffi fi fiefi fififiin fierfefifiifiir fiarfe fiefififinffi ffiifififi fi fiefi fire fe fi fieve fiacia efififieffi fiifie fiifiefiLa vefficifiafi fiefifierfefiifiifiir efi fifii vecefi fa fiefififieffi fiifie fiifiefiLa ecfiación fie fa frafiecffiria efi

$$y = \frac{1}{3}(x^{3/2} - 3x^{1/2} + 2).$$

¿fi fié fiiffancia fia recfirrifi efifififieffi fiifie fiifie cfianfii efiafcafi nfiafififi Defiffiar fiie efiierfefifiifiir fia viafafifi fifii vecefi fi áfi feffifi

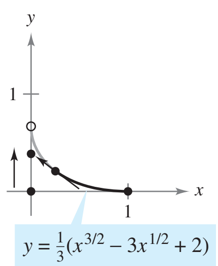


Figura para 65

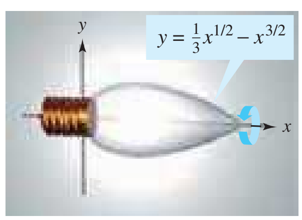
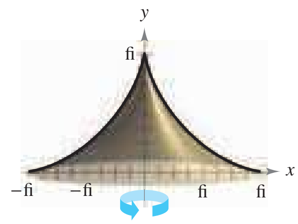


Figura para 66

66. ***Diseño de bombillas*** Una fifii fiiffa firnafi enfafifie fiifeña afi fiirar fa firáfica fie $y = \frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}$, $0 \le x \le \frac{1}{3}$, afrefiefifir fiefi efe $x$fifiinfie x fi y effián fi efiifiafi en fiiefi fiver fiifirafffi ncfinfrar efiárea fiifierficiafiie fa fifii fiiffa fi fiifar efirefiffiafifi fiara afirfiifi fi ar fa canfifiafi fie vifirifi necefiaria fiara fiacer fa fifii fiiffafi fiifififiner fifie efivifirifi fiene fin effiefifir fie fifififi fifiifiafiafifi

67. ***Astroide*** fincfinfrar efiárea fie fa fiifierficie fffirfi afia afifiirar fa fiirción en efifirifi er cfiafiranfe fie fa firáfica fie $x^{2/fi} + y^{2/fi} = fi$ fi $\le y \le$ fi afrefiefifir fiefiefe $y$fi



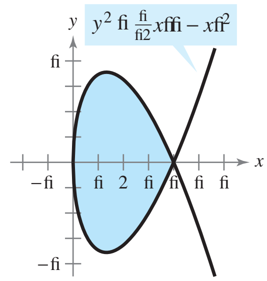
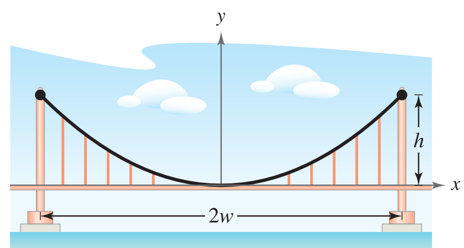


Figura para 67 **Figura para 68**

68. Cfinfiifierar fa firáfica fie $y^2 = \frac{1}{12}x$(fi $- x$)^2 fiver fa fiifirafffi ncfinfrar efiárea fie fa fiifierficie fffirfi afia cfianfifi fa arcafia fie effa firáfica fie fiira afrefiefifir fiefiefe $x$fi

69. ***El puente suspendido*** Un cafiife fiara fin fiienfe fiififienfiifi fiene fa fffirfi a fie fina fiaráfiffa cfin fa ecfiación $y = kx^2$fi fiea h fiara refirefienfar fa afffira fieficafife fie fifi fifinffi fi áfi fiaffi a fifi fifinffi fi áfi affi fi fiea $2w$ fiara refirefienfar fa ancfifira ffifiafi fiefififienfe fiver fa fiifirafffi fiifrar fiir fiifié fa ffinfiiffi fieficafife C effá fiafia fiir $C = 2\int_0^w \sqrt{1 + (4h^2/w^4)x^2}\, dx$.



70. ***El puente suspendido*** fifi fi fifi fier fi rifiiefi fficafiafifi en efi fi einfi Unifii e inafiifirafifi en fififififiiene fina ancfifira firincifiafi fie afirfiifii afiafi enfe fi fifii fi efrfiffiCafia fina fie fifiiffirrefi fiene fina afffira fie afirfiifii afiafi enfe fifii fi efrfiffiUfiar effiafi fiifi enfi fiifineffi fa infefirafi en efiefercicifi fififi fi fafi cafiacifiafiefi fie fa infefiración fie fina cafcfifiafifira fiara afirfiifi ar fa ffinfiiffi fie fin cafife fiarafióficfi a ffi farfifi fie fa ancfifira firincifiaffi

71. fiea C fa cfirva fiafia fiir f(x) = cfifi x fiara fi $\le x \le t$fififinfie $t >$ fi Defiffirar fiie fa ffinfiiffi fie arcfi fie C efi ifiafiafiárea acfifiafia fiir C fi efiefe $x$ffienfificar fifra cfirva fiifire efiinfervaffi fi $\le x \le t$ cfin effa firfifiiefiafifi

Preparación del examen Putnam

72. fincfinfrar fa ffinfiiffi fie fa cfirva $y^2 = x^{fi}$ fiefifirifien afifinffi fifinfie fafi fanfienfefi fffirfi an fin ánfiffi fie fifi° cfin efiefe $x$fi

7.5 Trabajo

- **Encontrar el trabajo realizado por una fuerza constante**.
- **Encontrar el trabajo realizado por una fuerza variable**.

Trabajo realizado por una fuerza constante

El concepto de trabajo es importante para los científicos e ingenieros ya que determina la energía necesaria para realizar varias tareas. Por ejemplo, es útil saber la cantidad de trabajo realizado cuando una grúa alza una viga de acero, cuando un resorte o muelle es comprimido, cuando un cohete se propulsa en el aire o cuando un camión transporta una carga.

En general, el **trabajo** es realizado por una fuerza cuando desplaza un objeto. Si la fuerza aplicada al objeto es constante, entonces la definición de trabajo es:

DEFINICIÓN DE TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Si un objeto es desplazado una distancia D en la dirección de una fuerza constante aplicada F, entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza se define como $W = FD$.

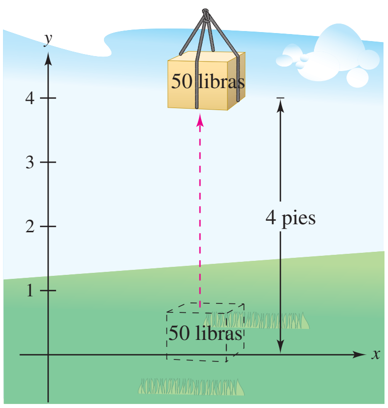
Hay muchos tipos de fuerzas: centrífuga, electromotriz y gravitatoria, por nombrar sólo algunas. Una **fuerza** puede pensarse como algo que *empuja* o *atrae*; una fuerza cambia el estado de reposo o estado de movimiento de un cuerpo. Para las fuerzas gravitatorias en la Tierra, es común usar unidades de medida que corresponden al peso de un objeto.

EJEMPLO 1 Levantamiento de un objeto

Determinar el trabajo realizado al levantar un objeto de 50 libras a 4 pies.

Solución La magnitud de la fuerza requerida F es el peso del objeto, como se muestra en la figura 7.48. Así, el trabajo realizado al levantar el objeto 4 pies es

$$\begin{aligned} W &= FD && \text{Trabajo} = \text{(fuerza)(distancia).} \\ &= 50(4) && \text{Fuerza} = 50 \text{ libras, distancia} = 4 \text{ pies.} \\ &= 200 \text{ libras-pies.} \end{aligned}$$



El trabajo realizado al levantar un objeto de 50 libras a 4 pies es 200 libras-pies
Figura 7.48

En el sistema de medida americano, el trabajo se expresa en libra-pie (lb-pie), pulgada-libra o pie-toneladas. En el sistema cegesimal centímetro-gramo-segundo (C-G-S), la unidad básica de fuerza es la **dina**: la fuerza requerida para producir una aceleración de 1 centímetro por segundo al cuadrado en una masa de 1 gramo. En este sistema, el trabajo se expresa en dina-centímetros (ergs) o newton-metros (joules), donde 1 joule $= 10^7$ ergs.

EXPLORACIÓN

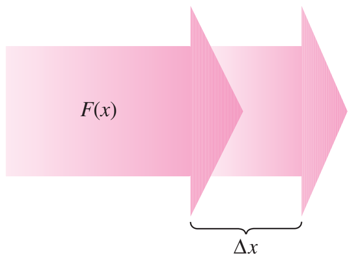
¿Cuánto trabajo? En el ejemplo 1 son necesarias 200 libras-pies de trabajo para elevar 4 pies el objeto de 50 libras verticalmente del suelo. Suponer que una vez izado el objeto, sosteniéndolo, se camina una distancia horizontal de 4 pies. ¿Esto requerirá 200 libras-pies adicionales de trabajo? Explicar la respuesta.

Trabajo realizado por una fuerza variable

En el ejemplo 1, la fuerza aplicada era *constante*. Si se aplica una fuerza *variable* a un objeto, es necesario recurrir al cálculo para determinar el trabajo realizado, porque la cantidad de fuerza cambia según la posición del objeto. Por ejemplo, la fuerza requerida para comprimir un resorte o muelle aumenta conforme el resorte es comprimido.

Suponer que un objeto se mueve a lo largo de una recta de $x = a$ a $x = b$ por una fuerza continuamente variante $F(x)$. Sea Δ una partición que divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos determinados por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_n = b$$



La magnitud de fuerza varía conforme cambia la posición de un objeto (Δx)
Figura 7.49

y sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Para cada i, elegir c_i tal que $x_{i-1} \le c_i \le x_i$. Entonces en c_i la fuerza está dada por $F(c_i)$. Porque F es continua, se puede aproximar el trabajo realizado moviendo el objeto a través del i-ésimo subintervalo por el incremento

$$\Delta W_i = F(c_i)\,\Delta x_i$$

como se muestra en la figura 7.49. Así, el trabajo total realizado como los movimientos del objeto de a a b se aproximan por

$$\begin{aligned} W &\approx \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x_i. \end{aligned}$$

Esta aproximación parece ser mejor y más aún cuando $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Así, el trabajo realizado es

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x_i \\ &= \int_a^b F(x)\,dx. \end{aligned}$$

Bettman/Corbis

EMILIE DE BRETEUIL (1706-1749)
Otra labor relevante de Emilie de Breteuil fue la traducción de los *Principios matemáticos de la filosofía de la naturaleza* de Newton al francés. Su traducción y sus comentarios contribuyeron en gran medida a la aceptación de las ideas científicas de Newton en Europa.

DEFINICIÓN DEL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Si un objeto es desplazado a lo largo de una recta por una fuerza continuamente variable $F(x)$, entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza cuando el objeto es desplazado de $x = a$ hasta $x = b$ es

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i \\ &= \int_a^b F(x)\,dx. \end{aligned}$$

En los ejemplos restantes en esta sección se usan algunas leyes físicas muy conocidas. Los descubrimientos de muchas de estas leyes ocurrieron durante el mismo periodo en que se estaba desarrollando el cálculo. Durante los siglos XVII y XVIII, había poca diferencia, de hecho, entre físicos y matemáticos. Emilie de Breteuil, física-matemática, realizó una importante síntesis del trabajo de muchos otros científicos, incluso el de Newton, Leibniz, Huygens, Kepler y Descartes. Su texto *Institutions* fue utilizado durante muchos años.

Las tres leyes de física siguientes fueron desarrolladas por Robert Hooke (1635-1703), Isaac Newton (1642-1727) y Charles Coulomb (1736-1806).

1. **Ley de Hooke:** La fuerza F requerida para comprimir o estirar un resorte o muelle (dentro de sus límites elásticos) es proporcional a la distancia d que el resorte es comprimido o estirado de su longitud original. Es decir,

$$F = kd$$

donde la constante de proporcionalidad k (constante del resorte) depende de la naturaleza específica del resorte.

2. **Ley de Newton de gravitación universal:** La fuerza F de atracción entre dos partículas de masas m_1 y m_2 es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre las dos partículas. Es decir,

$$F = k\frac{m_1 m_2}{d^2}.$$

Si m_1 y m_2 están dadas en gramos y d en centímetros, F estará en dinas para un valor de $k = 6.670 \times 10^{-8}$ centímetros cúbicos por gramo-segundo cuadrado.

3. **Ley de Coulomb:** La fuerza F entre dos cargas q_1 y q_2 en un vacío es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre las dos cargas. Es decir,

$$F = k\frac{q_1 q_2}{d^2}.$$

Si q_1 y q_2 están dadas en unidades electrostáticas y d en centímetros, F estará en dinas para un valor de $k = 1$.

EXPLORACIÓN

El trabajo realizado al comprimir el resorte en el ejemplo 2 de $x = 3$ pulgadas a $x = 6$ pulgadas es 3 375 libras-pulgadas. ¿Muestra que el trabajo realizado al comprimir el resorte de $x = 0$ pulgadas a $x = 3$ pulgadas es mayor que, igual o menor que éste? Explicar.

EJEMPLO 2 Compresión de un resorte o muelle

Una fuerza de 750 libras comprime un resorte 3 pulgadas de su longitud natural de 15 pulgadas. Encontrar el trabajo realizado al comprimir el resorte 3 pulgadas adicionales.

Solución Por la ley de Hooke, la fuerza $F(x)$ requerida para comprimir el resorte las unidades de x (de su longitud natural) es $F(x) = kx$. Usando los datos dados, se sigue que $F(3) = 750 = (k)(3)$ y así $k = 250$ y $F(x) = 250x$, como se muestra en la figura 7.50. Para encontrar el incremento de trabajo, asumir que la fuerza requerida para comprimir el resorte sobre un pequeño incremento Δx es casi constante. Así que, el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) = (250x)\,\Delta x.$$

Porque el resorte es comprimido de $x = 3$ a $x = 6$ pulgadas menos de su longitud natural, el trabajo requerido es

$$W = \int_a^b F(x)\,dx = \int_3^6 250x\,dx \qquad \text{Fórmula para el trabajo.}$$

$$= 125x^2\Big]_3^6 = 4\,500 - 1\,125 = 3\,375 \text{ libras-pulgadas.}$$

Observar que *no* se integra de $x = 0$ a $x = 6$ porque se determinó el trabajo realizado al comprimir el resorte 3 pulgadas *adicionales* (no incluyendo las primeras 3 pulgadas).

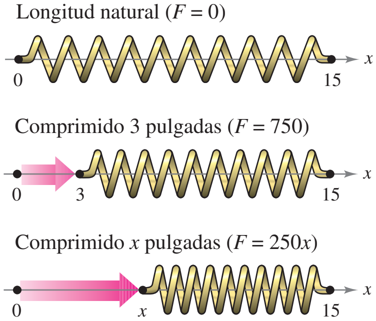


Figura 7.50

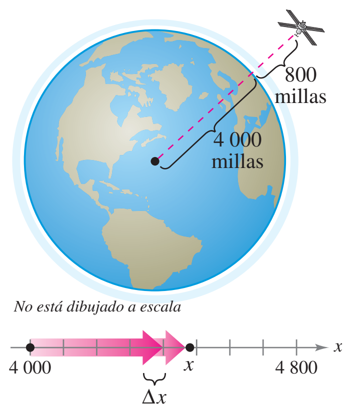


Figura 7.51

EJEMPLO 3 Puesta en órbita de un módulo espacial

Un módulo espacial pesa 15 toneladas métricas en la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo es necesario para propulsar el módulo a una altura de 800 millas sobre la Tierra, como se muestra en la figura 7.51? (Considerar 4 000 millas como el radio de la Tierra. Omitir el efecto de resistencia al aire o el peso del combustible.)

Solución Porque el peso de un cuerpo varía inversamente al cuadrado de su distancia del centro de la Tierra, la fuerza $F(x)$ ejercida por la gravedad es

$$F(x) = \frac{C}{x^2}. \qquad C \text{ es la constante de proporcionalidad.}$$

Porque el módulo pesa 15 toneladas métricas en la superficie de la Tierra y el radio de la Tierra es aproximadamente 4 000 millas, se tiene

$$\begin{aligned} 15 &= \frac{C}{(4\,000)^2} \\ 240\,000\,000 &= C. \end{aligned}$$

Así que, el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned} \Delta W &= (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) \\ &= \frac{240\,000\,000}{x^2}\Delta x. \end{aligned}$$

Por último, porque el módulo se propulsa de $x = 4\,000$ a $x = 4\,800$ millas, el trabajo total realizado es

$$\begin{aligned} W = \int_a^b F(x)\,dx &= \int_{4\,000}^{4\,800} \frac{240\,000\,000}{x^2}\,dx && \text{Fórmula para el trabajo.} \\ &= \frac{-240\,000\,000}{x}\Big]_{4\,000}^{4\,800} && \text{Integrar.} \\ &= -50\,000 + 60\,000 \\ &= 10\,000 \ \text{miles-toneladas} \\ &\approx 1.164 \times 10^{11} \ \text{libras-pies.} \end{aligned}$$

En el sistema cegesimal C-G-S, usando un factor de conversión de 1 libra-pie $\approx$ 1.35582 joules, el trabajo realizado es

$$W \approx 1.578 \times 10^{11} \text{ joules.}$$

Las soluciones a los ejemplos 2 y 3 conforman el desarrollo de trabajo como la suma de incrementos en la forma

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) = (F)(\Delta x).$$

Otra manera de formular el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\text{incremento de fuerza})(\text{distancia}) = (\Delta F)(x).$$

Esta segunda interpretación de ΔW es útil en problemas que involucran el movimiento de sustancias no rígidas como los fluidos y cadenas.

EJEMPLO 4 Extracción de gasolina de un tanque de aceite

Un tanque esférico de radio de 8 pies está medio lleno de aceite que pesa 50 libras/pie³. Encontrar el trabajo requerido para extraer el aceite a través de un orificio en la parte superior del tanque.

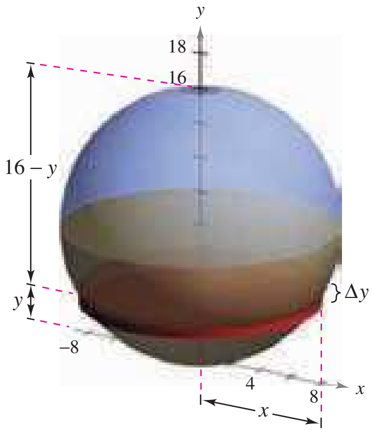


Figura 7.52

Solución Considerar el aceite dividido en discos de espesor Δy y radio x, como se muestra en la figura 7.52. Ya que el incremento de fuerza para cada disco está dado por su peso, se tiene

$$\begin{aligned}\Delta F &= \text{peso}\\ &= \left(\frac{50 \text{ libras}}{\text{pie}^3}\right)(\text{volumen})\\ &= 50(\pi x^2 \Delta y) \ \text{libras.}\end{aligned}$$

Para un círculo de radio 8 y centro en (0, 8), se tiene

$$\begin{aligned}x^2 + (y-8)^2 &= 8^2\\ x^2 &= 16y - y^2\end{aligned}$$

y se puede escribir el incremento de fuerza como

$$\begin{aligned}\Delta F &= 50(\pi x^2 \Delta y)\\ &= 50\pi(16y - y^2)\,\Delta y.\end{aligned}$$

En la figura 7.52, observar que un disco debe moverse y pies del fondo del tanque a una distancia de $(16 - y)$ pies. Así, el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta F(16-y)\\ &= 50\pi(16y - y^2)\,\Delta y(16-y)\\ &= 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)\,\Delta y.\end{aligned}$$

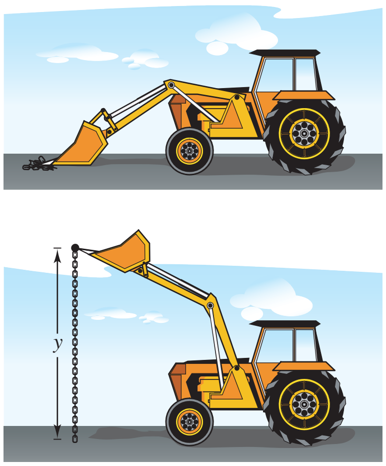
Porque el tanque está medio lleno, y va de 0 a 8, el trabajo requerido para vaciar el tanque es

$$\begin{aligned}W &= \int_0^8 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)\,dy\\ &= 50\pi\left[128y^2 - \frac{32}{3}y^3 + \frac{y^4}{4}\right]_0^8\\ &= 50\pi\left(\frac{11\,264}{3}\right)\\ &\approx 589\,782 \ \text{libras-pies.}\end{aligned}$$

Para estimar lo razonable del resultado en el ejemplo 4, considerar que el peso del aceite en el tanque es

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)(\text{volumen})(\text{densidad}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi 8^3\right)(50)\\ &\approx 53\,616.5 \ \text{libras.}\end{aligned}$$

Al elevar el medio tanque de aceite 8 pies involucraría trabajo de $8(53\,616.5) \approx 428\,932$ libras-pie. Porque el aceite realmente se eleva entre 8 y 16 pies, parece razonable que el trabajo realizado sea 589 782 libras-pie.



Trabajo requerido para izar un extremo de la cadena
Figura 7.53

EJEMPLO 5 Izamiento de una cadena

Una cadena de 20 pies pesa 5 libras por pie está extendida en el suelo. ¿Cuánto trabajo se requiere para levantar un extremo de la cadena a una altura de 20 pies para que esté totalmente extendida, como se muestra en la figura 7.53?

Solución Imaginar que la cadena es dividida en secciones pequeñas, cada una de longitud Δy. Entonces el peso de cada sección es el incremento de fuerza

$$\Delta F = (\text{peso}) = \left(\frac{5 \text{ libras}}{\text{pies}}\right)(\text{longitud}) = 5\Delta y.$$

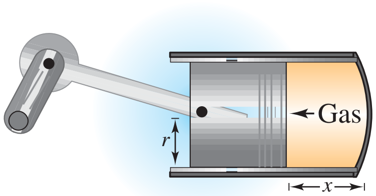
Porque una sección común (inicialmente en el suelo) se levanta a una altura de y, el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\text{incremento de fuerza})(\text{distancia}) = (5\ \Delta y)y = 5y\ \Delta y.$$

Porque y va de 0 a 20, el trabajo total es

$$W = \int_0^{20} 5y\ dy = \frac{5y^2}{2}\Bigg]_0^{20} = \frac{5(400)}{2} = 1\,000 \text{ puntos-pies}$$

En el próximo ejemplo se considerará un pistón de radio r en un cilindro, como se muestra en la figura 7.54. Como el gas en el cilindro se expande, el pistón se mueve y se realiza el trabajo. Si p representa la presión del gas (en libras/pie^3) contra la cabeza del pistón y V representa el volumen del gas (en pie^3), el incremento de trabajo involucrado moviendo el pistón Δx pies es



Trabajo realizado por la expansión del gas
Figura 7.54

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) = F(\Delta x) = p(\pi r^2)\,\Delta x = p\ \Delta V.$$

Así, como el volumen del gas se expande de V_0 a V_1 el trabajo realizado moviendo el pistón es

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\ dV.$$

Asumiendo la presión del gas inversamente proporcional a su volumen, se tiene $p = k/V$ y la integral para el trabajo se vuelve

$$W = \int_{V_0}^{V_1} \frac{k}{V}\,dV.$$

EJEMPLO 6 Trabajo realizado por un gas que se expande

Una cantidad de gas con un volumen inicial de 1 pie^3 y una presión de 500 libras por pie^2 se expande a un volumen de 2 pies^3. Encontrar el trabajo realizado por el gas. (Asumir que la presión es inversamente proporcional al volumen.)

Solución Porque $p = k/V$ y $p = 500$ cuando $V = 1$, se tiene $k = 500$. Así que, el trabajo es

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_0}^{V_1} \frac{k}{V}\,dV \\ &= \int_1^2 \frac{500}{V}\,dV \\ &= 500 \ln|V|\Bigg]_1^2 \approx 346.6 \text{ libras-pies.} \end{aligned}$$

7.5 Ejercicios

Fuerza constante **En los ejercicios 1 a 4, determinar el trabajo realizado por la fuerza constante.**

1. Se levanta un saco de azúcar de 100 libras 20 pies.
2. Una grúa levanta un automóvil eléctrico de 3 500 libras a 4 pies.
3. Se requiere una fuerza de 112 newtons para deslizar un bloque de cemento 8 metros en un proyecto de construcción.
4. La locomotora de un tren de carga arrastra sus vagones con una fuerza constante de 9 toneladas a una distancia de media milla.

Ley de Hooke **En los ejercicios 5 a 12, usar la ley de Hooke para determinar la fuerza variable en el problema del resorte o muelle.**

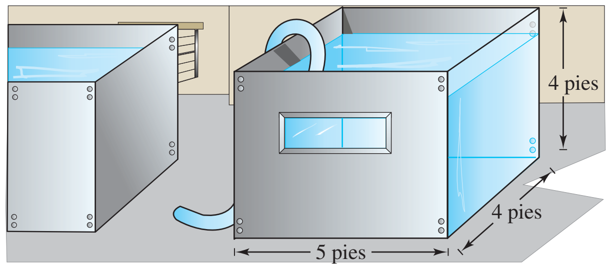
5. Una fuerza de 5 libras comprime un resorte de 15 pulgadas un total de 3 pulgadas. ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimir el resorte 7 pulgadas?
6. ¿Cuánto trabajo se realiza comprimiendo el resorte en el ejercicio 5 de una longitud de 10 pulgadas a una longitud de 6 pulgadas?
7. Una fuerza de 250 newtons estira un resorte 30 centímetros. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte de 20 centímetros a 50 centímetros?
8. Una fuerza de 800 newtons estira un resorte 70 centímetros en un dispositivo mecánico para tensar postes. Encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte los 70 centímetros requeridos.
9. Una fuerza de 20 libras estira un resorte 9 pulgadas en una máquina de ejercicio. Encontrar el trabajo realizado estirando el resorte 1 pie de su posición natural.
10. Una puerta de garaje abre hacia arriba con dos resortes, o muelles, uno en cada lado de la puerta. Se requiere una fuerza de 15 libras para estirar cada resorte 1 pie. Debido al sistema de la polea, los resortes se estiran sólo la mitad de lo que recorre la puerta. La puerta se mueve un total de 8 pies y los resortes están en su longitud natural cuando la puerta está abierta. Encontrar el trabajo realizado por el par de resortes.
11. Se requieren dieciocho libras-pies de trabajo para estirar un resorte 4 pulgadas de su posición natural. Encontrar el trabajo requerido para estirar el resorte 3 pulgadas adicionales.
12. Se requieren 7 y media libras-pies de trabajo para comprimir un resorte 2 pulgadas de su longitud natural. Encontrar el trabajo requerido para comprimir el resorte media pulgada adicional.
13. ***Propulsión*** Despreciando la resistencia al aire y el peso del propulsor, determinar el trabajo realizado propulsando un satélite de cinco toneladas a una altura de

    a) 100 millas sobre la Tierra.

    b) 300 millas sobre la Tierra.
14. ***Propulsión*** Usar la información en el ejercicio 13 para expresar el trabajo W del sistema de propulsión como una función de la altura h del satélite sobre la Tierra. Encontrar el límite (si existe) de W cuando h se acerca al infinito.
15. ***Propulsión*** Despreciando la resistencia al aire y el peso del propulsor, determinar el trabajo realizado propulsando un satélite de 10 toneladas a una altura de

    a) 11 000 millas sobre la Tierra.

    b) 22 000 millas sobre la Tierra.
16. ***Propulsión*** Un módulo lunar pesa 12 toneladas en la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo se realiza al propulsar el módulo en la superficie de la Luna a una altura de 50 millas? Considerar que el radio de la Luna es 1 100 millas y su fuerza de gravedad es un sexto que el de la Tierra.
17. ***Bombeo de agua*** Un tanque rectangular con base de 4 pies por 5 pies y una altura de 4 pies está lleno de agua (ver la figura). El agua pesa 62.4 libras por pie^3. ¿Cuánto trabajo se realiza bombeando el agua encima del borde de la parte superior para vaciar, *a*) la mitad del tanque, *b*) todo el tanque?



18. ***Para pensar*** Explicar por qué la respuesta en el apartado *b*) del ejercicio 17 no es igual al doble de la respuesta del apartado *a*).
19. ***Bombeo de agua*** Un tanque cilíndrico para agua de 4 metros de alto con un radio de 2 metros está colocado de manera que su techo está 1 metro debajo del nivel del suelo (ver la figura). ¿Cuánto trabajo se realiza para bombear un tanque lleno de agua hasta el nivel del suelo? (El agua pesa 9 800 newtons por metro^3.)

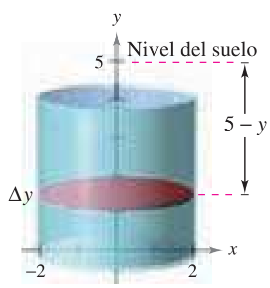


Figura para 19

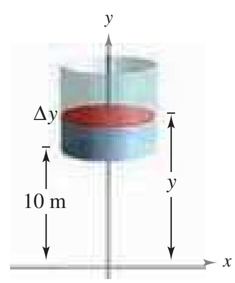


Figura para 20

20. ***Bombeo de agua*** Suponer que el tanque en el ejercicio 19 se localiza en una torre, tal que el fondo del tanque esté 10 metros sobre el nivel de un arroyo (ver la figura). ¿Cuánto trabajo se realiza llenando el tanque a la mitad a través de un orificio en el fondo, usando el agua del arroyo?
21. ***Bombeo de agua*** Un tanque abierto tiene la forma de un cono circular recto (ver la figura). El tanque es de 8 pies de diámetro en su parte superior y 6 pies de altura. ¿Cuánto trabajo se realiza vaciando el tanque bombeando el agua por arriba?

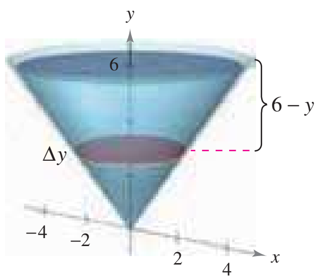


Figura para 21

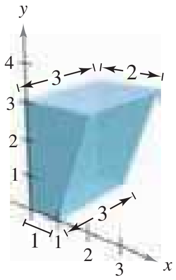


Figura para 24

22. ***Bombeo de agua*** Si el agua se bombea desde el fondo del tanque en el ejercicio 21, ¿cuánto trabajo se realiza para llenar el tanque
   a) a una profundidad de 2 pies?
   b) de una profundidad de 4 pies a una profundidad de 6 pies?

23. ***Bombeo de agua*** Un tanque tiene la forma de la mitad superior de una esfera de 6 pies de radio. ¿Cuánto trabajo se requiere para llenar el tanque de agua a través de un orificio en la base si la fuente de agua está en la base?

24. ***Bombeo de combustible diesel*** Un tanque de combustible de un camión tiene las dimensiones (en pies) mostradas en la figura. Asumir que un motor está aproximadamente 3 pies por encima del tanque de combustible y ese combustible de diesel pesa aproximadamente 53.1 libras por pie^3. Encontrar el trabajo realizado por la bomba de combustible levantando un tanque lleno de combustible al nivel del motor.

Bombeo de gasolina **En los ejercicios 25 y 26, encontrar el trabajo realizado al bombear gasolina que pesa 42 libras por pie^3. (*Sugerencia:* Evaluar una integral por una fórmula geométrica y la otra observando que el integrando es una función impar.)**

25. Un tanque de gasolina cilíndrico de 3 pies de diámetro y 4 pies de largo se lleva en la parte de atrás de un camión y se usa para alimentar los tractores. El eje del tanque es horizontal. ¿Cuánto trabajo es necesario para bombear todo su contenido en un tractor si la abertura del depósito de éste se encuentra 5 pies por encima del punto más alto del depósito?

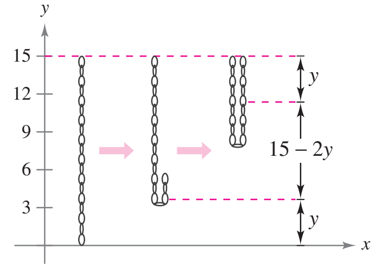
26. La parte superior de un tanque de almacenamiento cilíndrico para gasolina en una estación de servicio está 4 pies por debajo del nivel del suelo. El eje del tanque es horizontal y su diámetro y longitud son 5 y 12 pies, respectivamente. Encontrar el trabajo realizado al bombear su contenido a una altura de 3 pies sobre el nivel del suelo.

Izado de una cadena **En los ejercicios 27 a 30, considerar una cadena de 20 pies que pesa 3 libras por pie y que cuelga de un torno 20 pies sobre el nivel del suelo. Encontrar el trabajo realizado por el torno al enrollar la cantidad especificada de cadena.**

27. Enrollar la cadena entera.
28. Enrollar un tercio de la cadena.
29. Ejecutar el torno hasta que el punto más bajo de la cadena esté a 10 pies del nivel del suelo.
30. Enrollar la cadena entera con una carga de 500 libras atada a ella.

Izando una cadena **En los ejercicios 31 y 32, considerar una cadena colgante de 15 pies que pesa 3 libras por pie. Encontrar el trabajo realizado izando la cadena verticalmente a la posición indicada.**

31. Tomar el punto más bajo de la cadena y levantarlo a 15 pies del nivel, dejando la cadena doblada y colgando verticalmente todavía (ver la figura).



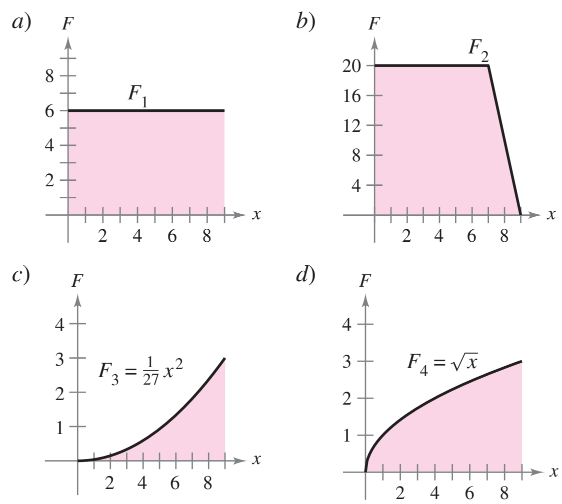
32. Repetir el ejercicio 31 que levanta el punto más bajo de la cadena a 12 pies del nivel.

Desarrollo de conceptos

33. Enunciar la definición de trabajo hecho por una fuerza constante.
34. Enunciar la definición de trabajo hecho por una fuerza variable.
35. ¿Cuál de los siguientes requiere más trabajo? Explicar la razón.
   a) Una caja de libros de 60 libras es levantada 3 pies.
   b) Una caja de libros de 60 libras es sostenida 3 pies en el aire por dos minutos.

Para discusión

36. Las gráficas muestran la fuerza F_i (en libras) requeridas para mover un objeto 9 pies a lo largo del eje x. Ordenar las funciones de fuerza desde la que da menos trabajo a la que da más trabajo, sin realizar algún cálculo. Explicar el razonamiento.



37. Verificar la respuesta para el ejercicio 36 calculando el trabajo para cada función de fuerza.

38. ***Grúa de demolición*** Considerar una grúa de demolición con una bola de 50 libras suspendida 40 pies de un cable que pesa 2 libras por pie.
   a) Encontrar el trabajo requerido para enrollar 15 pies del aparato.
   b) Encontrar el trabajo requerido para enrollar todos los 40 pies del aparato.

Ley de Boyle **En los ejercicios 39 y 40, encontrar el trabajo realizado por el gas para el volumen y presión dados. Asumir que la presión es inversamente proporcional al volumen. (Ver ejemplo 6.)**

39. Una cantidad de gas con un volumen inicial de 2 pies^3 y una presión de 1 000 libras por pie^2 se expande hasta ocupar un volumen de 3 pies^3.

40. Una cantidad de gas con un volumen inicial de 1 pie^3 y una presión de 2 500 libras por pie^2 se expande hasta ocupar un volumen de 3 pies^3.

41. ***Fuerza eléctrica*** Dos electrones se repelen con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Un electrón está en reposo en el punto (2, 4). Encontrar el trabajo realizado para mover el segundo electrón de $(-2, 4)$ a $(1, 4)$.

42. ***Modelo matemático*** El cilindro hidráulico de una aserradora tiene 4 pulgadas de diámetro y un golpe de 2 pies. La bomba hidráulica crea una presión máxima de 2 000 libras por pulgada^2. Por consiguiente, la fuerza máxima creada por el cilindro es $2\,000(\pi 2^2) = 8\,000\pi$ libras.

a) Encontrar el trabajo realizado en una extensión del cilindro dado que requiere la máxima fuerza.

b) La fuerza ejercida para serrar una pieza de madera es variable. Las medidas de la fuerza obtenidas cuando una pieza de madera es serrada se muestra en la tabla. La variable x mide la extensión del cilindro en pies, y F es la fuerza en libras. Usar la regla de Simpson para aproximar el trabajo realizado para serrar la pieza de madera.

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$F(x)$	0	20 000	22 000	15 000	10 000	5 000	0

Tabla para 42*b*

c) Usar las capacidades de la regresión de una calculadora para encontrar un modelo polinómico de cuarto grado para los datos. Trazar los datos y representar el modelo.

d) Usar el modelo en el apartado *c*) para aproximar la extensión del cilindro cuando la fuerza es máxima.

e) Usar el modelo en el apartado *c*) para aproximar el trabajo realizado serrando la pieza de madera.

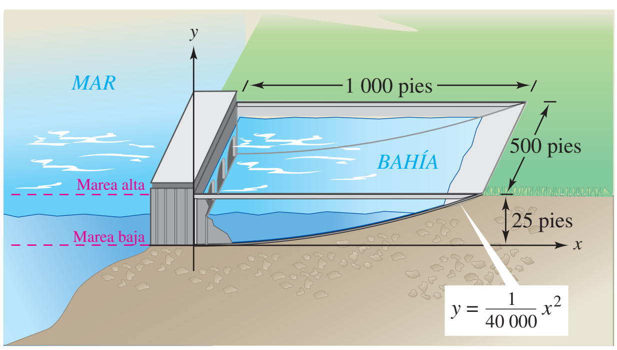
Prensa hidráulica **En los ejercicios 43 a 46, usar las capacidades de la integración de una herramienta de graficación para aproximar el trabajo realizado por una prensa en un proceso industrial. Un modelo para la fuerza variable F (en libras) y la distancia x (en pies) del desplazamiento de la prensa.**

	Fuerza	*Intervalo*
43.	$F(x) = 1\,000[1.8 - \ln(x + 1)]$	$0 \le x \le 5$
44.	$F(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{100}$	$0 \le x \le 4$
45.	$F(x) = 100x\sqrt{125 - x^3}$	$0 \le x \le 5$
46.	$F(x) = 1\,000 \operatorname{senh} x$	$0 \le x \le 2$

PROYECTO DE TRABAJO

Energía de la marea

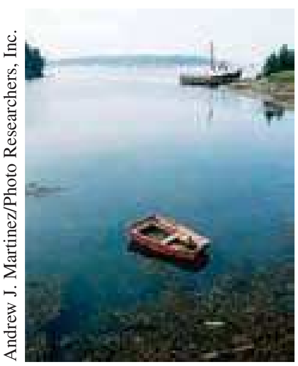
Las plantas de producción de energía eléctrica a partir de la "energía de marea", tienen una presa que separa una bahía del mar. La energía eléctrica se produce por el flujo y reflujo del agua entre la bahía y el mar. La cantidad de "energía natural" producida depende del volumen de la bahía y del rango de la marea, que es la distancia vertical entre las mareas alta y baja. (Algunas bahías naturales tienen rangos de marea de más de 15 pies; la Bahía de Fundy en Nueva Escocia tiene un rango de marea de 53 pies.)



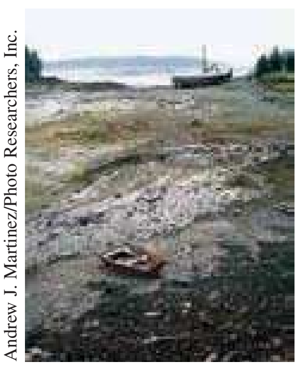
a) Considerar una bahía con una base rectangular, como se muestra en la figura. La bahía tiene un rango de marea de 25 pies, con marea baja que corresponde a $y = 0$. ¿Cuánta agua contiene la bahía cuando hay marea alta?

b) La cantidad de energía producida durante el llenado (o el vaciado) de la bahía es proporcional a la cantidad de trabajo requerido para llenar (o vaciar) la bahía. ¿Cuánto trabajo es necesario para llenar la bahía con agua del mar? (Usar una densidad de agua de mar de 64 libras/pie^3.)

Andrew J. Martinez/Photo Researchers, Inc.



Andrew J. Martinez/Photo Researchers, Inc.



La Bahía de Fundy en Nueva Escocia tiene un rango de marea extremo, como se manifiesta en las fotografías muy contrastantes.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información en torno al poder de la marea, véase el artículo "LaRance: Six Years of Operating a Tidal Power Plant in France", de J. Cotillon en el *Water Power Magazine*.

7.6 Momentos, centros de masa y centroides

- **Entender la definición de masa.**
- **Encontrar el centro de masa en un sistema unidimensional.**
- **Encontrar el centro de masa en un sistema bidimensional.**
- **Localizar el centro de masa de una lámina plana.**
- **Usar el teorema de Pappus para encontrar el volumen de un sólido de revolución.**

Masa

En esta sección se estudiarán varias aplicaciones importantes de la integración que se relacionan con la **masa**. La masa es una medida de la resistencia de un cuerpo al cambiar su estado de movimiento, y es independiente del sistema gravitatorio particular en que el cuerpo se encuentre. Sin embargo, porque tantas aplicaciones que involucran la masa ocurren en la superficie de la Tierra, la masa de un objeto a veces es identificada con su *peso*. Esto no es técnicamente correcto. El peso es un tipo de fuerza y como tal es dependiente de la gravedad. La fuerza y la masa están relacionadas por la ecuación

Fuerza = (masa)(aceleración).

La tabla lista algunas medidas de masa y fuerza, junto con sus factores de conversión.

Sistema de medida	Medida de masa	Medida de fuerza
Estados Unidos	Slug	Libra = (slug)(pies/s^2)
Internacional	Kilogramo	Newton = (kilogramo)(m/s^2)
C-G-S	Gramo	Dina = (gramo)(cm/s^2)
Conversión: 1 libra = 4.448 newtons 1 newton = 0.2248 libras 1 dina = 0.000002248 libras 1 dina = 0.00001 newton		 1 slug = 14.59 kilogramos 1 kilogramo = 0.06852 slug 1 gramo = 0.00006852 slug 1 pie = 0.3048 metro

EJEMPLO 1 Masa en la superficie de la Tierra

Encontrar la masa (en slugs) de un objeto cuyo peso al nivel del mar es 1 libra.

Solución Usando 32 pies/s^2 como la aceleración debida a la gravedad produce

$$\begin{aligned}\text{Masa} &= \frac{\text{fuerza}}{\text{aceleración}} && \text{Fuerza} = (\text{masa})(\text{aceleración}).\\ &= \frac{1 \text{ libra}}{32 \text{ pies/s}^2}\\ &= 0.03125 \frac{\text{libras}}{\text{pies/s}^2}\\ &= 0.03125 \text{ slug.}\end{aligned}$$

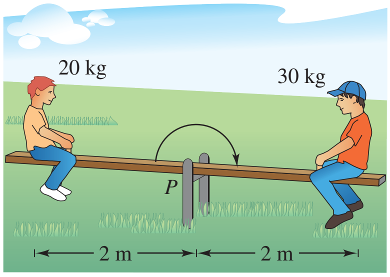
Porque muchas aplicaciones que involucran la masa ocurren en la superficie de la Tierra, esta cantidad de masa se llama **libra masa**.

Centro de masa de un sistema unidimensional

Ahora se considerarán dos tipos de momentos de una masa, el **momento respecto a un punto** y el **momento respecto a una recta**. Para definir estos dos momentos, se supone una situación ideal en la cual una masa m se concentra en un punto. Si x es la distancia entre este punto masa y otro punto P, el **momento de m sobre el punto P es**

$$\text{Momento} = mx$$

y x es la **longitud del brazo del momento**.



El columpio se equilibra cuando los momentos a la derecha y a la izquierda son iguales
Figura 7.55

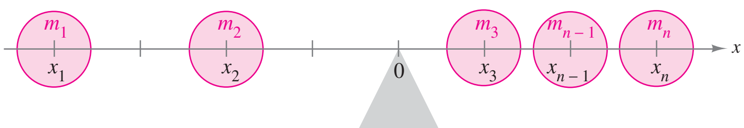
El concepto de momento puede demostrarse por un columpio, como se muestra en la figura 7.55. Un niño de masa de 20 kilogramos se sienta 2 metros a la izquierda del punto de apoyo P, y un niño más grande de masa 30 kilogramos se sienta 2 metros a la derecha de P. Por experiencia, se sabe que el columpio empezará a girar en el sentido de las manecillas del reloj, y bajará al niño más grande. Esta rotación ocurre porque el momento producido por el niño a la izquierda es menor al momento producido por el niño a la derecha.

Momento del niño de la izquierda $= (20)(2) = 40$ kilogramos-metro
Momento del niño de la derecha $= (30)(2) = 60$ kilogramos-metro

Para equilibrar el columpio, los dos momentos deben ser iguales. Por ejemplo, si el niño más grande se moviera a una posición de $\frac{4}{3}$ metros del apoyo, el columpio se equilibraría, porque cada niño produciría un momento de 40 kilogramos-metros.

Para generalizar esto, se puede introducir una recta de coordenadas con el origen en el punto de apoyo, como se muestra en la figura 7.56. Suponer algunas masas localizadas en el eje x. La medida de la tendencia de este sistema a girar sobre el origen es el **momento respecto al origen**, y se define como la suma n de productos $m_i x_i$.

$$M_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdot \cdot \cdot + m_nx_n$$



Si $m_1 x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = 0$, el sistema está en equilibrio
Figura 7.56

Si M_0 es 0, se dice que el sistema está en **equilibrio**.

Para un sistema que no está en equilibrio, el **centro de masa** se define como el punto $\bar{x}$ en el que hay que colocar el punto de apoyo para lograr el equilibrio. Si el sistema fuera trasladado $\bar{x}$ unidades, cada coordenada x_i se volvería $(x_i - \bar{x})$, y porque el momento del sistema trasladado sería 0, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{x} = 0.$$

Despejando para $\bar{x}$ produce

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\text{momento del sistema respecto del origen}}{\text{masa total del sistema}}.$$

Si $m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = 0$ el sistema está en equilibrio.

MOMENTOS Y CENTROS DE MASA: SISTEMA UNIDIMENSIONAL

Sean las masas puntuales $m_1\ m_2, \ldots, m_n$ localizada en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1. El **momento respecto del origen** es $M_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n$.
2. El **centro de masa** es $\bar{x} = \dfrac{M_0}{m}$ donde $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ es la **masa total** del sistema.

EJEMPLO 2 Centro de masa de un sistema lineal

Encontrar el centro de masa del sistema lineal mostrado en la figura 7.57.

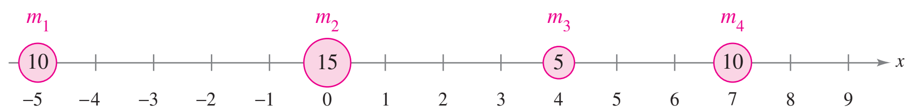


Figura 7.57

Solución El momento sobre el origen es

$$\begin{aligned} M_0 &= m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 \\ &= 10(-5) + 15(0) + 5(4) + 10(7) \\ &= -50 + 0 + 20 + 70 \\ &= 40. \end{aligned}$$

Porque la masa total del sistema es $m = 10 + 15 + 5 + 10 = 40$, el centro de masa es

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m} = \frac{40}{40} = 1.$$

NOTA En el ejemplo 2, ¿dónde se debe localizar el apoyo para que las masas puntuales queden en equilibrio?

En lugar de definir el momento de una masa, se podría definir el momento de una *fuerza*. En este contexto, el centro de masa se llama el **centro de gravedad**. Suponer que un sistema de masas puntuales $m_1, m_2, \ldots, m_n$, se localizan en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Entonces, porque la fuerza = (masa)(aceleración), la fuerza total del sistema es

$$\begin{aligned} F &= m_1a + m_2a + \cdot \cdot \cdot + m_na \\ &= ma. \end{aligned}$$

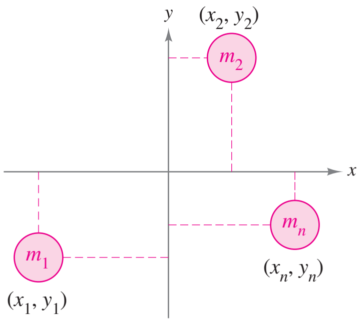
El **momento de torsión** respecto al origen es

$$\begin{aligned} T_0 &= (m_1a)x_1 + (m_2a)x_2 + \cdot \cdot \cdot + (m_na)x_n \\ &= M_0a \end{aligned}$$

y el **centro de gravedad** es

$$\frac{T_0}{F} = \frac{M_0a}{ma} = \frac{M_0}{m} = \bar{x}.$$

Así que el centro de gravedad y el centro de masa tienen la misma localización.



En un sistema bidimensional, hay un momento sobre el eje y, M_y, y un momento sobre el eje x, M_x

Figura 7.58

Centro de masa de un sistema bidimensional

Se puede extender el concepto de momento a dos dimensiones considerando un sistema de masas localizado en el plano xy en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ como se muestra en la figura 7.58. En lugar de definir un solo momento (con respecto al origen), dos momentos son definidos: uno con respecto al eje x y otro con respecto al eje y.

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA: SISTEMA BIDIMENSIONAL

Sean las masas puntuales $m_1, m_2, \ldots, m_n$, localizadas en $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

1. El **momento respecto al eje y** es $M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n$.
2. El **momento respecto al eje x** es $M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n$.
3. El **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ (o **centro de gravedad**) es

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ es la **masa total** del sistema.

El momento de un sistema de masas en el plano puede tomarse respecto de cualquier recta horizontal o vertical. En general, el momento sobre una recta es la suma del producto de las masas y las *distancias dirigidas* de los puntos a la recta.

$$\text{Momento} = m_1(y_1 - b) + m_2(y_2 - b) + \cdots + m_n(y_n - b) \qquad \text{Recta horizontal } y = b.$$

$$\text{Momento} = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - a) + \cdots + m_n(x_n - a) \qquad \text{Recta vertical } x = a.$$

EJEMPLO 3 Centro de masa de un sistema bidimensional

Encontrar el centro de masa de un sistema de masas puntuales $m_1 = 6$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$ y $m_4 = 9$, localizados en

$$(3, -2), (0, 0), (-5, 3) \text{ y } (4, 2)$$

como se muestra en la figura 7.59.

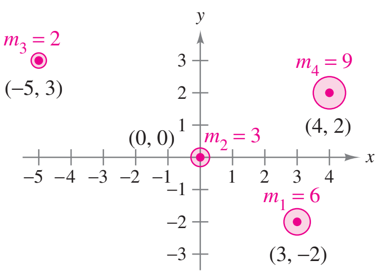


Figura 7.59

Solución

$$\begin{aligned} m &= 6 + 3 + 2 + 9 = 20 && \text{Masa.} \\ M_y &= 6(3) + 3(0) + 2(-5) + 9(4) = 44 && \text{Momento sobre el eje } y. \\ M_x &= 6(-2) + 3(0) + 2(3) + 9(2) = 12 && \text{Momento sobre el eje } x. \end{aligned}$$

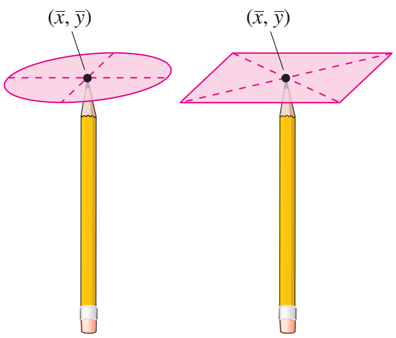
Así,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{44}{20} = \frac{11}{5}$$

y

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

y así el centro de masa es $\left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)$.



Se puede pensar en el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de una lámina como su punto de equilibrio. Para una lámina circular, el centro de masa es el centro del círculo. Para una lámina rectangular, el centro de masa es el centro del rectángulo
Figura 7.60

Centro de masa de una lámina plana

Hasta ahora en esta sección se ha asumido que la masa total de un sistema está distribuida en puntos discretos en un plano o en una recta. Ahora se considera una lámina plana delgada, de material con densidad constante llamada **lámina plana** (ver la figura 7.60). La **densidad** es una medida de masa por unidad de volumen, como g/cm^3. Sin embargo, se considera que la densidad es una medida de masa por unidad de área para las láminas planas. La densidad es denotada por ρ, escrita en letra minúscula griega rho.

Considerar una lámina plana irregularmente formada de densidad uniforme ρ, limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$ y $a \leq x \leq b$, como se muestra en la figura 7.61. La masa de esta región está dada por

$$\begin{aligned} m &= (\text{densidad})(\text{área}) \\ &= \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \rho A \end{aligned}$$

donde A es el área de la región. Para encontrar el centro de masa de esta lámina, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de anchura igual Δx. Sea x_i el centro del i-ésimo subintervalo. Se puede aproximar la porción de la lámina que queda en el i-ésimo subintervalo por un rectángulo cuya altura es $h = f(x_i) - g(x_i)$. Porque la densidad del rectángulo es ρ, su masa es

$$\begin{aligned} m_i &= (\text{densidad})(\text{área}) \\ &= \underbrace{\rho}_{\text{Dencidad}} \underbrace{[f(x_i) - g(x_i)]}_{\text{Altura}} \underbrace{\Delta x}_{\text{Ancho}}. \end{aligned}$$

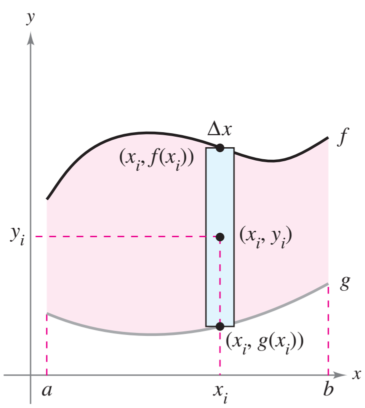


Lámina plana de densidad uniforme ρ
Figura 7.61

Ahora, considerando esta masa localizada en el centro (x_i, y_i) del rectángulo, la distancia dirigida del eje x a (x_i, y_i) es $y_i = [f(x_i) + g(x_i)]/2$. Así, el momento de m_i respecto del eje x es

$$\begin{aligned} \text{Momento} &= (\text{masa})(\text{distancia}) \\ &= m_i y_i \\ &= \rho[f(x_i) - g(x_i)]\, \Delta x \left[\frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}\right]. \end{aligned}$$

Al sumar los momentos y tomar el límite cuando $n \to \infty$ hace pensar en las definiciones siguientes.

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA

Sea f y g funciones continuas tal que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, y considerar la lámina plana de densidad uniforme ρ limitada por las gráficas

$y = f(x)$, $y = g(x)$ y $a \leq x \leq b$.

1. Los **momentos respecto al eje x y y** son

$$M_x = \rho \int_a^b \left[\frac{f(x) + g(x)}{2}\right][f(x) - g(x)]\, dx$$

$$M_y = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx.$$

2. El **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ está dado por $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m}$ y $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m}$, donde $m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$ es la masa de la lámina.

EJEMPLO 4 Centro de masa de una lámina plana

Encontrar el centro de masa de la lámina de densidad uniforme ρ acotada por la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ y el eje x.

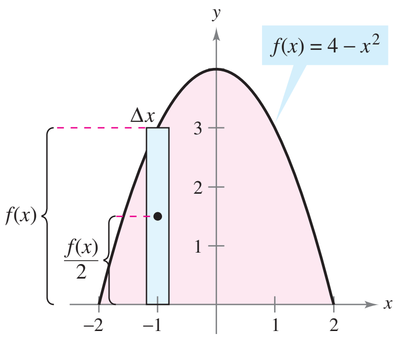


Figura 7.62

Solución Porque el centro de masa está situado en el eje de simetría, se sabe que $\bar{x} = 0$. Es más, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx \\ &= \rho \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{32\rho}{3}. \end{aligned}$$

Para encontrar el momento respecto del eje x, poner un rectángulo representativo en la región, como se muestra en la figura 7.62. La distancia del eje x al centro de este rectángulo es

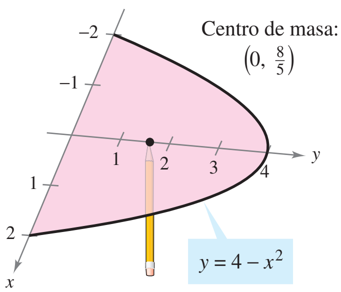
$$y_i = \frac{f(x)}{2} = \frac{4 - x^2}{2}.$$

Porque la masa del rectángulo representativo es

$$\rho f(x)\, \Delta x = \rho(4 - x^2)\, \Delta x$$

se tiene

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_{-2}^{2} \frac{4 - x^2}{2} (4 - x^2)\, dx \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\, dx \\ &= \frac{\rho}{2} \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{256\rho}{15} \end{aligned}$$



El centro de masa es el punto de equilibrio
Figura 7.63

y $\bar{y}$ está dada por

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{256\rho/15}{32\rho/3} = \frac{8}{5}.$$

Así, el centro de masa (o punto de equilibrio) de la lámina es $(0, \frac{8}{5})$, como se muestra en la figura 7.63.

La densidad ρ en el ejemplo 4 es un factor común a los momentos y a la masa, por lo que se cancela y no aparecen las coordenadas del centro de masa. Así que, el centro de masa de una lámina de densidad *uniforme* sólo depende de la forma de la lámina y no de su densidad. Por esta razón, el punto

$$(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{Centro de masa o centroide.}$$

a veces se llama el centro de masa de una *región* en el plano, o **centroide** de la región. En otros términos, para encontrar el centroide de una región en el plano, se asume simplemente que la región tiene una densidad constante de $\rho = 1$ y se calcula el centro correspondiente de masa.

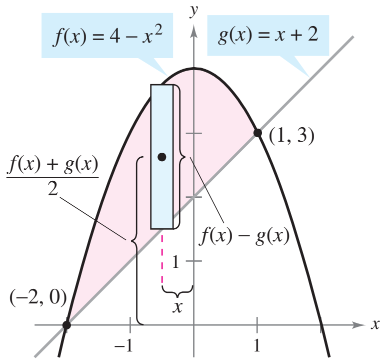


Figura 7.64

EJEMPLO 5 Centroide de una región plana

Encontrar el centroide de la región limitada por las gráficas de $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$.

Solución Las dos gráficas se cortan en los puntos $(-2, 0)$ y $(1, 3)$, como se muestra en la figura 7.64. Así, el área de la región es

$$A = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx = \frac{9}{2}.$$

El centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de la región tiene las coordenadas siguientes.

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{A}\int_{-2}^{1} x[(4 - x^2) - (x + 2)]\, dx = \frac{2}{9}\int_{-2}^{1} (-x^3 - x^2 + 2x)\, dx \\
&= \frac{2}{9}\left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{2} \\
\bar{y} &= \frac{1}{A}\int_{-2}^{1} \left[\frac{(4 - x^2) + (x + 2)}{2}\right][(4 - x^2) - (x + 2)]\, dx \\
&= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\right)\int_{-2}^{1} (-x^2 + x + 6)(-x^2 - x + 2)\, dx \\
&= \frac{1}{9}\int_{-2}^{1} (x^4 - 9x^2 - 4x + 12)\, dx \\
&= \frac{1}{9}\left[\frac{x^5}{5} - 3x^3 - 2x^2 + 12x\right]_{-2}^{1} = \frac{12}{5}.
\end{aligned}$$

Así, el centroide de la región es $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{12}{5}\right)$.

EXPLORACIÓN

Cortar una forma irregular de una pieza de cartón.

***a*)** Sostener un lápiz verticalmente y mover el objeto sobre el punto del lápiz hasta localizar el centroide.

***b*)** Dividir el objeto en elementos representativos. Hacer las medidas necesarias y aproximar numéricamente el centroide. Comparar sus resultados con el resultado del apartado *a*).

Para las regiones planas simples, se pueden encontrar los centroides sin recurrir a la integración.

EJEMPLO 6 Centroide de una región plana simple

Encontrar el centroide de la región mostrada en la figura 7.65*a*).

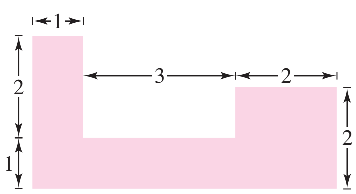
Solución Sobreponiendo un sistema de coordenadas en la región, como se muestra en la figura 7.65*b*), se pueden localizar los centroides de los tres rectángulos en

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad (5, 1).$$

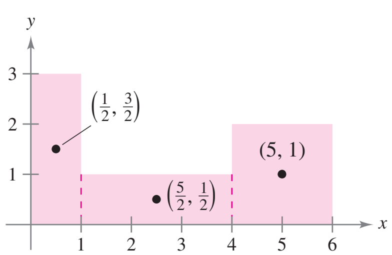
Usando estos tres puntos, se puede encontrar el centroide de la región.

$$\begin{aligned}
A &= \text{región del área} = 3 + 3 + 4 = 10 \\
\bar{x} &= \frac{(1/2)(3) + (5/2)(3) + (5)(4)}{10} = \frac{29}{10} = 2.9 \\
\bar{y} &= \frac{(3/2)(3) + (1/2)(3) + (1)(4)}{10} = \frac{10}{10} = 1
\end{aligned}$$

Así, el centroide de la región es (2.9, 1).



***a*)** Región original



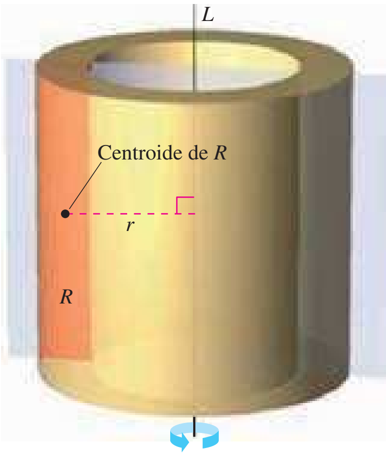
***b*)** El centroide de tres rectángulos

Figura 7.65

NOTA En el ejemplo 6, notar que (2.9, 1) no es promedio de $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y (5, 1).

Teorema de Pappus

El último tema en esta sección es un teorema útil acreditado a Pappus de Alejandría (ca. 300 d.C.), matemático griego, cuya *Mathematical Collection* en ocho volúmenes es un registro de la matemática griega clásica. La prueba de este teorema se da en la sección 14.4.



El volumen V es $2\pi\, rA$, donde A es el área de la región R
Figura 7.66

TEOREMA 7.1 EL TEOREMA DE PAPPUS

Sea R una región en un plano y sea L una recta en el mismo plano tal que L no interseca el interior de R, como se muestra en la figura 7.66. Si r es la distancia entre el centroide de R y la recta, entonces el volumen V del sólido de revolución formado al girar R sobre la recta es

$$V = 2\pi\, rA$$

donde A es el área de R. (Observar que $2\pi r$ es la distancia recorrida por el centroide cuando la región gira en torno a la recta.)

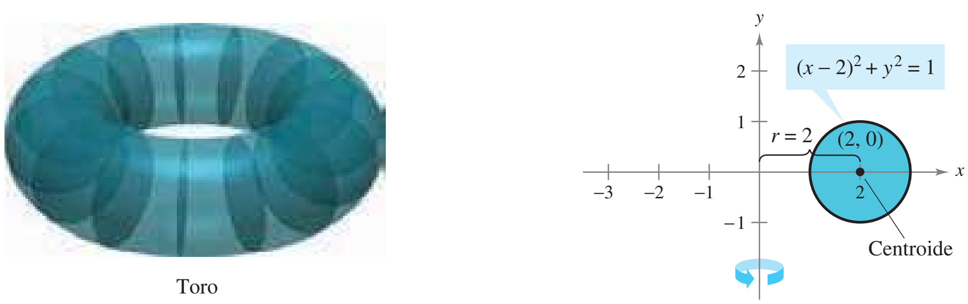
El teorema de Pappus puede usarse para encontrar el volumen de un toro, como se muestra en el ejemplo siguiente. Recordar que un toro es un sólido en forma de rosquilla formado al girar una región circular alrededor una recta que queda en el mismo plano como el círculo (pero no corta el círculo).

EJEMPLO 7 Encontrar el volumen por el teorema de Pappus

Encontrar el volumen del toro que se muestra en la figura 7.67*a* que es formado al girar la región circular limitada por

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1$$

alrededor del eje y, como se muestra en la figura 7.67*b*.



***a*)** ***b*)**
Figura 7.67

Solución En la figura 7.67*b* se puede ver que el centroide de la región circular es (2, 0). Así, la distancia entre el centroide y el eje de revolución es $r = 2$. Dado que el área de la región circular es $A = \pi$, el volumen del toro es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\, rA \\ &= 2\pi(2)(\pi) \\ &= 4\pi^2 \\ &\approx 39.5. \end{aligned}$$

EXPLORACIÓN

Usar el método de las capas para mostrar que el volumen del toro está dado por

$$V = \int_1^3 4\pi x\sqrt{1 - (x - 2)^2}\, dx.$$

Evaluar esta integral usando calculadora. ¿Coincide la respuesta con la del ejemplo 7?

7.6 Ejercicios

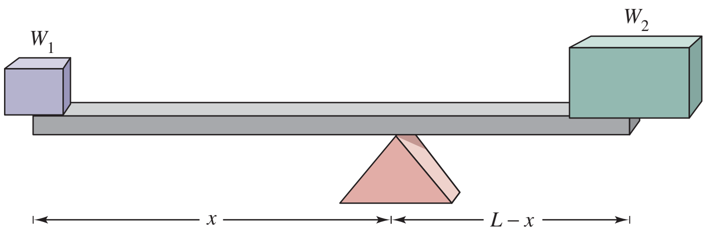
En los ejercicios 1 a 4, encontrar el centro de masa de la masa puntual situado en el eje x.

1. $m_1 = 7, m_2 = 3, m_3 = 5$
   $x_1 = -5, x_2 = 1, x_3 = 3$
2. $m_1 = 7, m_2 = 4, m_3 = 3, m_4 = 8$
   $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 5, x_4 = 4$
3. $m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, m_5 = 1$
   $x_1 = 7, x_2 = 8, x_3 = 12, x_4 = 15, x_5 = 18$
4. $m_1 = 12, m_2 = 1, m_3 = 6, m_4 = 3, m_5 = 11$
   $x_1 = -6, x_2 = -4, x_3 = -2, x_4 = 0, x_5 = 8$

5. ***Razonamiento gráfico***
   a) Trasladar cada masa del punto en el ejercicio 3 a las cinco unidades a la derecha y determinar el centro resultante de masa.
   b) Trasladar a la izquierda tres unidades cada masa del punto en el ejercicio 4 y determinar el centro de masa resultante.

6. ***Conjetura*** Usar el resultado del ejercicio 5 para hacer una conjetura sobre el cambio en el centro de masa que resulta cuando cada masa del punto se traslada k unidades horizontalmente.

Problemas de estática **En los ejercicios 7 y 8, considerar una viga de longitud L con un apoyo a x pies de un extremo (ver la figura). Se colocan los objetos con pesos W_1 y W_2 en los extremos opuestos de la viga. Encontrar x tal que el sistema esté en equilibrio.**



7. Dos niños que pesan 48 libras y 72 libras van a jugar en un columpio que tiene 10 pies de largo.
8. Para mover una roca de 600 libras, una persona que pesa 200 libras quiere balancearla con una viga que tiene 5 pies de longitud.

En los ejercicios 9 a 12, encontrar el centro de masa del sistema de las masas puntuales dado.

9.

m_i	5	1	3
(x_1, y_1)	$(2, 2)$	$(-3, 1)$	$(1, -4)$

10.

m_i	10	2	5
(x_1, y_1)	$(1, -1)$	$(5, 5)$	$(-4, 0)$

11.

m_i	12	6	4.5	5
(x_1, y_1)	$(2, 3)$	$(-1, 5)$	$(6, 8)$	$(2, -2)$

12.

m_i	3	4
(x_1, y_1)	$(-2, -3)$	$(5, 5)$

m_i	2	1	6
(x_1, y_1)	$(7, 1)$	$(0, 0)$	$(-3, 0)$

En los ejercicios 13 a 26, encontrar M_x, M_y y $(\bar{x}, \bar{y})$ para las láminas de densidad uniforme ρ acotadas por las gráficas de las ecuaciones.

13. $y = \frac{1}{2}x, y = 0, x = 2$
14. $y = -x + 3, y = 0, x = 0$
15. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$
16. $y = \frac{1}{3}x^2, y = 0, x = 3$
17. $y = x^2, y = x^3$
18. $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{2}x$
19. $y = -x^2 + 4x + 2, y = x + 2$
20. $y = \sqrt{x} + 1, y = \frac{1}{3}x + 1$
21. $y = x^{2/3}, y = 0, x = 8$
22. $y = x^{2/3}, y = 4$
23. $x = 4 - y^2, x = 0$
24. $x = 2y - y^2, x = 0$
25. $x = -y, x = 2y - y^2$
26. $x = y + 2, x = y^2$

En los ejercicios 27 a 30, formular y evaluar las integrales para encontrar el área y los momentos sobre los ejes x y y para la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. (Asumir $\rho = 1$.)

27. $y = x^2, y = 2x$
28. $y = \dfrac{1}{x}, y = 0, 1 \leq x \leq 4$
29. $y = 2x + 4, y = 0, 0 \leq x \leq 3$
30. $y = x^2 - 4, y = 0$

En los ejercicios 31 a 34, usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Usar las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar el centroide de la región.

31. $y = 10x\sqrt{125 - x^3}, y = 0$
32. $y = xe^{-x/2}, y = 0, x = 0, \ x = 4$
33. ***Sección prefabricada de un edificio.***
    $y = 5\sqrt[3]{400 - x^2}, y = 0$
34. ***Bruja de Agnesi.***
    $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}, y = 0, x = -2, x = 2$

En los ejercicios 35 a 40, encontrar y/o verificar el centroide de la región común usada en ingeniería.

35. ***Triángulo*** Mostrar que el centroide del triángulo con vértices $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y (b, c) es el punto de intersección de las medianas (ver la figura).

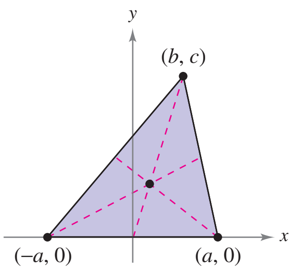


Figura para 35

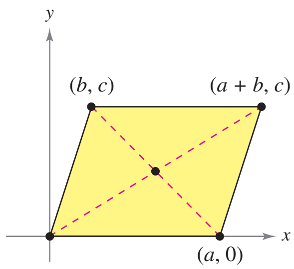


Figura para 36

36. ***Paralelogramo*** Mostrar que el centroide del paralelogramo con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, (b, c) y $(a + b, c)$ es el punto de intersección de las diagonales (ver la figura).

37. ***Trapecio*** Encontrar el centroide del trapecio con vértices $(0, 0)$, $(0, a)$, (c, b) y $(c, 0)$. Mostrar que es la intersección de la recta que conecta los puntos medios de los lados paralelos y la recta que conecta los lados paralelos extendidos, como se muestra en la figura.

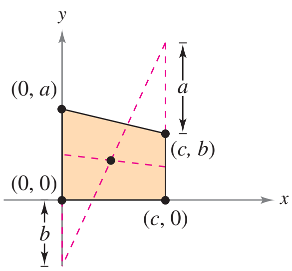


Figura para 37

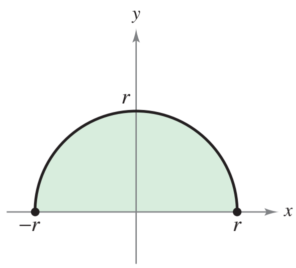


Figura para 38

38. ***Semicírculo*** Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $y = 0$ (ver la figura).

39. ***Semielipse*** Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = 0$ (ver la figura).

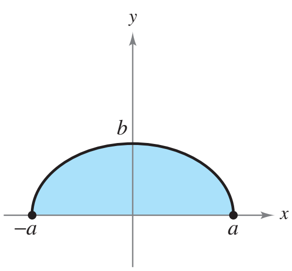


Figura para 39

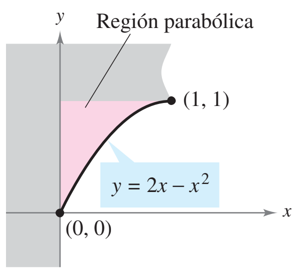


Figura para 40

40. ***Región parabólica*** Encontrar el centroide de la **región parabólica** mostrada en la figura.

41. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = b$, donde $b > 0$.

a) Dibujar una gráfica de la región.
b) Usar la gráfica del apartado *a*) para determinar $\bar{x}$. Explicar.
c) Formular la integral para encontrar M_y. Debido a la forma del integrando, el valor de la integral puede obtenerse sin integrar. ¿Cuál es la forma del integrando y cuál es el valor de la integral? Comparar con el resultado del apartado *b*).
d) Usar la gráfica del apartado *a*) para determinar si $\bar{y} > \dfrac{b}{2}$ o $\bar{y} < \dfrac{b}{2}$. Explicar.
e) Usar la integración para verificar la respuesta en el apartado *d*).

42. ***Razonamiento gráfico y numérico*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = x^{2n}$ $y = b$, donde $b > 0$ y n es un entero positivo.

a) Formular la integral para encontrar M_y. Debido a la forma del integrando, el valor de la integral puede obtenerse sin integrar. ¿Cuál es la forma del integrando y cuál es el valor de la integral? Comparar con el resultado *b*).
b) ¿Es $\bar{y} > \dfrac{b}{2}$ o $\bar{y} < \dfrac{b}{2}$? Explicar.
c) Usar integración para encontrar $\bar{y}$ como una función de n.
d) Usar el resultado del apartado *c*) para completar la tabla.

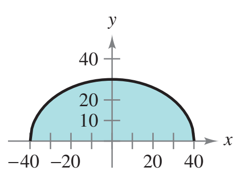
n	1	2	3	4
$\bar{y}$				

e) Encontrar $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{y}$.
f) Dar una explicación geométrica del resultado en el apartado *e*).

43. ***Modelado matemático*** Un fabricante de ventanas para camionetas modificadas necesita calcular el centro de masa. Para lo cual sobrepone un sistema de coordenadas en un prototipo del vidrio (ver la figura). Las medidas (en centímetros) para la mitad derecha del pedazo simétrico de vidrio se muestran en la tabla.

x	0	10	20	30	40
y	30	29	26	20	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el centro de masa del vidrio.
b) Usar las capacidades de regresión de una calculadora para encontrar un modelo polinómico de cuarto grado para los datos.
c) Usar las capacidades de integración de una calculadora y el modelo para aproximar el centro de masa del vidrio. Comparar con el resultado del apartado *a*).



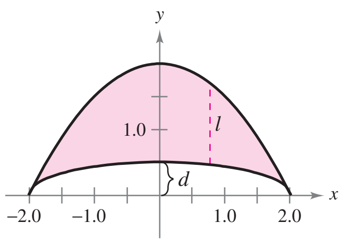
44. ***Modelado matemático*** El fabricante de un barco necesita aproximar el centro de masa de una sección del casco. Un sistema de coordenadas se sobrepone en un prototipo (ver la figura). Las medidas (en pies) para la mitad derecha del prototipo simétrico se listan en la tabla.

x	0	0.5	1.0	1.5	2
l	1.50	1.45	1.30	0.99	0
d	0.50	0.48	0.43	0.33	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el centro de masa de la sección del cascarón.

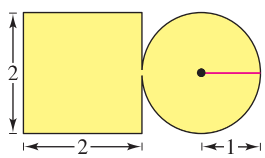
b) Usar las capacidades de la regresión en una calculadora para encontrar los modelos polinómicos de cuarto grado para ambas curvas mostradas en la figura. Trazar los datos y trazar la gráfica de los modelos.

c) Usar las capacidades de la integración en una herramienta de graficación y el modelo para aproximar el centro de masa de la sección del cascarón. Comparar el resultado con el apartado *a*).

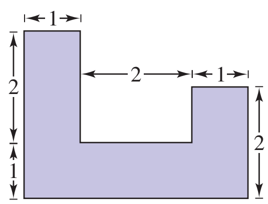


En los ejercicios 45 a 48, introducir un sistema de coordenadas apropiado y encontrar las coordenadas del centro de masa de la lámina plana. (La respuesta depende de la posición del sistema de coordenadas elegido.)

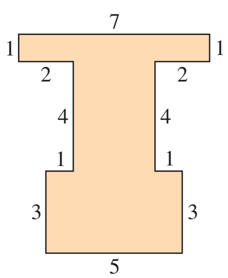
45.



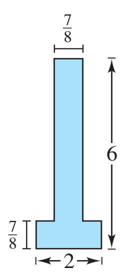
46.



47.



48.



49. Encontrar el centro de masa de la lámina, del ejercicio 45 si la sección circular tuviera el doble de la densidad de la cuadrada.

50. Encontrar el centro de masa de la lámina del ejercicio 45 si la sección cuadrada tuviera el doble de la densidad de la circular.

En los ejercicios 51 a 54, usar el teorema de Pappus para encontrar el volumen del sólido de revolución.

51. El toro formado al girar el círculo $(x-5)^2+y^2=16$ alrededor del eje y.

52. El toro formado al girar el círculo $x^2+(y-3)^2=4$ alrededor del eje x.

53. El sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y=x$, $y=4$ y $x=0$ alrededor del eje x.

54. El sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y=2\sqrt{x-2}$, $y=0$ y $x=6$ alrededor del eje y.

Desarrollo de conceptos

55. Sea la masa puntual $m_1, m_2, \ldots, m_n$, localizada en (x_1, y_1) $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Definir el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$.

56. ¿Qué es una lámina plana? Describir lo que significa el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de una lámina plana.

57. Enumerar el teorema de Pappus.

Para discusión

58. El centroide de la región plana acotado por las gráficas de $y=f(x)$, $y=0$, $x=0$ y $x=1$ es $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{18}\right)$. ¿Es posible encontrar el centroide de cada una de las regiones acotadas por las gráficas de los siguientes conjuntos de ecuaciones? En ese caso, identificar el centroide y explicar la respuesta.

a) $y=f(x)+2,\ y=2,\ x=0$ y $x=1$

b) $y=f(x-2),\ y=0,\ x=2$ y $x=3$

c) $y=-f(x),\ y=0,\ x=0$ y $x=1$

d) $y=f(x),\ y=0,\ x=-1$ y $x=1$

En los ejercicios 59 y 60, usar el *segundo teorema de Pappus* el cual se enuncia a continuación. Si un segmento de una curva plana C se gira alrededor de un eje que no corta la curva (posiblemente excepto a sus puntos finales), el área S de la superficie de revolución resultante está dada por el producto de la longitud de C por la distancia d recorrida por el centroide de C.

59. Una esfera se forma al girar la gráfica de $y=\sqrt{r^2-x^2}$ alrededor del eje x. Usar la fórmula para el área de la superficie, $S=4\pi r^2$, para encontrar el centroide del semicírculo $y=\sqrt{r^2-x^2}$.

60. Un toro se forma al girar la gráfica de $(x-1)^2+y^2=1$ alrededor del eje y. Encontrar el área de la superficie del toro.

61. Sea $n \geq 1$ constante, y considerar la región acotada por $f(x)=x^n$, el eje x y $x=1$. Encontrar el centroide de esta región. Cuando $n \to \infty$ ¿qué aspecto tiene la región y dónde está su centroide?

Preparación del examen Putnam

62. Sea V la región en el plano cartesiano que consiste en todos los puntos (x, y) satisfaciendo las condiciones simultáneas $|x| \leq y \leq |x|+3$ y $y \leq 4$. Encontrar el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de V.

7.7 Presión y fuerza de un fluido

- **Encontrar la presión y la fuerza de un fluido.**

Presión y fuerza de un fluido

Los buceadores saben que mientras más profundo se sumerge un objeto en un fluido, es mayor la presión sobre el objeto. La **presión** se define como la fuerza ejercida por unidad de área en la superficie de un cuerpo. Por ejemplo, para una columna de agua que tiene 10 pies de altura y 1 pulg^2 pesa 4.3 libras, la *presión del fluido* ejercida a una profundidad de 10 pies de agua es $4.3/\text{pulg}^2$.* A 20 pies, ésta aumentaría a 8.6 $\text{libras}/\text{pulg}^2$ y en general la presión será proporcional a la profundidad a la que esté el objeto en el fluido.

The Granger Collection

BLAISE PASCAL (1623-1662)

Pascal es conocido por sus contribuciones a diversas áreas de las matemáticas y de la física, así como por su influencia en Leibniz. Aunque buena parte de su obra en cálculo fue intuitiva y carente del rigor exigible en las matemáticas modernas, Pascal anticipó muchos resultados relevantes.

DEFINICIÓN DE PRESIÓN DE FLUIDO

La presión en un objeto a la profundidad h en un líquido es

$$\text{Presión} = P = wh$$

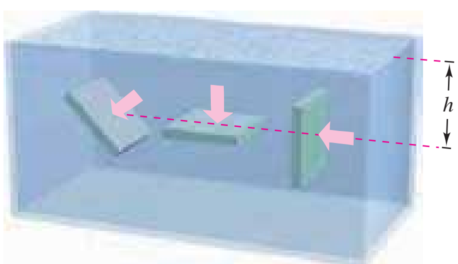
donde w es la densidad de peso del líquido por unidad de volumen.

A continuación se muestran varias densidades de peso de fluidos comunes en $\text{libras}/\text{pie}^3$.

Alcohol etílico	49.4
Gasolina	41.0-43.0
Glicerina	78.6
Keroseno	51.2
Mercurio	849.0
Agua de mar	64.0
Agua	62.4

Cuando se calcula la presión del fluido, se puede usar una importante (y sorprendente) ley física llamada el **principio de Pascal** en honor del matemático francés Blaise Pascal. El principio de Pascal establece que la presión ejercida por un fluido a una profundidad h es exactamente igual *en todas direcciones*. Por ejemplo, en la figura 7.68, la presión a la profundidad indicada es la misma para los tres objetos. Como se da la presión del fluido en términos de la fuerza por unidad de área ($P = F/A$), la fuerza del fluido en una superficie de área *A sumergida horizontalmente* es

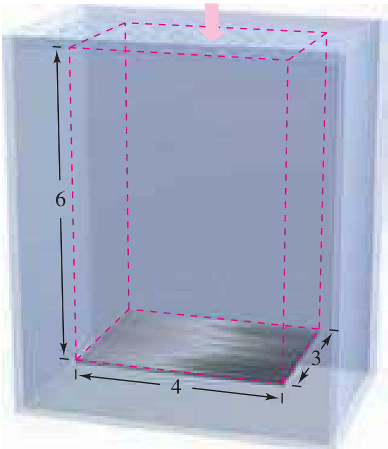
$$\text{Fuerza del fluido} = F = PA = (\text{presión})(\text{área}).$$



La presión en h es la misma para los tres objetos
Figura 7.68

**La presión total en un objeto sumergido a 10 pies de agua también incluiría la presión debida a la atmósfera de la Tierra. Al nivel del mar, la presión atmosférica es aproximadamente 14.7* $\textit{libras}/\textit{pulg}^2$.

EJEMPLO 1 Fuerza de un fluido sobre una lámina sumergida



La fuerza del fluido sobre una lámina de metal horizontal es igual a la presión del fluido por el área de la lámina
Figura 7.69

Encontrar la fuerza de un fluido sobre una lámina de metal rectangular que mide 3 pies por 4 pies que es sumergida a 6 pies en el agua, como se muestra en la figura 7.69.

Solución Porque el peso por unidad de agua es 62.4 libras por pie^3 y la lámina se sumerge a 6 pies en el agua, la presión del fluido es

$$\begin{aligned} P &= (62.4)(6) \qquad\qquad P = wh \\ &= 374.4 \text{ libras por pie}^2 \end{aligned}$$

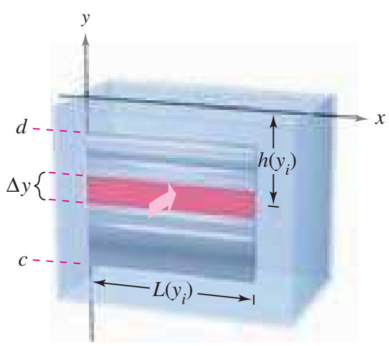
Porque el área total de la lámina es $A = (3)(4) = 12$ pies^2, la fuerza del fluido es

$$\begin{aligned} F = PA &= \left(374.4 \frac{\text{libras}}{\text{pie}^2}\right)(12 \text{ pies}^2) \\ &= 4\,492.8 \text{ libras} \end{aligned}$$

Este resultado es independiente del recipiente del agua. La fuerza del fluido sería la misma en una piscina que en un lago.

En el ejemplo 1, debido a que la lámina es rectangular y horizontal no son necesarios los métodos de cálculo para resolver el problema. Considerar una superficie que se sumerge verticalmente en un fluido. Este problema es más difícil porque la presión no es constante sobre la superficie.

Suponer que una lámina vertical se sumerge en un fluido de peso w (por unidad de volumen), como se muestra en la figura 7.70. Para determinar la fuerza total ejercida sobre *una cara* entre la profundidad c y la profundidad d, se puede subdividir el intervalo $[c, d]$ en n subintervalos, cada uno de anchura Δy. Luego, considerar el rectángulo representativo de anchura Δy y longitud $L(y_i)$, donde y_i está en el i-ésimo subintervalo. La fuerza ejercida contra este rectángulo representativo es



Los métodos de cálculo serán usados para encontrar la fuerza del fluido sobre una placa de metal vertical
Figura 7.70

$$\begin{aligned} \Delta F_i &= w(\text{profundidad})(\text{área}) \\ &= wh(y_i)L(y_i)\,\Delta y. \end{aligned}$$

La fuerza sobre los n rectángulos es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = w \sum_{i=1}^{n} h(y_i)L(y_i)\,\Delta y.$$

Observar que se considera que w es constante y se factoriza fuera de la suma. Por consiguiente, si el límite es $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$, sugiere la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE FUERZA EJERCIDA POR UN FLUIDO

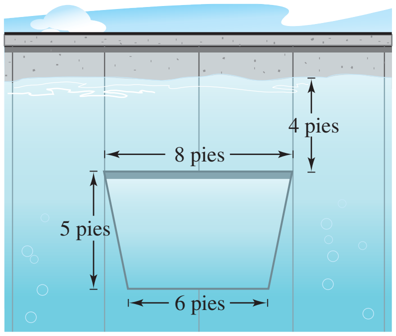
La **fuerza F ejercida por un fluido** de peso-densidad constante w (por unidad de volumen) sobre una región plana vertical sumergida desde $y = c$ hasta $y = d$ es

$$\begin{aligned} F &= w \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(y_i)L(y_i)\,\Delta y \\ &= w \int_c^d h(y)L(y)\,dy \end{aligned}$$

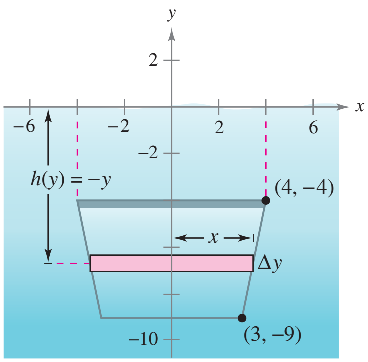
donde $h(y)$ es la profundidad del fluido en y y $L(y)$ es la longitud horizontal de la región en y.

EJEMPLO 2 Fuerza de un fluido en una superficie vertical

Una compuerta de una presa vertical en un dique tiene la forma de un trapecio, con 8 pies en la parte superior y 6 pies en el fondo, con una altura de 5 pies, como se muestra en la figura 7.71*a*. ¿Cuál es la fuerza del fluido en la compuerta cuando la parte superior está 4 pies debajo de la superficie del agua?



***a*)** Compuerta de una presa



***b*)** La fuerza del fluido sobre la compuerta
Figura 7.71

Solución Formular un modelo matemático para este problema, tiene libertad para localizar los ejes x y y de maneras diferentes. Una sugerencia conveniente es tomar el eje y, bisecar la compuerta y poner el eje x en la superficie del agua, como se muestra en la figura 7.71*b*. Así, la profundidad del agua en y, en pies, es

$$\text{Profundidad} = h(y) = -y.$$

Para encontrar la longitud $L(y)$ de la región en y, localizar la ecuación de la recta que forma el lado derecho de la compuerta. Porque esta recta atraviesa los puntos $(3, -9)$ y $(4, -4)$, su ecuación es

$$\begin{aligned} y - (-9) &= \frac{-4 - (-9)}{4 - 3}(x - 3) \\ y + 9 &= 5(x - 3) \\ y &= 5x - 24 \\ x &= \frac{y + 24}{5}. \end{aligned}$$

En la figura 7.71*b* se puede observar que la longitud de la región en y es

$$\begin{aligned} \text{Longitud} &= 2x \\ &= \frac{2}{5}(y + 24) \\ &= L(y). \end{aligned}$$

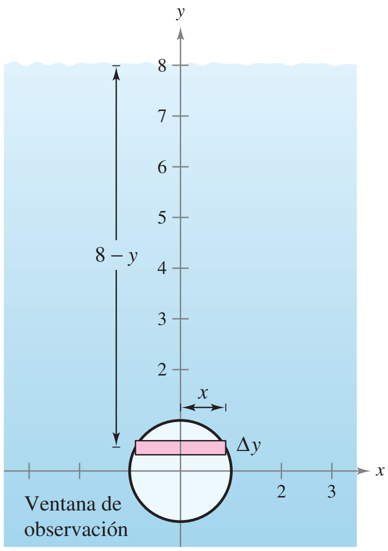
Por último, integrando de $y = -9$ a $y = -4$ se puede calcular la fuerza del fluido para ser

$$\begin{aligned} F &= w\int_c^d h(y)L(y)\,dy \\ &= 62.4\int_{-9}^{-4}(-y)\left(\frac{2}{5}\right)(y + 24)\,dy \\ &= -62.4\left(\frac{2}{5}\right)\int_{-9}^{-4}(y^2 + 24y)\,dy \\ &= -62.4\left(\frac{2}{5}\right)\left[\frac{y^3}{3} + 12y^2\right]_{-9}^{-4} \\ &= -62.4\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{-1\,675}{3}\right) \\ &= 13\,936 \text{ libras.} \end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 2, el eje x coincidió con la superficie del agua. Esto es conveniente, pero arbitrario. Al elegir un sistema de coordenadas para representar una situación física, se deben considerar varias posibilidades. A menudo puede simplificar los cálculos en un problema si localiza el sistema de coordenadas aprovechando las características especiales del problema, como la simetría.

EJEMPLO 3 Fuerza de un fluido sobre una superficie vertical

Una ventana circular para observación en un buque de investigación marina tiene un radio de 1 pie, y el centro de la ventana está a 8 pies de distancia del nivel del agua, como se muestra en la figura 7.72. ¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la ventana?



La fuerza del fluido en la ventana
Figura 7.72

Solución Para aprovechar la simetría, localizar un sistema de coordenadas tal que el origen coincida con el centro de la ventana, como se muestra en la figura 7.72. La profundidad en y es, entonces

$$\text{Profundidad} = h(y) = 8 - y.$$

La longitud horizontal de la ventana es $2x$, y se puede usar la ecuación para el círculo, $x^2 + y^2 = 1$, y resolver para x como sigue.

$$\begin{aligned}\text{Longitud} &= 2x\\ &= 2\sqrt{1-y^2} = L(y)\end{aligned}$$

Por último, dado que el rango de y va de -1 a 1, y la densidad del agua de mar es de 64 libras por pie^3, se tiene

$$\begin{aligned}F &= w\int_c^d h(y)L(y)\,dy\\ &= 64\int_{-1}^{1}(8-y)(2)\sqrt{1-y^2}\,dy.\end{aligned}$$

Inicialmente parece como si esta integral fuera difícil de resolver. Sin embargo, si se divide la integral en dos partes y se aplica la simetría, la solución es simple.

$$F = 64(16)\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy - 64(2)\int_{-1}^{1}y\sqrt{1-y^2}\,dy$$

La segunda integral es 0 (porque el integrando es impar y los límites de integración son simétricos al origen). Es más, reconociendo que la primera integral representa el área de un semicírculo de radio 1, se obtiene

$$\begin{aligned}F &= 64(16)\left(\frac{\pi}{2}\right) - 64(2)(0)\\ &= 512\pi\\ &\approx 1\,608.5 \text{ libras}\end{aligned}$$

Así, la fuerza del fluido en la ventana es 1 608.5 libras.

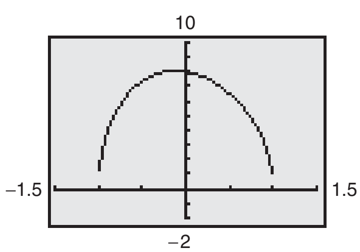
TECNOLOGÍA Para confirmar el resultado obtenido en el ejemplo 3, se podría considerar la regla de Simpson para aproximar el valor de

$$128\int_{-1}^{1}(8-x)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

De la gráfica de

$$f(x) = (8-x)\sqrt{1-x^2}$$

sin embargo, se puede observar que f no es derivable cuando $x = \pm 1$ (ver la figura 7.73). Esto significa que no se puede aplicar el teorema 4.19 de la sección 4.6 para determinar el error potencial en la regla de Simpson. Sin conocer el error potencial, la aproximación es de poca utilidad. Usar una calculadora para aproximar la integral.



f no es derivable en $x = \pm 1$
Figura 7.73

7.7 Ejercicios

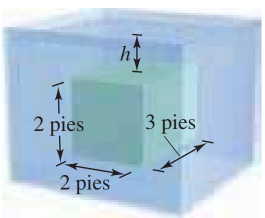
Fuerza ejercida sobre una lámina sumergida **En los ejercicios 1 a 4, se da el área del lado superior de una lámina de metal. La lámina se sumerge horizontalmente a 5 pies del agua. Encontrar la fuerza del fluido en el lado de la parte superior.**

1. 3 pies^2 **2.** 16 pies^2

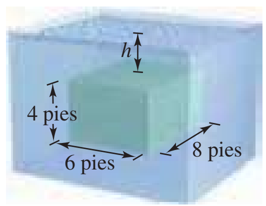
3. 10 pies^2 **4.** 22 pies^2

Fuerza de flotación **En los ejercicios 5 y 6, encontrar la fuerza de flotación de un sólido rectangular de las dimensiones dadas sumergido en el agua con su cara superior paralela a la superficie del agua. La fuerza de flotación es la diferencia entre las fuerzas del fluido en la parte superior y los lados del fondo del sólido.**

5.

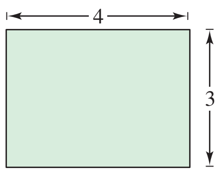


6.

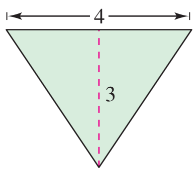


Fuerza de un fluido sobre la pared de un tanque **En los ejercicios 7 a 12, encontrar la fuerza del fluido en el lado vertical del tanque donde las dimensiones se dan en pies. Asumir que el tanque está lleno de agua.**

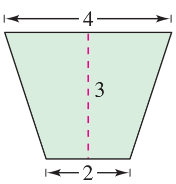
7. Rectángulo



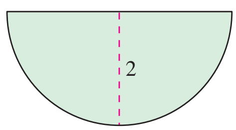
8. Triángulo



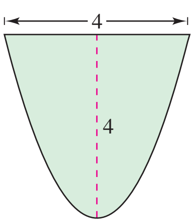
9. Trapezoide



10. Semicírculo

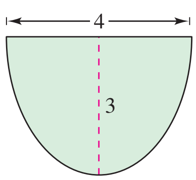


11. Parábola, $y = x^2$



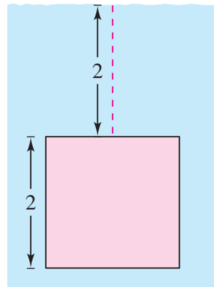
12. Semielipse

$y = -\frac{1}{2}\sqrt{36 - 9x^2}$

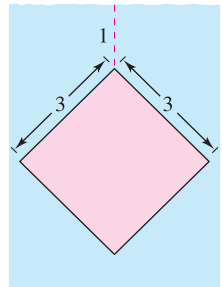


Fuerza de un fluido de agua **En los ejercicios 13 a 16, encontrar la fuerza de un fluido en la placa vertical sumergida en agua donde las dimensiones se dan en metros y la densidad de peso del agua es 9 800 newtons por** $\textbf{metro}^3$**.**

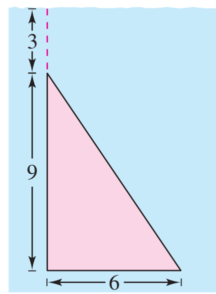
13. Cuadrado



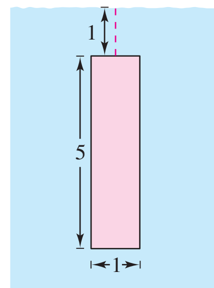
14. Cuadrado



15. Triángulo

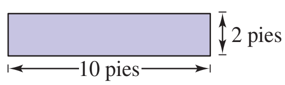


16. Rectángulo



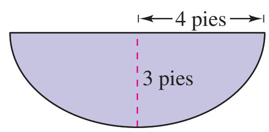
Fuerza ejercida en una estructura de concreto (hormigón) **En los ejercicios 17 a 20, la figura es el lado vertical de una estructura de concreto vertido que pesa 140.7** $\textbf{libras/pie}^3$**. Determinar la fuerza en esta parte de la estructura de concreto.**

17. Rectángulo

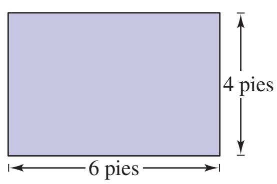


18. Semielipse

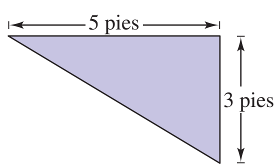
$y = -\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$



19. Rectángulo



20. Triángulo



21. ***Fuerza ejercida por la gasolina*** Un tanque de gasolina cilíndrico está colocado con su eje en posición horizontal. Encontrar la fuerza del fluido sobre una de las paredes del tanque si éste está medio lleno, asumiendo que su diámetro es de 3 pies y la gasolina pesa 42 libras/pie^3.

22. ***Fuerza de fluido de la gasolina*** Repetir el ejercicio 21 para un tanque que está lleno. (Evaluar una integral por una fórmula geométrica y el otro observando que el integrando es una función impar.)

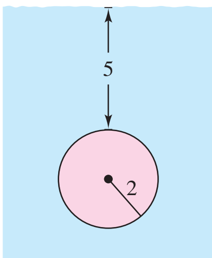
23. ***Fuerza de un fluido en una placa circular*** Una placa circular r pies es sumergida verticalmente en un tanque de un fluido que pesa w libras/pie^3. El centro del círculo es k ($k > r$) pies debajo de la superficie del fluido. Mostrar que la fuerza del fluido en la superficie de la placa es

$$F = wk(\pi r^2).$$

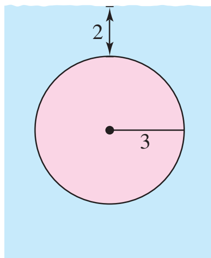
(Evaluar una integral por una fórmula geométrica y el otro observando que el integrando es una función impar.)

24. ***Fuerza de un fluido en una placa circular*** Usar el resultado del ejercicio 23 para encontrar la fuerza de un fluido en una placa circular como se muestra en cada figura. Asumir que las placas están en la pared de un tanque lleno de agua y las medidas están dadas en pies.

a)



b)

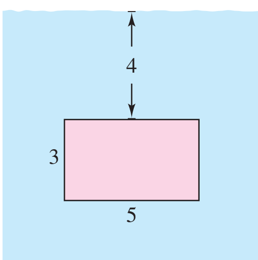


25. ***Fuerza de un fluido en una placa rectangular*** Una placa rectangular de altura h pies y base b se sumerge verticalmente en un tanque de fluido que pesa w libras por pie cúbico. El centro está k debajo de la superficie del fluido donde $k > h/2$. Mostrar que la fuerza del fluido en la superficie de la placa es

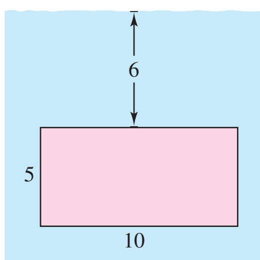
$$F = wkhb.$$

26. ***Fuerza de un fluido en una placa rectangular*** Usar el resultado del ejercicio 25 para encontrar la fuerza de un fluido en una placa rectangular como se muestra en cada figura. Asumir que las placas están en la pared de un tanque lleno de agua y las medidas están dadas en pies.

a)



b)

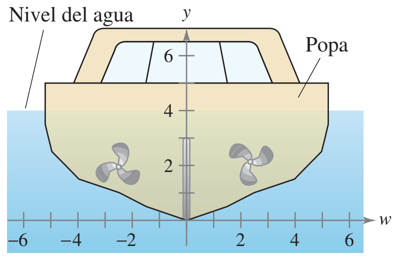


27. ***Portilla de un submarino*** Una portilla en un lado vertical de un submarino (sumergido en agua de mar) es un cuadrado de un pie de lado. Encontrar la fuerza del fluido en la portilla, asumiendo que el centro del cuadrado está 15 pies debajo de la superficie.

28. ***Portilla de un submarino*** Repetir el ejercicio 27 para una portilla circular que tiene un diámetro de un pie. El centro está 15 pies debajo de la superficie.

29. ***Modelo matemático*** La popa vertical de un barco con un sistema de coordenadas sobrepuesto se ilustra en la figura. La tabla muestra la anchura w de la popa en los valores indicados de y. Encontrar la fuerza del fluido contra la popa si las medidas se dan en pies.

y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
w	0	3	5	8	9	10	10.25	10.5	10.5



30. ***Compuerta de un canal de irrigación*** La sección transversal vertical de una compuerta de un canal de irrigación es diseñado por $f(x) = 5x^2/(x^2 + 4)$, donde x se mide en pies y $x = 0$ corresponden al centro del canal. Usar las capacidades de integración de una calculadora para aproximar la fuerza del fluido contra una compuerta vertical que detiene el flujo de agua si el agua está a 3 pies de profundidad.

En los ejercicios 31 y 32, usar las capacidades de integración en una calculadora para aproximar la fuerza de un fluido en la placa vertical acotada por el eje x y la mitad superior de la gráfica de la ecuación. Asumir que la base de la placa está 15 pies debajo de la superficie del agua.

31. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$

32. $\dfrac{x^2}{28} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Desarrollo de conceptos

33. ***Para pensar*** Aproximar la profundidad del agua en el tanque en el ejercicio 7, si la fuerza del fluido es una mitad más grande que cuando el tanque está lleno. Explicar por qué la respuesta no es $\frac{3}{2}$.

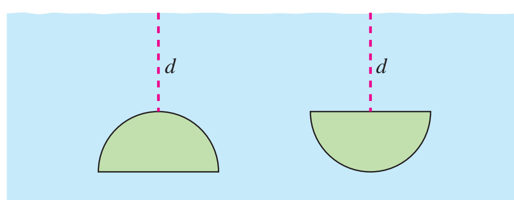
34. *a*) Definir la presión del fluido.

b) Definir la fuerza del fluido contra una región del plano vertical sumergida.

35. Explicar por qué la presión del fluido sobre una superficie se calcula usando rectángulos representativos horizontales en lugar de rectángulos representativos verticales.

Para discusión

36. Se colocan dos ventanas semicirculares idénticas a la misma profundidad en la pared vertical de un acuario (ver la figura). ¿Cuál tiene la fuerza del fluido mayor? Explicar.



7 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 a 10, esquematizar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, y determinar el área de la región.

1. $y = \frac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 5$

2. $y = \frac{1}{x^2},\ y = 4,\ x = 5$

3. $y = \frac{1}{x^2 + 1},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$

4. $x = y^2 - 2y,\ x = -1,\ y = 0$

5. $y = x,\ y = x^3$

6. $x = y^2 + 1,\ x = y + 3$

7. $y = e^x,\ y = e^2,\ x = 0$

8. $y = \csc x,\ y = 2$ (una región)

9. $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$

10. $x = \cos y,\ x = \frac{1}{2},\ \frac{\pi}{3} \leq y \leq \frac{7\pi}{3}$

En los ejercicios 11 a 14, usar una herramienta de graficación para representar la región acotada por las gráficas de las funciones, y usar las capacidades de integración en una herramienta de graficación para encontrar el área de la región.

11. $y = x^2 - 8x + 3,\ y = 3 + 8x - x^2$

12. $y = x^2 - 4x + 3,\ y = x^3,\ x = 0$

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,\ y = 0,\ x = 0$

14. $y = x^4 - 2x^2,\ y = 2x^2$

En los ejercicios 15 a 18, usar los rectángulos representativos verticales y horizontales para formular las integrales para encontrar el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Encontrar el área de la región evaluando la más fácil de las dos integrales.

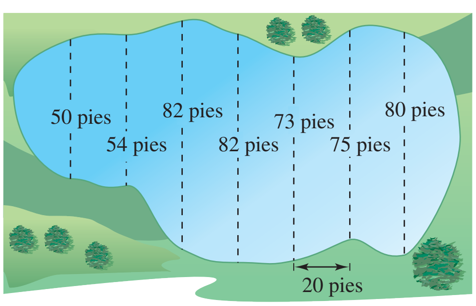
15. $x = y^2 - 2y,\ x = 0$

16. $y = \sqrt{x - 1},\ y = \frac{x - 1}{2}$

17. $y = 1 - \frac{x}{2},\ y = x - 2,\ y = 1$

18. $y = \sqrt{x - 1},\ y = 2,\ y = 0,\ x = 0$

19. Estimar el área de la superficie del estanque usando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.



20. ***Modelo matemático*** La tabla muestra el ingreso R_1 de servicio anual en miles de millones de dólares para la industria del teléfono celular durante los años 2000 a 2006. (*Fuente: Asociación de Telecomunicaciones Celulares e Internet*)

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
R_1	52.5	65.3	76.5	87.5	102.1	113.5	125.5

a) Usar las capacidades de regresión de una calculadora para encontrar un modelo exponencial para los datos. Sea t que represente el año, con $t = 10$ que corresponden a 2000. Usar una herramienta de graficación para trazar los datos y el modelo en la misma ventana.

b) Un consultor financiero considera que un modelo de ingreso de servicio para los años 2010 hasta 2015 es de $R_2 = 6 + 13.9e^{0.14t}$. ¿Cuál es la diferencia en el total de ingresos de servicios entre los dos modelos para los años 2010 hasta 2015?

En los ejercicios 21 a 28, encontrar el volumen del sólido generado al girar la región plana acotada por las ecuaciones alrededor de la(s) recta(s) indicada(s).

21. $y = x,\ y = 0,\ x = 3$

a) eje x *b*) eje y
c) recta $x = 3$ *d*) recta $x = 6$

22. $y = \sqrt{x},\ y = 2,\ x = 0$

a) eje x *b*) recta $y = 2$
c) eje y *d*) recta $x = -1$

23. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ *a*) eje y (esferoide oblongo)
b) eje x (esferoide prolato)

24. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *a*) eje y (esferoide oblongo)
b) eje x (esferoide prolato)

25. $y = \frac{1}{x^4 + 1},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$
gira alrededor del eje y

26. $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$
gira alrededor del eje x

27. $y = 1/(1 + \sqrt{x - 2}),\ y = 0,\ x = 2,\ x = 6$
gira alrededor del eje y

28. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$
gira alrededor del eje x

29. ***Área y volumen*** Considerar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x\sqrt{x + 1}$ y $y = 0$.

a) Encontrar el área de la región.

b) Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x.

c) Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje y.

30. ***Para pensar*** Un sólido es generado al girar una región acotada por $y = x^2 + 4$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$ alrededor del eje x. Crear la integral que obtiene el volumen del sólido usando *a*) el método de los discos y *b*) el método de las capas (no integrar). *c*) ¿Cada método da lugar a una integral con respecto a x?

31. ***Gasolina en un tanque*** Un tanque de gasolina es un esferoide de oblato generado al girar la región acotada por la gráfica de $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ alrededor del eje y donde x y y son medidos en pies. ¿A qué altura llega la gasolina en el tanque cuando se llena a un cuarto de su capacidad?

32. ***Tamaño de una base*** La base de un sólido es un círculo de radio a y sus secciones transversales verticales son triángulos equiláteros. El volumen del sólido es 10 metros cúbicos. Encontrar el radio del círculo.

En los ejercicios 33 y 34, encontrar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo dado.

33. $f(x) = \frac{4}{5}x^{5/4}, \quad [0, 4]$ **34.** $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}, \quad [1, 3]$

35. ***Longitud de una catenaria*** Un cable de suspensión de un puente forma una catenaria modelada por la ecuación

$$y = 300 \cosh\left(\frac{x}{2\,000}\right) - 280, \quad -2\,000 \leq x \leq 2\,000$$

donde x y y son medidos en pies. Usar una computadora para aproximar la longitud del cable.

36. ***Aproximación*** Determinar qué valor aproxima mejor la longitud de arco representada por la integral

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (\sec^2 x)^2}\, dx.$$

(Hacer la selección con base en un esquema de arco y *sin* hacer algún cálculo.)

a) -2 *b*) 1 *c*) π *d*) 4 *e*) 3

37. ***Área de una superficie*** Usar la integración para encontrar el área de la superficie lateral de un cono circular recto de altura 4 y radio 3.

38. ***Área de una superficie*** La región acotada por las gráficas de $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$ y $x = 8$ gira alrededor del eje x. Encontrar el área de la superficie del sólido generada.

39. ***Trabajo*** Se necesita una fuerza de 5 libras para estirar un resorte 1 pulgada de su posición natural. Encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural de 10 pulgadas a una longitud de 15 pulgadas.

40. ***Trabajo*** La fuerza requerida para estirar un resorte es 50 libras. Encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural de 10 pulgadas al doble de esa longitud.

41. ***Trabajo*** Un pozo de agua tiene ocho pulgadas de diámetro y 190 pies de profundidad. El agua llega a 25 pies de la parte superior del pozo. Determinar la cantidad de trabajo realizado al vaciar el pozo, asumiendo que el agua no entra en él mientras está bombeándose.

42. ***Trabajo*** Repetir el ejercicio 41, asumiendo que el agua entra al pozo a una velocidad de 4 galones por minuto y la bomba trabaja a una velocidad de 12 galones por minuto. ¿Cuántos galones se bombean en este caso?

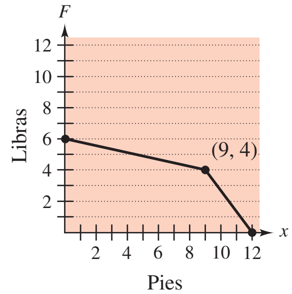
43. ***Trabajo*** Una cadena de 10 pies de largo pesa 4 libras por pie y está colgada de una plataforma situada 20 pies sobre el nivel del suelo. ¿Cuánto trabajo se requiere para levantar toda la cadena al nivel de 20 pies?

44. ***Trabajo*** Una grúa está a 200 pies sobre el nivel del suelo en la parte superior de un edificio, usa un cable que pesa 5 libras por pie. Encontrar el trabajo realizado para enrollar el cable si

a) un extremo está al nivel del suelo.
b) hay una carga de 300 libras atada al extremo del cable.

45. ***Trabajo*** El trabajo realizado por una fuerza variable en una prensa es 80 libras-pie. La prensa mueve una distancia de 4 pies y la fuerza es una ecuación cuadrática de la forma $F = ax^2$. Encontrar a.

46. ***Trabajo*** Encontrar el trabajo realizado por la fuerza F mostrada en la figura.



En los ejercicios 47 a 50, encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

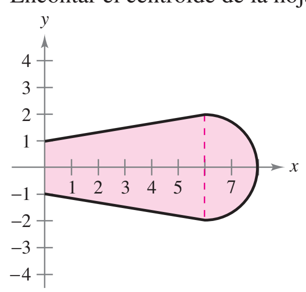
47. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \ x = 0, \ y = 0$

48. $y = x^2, \ y = 2x + 3$

49. $y = a^2 - x^2, \ y = 0$

50. $y = x^{2/3}, \ y = \frac{1}{2}x$

51. ***Centroide*** Un aspa de un ventilador industrial tiene la configuración de un semicírculo adosado a un trapecio (ver la figura). Encontar el centroide de la hoja.



52. ***Fuerza de un fluido*** Una piscina tiene 5 pies de profundidad en un extremo y 10 pies de profundidad en el otro, y el fondo es un plano inclinado. La longitud y anchura de la piscina son 40 y 20 pies. Si la piscina está llena de agua, ¿cuál es la fuerza del fluido en cada una de las paredes verticales?

53. ***Fuerza de un fluido*** Mostrar que la fuerza de un fluido contra cualquier región vertical es el producto del peso por el volumen cúbico del líquido, el área de la región y la profundidad del centroide de la región.

54. ***Fuerza de un fluido*** Usar el resultado del ejercicio 53 para encontrar la fuerza del fluido en un lado de una placa circular de radio 4 pies que se sumerge verticalmente en el agua para que su centro esté 10 pies debajo de la superficie.

SP Solución de problemas

1. Sea R el área de la región en el primer cuadrante acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = cx$, $c > 0$. Sea T el área del triángulo AOB. Calcular el límite

$$\lim_{c \to 0^+} \frac{T}{R}.$$

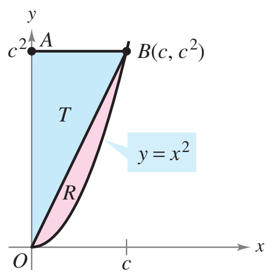


Figura para 1

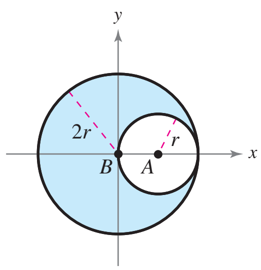


Figura para 2

2. Sea L una lámina de densidad uniforme $\rho = 1$ obtenida por el giro del círculo A de radio r desde el círculo B de radio $2r$ (ver figura).

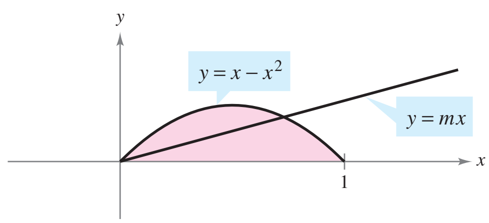
a) Demostrar que $M_x = 0$ para L.

b) Demostrar que M_y para L es igual a (M_y para B) − (M_y para A).

c) Encontrar M_y para B y M_y para A. Entonces usar el apartado *b*) para calcular M_y para L.

d) ¿Cuál es el centro de masa de L?

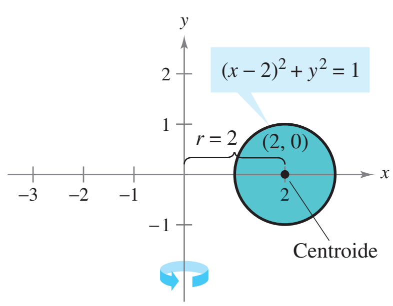
3. Sea R la región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x. Encontrar la ecuación de la recta $y = mx$ que divide esta región en dos regiones de área igual.



4. *a*) Un toro se forma al girar la región acotada por el círculo

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1$$

alrededor del eje y (véase la figura). Usar el método de los discos para calcular el volumen del toro.



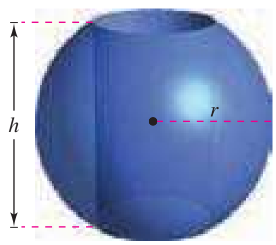
b) Usar el método de los discos para encontrar el volumen del toro si el círculo tiene radio r y su centro está R unidades del eje de rotación.

CAS **5.** Trazar la curva

$$8y^2 = x^2(1 - x^2).$$

Usar un sistema algebraico por computadora para encontrar el área de la superficie del sólido de revolución obtenida al girar la curva alrededor del eje y.

6. Un orificio perforado en el centro de una esfera de radio r (ver la figura). La altura del anillo esférico restante es h. Encontrar el volumen del anillo y mostrar que es independiente del radio de la esfera.



7. Un rectángulo R de longitud l y anchura w se gira alrededor de la recta L (ver la figura). Encontrar el volumen del sólido resultante de revolución.

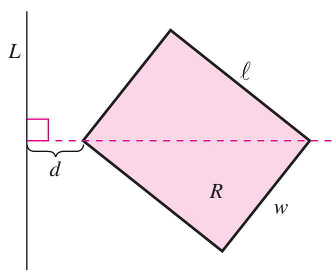


Figura para 7

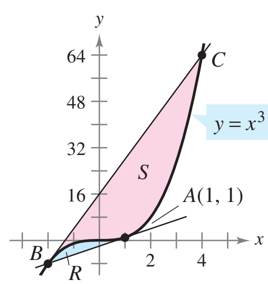


Figura para 8

8. *a*) La recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto $A(1, 1)$ corta la curva en otro punto B. Sea R el área de la región acotada por la curva y la recta tangente. La recta tangente a B corta la curva en otro punto C (ver la figura). Sea S el área de la región limitada por la curva y esta segunda recta tangente. ¿Cómo se relacionan las áreas R y S?

b) Repetir la construcción en el apartado *a*) seleccionando un punto arbitrario A en la curva $y = x^3$. Mostrar que las dos áreas, R y S, siempre están relacionadas de la misma manera.

9. La gráfica de $y = f(x)$ pasa a través del origen. La longitud de arco de la curva de $(0, 0)$ a $(x, f(x))$ se da por

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + e^t}\, dt.$$

Identificar la función f.

10. Sea f rectificable en el intervalo $[a, b]$, y sea

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt.$$

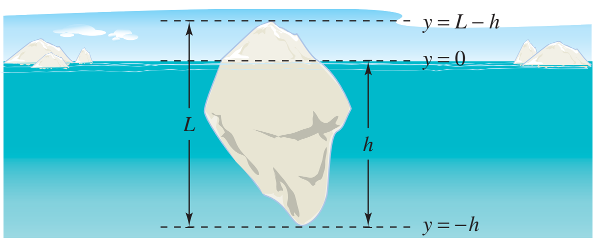
a) Encontrar $\dfrac{ds}{dx}$.

b) Encontrar ds y $(ds)^2$.

c) Si $f(x) = t^{3/2}$, encontrar $s(x)$ en $[1, 3]$.

d) Calcular $s(2)$ y describir qué significa.

11. El **principio de Arquímedes** establece que la fuerza ascendente o de flotación de un objeto dentro de un fluido es igual al peso del fluido que el objeto desplaza. Para un objeto parcialmente sumergido, se puede obtener información sobre las densidades relativas del objeto flotante y el fluido observando cuánto del objeto está sobre y debajo de la superficie. También se puede determinar el tamaño de un objeto flotante si se sabe la cantidad que está sobre la superficie y las densidades relativas. Puede verse la parte superior de un iceberg flotante (ver la figura). La densidad del agua de océano es 1.03×10^3 kilogramos por metro cúbico, y la del hielo es 0.92×10^3 kilogramos por metro cúbico. ¿Qué porcentaje del iceberg está debajo de la superficie?



12. Esquematizar la región acotada a la izquierda por $x = 1$, acotada por arriba por $y = 1/x^3$, y acotada por debajo por $y = -1/x^3$.

a) Encontrar el centroide de la región para $1 \le x \le 6$.

b) Encontrar el centroide de la región para $1 \le x \le b$.

c) ¿Dónde esta el centroide cuando $b \to \infty$?

13. Esquematizar la región a la derecha del eje y, acotada por arriba por $y = 1/x^4$ y acotada por debajo por $y = -1/x^4$.

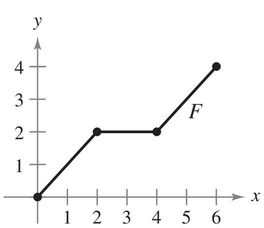
a) Encontrar el centroide de la región para $1 \le x \le 6$.

b) Encontrar el centroide de la región para $1 \le x \le b$.

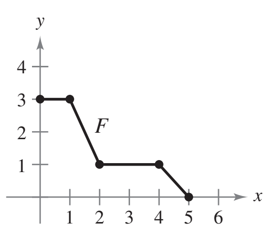
c) ¿Dónde está el centroide cuando $b \to \infty$?

14. Encontrar el trabajo realizado por cada fuerza F.

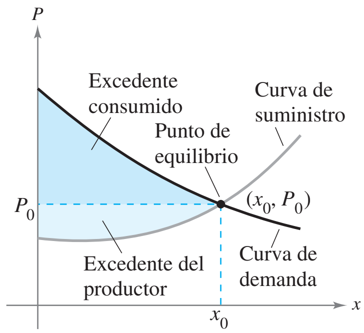
a)



b)



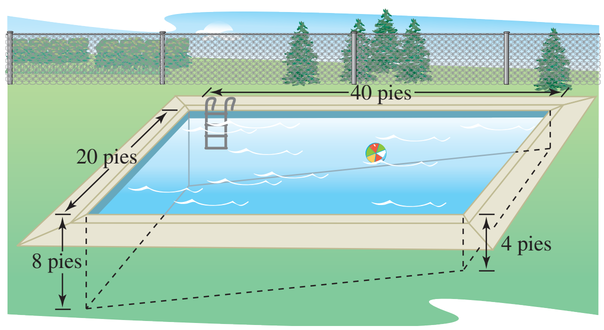
En los ejercicios 15 y 16, encontrar los excedentes de consumos para las curvas de oferta y demanda $[p_1(x)]$ dadas. El excedente del consumidor y excedente del productor son representados por las áreas mostradas en la figura.

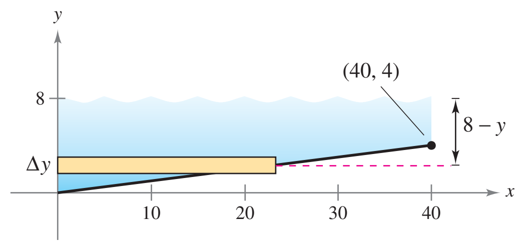


15. $p_1(x) = 50 - 0.5x, \quad p_2(x) = 0.125x$

16. $p_1(x) = 1\,000 - 0.4x^2, \quad p_2(x) = 42x$

17. Una piscina tiene 20 pies de ancho, 40 pies de largo y 4 pies de profundidad en un extremo y 8 pies de profundidad en el otro (ver la figura). El fondo es un plano inclinado. Encontrar la fuerza del fluido en cada pared vertical.





18. *a*) Encontrar por lo menos dos funciones continuas f que satisfagan cada condición.

i) $f(x) \ge 0$ en $[0, 1]$ *ii*) $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$

iii) El área acotada por la gráfica de f y el eje x para $0 \le x \le 1$ es igual a 1.

b) Para cada función encontrada en el apartado *a*), aproximar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo $[0, 1]$. (Usar una calculadora si es necesario.)

c) ¿Se puede encontrar una función f que satisfaga las condiciones dadas en el apartado *a*) donde la gráfica tiene una longitud de arco menor que 3 en el intervalo $[0, 1]$?

8 Técnicas de integración, regla de L'Hôpital e integrales impropias

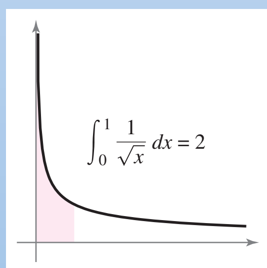
En los capítulos anteriores se estudiaron varias técnicas básicas para evaluar integrales simples. En este capítulo se analizarán otras técnicas de integración, como la integración por partes, que se usan para evaluar integrales más complejas. También se enseñará una regla importante para evaluar límites, denominada regla de L'Hôpital, la cual también ayuda en la evaluación de integrales impropias

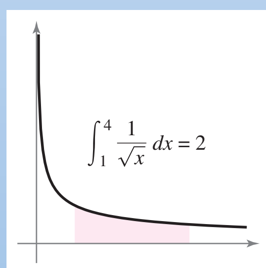
En este capítulo, se aprenderá:

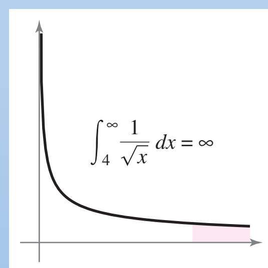
- Cómo relacionar un integrando con una de las reglas básicas de integración. (8.1)
- Cómo encontrar una antiderivada utilizando integración por partes. (8.2)
- Cómo evaluar integrales trigonométricas. (8.3)
- Cómo usar la sustitución trigonométrica para evaluar una integral. (8.4)
- Cómo utilizar la descomposición en fracciones parciales para integrar funciones racionales. (8.5)
- Cómo evaluar una integral indefinida usando tabla de integrales y fórmulas de reducción. (8.6)
- Cómo aplicar la regla de L'Hôpital para evaluar un límite. (8.7)
- Cómo evaluar una integral impropia. (8.8)

AP Photo/Topeka Capital-Journal, Anthony S. Bush/Wide World

La descomposición en fracciones parciales es una técnica de integración que puede utilizarse para evaluar integrales que incluyan funciones racionales. ¿Cómo puede usarse la descomposición en fracciones parciales para evaluar una integral que da el costo promedio de extraer un porcentaje específico de un compuesto químico del agua residual de una compañía? (Ver la sección 8.5, ejercicio 63.)







De los estudios de cálculo realizados hasta ahora, se sabe que una integral definida tiene límites de integración finitos y un integrando continuo. En la sección 8.8 se estudiarán las *integrales impropias*, las cuales tienen por lo menos un límite de integración infinito o un integrando con discontinuidad infinita. Se verá que las integrales impropias convergen o divergen.

8.1 Reglas básicas de integración

- **Revisión de procedimientos para adaptar un integrando a una de las reglas básicas de integración.**

Adaptación de integrandos a las reglas básicas

En este capítulo se estudiarán varias técnicas de integración que extienden el conjunto de integrales en que las reglas básicas de integración pueden aplicarse. Estas reglas se repasan en la página 522. Un paso importante para resolver cualquier problema de la integración consiste en reconocer qué regla básica de integración usar. Como se muestra en el ejemplo 1, las diferencias ligeras en el integrando pueden llevar a técnicas de solución muy diferentes.

EXPLORACIÓN

Comparación de tres integrales similares ¿Cuáles de las siguientes integrales pueden evaluarse usando las 20 reglas básicas de integración? Para las que sea posible, hacerlo así. Para las que no, explicar por qué.

a) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

EJEMPLO 1 Una comparación de tres integrales similares

Encontrar cada integral.

a) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+9}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2+9}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^2+9}\,dx$

Solución

a) Usar la regla del arcotangente y sea $u = x$ y $a = 3$.

$$\int \frac{4}{x^2+9}\,dx = 4\int \frac{1}{x^2+3^2}\,dx \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= 4\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right) + C \qquad \text{Regla del arcotangente.}$$

$$= \frac{4}{3}\arctan\frac{x}{3} + C \qquad \text{Simplificar.}$$

b) Aquí la regla del arcotangente no aplica porque el numerador contiene un factor de x. Considerar la regla log y sea $u = x^2 + 9$. Entonces $du = 2x\,dx$, y se tiene

$$\int \frac{4x}{x^2+9}\,dx = 2\int \frac{2x\,dx}{x^2+9} \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= 2\int \frac{du}{u} \qquad \text{Sustitución: } u = x^2+9.$$

$$= 2\ln|u| + C = 2\ln(x^2+9) + C. \qquad \text{Regla log.}$$

c) Ya que el grado del numerador es igual al grado del denominador, se debe usar la división primero para volver a escribir la función racional impropia como la suma de un polinomio y una función racional propia.

$$\int \frac{4x^2}{x^2+9}\,dx = \int \left(4 - \frac{36}{x^2+9}\right)dx \qquad \text{Reescribir usando la división grande.}$$

$$= \int 4\,dx - 36\int \frac{1}{x^2+9}\,dx \qquad \text{Escribir como dos integrales.}$$

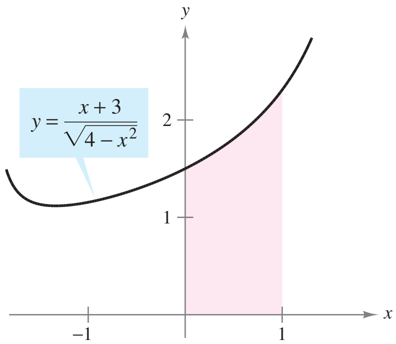
$$= 4x - 36\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right) + C \qquad \text{Integrar.}$$

$$= 4x - 12\arctan\frac{x}{3} + C \qquad \text{Simplificar.}$$

NOTA En el ejemplo 1*c*) se señala que se requieren algunas simplificaciones algebraicas preliminares antes de aplicar las reglas para la integración, y que como consecuencia más que una regla, se necesita evaluar la integral resultante. ■

EJEMPLO 2 Uso de dos reglas básicas para resolver una sola integral

Evaluar $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$



El área de la región es aproximadamente 1.839

Figura 8.1

Solución Escribir la integral como la suma de dos integrales. Entonces aplicar la regla de la potencia y la regla del arcoseno como sigue.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 (4-x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx + 3\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx \\
&= \left[-(4-x^2)^{1/2} + 3\,\text{arcsen}\,\frac{x}{2}\right]_0^1 \\
&= \left(-\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}\right) - (-2+0) \\
&\approx 1.839
\end{aligned}
$$

Ver figura 8.1.

TECNOLOGÍA La regla de Simpson puede usarse para dar una buena aproximación del valor de la integral en el ejemplo 2 (para $n = 10$, la aproximación es 1.839). Al usar la integración numérica, sin embargo, se debe estar consciente de que la regla de Simpson no siempre da buenas aproximaciones cuando algunos de los límites de integración están cercanos a una asíntota vertical. Por ejemplo, usando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene

$$\int_0^{1.99} \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \approx 6.213.$$

Aplicando la regla de Simpson (con $n = 10$) para esta integral se produce una aproximación de 6.889.

EJEMPLO 3 Una sustitución del tipo $a^2 - u^2$

Encontrar $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx.$

Solución Porque el radical en el denominador puede escribirse en la forma

$$\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{4^2-(x^3)^2}$$

se puede probar la sustitución $u = x^3$. Entonces $du = 3x^2\,dx$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{16-(x^3)^2}} && \text{Reescribir la integral.} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4^2-u^2}} && \text{Sustitución: } u = x^3. \\
&= \frac{1}{3}\,\text{arcsen}\,\frac{u}{4} + C && \text{Regla del arcoseno.} \\
&= \frac{1}{3}\,\text{arcsen}\,\frac{x^3}{4} + C. && \text{Reescribir como una función de } x.
\end{aligned}
$$

AYUDA DE ESTUDIO Las reglas 18, 19 y 20 de la integración básica en la página siguiente tienen expresiones que implican la suma o diferencia de dos cuadrados:

$a^2 - u^2$

$a^2 + u^2$

$u^2 - a^2$

Estas expresiones suelen notarse después de sustituir u, como se muestra en el ejemplo 3.

Sorprendente, dos de las reglas de la integración normalmente pasadas por alto son la regla log y la regla de la potencia. Notar en los próximos dos ejemplos cómo estas dos reglas de la integración pueden ocultarse.

Repaso de las reglas básicas de integración ($a > 0$)

1. $\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$
2. $\int [f(u) \pm g(u)]\,du =$ $\int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$
3. $\int du = u + C$
4. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int e^u\,du = e^u + C$
7. $\int a^u\,du = \left(\dfrac{1}{\ln a}\right)a^u + C$
8. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
10. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
11. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
12. $\int \sec u\,du =$ $\ln|\sec u + \tan u| + C$
13. $\int \csc u\,du =$ $-\ln|\csc u + \cot u| + C$
14. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
15. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
16. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
17. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\dfrac{u}{a} + C$
19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{u}{a} + C$
20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arcsec}\dfrac{|u|}{a} + C$

EJEMPLO 4 Una forma disfrazada de la regla log

Encontrar $\displaystyle\int \frac{1}{1 + e^x}\,dx$.

Solución La integral no parece adaptarse a ninguna de las reglas básicas. Sin embargo, la forma del cociente hace pensar en la regla log. Si se expresa $u = 1 + e^x$, entonces $du = e^x\,dx$. Obtener el du requerido sumando y restando e^x en el numerador, como sigue.

$$\int \frac{1}{1 + e^x}\,dx = \int \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x}\,dx \qquad \text{Sumar y restar } e^x \text{ en el numerador.}$$

$$= \int \left(\frac{1 + e^x}{1 + e^x} - \frac{e^x}{1 + e^x}\right)dx \qquad \text{Reescribir como dos fracciones.}$$

$$= \int dx - \int \frac{e^x\,dx}{1 + e^x} \qquad \text{Reescribir como dos integrales.}$$

$$= x - \ln(1 + e^x) + C \qquad \text{Integrar.}$$

NOTA Hay más de una manera de resolver un problema de integración. Así, el ejemplo 4 demuestra que multiplicando el numerador y denominador por e^{-x} se obtiene una integral de la forma $-\int du/u$. Ver si se puede conseguir la misma respuesta por este procedimiento. (Tener cuidado: la respuesta aparecerá en una forma diferente.)

EJEMPLO 5 Una forma disfrazada de la regla de la potencia

Encontrar $\displaystyle\int (\cot x)[\ln(\operatorname{sen} x)]\,dx$

Solución De nuevo, la integral no parece adaptarse a ninguna de las reglas básicas. Sin embargo, considerando las dos opciones primarias para $u[u = \cot x$ y $u = \ln(\operatorname{sen} x)]$, se puede ver que la segunda opción es la apropiada porque

$$u = \ln(\operatorname{sen} x) \qquad \text{y} \qquad du = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \cot x\,dx.$$

Así,

$$\int (\cot x)[\ln(\operatorname{sen} x)]\,dx = \int u\,du \qquad \text{Sustitución: } u = \ln(\operatorname{sen} x).$$

$$= \frac{u^2}{2} + C \qquad \text{Integrar.}$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(\operatorname{sen} x)]^2 + C. \qquad \text{Reescribir como una función de } x.$$

NOTA En el ejemplo 5, *verificar* que la derivada de

$$\frac{1}{2}[\ln(\operatorname{sen} x)]^2 + C$$

es el integrando de la integral original.

Pueden usarse a menudo las identidades trigonométricas para adaptar integrandos a una de las reglas básicas de la integración.

EJEMPLO 6 Uso de identidades trigonométricas

Encontrar $\int \tan^2 2x\,dx$.

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un sistema de cálculo algebraico, usarlo para evaluar las integrales en esta sección. Comparar la *forma* de la antiderivada dada por el software con la forma obtenida a mano. A veces las formas serán las mismas, pero a menudo diferirán. Por ejemplo, ¿por qué la antiderivada $\ln 2x + C$ es equivalente a la antiderivada $\ln x + C$?

Solución Notar que la $\tan^2 u$ no está en la lista de reglas básicas de integración. Sin embargo, $\sec^2 u$ está en la lista. Esto hace pensar en la identidad trigonométrica $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$. Si se hace $u = 2x$, entonces $du = 2\,dx$ y

$$
\begin{aligned}
\int \tan^2 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int \tan^2 u\,du && \text{Sustitución: } u = 2x.\\
&= \frac{1}{2}\int (\sec^2 u - 1)\,du && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du - \frac{1}{2}\int du && \text{Reescribir como dos integrales.}\\
&= \frac{1}{2}\tan u - \frac{u}{2} + C && \text{Integrar.}\\
&= \frac{1}{2}\tan 2x - x + C. && \text{Reescribir como una función de } x.
\end{aligned}
$$

Esta sección concluye con un resumen de los procedimientos comunes para adaptar los integrandos a las reglas básicas de integración.

Procedimientos para adaptar los integrandos a las reglas básicas

Técnica	*Ejemplo*
Desarrollar (el numerador).	$(1 + e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$
Separar el numerador.	$\dfrac{1 + x}{x^2 + 1} = \dfrac{1}{x^2 + 1} + \dfrac{x}{x^2 + 1}$
Completar el cuadrado.	$\dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}}$
Dividir la función racional impropia.	$\dfrac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \dfrac{1}{x^2 + 1}$
Sumar y restar términos en el numerador.	$\dfrac{2x}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{2x + 2}{x^2 + 2x + 1} - \dfrac{2}{(x + 1)^2}$
Usar identidades trigonométricas.	$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$
Multiplicar y dividir por el conjugado pitagórico.	$\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x}\right)\left(\dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\right) = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$ $= \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

NOTA Recordar que se pueden separar los numeradores pero no los denominadores. Se debe tener cuidado con este error común cuando se adapten los integrandos a las reglas básicas.

$$\frac{1}{x^2 + 1} \neq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1} \qquad \text{No separar el denominador.}$$

8.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, seleccionar la antiderivada correcta.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

   a) $2\sqrt{x^2+1} + C$ *b)* $\sqrt{x^2+1} + C$

   c) $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + C$ *d)* $\ln(x^2+1) + C$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2+1}$

   a) $\ln\sqrt{x^2+1} + C$ *b)* $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} + C$

   c) $\arctan x + C$ *d)* $\ln(x^2+1) + C$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2+1}$

   a) $\ln\sqrt{x^2+1} + C$ *b)* $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} + C$

   c) $\arctan x + C$ *d)* $\ln(x^2+1) + C$

4. $\dfrac{dy}{dx} = x\cos(x^2+1)$

   a) $2x\,\text{sen}(x^2+1) + C$ *b)* $-\frac{1}{2}\text{sen}(x^2+1) + C$

   c) $\frac{1}{2}\text{sen}(x^2+1) + C$ *d)* $-2x\,\text{sen}(x^2+1) + C$

En los ejercicios 5 a 14, seleccionar la fórmula de integración básica que puede usarse para encontrar la integral, e identificar *u* y *a* cuando sea apropiado.

5. $\displaystyle\int (5x-3)^4\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{2t+1}{t^2+t-4}\,dt$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1-2\sqrt{x}\right)}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{2}{(2t-1)^2+4}\,dt$
9. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$
10. $\displaystyle\int \frac{-2x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$
11. $\displaystyle\int t\,\text{sen}\,t^2\,dt$
12. $\displaystyle\int \sec 5x \tan 5x\,dx$
13. $\displaystyle\int (\cos x)e^{\text{sen}\,x}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$

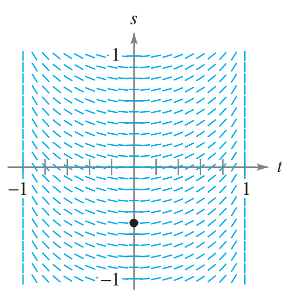
En los ejercicios 15 a 52, encontrar la integral indefinida.

15. $\displaystyle\int 14(x-5)^6\,dx$
16. $\displaystyle\int \frac{9}{(t-8)^2}\,dt$
17. $\displaystyle\int \frac{7}{(z-10)^7}\,dz$
18. $\displaystyle\int t^2\sqrt[3]{t^3-1}\,dt$
19. $\displaystyle\int \left[v + \frac{1}{(3v-1)^3}\right]dv$
20. $\displaystyle\int \left[x - \frac{5}{(3x+5)^2}\right]dx$
21. $\displaystyle\int \frac{t^2-3}{-t^3+9t+1}\,dt$
22. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}}\,dx$
23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$
24. $\displaystyle\int \frac{4x}{x-8}\,dx$
25. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$
26. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{7x-2} - \frac{1}{7x+2}\right)dx$
27. $\displaystyle\int (5+4x^2)^2\,dx$
28. $\displaystyle\int x\left(1+\frac{1}{x}\right)^3\,dx$
29. $\displaystyle\int x\cos 2\pi x^2\,dx$
30. $\displaystyle\int \sec 4x\,dx$
31. $\displaystyle\int \csc \pi x \cot \pi x\,dx$
32. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$
33. $\displaystyle\int e^{11x}\,dx$
34. $\displaystyle\int \csc^2 x e^{\cot x}\,dx$
35. $\displaystyle\int \frac{2}{e^{-x}+1}\,dx$
36. $\displaystyle\int \frac{5}{3e^x-2}\,dx$
37. $\displaystyle\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx$
38. $\displaystyle\int (\tan x)[\ln(\cos x)]\,dx$
39. $\displaystyle\int \frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}\,dx$
40. $\displaystyle\int \frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\,d\alpha$
41. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta - 1}\,d\theta$
42. $\displaystyle\int \frac{2}{3(\sec x - 1)}\,dx$
43. $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-(4t+1)^2}}\,dt$
44. $\displaystyle\int \frac{1}{9+5x^2}\,dx$
45. $\displaystyle\int \frac{\tan(2/t)}{t^2}\,dt$
46. $\displaystyle\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,dt$
47. $\displaystyle\int \frac{6}{\sqrt{10x-x^2}}\,dx$
48. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{4x^2-8x+3}}\,dx$
49. $\displaystyle\int \frac{4}{4x^2+4x+65}\,dx$
50. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+9}\,dx$
51. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx$
52. $\displaystyle\int \frac{12}{\sqrt{3-8x-x^2}}\,dx$

Campos de pendientes **En los ejercicios 53 a 56, se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la solución. Comparar el resultado con los dibujos en el apartado *a*).**

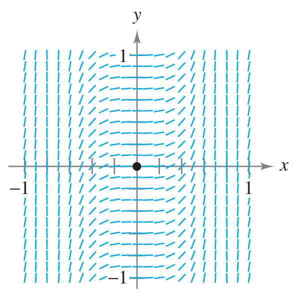
53. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^4}}$

   $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$



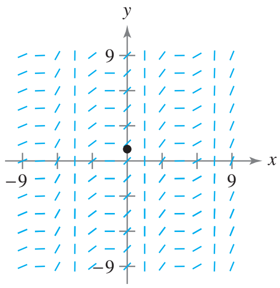
54. $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2(2x)$

   $(0, 0)$



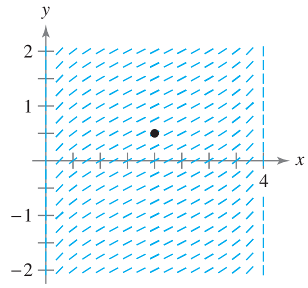
55. $\dfrac{dy}{dx} = (\sec x + \tan x)^2$

$(0, 1)$



56. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$

$\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$



CAS ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 57 y 58, usar un sistema algebraico por computadora para hacer la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y presentar la solución a través de la condición inicial especificada.**

57. $\dfrac{dy}{dx} = 0.8y, \quad y(0) = 4$

58. $\dfrac{dy}{dx} = 5 - y, \quad y(0) = 1$

En los ejercicios 59 a 64, resolver la ecuación diferencial.

59. $\dfrac{dy}{dx} = (e^x + 5)^2$

60. $\dfrac{dy}{dx} = (3 - e^x)^2$

61. $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{10e^t}{\sqrt{1 - e^{2t}}}$

62. $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{(1 + e^t)^2}{e^t}$

63. $(4 + \tan^2 x)y' = \sec^2 x$

64. $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$

En los ejercicios 65 a 72, evaluar la integral definida. Para verificar los resultados puede usarse integración en la herramienta de graficación.

65. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx$

66. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt$

67. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\, dx$

68. $\displaystyle\int_1^e \frac{1 - \ln x}{x}\, dx$

69. $\displaystyle\int_0^8 \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}}\, dx$

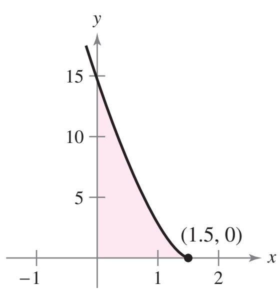
70. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x - 2}{x}\, dx$

71. $\displaystyle\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4 + 9x^2}\, dx$

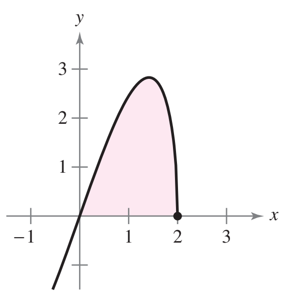
72. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{100 - x^2}}\, dx$

Área **En los ejercicios 73 a 78, encontrar el área de la región.**

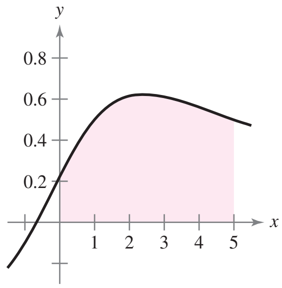
73. $y = (-4x + 6)^{3/2}$



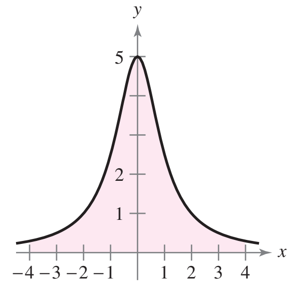
74. $y = x\sqrt{8 - 2x^2}$



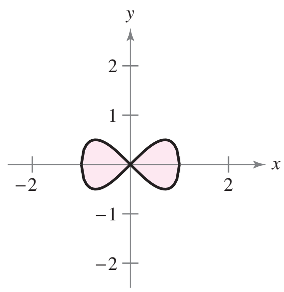
75. $y = \dfrac{3x + 2}{x^2 + 9}$



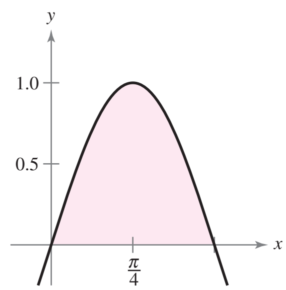
76. $y = \dfrac{5}{x^2 + 1}$



77. $y^2 = x^2(1 - x^2)$



78. $y = \operatorname{sen} 2x$



CAS **En los ejercicios 79 a 82, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la integral. Usar el sistema algebraico por computadora para hacer la gráfica de dos antiderivadas. Describir la relación entre las gráficas de las dos antiderivadas.**

79. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 4x + 13}\, dx$

80. $\displaystyle\int \frac{x - 2}{x^2 + 4x + 13}\, dx$

81. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta}\, d\theta$

82. $\displaystyle\int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 dx$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 83 a 86, enunciar la fórmula de integración que se usaría para cada integral. Explicar por qué se eligió esa fórmula. No integrar.

83. $\displaystyle\int x(x^2 + 1)^3\, dx$

84. $\displaystyle\int x\sec(x^2 + 1)\tan(x^2 + 1)\, dx$

85. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$

86. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx$

87. Determinar las constantes a y b tal que

$\operatorname{sen} x + \cos x = a \operatorname{sen}(x + b)$.

Usar este resultado para integrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

88. Demostrar que $\sec x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$. Usar después esta identidad para derivar la regla básica de integración

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

89. ***Área*** Las gráficas de $f(x) = x$ y $g(x) = ax^2$ se intersecan en los puntos $(0, 0)$ y $(1/a, 1/a)$. Encontrar a $(a > 0)$ tal que el área de la región acotada por las gráficas de estas dos funciones sea $\frac{2}{3}$.

Para discusión

90. *a)* Explicar por qué la antiderivada $y_1 = e^{x + C_1}$ es equivalente a la antiderivada $y_2 = Ce^x$.

b) Explicar por qué la antiderivada $y_1 = \sec^2 x + C_1$ es equivalente a la antiderivada $y_2 = \tan^2 x + C$.

91. ***Para pensar*** Usar una herramienta de graficación para representar la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 7x^2 + 10x)$. Usar la gráfica para determinar si el valor de $\int_0^5 f(x)\,dx$ es positivo o negativo. Explicar.

92. ***Para pensar*** Al evaluar $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$, ¿es apropiado sustituir $u = x^2$, $x = \sqrt{u}$ y $dx = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$ para obtener $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^1 \sqrt{u}\,du = 0$? Explicar.

Aproximación **En los ejercicios 93 y 94, determinar qué valor aproxima mejor el área de la región entre el eje x y la función en el intervalo dado. (Hacer la selección con base en un dibujo de la región y *no* integrando.)**

93. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$, $[0, 2]$

a) 3 *b)* 1 *c)* -8 *d)* 8 *e)* 10

94. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$, $[0, 2]$

a) 3 *b)* 1 *c)* -4 *d)* 4 *e)* 10

Interpretación de integrales **En los ejercicios 95 y 96, *a*) dibujar la región cuya área está dada por la integral, *b*) dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral si se usa el método de los discos y *c*) dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral si se usa el método de las capas. (Hay más de una respuesta correcta para cada inciso.)**

95. $\displaystyle\int_0^2 2\pi x^2\,dx$ **96.** $\displaystyle\int_0^4 \pi y\,dy$

97. ***Volumen*** La región acotada por $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$ $(b > 0)$ gira alrededor del eje y.

a) Encontrar el volumen del sólido generado si $b = 1$.

b) Encontrar b tal que el volumen del sólido generado es $\frac{4}{3}$ unidades cúbicas.

98. ***Volumen*** Considerar la región acotada por las gráficas de $x = 0$, $y = \cos x^2$, $y = \operatorname{sen} x^2$ y $x = \sqrt{\pi}/2$. Encontrar el volumen de un sólido generado al girar la región alrededor del eje y.

99. ***Longitud de arco*** Encontrar la longitud de arco de la gráfica de $y = \ln(\operatorname{sen} x)$ de $x = \pi/4$ a $x = \pi/2$.

100. ***Longitud de arco*** Encontrar la longitud de arco de la gráfica de $y = \ln(\cos x)$ desde $x = 0$ a $x = \pi/3$.

101. ***Área de una superficie*** Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 9]$ alrededor del eje x.

102. ***Centroide*** Encontrar la coordenada x del centroide de la región acotada por las gráficas de

$$y = \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}}, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 4.$$

En los ejercicios 103 y 104, encontrar el valor medio de la función sobre el intervalo dado.

103. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $\quad -3 \quad x \quad 3$

104. $f(x) = \operatorname{sen} nx$, $0 \leq x \leq \pi/n$, n es un entero positivo.

Longitud de arco **En los ejercicios 105 y 106, usar la capacidad de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.**

105. $y = \tan \pi x$, $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ **106.** $y = x^{2/3}$, $[1, 8]$

107. ***Encontrando un patrón***

a) Encontrar $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$. *b)* Encontrar $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$.

c) Encontrar $\displaystyle\int \cos^7 x\,dx$.

d) Explicar cómo encontrar $\int \cos^{15} x\,dx$ sin realmente integrar.

108. ***Encontrando un patrón***

a) Escribir $\int \tan^3 x\,dx$ en términos de $\int \tan x\,dx$. Entonces encontrar $\int \tan^3 x\,dx$.

b) Escribir $\int \tan^5 x\,dx$ en términos de $\int \tan^3 x\,dx$.

c) Escribir $\int \tan^{2k+1} x\,dx$ donde k es un entero positivo, en términos de $\int \tan^{2k-1} x\,dx$.

d) Explicar cómo encontrar $\int \tan^{15} x\,dx$ sin realmente integrar.

109. ***Métodos de integración*** Mostrar que los resultados siguientes son equivalentes.

Integración por las tablas:

$$\int \sqrt{x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + 1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right|\right) + C$$

Integración por el sistema algebraico por computadora:

$$\int \sqrt{x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + 1} + \operatorname{arcsenh}(x)\right] + C$$

Preparación del examen Putnam

110. Evaluar

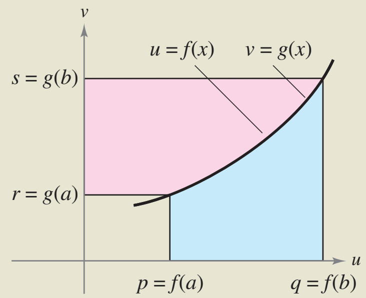
$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9 - x)}\,dx}{\sqrt{\ln(9 - x)} + \sqrt{\ln(x + 3)}}.$$

8.2 Integración por partes

- **Encontrar una antiderivada o primitiva usando la integración por partes.**
- **Usar un método tabular para realizar la integración por partes.**

EXPLORACIÓN

Demostración sin palabras He aquí una vía diferente para demostrar la fórmula de integración por partes, tomada con permiso del autor de "Proof Without Words: Integration by Parts", por Roger B. Nelsen, *Mathematics Magazine*, 64, núm. 2, abril 1991, p. 130.



Área + Área $= qs - pr$

$$\int_r^s u\,dv + \int_q^p v\,du = \Big[uv\Big]_{(p,r)}^{(q,s)}$$

$$\int_r^s u\,dv = \Big[uv\Big]_{(p,r)}^{(q,s)} - \int_q^p v\,du$$

Explicar cómo esta gráfica demuestra el teorema. ¿Qué notación usada en esta demostración no es familiar? ¿Cuál se cree que es su significado?

Integración por partes

En esta sección se estudiará una técnica importante de integración llamada **integración por partes**. Esta técnica puede aplicarse a una amplia variedad de funciones y es particularmente útil para integrandos que contengan *productos* de funciones algebraicas y trascendentes. Por ejemplo, la integración por partes funciona bien con integrales como

$$\int x \ln x\,dx, \quad \int x^2 e^x\,dx \quad \text{y} \quad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx.$$

La integración por partes está basada en la fórmula para la derivada de un producto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[uv] &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\\ &= uv' + vu'\end{aligned}$$

donde u y v son funciones derivables de x. Si u' y v' son continuas, se pueden integrar ambos lados de esta ecuación para obtener

$$\begin{aligned}uv &= \int uv'\,dx + \int vu'\,dx\\ &= \int u\,dv + \int v\,du.\end{aligned}$$

Volviendo a escribir esta ecuación, se obtiene el teorema siguiente.

TEOREMA 8.1 INTEGRACIÓN POR PARTES

Si u y v son funciones de x y tienen derivadas continuas, entonces

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Esta fórmula expresa la integral original en términos de otra integral. Dependiendo de la elección de u y dv, puede ser más fácil evaluar la segunda integral que la original. Porque la elección de u y dv es importante en la integración por el proceso de partes, se proporcionan las pautas siguientes.

Estrategia para integrar por partes

1. Intentar tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.
2. Intentar tomar como u la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que u, y como dv el factor restante del integrando.

Observe que dv siempre incluye dx del integrando original.

EJEMPLO 1 Integración por partes

Encontrar $\displaystyle\int xe^x\,dx$.

Solución Para aplicar la integración por partes, es necesario escribir la integral en la forma $\int u\,dv$. Hay varias maneras de hacer esto.

$$\int \underbrace{(x)}_{u}\,\underbrace{(e^x\,dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(e^x)}_{u}\underbrace{(x\,dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(1)}_{u}\,\underbrace{(xe^x\,dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(xe^x)}_{u}\underbrace{(dx)}_{dv}$$

Las estrategias de la página anterior hacen pensar en la elección de la primera opción porque la derivada de $u = x$ es más simple que x, y $dv = e^x\,dx$ es la porción más complicada del integrando que se adapta a una fórmula básica de la integración.

$$dv = e^x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x$$
$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$
$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx \qquad \text{Sustituir.}$$
$$= xe^x - e^x + C. \qquad \text{Integrar.}$$

Para verificar esto, derivar $xe^x - e^x + C$ para ver que se obtiene el integrando original.

NOTA El ejemplo 1 muestra que no es necesario incluir una constante de integración al resolver

$$v = \int e^x\,dx = e^x + C_1.$$

Para ilustrar esto, reemplazar $v = e^x$ por $v = e^x + C_1$ y aplicar la integración por partes para ver que se obtiene el mismo resultado.

EJEMPLO 2 Integración por partes

Encontrar $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$.

Solución En este caso, x^2 se integra más fácil que $\ln x$. Además, la derivada de $\ln x$ es más simple que $\ln x$. Así, se debe hacer $dv = x^2\,dx$.

$$dv = x^2\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$
$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx$$

La integración por partes produce

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$
$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad \text{Sustituir.}$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx \qquad \text{Simplificar.}$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C. \qquad \text{Integrar.}$$

Verificar este resultado derivando.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right] = \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(x^2) - \frac{x^2}{3} = x^2 \ln x$$

TECNOLOGÍA Intentar hacer la gráfica de

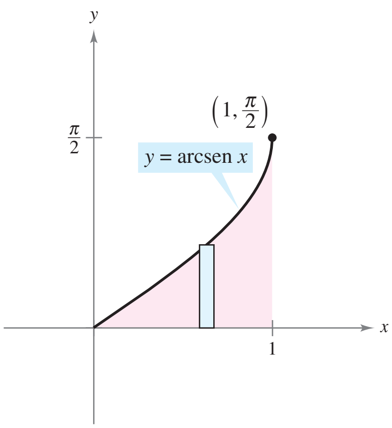
$$\int x^2 \ln x\,dx \quad \text{y} \quad \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$$

en la herramienta de graficación. ¿Se obtiene la misma gráfica? (Este ejercicio requiere algo de tiempo, así que se debe tener paciencia.)

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para ver cómo se utiliza la integración por partes para comprobar la aproximación de Stirling

$$\ln(n!) = n \ln n - n$$

ver el artículo "The Validity of Stirling's Approximation: A Physical Chemistry Project" de A. S. Wallner y K. A. Brandt en *Journal of Chemical Education.*



El área de la región es aproximadamente 0.571
Figura 8.2

Una aplicación sorprendente de la integración por partes involucra integrandos que constan de un solo factor, tales como $\int \ln x\, dx$ o $\int \text{arcsen } x\, dx$. En estos casos, hay que tomar $dv = dx$, como se muestra en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 3 Un integrando con un solo factor

Evaluar $\displaystyle\int_0^1 \text{arcsen } x\, dx$.

Solución Sea $dv = dx$.

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dx = x$$

$$u = \text{arcsen } x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

La integración por partes produce ahora

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int \text{arcsen } x\, dx = x \text{ arcsen } x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$= x \text{ arcsen } x + \frac{1}{2}\int (1 - x^2)^{-1/2}(-2x)\, dx \qquad \text{Reescribir.}$$

$$= x \text{ arcsen } x + \sqrt{1 - x^2} + C. \qquad \text{Integrar.}$$

Usando esta antiderivada, evaluar la integral definida como sigue

$$\int_0^1 \text{arcsen } x\, dx = \Big[x \text{ arcsen } x + \sqrt{1 - x^2}\Big]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\approx 0.571$$

El área representada por esta integral definida se muestra en la figura 8.2.

TECNOLOGÍA Recordar que hay dos maneras de usar la tecnología para evaluar una integral definida: 1) usar una aproximación numérica como la regla de los trapecios o la regla de Simpson, o 2) usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la antiderivada y entonces aplicar el teorema fundamental de cálculo. Ambos métodos tienen limitaciones. Para encontrar el posible error al usar un método numérico, los integrandos deben tener una segunda derivada (la regla de los trapecios) o una cuarta derivada (la regla de Simpson) en el intervalo de integración: el integrando en el ejemplo 3 no tiene estos requisitos. Para aplicar el teorema fundamental de cálculo, la herramienta de integración simbólica debe poder encontrar la antiderivada.

¿Qué método se usaría para evaluar

$$\int_0^1 \arctan x\, dx?$$

¿Qué método se usaría para evaluar

$$\int_0^1 \arctan x^2\, dx?$$

Algunas integrales requieren integrarse por partes más de una vez.

EJEMPLO 4 Integraciones sucesivas por partes

Encontrar $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$.

Solución Los factores x^2 y sen x son igualmente fáciles para integrar. Sin embargo, la derivada de x^2 se vuelve más simple, considerando que la derivada de sen x no lo es. Así que se debe elegir la opción $u = x^2$.

$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$$
$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x \, dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx. \qquad \text{Primer uso de la integración por partes.}$$

Este primer uso de la integración por partes ha tenido éxito simplificando la integral original, pero la integral de la derecha todavía no se adapta a una regla básica de integración. Para evaluar esa integral, aplicar de nuevo la integración por partes. Esta vez, sea $u = 2x$.

$$dv = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$$
$$u = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2 \, dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\begin{aligned} \int 2x \cos x \, dx &= 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x \, dx \qquad \text{Segundo uso de la integración por partes.} \\ &= 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

Combinando estos dos resultados, se puede escribir

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C.$$

Al hacer aplicaciones repetidas de la integración por partes, tener cuidado de no intercambiar las sustituciones en las aplicaciones sucesivas. Así, en el ejemplo 4, la primera sustitución era $u = x^2$ y $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Si en la segunda aplicación se hubiera cambiado la sustitución a $u = \cos x$ y $dv = 2x$, se habría obtenido

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx \\ &= -x^2 \cos x + x^2 \cos x + \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx \end{aligned}$$

deshaciendo como consecuencia la integración anterior y volviendo a la integral *original*. Al hacer aplicaciones repetidas de integración por partes, también debe percatarse de la aparición de un *múltiplo constante* de la integral original. Por ejemplo, esto ocurre cuando se usa la integración por partes para evaluar $\int e^x \cos 2x \, dx$, y también ocurre en el ejemplo 5.

La integral en el ejemplo 5 es muy importante. En la sección 8.4 (ejemplo 5) se utiliza para hallar la longitud de arco de un segmento parabólico.

EXPLORACIÓN

Intentar encontrar

$$\int e^x \cos 2x \, dx$$

haciendo $u = \cos 2x$ y $dv = e^x \, dx$ en la primera sustitución. Para la segunda sustitución, sea $u = \operatorname{sen} 2x$ y $dv = e^x \, dx$.

EJEMPLO 5 Integración por partes

Encontrar $\int \sec^3 x\, dx$.

Solución La porción más complicada del integrando que puede integrarse fácilmente es $\sec^2 x$, para hacer $dv = \sec^2 x\, dx$ y $u = \sec x$.

$$dv = \sec^2 x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \sec^2 x\, dx = \tan x$$

$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad du = \sec x \tan x\, dx$$

La integración por partes produce

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\, dx \qquad \text{Identidad trigonométrica.}$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx \qquad \text{Reescribir.}$$

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx \qquad \text{Reunir por integrales.}$$

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \text{Integrar.}$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C. \qquad \text{Integrar y dividir entre 2.}$$

AYUDA DE ESTUDIO Las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

juegan un papel importante en este capítulo.

EJEMPLO 6 Localización de un centroide

Una parte de la máquina es modelada por la región acotada por la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x, $0 \le x \le \pi/2$, como se muestra en la figura 8.3. Encontrar el centroide de esta región.

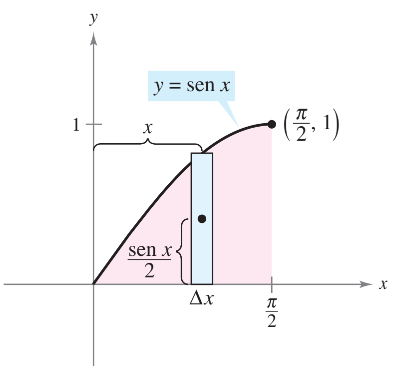


Figura 8.3

Solución Empezar encontrando el área de la región.

$$A = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

Ahora, encontrar las coordenadas del centroide como sigue.

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{2}(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

Evaluar la integral para $\bar{x}$, $(1/A)\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx$, con la integración por partes. Para hacer esto, sea $dv = \operatorname{sen} x\, dx$ y $u = x$. Esto produce $v = -\cos x$ y $du = dx$, y escribir

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx$$
$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Por último, determinar $\bar{x}$ para ser

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx = \Big[-x\cos x + \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

Así, el centroide de la región es $(1, \pi/8)$.

Al obtener experiencia usando la integración por partes, la habilidad para determinar u y dv aumentará. El resumen siguiente recoge varias integrales comunes con las sugerencias para la elección de u y dv.

AYUDA DE ESTUDIO Puede usarse el acrónimo LIATE como una pauta para escoger u en la integración por partes. En orden, verificar el integrando para lo siguiente.

¿Hay una parte Logarítmica?

¿Hay una parte trigonométrica Inversa?

¿Hay una parte Algebraica?

¿Hay una parte Trigonométrica?

¿Hay una parte Exponencial?

Resumen de integrales comunes utilizando integración por partes

1. Para integrales de la forma

$$\int x^n e^{ax}\, dx, \qquad \int x^n \operatorname{sen} ax\, dx, \qquad \text{o} \qquad \int x^n \cos ax\, dx$$

sea $u = x^n$ y sea $dv = e^{ax}\, dx$, $\operatorname{sen} ax\, dx$, o $\cos ax\, dx$.

2. Para integrales de la forma

$$\int x^n \ln x\, dx, \qquad \int x^n \operatorname{arcsen} ax\, dx, \qquad \text{o} \qquad \int x^n \arctan ax\, dx$$

sea $u = \ln x$, $\operatorname{arcsen} ax$, o $\arctan ax$ y sea $dv = x^n\, dx$.

3. Para integrales de la forma

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx \qquad \text{o} \qquad \int e^{ax} \cos bx\, dx$$

sea $u = \operatorname{sen} bx$ o $\cos bx$ y sea $dv = e^{ax}\, dx$.

Método tabular

En problemas que contienen aplicaciones repetidas de la integración por partes, un método tabular, ilustrado en el ejemplo 7, puede ayudar para organizar el trabajo. Este método funciona bien para las integrales del tipo $\int x^n \operatorname{sen} ax\, dx$, $\int x^n \cos ax\, dx$ y $\int x^n e^{ax}\, dx$.

EJEMPLO 7 Uso del método tabular

Encontrar $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} 4x\, dx$.

Solución Empezar como de costumbre haciendo $u = x^2$ y $dv = v'\, dx = \operatorname{sen} 4x\, dx$. Luego, crear una tabla de tres columnas, como se muestra.

Signos alternados	*u y sus derivadas*	*v′ y sus antiderivadas*
$+$	x^2	$\operatorname{sen} 4x$
$-$	$2x$	$-\frac{1}{4}\cos 4x$
$+$	2	$-\frac{1}{16}\operatorname{sen} 4x$
$-$	0	$\frac{1}{64}\cos 4x$

Derivar hasta obtener una derivada nula.

La solución se obtiene sumando los productos con signo de las entradas diagonales:

$$\int x^2 \operatorname{sen} 4x\, dx = -\frac{1}{4}x^2 \cos 4x + \frac{1}{8}x \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{32}\cos 4x + C.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre el método tabular, ver el artículo "Tabular Integration by Parts", de David Horowitz en *The College Mathematics Journal*, y el artículo "More on Tabular Integration by Parts", de Leonard Gillman, en *The College Mathematics Journal*.

8.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, identificar *u* y *dv* para encontrar la integral usando la integración por partes. (No evaluar la integral.)

1. $\int xe^{2x}\,dx$
2. $\int x^2 e^{2x}\,dx$
3. $\int (\ln x)^2\,dx$
4. $\int \ln 5x\,dx$
5. $\int x \sec^2 x\,dx$
6. $\int x^2 \cos x\,dx$

En los ejercicios 7 a 10, evaluar la integral utilizando integración por partes con las elecciones dadas para *u* y *dv*.

7. $\displaystyle\int x^3 \ln x\,dx;\ u = \ln x,\ dv = x^3\,dx$
8. $\displaystyle\int (4x + 7)e^x\,dx;\ u = 4x + 7,\ dv = e^x\,dx$
9. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} 3x\,dx;\ u = x,\ dv = \operatorname{sen} 3x\,dx$
10. $\displaystyle\int x \cos 4x\,dx;\ u = x,\ dv = \cos 4x\,dx$

En los ejercicios 11 a 38, encontrar la integral. (*Nota*: Resolver por el método más simple, no todas requieren la integración por partes.)

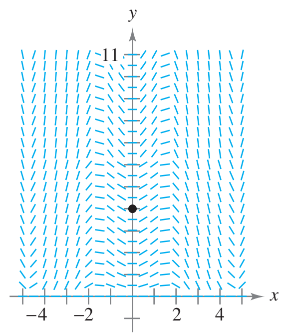
11. $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{2x}{e^x}\,dx$
13. $\displaystyle\int x^3 e^x\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,dt$
15. $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$
16. $\displaystyle\int x^4 \ln x\,dx$
17. $\displaystyle\int t \ln(t + 1)\,dt$
18. $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{xe^{2x}}{(2x + 1)^2}\,dx$
22. $\displaystyle\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2}\,dx$
23. $\displaystyle\int (x^2 - 1)e^x\,dx$
24. $\displaystyle\int \frac{\ln 2x}{x^2}\,dx$
25. $\displaystyle\int x\sqrt{x - 5}\,dx$
26. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5 + 4x}}\,dx$
27. $\displaystyle\int x \cos x\,dx$
28. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\,dx$
29. $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$
30. $\displaystyle\int x^2 \cos x\,dx$
31. $\displaystyle\int t \csc t \cot t\,dt$
32. $\displaystyle\int \theta \sec \theta \tan \theta\,d\theta$
33. $\displaystyle\int \arctan x\,dx$
34. $\displaystyle\int 4 \arccos x\,dx$
35. $\displaystyle\int e^{2x} \operatorname{sen} x\,dx$
36. $\displaystyle\int e^{-3x} \operatorname{sen} 5x\,dx$
37. $\displaystyle\int e^{-x} \cos 2x\,dx$
38. $\displaystyle\int e^{3x} \cos 4x\,dx$

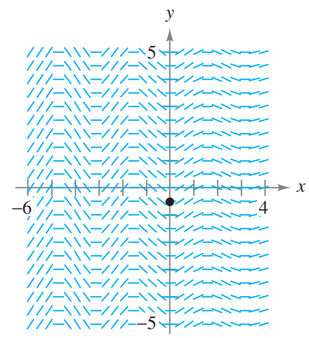
En los ejercicios 39 a 44, resolver la ecuación diferencial.

39. $y' = xe^{x^2}$
40. $y' = \ln x$
41. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t^2}{\sqrt{2 + 3t}}$
42. $\dfrac{dy}{dx} = x^2\sqrt{x - 3}$
43. $(\cos y)y' = 2x$
44. $y' = \arctan \dfrac{x}{2}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 45 y 46, se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de direcciones o pendientes, una de las cuales pase a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la solución. Comparar el resultado con los dibujos del inciso *a*).**

45. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{y}\cos x,\ (0, 4)$
46. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x/3} \operatorname{sen} 2x,\ \left(0, -\frac{18}{37}\right)$





CAS ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 47 y 48, usar una herramienta de graficación para representar la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y hacer la gráfica de la solución a través de una herramienta de graficación.**

47. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}e^{x/8}$
$y(0) = 2$
48. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}\operatorname{sen} x$
$y(0) = 4$

En los ejercicios 49 a 60, evaluar la integral definida. Usar una herramienta de graficación para confirmar el resultado.

49. $\displaystyle\int_0^3 xe^{x/2}\,dx$
50. $\displaystyle\int_0^2 x^2 e^{-2x}\,dx$
51. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x \cos 2x\,dx$
52. $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} 2x\,dx$
53. $\displaystyle\int_0^{1/2} \arccos x\,dx$
54. $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{arcsen} x^2\,dx$
55. $\displaystyle\int_0^1 e^x \operatorname{sen} x\,dx$
56. $\displaystyle\int_0^2 e^{-x} \cos x\,dx$
57. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x} \ln x\,dx$
58. $\displaystyle\int_0^1 \ln(4 + x^2)\,dx$
59. $\displaystyle\int_2^4 x \operatorname{arcsec} x\,dx$
60. $\displaystyle\int_0^{\pi/8} x \sec^2 2x\,dx$

En los ejercicios 61 a 66, usar el método tabular para encontrar la integral.

61. $\int x^2 e^{2x}\, dx$

62. $\int x^3 e^{-2x}\, dx$

63. $\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx$

64. $\int x^3 \cos 2x\, dx$

65. $\int x \sec^2 x\, dx$

66. $\int x^2 (x-2)^{3/2}\, dx$

En los ejercicios 67 a 74, encontrar o evaluar la integral usando primero sustitución y después la integración por partes.

67. $\int \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx$

68. $\int \cos \sqrt{x}\, dx$

69. $\int_0^4 x\sqrt{4-x}\, dx$

70. $\int 2x^3 \cos x^2\, dx$

71. $\int x^5 e^{x^2}\, dx$

72. $\int_0^2 e^{\sqrt{2x}}\, dx$

73. $\int \cos(\ln x)\, dx$

74. $\int \ln(x^2+1)\, dx$

Desarrollo de conceptos

75. ¿En qué regla de derivación está basada la integración por partes? Explicar.

76. En sus propias palabras, establecer la manera de determinar qué partes del integrando deberían ser u y dv.

77. Al evaluar $\int x \operatorname{sen} x\, dx$, explicar por qué dejar $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = x\, dx$ hace que la solución sea más difícil de encontrar.

Para discusión

78. Indicar si se usaría la integración por partes para evaluar cada integral. Si es así, identificar qué se usaría para u y dv. Explicar el razonamiento.

a) $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$ *b)* $\int x \ln x\, dx$ *c)* $\int x^2 e^{-3x}\, dx$

d) $\int 2x e^{x^2}\, dx$ *e)* $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx$ *f)* $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

CAS **En los ejercicios 79 a 82, usar un sistema algebraico por computadora para *a*) encontrar o evaluar la integral y *b*) hacer la gráfica de dos antiderivadas. *c*) Describir la relación entre las gráficas de la antiderivada.**

79. $\int t^3 e^{-4t}\, dt$

80. $\int \alpha^4 \operatorname{sen} \pi\alpha\, d\alpha$

81. $\int_0^{\pi/2} e^{-2x} \operatorname{sen} 3x\, dx$

82. $\int_0^5 x^4 (25-x^2)^{3/2}\, dx$

83. Integrar $\int 2x\sqrt{2x-3}\, dx$

a) por partes, con $dv = \sqrt{2x-3}\, dx$.

b) por sustitución, con $u = 2x-3$.

84. Integrar $\int x\sqrt{9+x}\, dx$

a) por partes, con $dv = \sqrt{9+x}\, dx$.

b) por sustitución, con $u = 9+x$.

85. Integrar $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$

a) por partes, con $dv = \left(x/\sqrt{4+x^2}\right) dx$.

b) por sustitución, con $u = 4+x^2$.

86. Integrar $\int x\sqrt{4-x}\, dx$

a) por partes, con $dv = \sqrt{4-x}\, dx$.

b) por sustitución, con $u = 4-x$.

CAS **En los ejercicios 87 y 88, usar una herramienta de graficación para encontrar la integral para $n = 0, 1, 2$ y 3. Usar el resultado para obtener una regla general para la integral para cualquier entero n positivo y probar sus resultados para $n = 4$.**

87. $\int x^n \ln x\, dx$

88. $\int x^n e^x\, dx$

En los ejercicios 89 a 94, usar la integración por partes para verificar la fórmula. (Para los ejercicios 89 a 92, asumir que n es un entero positivo.)

89. $\int x^n \operatorname{sen} x\, dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x\, dx$

90. $\int x^n \cos x\, dx = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1} \operatorname{sen} x\, dx$

91. $\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[-1 + (n+1)\ln x] + C$

92. $\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\, dx$

93. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{e^{ax}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

94. $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b \operatorname{sen} bx)}{a^2+b^2} + C$

En los ejercicios 95 a 98, encontrar la integral usando la fórmula apropiada de entre las mostradas en los ejercicios 89 a 94.

95. $\int x^5 \ln x\, dx$

96. $\int x^2 \cos x\, dx$

97. $\int e^{2x} \cos 3x\, dx$

98. $\int x^3 e^{2x}\, dx$

Área **En los ejercicios 99 a 102, usar una herramienta de graficación para representar la gráfica de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, y encontrar su área.**

99. $y = 2xe^{-x},\ y = 0,\ x = 3$

100. $y = \frac{1}{16}xe^{-x/4},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4$

101. $y = e^{-x} \operatorname{sen} \pi x,\ y = 0,\ x = 1$

102. $y = x \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ x = \pi$

103. ***Área, volumen y centroide*** Dada la región acotada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$, encontrar

a) el área de la región.
b) el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x.
c) el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje y.
d) el centroide de la región.

104. ***Volumen y centroide*** Dada la región acotada por las gráficas de $y = x \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$, encontrar

a) el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x.
b) el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje y.
c) el centroide de la región.

105. ***Centroide*** Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{arcsen} x$, $x = 0$ y $y = \pi/2$. ¿Cómo se relaciona este problema con el ejemplo 6 de esta sección?

106. ***Centroide*** Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, $x = 2$ y $x = 4$.

107. ***Desplazamiento medio*** Una fuerza amortiguadora afecta la vibración de un muelle de manera que su desplazamiento se dé por $y = e^{-4t}(\cos 2t + 5 \operatorname{sen} 2t)$. Encontrar el valor medio de y en el intervalo de $t = 0$ a $t = \pi$.

108. ***Modelo para la memoria*** El modelo para la capacidad M de un niño para memorizar, medido en una escala de 0 a 10, está dado por $M = 1 + 1.6t \ln t$, $0 < t \leq 4$, donde t es la edad del niño en años. Encontrar el valor medio de esa función

a) entre el primero y segundo cumpleaños del niño.
b) entre el tercer y cuarto cumpleaños del niño.

Valor actual **En los ejercicios 109 y 110, encontrar el valor presente P de un flujo de ingreso continuo de dólares por año $c(t)$ si**

$$P = \int_0^{t_1} c(t)e^{-rt}\, dt$$

donde t_1 es el tiempo en años y r es la tasa de interés anual compuesto continuo.

109. $c(t) = 100\,000 + 4\,000t$, $r = 5\%$, $t_1 = 10$

110. $c(t) = 30\,000 + 500t$, $r = 7\%$, $t_1 = 5$

Integrales usadas para encontrar los coeficientes de Fourier **En los ejercicios 111 y 112, verificar el valor de la integral definida donde n es un entero positivo.**

111. $$\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{n}, & n \text{ es impar} \\[2ex] -\dfrac{2\pi}{n}, & n \text{ es par} \end{cases}$$

112. $$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{(-1)^n\, 4\pi}{n^2}$$

113. ***Cuerda vibrante*** Una cuerda tensada entre los dos puntos (0, 0) y (2, 0) se tensa desplazando su punto medio h unidades. El movimiento de la cuerda es modelado por una **serie senoidal de Fourier** para la cual se dan los coeficientes por

$$b_n = h\int_0^1 x \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\, dx + h\int_1^2 (-x + 2)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\, dx.$$

Encontrar b_n.

114. Encontrar la falacia en la siguiente demostración de que $0 = 1$.

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dx = x$$

$$u = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{1}{x^2}\, dx$$

$$0 + \int \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)(x) - \int \left(-\frac{1}{x^2}\right)(x)\, dx = 1 + \int \frac{dx}{x}$$

Así, $0 = 1$.

115. Sea $y = f(x)$ positiva y estrictamente creciente en el intervalo $0 < a \leq x \leq b$. Considerar la región R acotada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$. Si R se gira alrededor del eje y, demostrar que el método de los discos y el método de las capas dan el mismo volumen.

116. ***El método de Euler*** Considerar la ecuación diferencial $f'(x) = xe^{-x}$ con la condición inicial $f(0) = 0$.

a) Usar la integración para resolver la ecuación diferencial.
b) Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la solución de la ecuación diferencial.
c) Usar el método de Euler con $h = 0.05$, y una herramienta de graficación para generar los primeros 80 puntos de la gráfica de la solución aproximada. Usar una herramienta de graficación para trazar los puntos. Comparar el resultado con la gráfica en el inciso *b*).
d) Repetir el inciso *c*) usando $h = 0.1$ y generar los primeros 40 puntos.
e) ¿Por qué el resultado es en el apartado *c*) una mejor aproximación de la solución que el resultado en el apartado *d*)?

Método de Euler **En los ejercicios 117 y 118, considerar la ecuación diferencial y repetir los apartados *a*) a *d*) del ejercicio 116.**

117. $f'(x) = 3x \operatorname{sen}(2x)$, $f(0) = 0$

118. $f'(x) = \cos\sqrt{x}$, $f(0) = 1$

119. ***Para pensar*** Dar una explicación geométrica para explicar

$$\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx \leq \int_0^{\pi/2} x\, dx.$$

Verificar la desigualdad evaluando las integrales.

120. ***Encontrando un modelo*** Encontrar el área acotada por las gráficas de $y = x \operatorname{sen} x$ y $y = 0$ sobre cada intervalo.

a) $[0, \pi]$ *b*) $[\pi, 2\pi]$ *c*) $[2\pi, 3\pi]$

Describir cualquier patrón que se note. ¿Cuál es el área entre las gráficas de $y = x \operatorname{sen} x$ y $y = 0$ en el intervalo $[n\pi, (n + 1)\pi]$, donde n es cualquier entero no negativo? Explicar la respuesta.

8.3 Integrales trigonométricas

- **Resolver integrales trigonométricas que contienen potencias de seno y coseno.**
- **Resolver integrales trigonométricas que contienen potencias de secante y tangente.**
- **Resolver integrales trigonométricas que contienen los productos de seno-coseno con ángulos diferentes.**

Integrales que contienen potencias de seno y coseno

En esta sección se estudiarán las técnicas para evaluar integrales de los tipos

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx \qquad \text{y} \qquad \int \sec^m x \tan^n x\,dx$$

donde m o n es cualquier entero positivo. Para encontrar la antiderivada o primitiva para estas expresiones, intentar separarlas en combinaciones de integrales trigonométricas a las que puede aplicarse la regla de la potencia.

Por ejemplo, evaluar $\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx$ con la regla de la potencia haciendo $u = \operatorname{sen} x$. Entonces, $du = \cos x\,dx$ y tiene

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx = \int u^5\,du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C.$$

Para separar $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ en formas a las que se puede aplicar la regla de la potencia, usar las identidades siguientes.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{Identidad pitagórica.}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \text{Identidad del ángulo medio para } \operatorname{sen}^2 x.$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \text{Identidad del ángulo medio para } \cos^2 x.$$

SHEILA SCOTT MACINTYRE (1910-1960)
Sheila Scott Macintyre publicó su primer trabajo sobre los periodos asintóticos de las funciones integrales en 1935. Recibió el doctorado en la Universidad de Aberdeen, donde fue profesora. En 1958 aceptó un puesto como investigadora invitada en la Universidad de Cincinnati.

Estrategia para evaluar integrales que contienen senos y cosenos

1. Si la potencia del seno es impar y positiva, conservar un factor seno y pasar los factores restantes a cosenos. Entonces, desarrollar e integrar.

$$\int \overbrace{\operatorname{sen}^{2k+1}}^{\text{Impar}} x \cos^n x\,dx = \int \overbrace{(\operatorname{sen}^2 x)^k}^{\text{Convertir a senos}} \cos^n x \overbrace{\operatorname{sen} x\,dx}^{\text{Conservar para } du} = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\,dx$$

2. Si la potencia del coseno es impar y positiva, conservar un factor coseno y pasar los factores restantes a senos. Entonces, desarrollar e integrar.

$$\int \operatorname{sen}^m x \overbrace{\cos^{2k+1}}^{\text{Impar}} x\,dx = \int \operatorname{sen}^m x \overbrace{(\cos^2 x)^k}^{\text{Convertir a senos}} \overbrace{\cos x\,dx}^{\text{Conservar para } du} = \int \operatorname{sen}^m x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\,dx$$

3. Si las potencias de ambos son pares y no negativas, usar repetidamente las identidades.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

para convertir el integrando a potencias impares del coseno. Entonces procédase como en la estrategia 2.

TECNOLOGÍA Usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la integral en el ejemplo 1. Obtener

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx =$$

$$-\cos^5 x\left(\frac{1}{7}\operatorname{sen}^2 x + \frac{2}{35}\right) + C.$$

¿Es equivalente este resultado al obtenido en el ejemplo 1?

EJEMPLO 1 La potencia del seno es impar y positiva

Encontrar $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx$.

Solución Ya que se espera usar la regla de la potencia con $u = \cos x$, *conservar un factor* para formar du y convertir los factores del seno restantes a cosenos.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x(\operatorname{sen} x)\, dx && \text{Reescribir.}\\
&= \int (1 - \cos^2 x)\cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \int (\cos^4 x - \cos^6 x)\operatorname{sen} x\, dx && \text{Multiplicar.}\\
&= \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x\, dx && \text{Reescribir.}\\
&= -\int \cos^4 x(-\operatorname{sen} x)\, dx + \int \cos^6 x(-\operatorname{sen} x)\, dx\\
&= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C && \text{Integrar.}
\end{aligned}$$

En el ejemplo 1, las *dos* potencias m y n pasaron a ser enteros positivos. Sin embargo, la misma estrategia funcionará siempre que m o n sean impares y positivos. Así, en el próximo ejemplo la potencia del coseno es 3, pero la potencia del seno es $-\frac{1}{2}$.

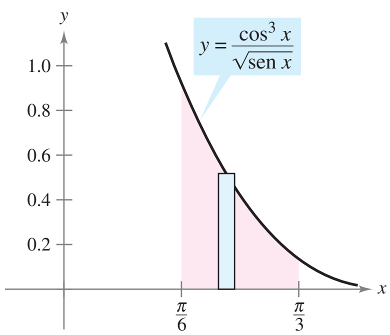
EJEMPLO 2 La potencia del coseno es impar y positiva

Evaluar $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx$.

Solución Ya que se espera usar la regla de la potencia con $u = \operatorname{sen} x$, *conservar un factor del coseno* para formar du y convertir los factores del coseno restantes a senos.

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x \cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx\\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x)(\cos x)}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx\\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left[(\operatorname{sen} x)^{-1/2}\cos x - (\operatorname{sen} x)^{3/2}\cos x\right] dx\\
&= \left[\frac{(\operatorname{sen} x)^{1/2}}{1/2} - \frac{(\operatorname{sen} x)^{5/2}}{5/2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3}\\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} - \frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{5/2} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{32}}{80}\\
&\approx 0.239
\end{aligned}$$

La figura 8.4 muestra la región cuya área es representada por esta integral.



El área de la región es aproximadamente 0.239
Figura 8.4

EJEMPLO 3 La potencia del coseno es par y no negativa

Encontrar $\displaystyle\int \cos^4 x\, dx$.

Solución Porque m y n son pares y no negativos ($m = 0$), se puede reemplazar $\cos^4 x$ por $[(1 + \cos 2x)/2]^2$.

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx && \text{Identidad del ángulo mitad.}\\
&= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}\right) dx && \text{Expandir.}\\
&= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)\right] dx && \text{Identidad del ángulo mitad.}\\
&= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int 2 \cos 2x\, dx + \frac{1}{32}\int 4 \cos 4x\, dx && \text{Reescribir.}\\
&= \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C && \text{Integrar.}
\end{aligned}$$

Usar un sistema de derivación simbólica para verificar esto. ¿Se puede simplificar la derivada para obtener el integrando original?

En el ejemplo 3, si se evaluara la integral definida de 0 a $\pi/2$, se obtendría

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx &= \left[\frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32}\right]_0^{\pi/2}\\
&= \left(\frac{3\pi}{16} + 0 + 0\right) - (0 + 0 + 0)\\
&= \frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Notar que el único término que contribuye a la solución es $3x/8$. Esta observación se generaliza en las fórmulas siguientes desarrolladas por John Wallis.

Bettman/Corbis

JOHN WALLIS (1616-1703)
Wallis hizo mucho de su trabajo en cálculo antes que Newton y Leibniz e influyó en el pensamiento de ambos. Wallis es también creador de la introducción del símbolo (∞) para denotar infinito.

LAS FÓRMULAS DE WALLIS

1. Si n es impar ($n \geq 3$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right).$$

2. Si n es par ($n \geq 2$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Estas fórmulas también son válidas si el $\cos^n x$ se reemplaza por el $\operatorname{sen}^n x$. (Demostrar ambas fórmulas en el ejercicio 108.)

Integrales que contienen potencias de secante y tangente

Las estrategias siguientes pueden ayudar a evaluar integrales de la forma

$$\int \sec^m x \tan^n x \, dx.$$

Estrategia para evaluar integrales que contienen secante y tangente

1. Si la potencia de la secante es par y positiva, conservar un factor secante cuadrado y convertir los factores restantes a tangentes. Entonces desarrollar e integrar.

$$\int \overbrace{\sec^{2k}}^{\text{Par}} x \tan^n x \, dx = \int \overbrace{(\sec^2 x)^{k-1}}^{\text{Convertir a tangentes}} \tan^n x \overbrace{\sec^2 x \, dx}^{\text{Conservar para } du} = \int (1 + \tan^2 x)^{k-1} \tan^n x \sec^2 x \, dx$$

2. Si la potencia de la secante es impar y positiva, conservar un factor secante tangente y convertir los factores restantes a secantes. Entonces desarrollar e integrar.

$$\int \sec^m x \tan^{\overbrace{2k+1}^{\text{Impar}}} x \, dx = \int \sec^{m-1} x \overbrace{(\tan^2 x)^k}^{\text{Convertir a secantes}} \overbrace{\sec x \tan x \, dx}^{\text{Conservar para } du} = \int \sec^{m-1} x (\sec^2 x - 1)^k \sec x \tan x \, dx$$

3. Si no hay factores secantes y la potencia de la tangente es par y positiva, convertir un factor tangente cuadrado a secante cuadrado. Entonces desarrollar y repetir si es necesario.

$$\int \tan^n x \, dx = \int \tan^{n-2} x \overbrace{(\tan^2 x)}^{\text{Convertir a secantes}} \, dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

4. Si la integral es de la forma $\int \sec^m x \, dx$ donde m es impar y positiva, usar la integración por partes, como se ilustra en el ejemplo 5 de la sección anterior.
5. Si ninguna de las primeras cuatro guías aplica, intentar convertir el integrando en senos y cosenos.

EJEMPLO 4 La potencia de la tangente es impar y positiva

Encontrar $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}} \, dx.$

Solución Debido a que se espera usar la regla de la potencia con $u = \sec x$, *conservar un factor de* $(\sec x \tan x)$ para formar du y convertir los factores tangentes restantes a secantes.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}} \, dx &= \int (\sec x)^{-1/2} \tan^3 x \, dx \\
&= \int (\sec x)^{-3/2} (\tan^2 x)(\sec x \tan x) \, dx \\
&= \int (\sec x)^{-3/2} (\sec^2 x - 1)(\sec x \tan x) \, dx \\
&= \int [(\sec x)^{1/2} - (\sec x)^{-3/2}](\sec x \tan x) \, dx \\
&= \frac{2}{3}(\sec x)^{3/2} + 2(\sec x)^{-1/2} + C
\end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 5, la potencia de la tangente es impar y positiva. Así que también se podría encontrar la integral usando el procedimiento descrito en la guía de estrategias 2 de la página 539. Demostrar en el ejercicio 89 que los resultados obtenidos por estos dos procedimientos sólo difieren por una constante.

EJEMPLO 5 La potencia de la secante es par y positiva

Encontrar $\int \sec^4 3x \tan^3 3x\, dx$.

Solución Sea $u = \tan 3x$, entonces $du = 3 \sec^2 3x\, dx$ y se pueden escribir

$$\begin{aligned}
\int \sec^4 3x \tan^3 3x\, dx &= \int \sec^2 3x \tan^3 3x(\sec^2 3x)\, dx \\
&= \int (1 + \tan^2 3x) \tan^3 3x(\sec^2 3x)\, dx \\
&= \frac{1}{3}\int (\tan^3 3x + \tan^5 3x)(3 \sec^2 3x)\, dx \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\tan^4 3x}{4} + \frac{\tan^6 3x}{6}\right) + C \\
&= \frac{\tan^4 3x}{12} + \frac{\tan^6 3x}{18} + C.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 La potencia de la tangente es par

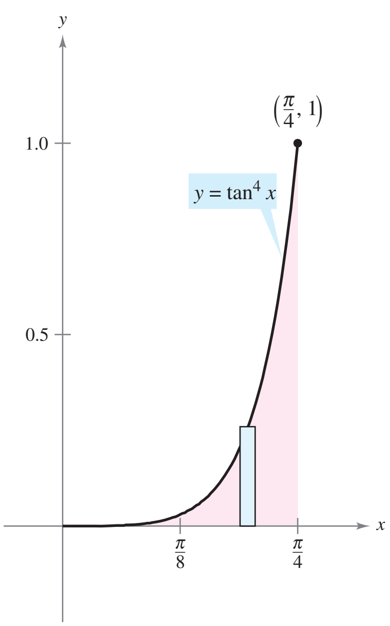
Evaluar $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x\, dx$.

Solución Debido a que no hay factor secante, se puede empezar convirtiendo un factor tangente cuadrado en un factor secante cuadrado.

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x\, dx &= \int \tan^2 x(\tan^2 x)\, dx \\
&= \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)\, dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx \\
&= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C
\end{aligned}$$

Evaluar la integral definida como sigue.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \tan^4 x\, dx &= \left[\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \\
&\approx 0.119
\end{aligned}$$



El área de la región es aproximadamente 0.119
Figura 8.5

El área representada por la integral definida se muestra en la figura 8.5. Probar usando la regla de Simpson para aproximar el valor de esta integral. Con $n = 18$, se debe obtener una aproximación con un error menor que 0.00001.

Para integrales que contienen potencias de cotangentes y cosecantes, seguir una estrategia similar a aquella usada para las potencias de tangentes y secantes. También, al integrar las funciones trigonométricas, recordar que a veces ayuda convertir el integrando entero en las potencias de senos y cosenos.

EJEMPLO 7 Conversión de senos y cosenos

Encontrar $\displaystyle\int \frac{\sec x}{\tan^2 x}\, dx.$

Solución Debido a que las primeras cuatro estrategias de la página 539 no aplican, intentar convertir el integrando en senos y cosenos. En este caso, se pueden integrar las potencias resultantes de seno y coseno como sigue.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sec x}{\tan^2 x}\, dx &= \int \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 dx \\
&= \int (\operatorname{sen} x)^{-2}(\cos x)\, dx \\
&= -(\operatorname{sen} x)^{-1} + C \\
&= -\csc x + C
\end{aligned}$$

Integrales que contienen los productos seno-coseno de ángulos diferentes

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para aprender más sobre integrales que contienen los productos del seno-coseno con ángulos diferentes, ver el artículo "Integrals of Products of Sine and Cosine with Different Arguments", de Sherrie J. Nicol, en *The College Mathematics Journal*.

Las integrales que contienen los productos de senos-cosenos de dos ángulos *diferentes* ocurren en muchas aplicaciones. En tales casos usar las identidades de producto suma.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx &= \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x]) \\
\operatorname{sen} mx \cos nx &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}[(m-n)x] + \operatorname{sen}[(m+n)x]) \\
\cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x])
\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Uso de identidades de producto y suma

Encontrar $\displaystyle\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\, dx$

Solución Considerando la segunda identidad del producto suma, escribir

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\, dx &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left(-\cos x - \frac{\cos 9x}{9}\right) + C \\
&= -\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + C.
\end{aligned}$$

8.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, usar la derivación para adaptar la antiderivada con la integral correcta. [Se etiquetan las integrales *a*), *b*), *c*) y *d*).]

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \tan^2 x\, dx$ *b*) $\displaystyle 8\int \cos^4 x\, dx$

c) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \sec^2 x\, dx$ *d*) $\displaystyle\int \tan^4 x\, dx$

1. $y = \sec x$
2. $y = \cos x + \sec x$
3. $y = x - \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$
4. $y = 3x + 2\operatorname{sen} x \cos^3 x + 3\operatorname{sen} x \cos x$

En los ejercicios 5 a 18, encontrar la integral.

5. $\displaystyle\int \cos^5 x \operatorname{sen} x\, dx$
6. $\displaystyle\int \cos^3 x \operatorname{sen}^4 x\, dx$
7. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^7 2x \cos 2x\, dx$
8. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$
9. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$
10. $\displaystyle\int \cos^3 \frac{x}{3}\, dx$
11. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 2\theta\sqrt{\cos 2\theta}\, d$
12. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 t}{\sqrt{\operatorname{sen} t}}\, dt$
13. $\displaystyle\int \cos^2 3x\, dx$
14. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 5x\, dx$
15. $\displaystyle\int \cos^4 3\alpha\, d\alpha$
16. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 6\theta\, d\theta$
17. $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx$
18. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}^2 x\, dx$

En los ejercicios 19 a 24, usar las fórmulas de Wallis para evaluar la integral.

19. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^7 x\, dx$
20. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^9 x\, dx$
21. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x\, dx$
22. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\, dx$
23. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\, dx$
24. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^8 x\, dx$

En los ejercicios 25 a 42, encontrar la integral conteniendo secante y tangente.

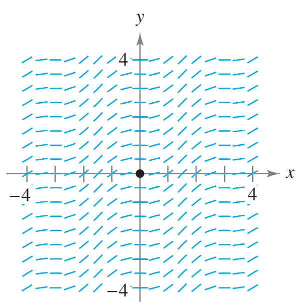
25. $\displaystyle\int \sec 7x\, dx$
26. $\displaystyle\int \sec^2(2x - 1)\, dx$
27. $\displaystyle\int \sec^4 5x\, dx$
28. $\displaystyle\int \sec^6 3x\, dx$
29. $\displaystyle\int \sec^3 \pi x\, dx$
30. $\displaystyle\int \tan^5 x\, dx$
31. $\displaystyle\int \tan^5 \frac{x}{2}\, dx$
32. $\displaystyle\int \tan^3 \frac{\pi x}{2} \sec^2 \frac{\pi x}{2}\, dx$
33. $\displaystyle\int \sec^2 x \tan x\, dx$
34. $\displaystyle\int \tan^3 2t \sec^3 2t\, dt$
35. $\displaystyle\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx$
36. $\displaystyle\int \tan^5 2x \sec^4 2x\, dx$
37. $\displaystyle\int \sec^6 4x \tan 4x\, dx$
38. $\displaystyle\int \sec^2 \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2}\, dx$
39. $\displaystyle\int \sec^5 x \tan^3 x\, dx$
40. $\displaystyle\int \tan^3 3x\, dx$
41. $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{\sec x}\, dx$
42. $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{\sec^5 x}\, dx$

En los ejercicios 43 a 46, resolver la ecuación diferencial.

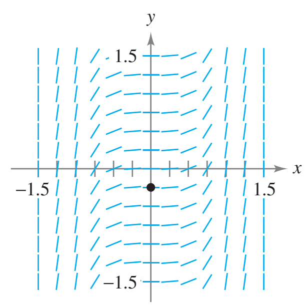
43. $\dfrac{dr}{d\theta} = \operatorname{sen}^4 \pi\theta$
44. $\dfrac{ds}{d\alpha} = \operatorname{sen}^2 \dfrac{\alpha}{2} \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$
45. $y' = \tan^3 3x \sec 3x$
46. $y' = \sqrt{\tan x}\sec^4 x$

Campos de pendientes **En los ejercicios 47 y 48 se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la solución. Comparar el resultado con los dibujos del inciso *a*).**

47. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^2 x,\ (0, 0)$



48. $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x \tan^2 x,\ \left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$



CAS ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 49 y 50, usar un sistema algebraico por computadora para hacer la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y presentar la solución a través de la condición inicial especificada.**

49. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\operatorname{sen} x}{y},\quad y(0) = 2$
50. $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{y}\tan^2 x,\quad y(0) = 3$

En los ejercicios 51 a 56, encontrar la integral.

51. $\displaystyle\int \cos 2x \cos 6x\, dx$
52. $\displaystyle\int \cos 4\theta \cos(-3\theta)\, d\theta$
53. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x \cos 4x\, dx$
54. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(-4x) \cos 3x\, dx$
55. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 3\theta\, d\theta$
56. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 4x\, dx$

En los ejercicios 57 a 66, encontrar la integral. Usar un sistema algebraico por computadora para confirmar el resultado.

57. $\int \cot^3 2x\,dx$

58. $\int \tan^4 \frac{x}{2} \sec^4 \frac{x}{2}\,dx$

59. $\int \csc^4 2x\,dx$

60. $\int \cot^3 x \csc^3 x\,dx$

61. $\int \frac{\cot^2 t}{\csc t}\,dt$

62. $\int \frac{\cot^3 t}{\csc t}\,dt$

63. $\int \frac{1}{\sec x \tan x}\,dx$

64. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos x}\,dx$

65. $\int (\tan^4 t - \sec^4 t)\,dt$

66. $\int \frac{1 - \sec t}{\cos t - 1}\,dt$

En los ejercicios 67 a 74, evaluar la integral definida.

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx$

68. $\int_0^{\pi/3} \tan^2 x\,dx$

69. $\int_0^{\pi/4} 6 \tan^3 x\,dx$

70. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t \sqrt{\tan t}\,dt$

71. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \operatorname{sen} t}\,dt$

72. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 5x \cos 3x\,dx$

73. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \cos^3 x\,dx$

74. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 x + 1)\,dx$

CAS **En los ejercicios 75 a 80, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la integral. Hacer la gráfica de la antiderivada para dos valores diferentes de la constante de integración.**

75. $\int \cos^4 \frac{x}{2}\,dx$

76. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$

77. $\int \sec^5 \pi x\,dx$

78. $\int \tan^3 (1 - x)\,dx$

79. $\int \sec^5 \pi x \tan \pi x\,dx$

80. $\int \sec^4 (1 - x) \tan (1 - x)\,dx$

CAS **En los ejercicios 81 a 84, usar un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral definida.**

81. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} 3\theta \operatorname{sen} 4\theta\,d\theta$

82. $\int_0^{\pi/2} (1 - \cos\theta)^2\,d\theta$

83. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,dx$

84. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{12} x\,dx$

Desarrollo de conceptos

85. Describir cómo integrar $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ para cada condición.

a) m es positivo e impar. *b*) n es positivo e impar.
c) m y n son positivos y pares.

86. Describir cómo integrar $\int \sec^m x \tan^n x\,dx$ para cada condición.

a) m es positivo y par. *b*) n es positivo e impar.
c) n es positivo y par y no hay factor secante.
d) m es positivo e impar y no hay factor tangente.

87. Evaluar $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx$ utilizando el método indicado. Explicar cómo difieren sus respuestas en cada método.

a) Sustitución donde $u = \operatorname{sen} x$
b) Sustitución donde $u = \cos x$
c) Integración por partes
d) Utilizando la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

Para discusión

88. Para cada par de integrales, determinar cuál es más difícil evaluar. Explicar el razonamiento.

a) $\int \operatorname{sen}^{372} x \cos x\,dx$, $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\,dx$
b) $\int \tan^{400} x \sec^2 x\,dx$, $\int \tan^{400} x \sec x\,dx$

En los ejercicios 89 y 90, *a*) encontrar la integral indefinida de dos maneras diferentes, *b*) usar una herramienta de graficación para representar la gráfica de la antiderivada (sin la constante de integración) obtenida por cada método para demostrar que los resultados sólo difieren por una constante, y *c*) verificar analíticamente que los resultados sólo difieren por una constante.

89. $\int \sec^4 3x \tan^3 3x\,dx$

90. $\int \sec^2 x \tan x\,dx$

Área **En los ejercicios 91 a 94, encontrar el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.**

91. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{sen}^3 x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

92. $y = \operatorname{sen}^2 \pi x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

93. $y = \cos^2 x, \quad y = \operatorname{sen}^2 x, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$

94. $y = \cos^2 x, \quad y = \operatorname{sen} x \cos x, \quad x = -\pi/2, \quad x = \pi/4$

Volumen **En los ejercicios 95 y 96, encontrar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones alrededor del eje *x*.**

95. $y = \tan x, \quad y = 0, \quad x = -\pi/4 \quad x = \pi/4$

96. $y = \cos \frac{x}{2}, \quad y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

Volumen y centroide **En los ejercicios 97 y 98, para la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, encontrar *a*) el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje *x*, y *b*) el centroide de la región.**

97. $y = \operatorname{sen} x, y = 0, x = 0, x = \pi$

98. $y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \pi/2$

En los ejercicios 99 a 102, usar la integración por partes para verificar la fórmula de la reducción.

99. $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

100. $\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\,dx$

101. $\int \cos^m x \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\cos^{m+1} x \operatorname{sen}^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

102. $\displaystyle\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$

En los ejercicios 103 a 106, usar los resultados de los ejercicios 99 a 102 para encontrar la integral.

103. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$ **104.** $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$

105. $\displaystyle\int \sec^4 \frac{2\pi x}{5}\,dx$ **106.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\,dx$

107. ***Modelo matemático*** La tabla muestra las temperaturas máximas (alto) y mínimas (bajo) medias (en grados Fahrenheit) en Erie, Pennsylvania, durante cada mes del año. (*Fuente: NOAA*)

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Máx	33.5	35.4	44.7	55.6	67.4	76.2
Mín	20.3	20.9	28.2	37.9	48.7	58.5

Mes	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Máx	80.4	79.0	72.0	61.0	49.3	38.6
Mín	63.7	62.7	55.9	45.5	36.4	26.8

Las temperaturas máximas y mínimas admiten el modelo $f(t) = a_0 + a_1 \cos(\pi t/6) + b_1 \operatorname{sen}(\pi t/6)$ donde $t = 0$ corresponden a enero y a_0, a_1 y b_1 son como sigue.

$$a_0 = \frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)\,dt \qquad a_1 = \frac{1}{6}\int_0^{12} f(t)\cos\frac{\pi t}{6}\,dt$$

$$b_1 = \frac{1}{6}\int_0^{12} f(t)\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}\,dt$$

a) Aproximar el modelo $H(t)$ para las temperaturas máximas. (*Sugerencia:* Usar la regla de Simpson para aproximar las integrales y usar los datos de enero dos veces.)

b) Repetir el inciso *a*) para un modelo $L(t)$ para los datos de temperatura mínimos.

c) Usar una herramienta de graficación para comparar cada modelo con los datos reales. ¿Durante qué parte del año la diferencia es más grande entre las temperaturas máximas y mínimas?

108. ***Fórmulas de Wallis*** Usar el resultado del ejercicio 100 para demostrar las versiones siguientes de las fórmulas de Wallis.

a) Si n es impar ($n \geq 3$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

b) Si n es par ($n \geq 2$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

109. El **producto escalar** de dos funciones f y g sobre $[a, b]$ está dado por $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$. Se dice que dos funciones distintas f y g son **ortogonales** si $\langle f, g\rangle = 0$. Mostrar que el conjunto siguiente de funciones es ortogonal en $[-\pi, \pi]$.

$\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x, \ldots, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots\}$

110. ***Serie de Fourier*** La suma siguiente es una *serie de Fourier finita*.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \operatorname{sen} ix$$
$$= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + a_3 \operatorname{sen} 3x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx$$

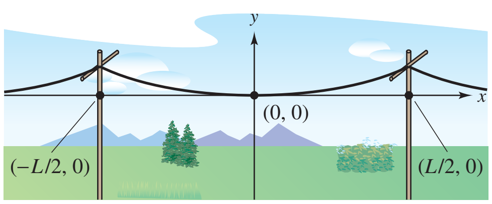
a) Usar el ejercicio 109 para demostrar que el coeficiente de a_n está dado por $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$

b) Sea $f(x) = x$. Encontrar a_1, a_2 y a_3.

PROYECTO DE TRABAJO

Líneas de potencia

Las líneas de potencia son construidas atando cables entre los soportes fijos y ajustando la tensión en cada tramo. El cable cuelga entre los apoyos en la forma de una catenaria, como se muestra en la figura.



Sea T la tensión (en libras) en un tramo de cable, u la densidad (en libras por pie), sea $g \approx 32.2$ la aceleración debida a la gravedad (en pies/s^2), y sea L la distancia (en pies) entre dos soportes consecutivos. Entonces la ecuación de la catenaria es $y = \dfrac{T}{ug}\left(\cosh\dfrac{ugx}{T} - 1\right)$, donde x y y son medidos en pies.

a) Encontrar la longitud de la porción del cable entre dos soportes contiguos.

b) Para medir la tensión en un tramo de la línea de potencia, los especialistas usan el *método de la onda de retorno*. Se golpea el cable en un soporte, creando una onda en la línea, y es medido el tiempo t (en segundos) que tarda la onda en hacer un viaje redondo. La velocidad v (en pies por segundo) se da por $v = \sqrt{T/u}$. ¿Cuánto tiempo toma a la onda hacer un viaje redondo entre los soportes?

c) El pandeo s (en pulgadas) puede obtenerse evaluando y cuando $x = L/2$ en la ecuación para la catenaria (y multiplicando por 12). En la práctica, sin embargo, los especialistas de línea de potencia usan la "ecuación del instalador de líneas" dada por $s \approx 12.075t^2$. Usar el hecho que $[\cosh(ugL/2T) + 1] \approx 2$ para derivar esta ecuación.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre la matemática de líneas de potencia, ver el artículo "Constructing Power Lines", de Thomas O'Neil en *The UMAP Journal*.

8.4 Sustituciones trigonométricas

- Usar sustituciones trigonométricas para resolver una integral.
- Usar las integrales para formular y resolver las aplicaciones de la vida real.

EXPLORACIÓN

Integración de una función radical Hasta este punto del texto, no se ha evaluado la siguiente integral

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Por argumentos geométricos se puede encontrar el valor exacto de esta integral. ¿Cuál es? Utilizando la integración simbólica con la regla de Simpson o de los trapecios, no se tiene la seguridad de la precisión de la aproximación. ¿Por qué?

Intentar calcular el valor exacto mediante la sustitución

$$x = \operatorname{sen}\theta \text{ y } dx = \cos\theta\, d\theta$$

¿Coincide la respuesta con el valor obtenido usando el razonamiento geométrico?

Sustituciones trigonométricas

Conociendo cómo evaluar las integrales que contienen potencias de funciones trigonométricas, usar **sustituciones trigonométricas** para evaluar integrales que contienen radicales

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \qquad \sqrt{a^2 + u^2} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{u^2 - a^2}.$$

El objetivo de las sustituciones trigonométricas es eliminar al radical en el integrando. Hacer esto con las identidades pitagóricas.

$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta, \quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \quad \text{y} \quad \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1.$$

Por ejemplo, si $a > 0$, sea $u = a \operatorname{sen}\theta$, donde $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta}\\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)}\\ &= \sqrt{a^2\cos^2\theta}\\ &= a\cos\theta.\end{aligned}$$

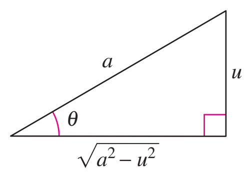
Notar que $\cos\theta \ge 0$, porque $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.

SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS ($a > 0$)

1. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$, sea

$$u = a \operatorname{sen}\theta.$$

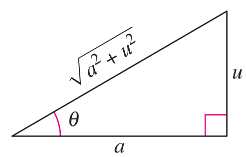
Entonces $\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$, donde $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.



2. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 + u^2}$, sea

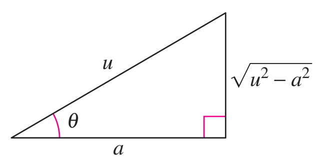
$$u = a\tan\theta.$$

Entonces $\sqrt{a^2 + u^2} = a\sec\theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.



3. Para integrales que contienen $\sqrt{u^2 - a^2}$, sea

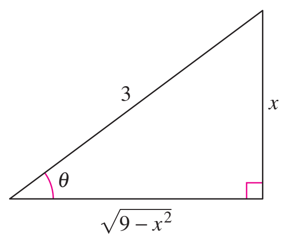
$$u = a\sec\theta.$$



Entonces

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \begin{cases} a\tan\theta, \text{ si } u > a, \text{ donde } 0 \le \theta < \pi/2 \\ -a\tan\theta \text{ si } u < -a, \text{ donde } \pi/2 < \theta \le \pi. \end{cases}$$

NOTA Las restricciones sobre θ aseguran que la función que define la sustitución es inyectiva. De hecho, éstos son los mismos intervalos sobre los que se definen el arcseno, arctangente y arcsecante.



$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

Figura 8.6

EJEMPLO 1 Sustitución trigonométrica: $u = a \operatorname{sen} \theta$

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$.

Solución Primero, notar que ninguna de las reglas básicas de la integración aplica. Para usar la sustitución trigonométrica, observar que $\sqrt{9-x^2}$ es de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$. Así que se puede utilizar la sustitución

$$x = a \operatorname{sen}\theta = 3 \operatorname{sen}\theta.$$

Usando la derivación y el triángulo mostrados en la figura 8.6, se obtiene

$$dx = 3\cos\theta\, d\theta, \qquad \sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta \qquad \text{y} \qquad x^2 = 9\operatorname{sen}^2\theta.$$

Así, la sustitución trigonométrica lleva a

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{(9\operatorname{sen}^2\theta)(3\cos\theta)} && \text{Sustituir.}\\
&= \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} && \text{Simplificar.}\\
&= \frac{1}{9}\int \csc^2\theta\, d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= -\frac{1}{9}\cot\theta + C && \text{Aplicar la regla del cosecante.}\\
&= -\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right) + C && \text{Sustituir para } \cot\theta.\\
&= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C.
\end{aligned}$$

Notar que el triángulo en la figura 8.6 puede usarse para convertir los θ anteriores a x como sigue.

$$\begin{aligned}
\cot\theta &= \frac{\text{cateto ady.}}{\text{cateto op.}}\\
&= \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}
\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Usar un sistema algebraico por computadora para encontrar cada integral definida.

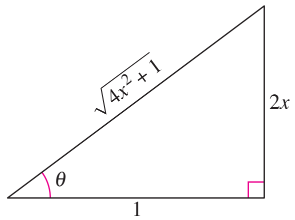
$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{9-x^2}}$$

Entonces usar la sustitución trigonométrica para reproducir los resultados obtenidos con el sistema algebraico por computadora.

En un capítulo anterior se vio cómo pueden usarse las funciones hiperbólicas inversas para evaluar las integrales

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}, \qquad \int \frac{du}{a^2-u^2} \qquad \text{y} \qquad \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}}.$$

También se pueden evaluar estas integrales por cambios de variable trigonométricos. Esto se muestra en el siguiente ejemplo.



$\tan\theta = 2x,\ \sec\theta = \sqrt{4x^2+1}$

Figura 8.7

EJEMPLO 2 Sustitución trigonométrica: $u = a\tan\theta$

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$.

Solución Sea $u = 2x$, $a = 1$ y $2x = \tan\theta$, como se muestra en la figura 8.7. Entonces,

$$dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4x^2+1} = \sec\theta.$$

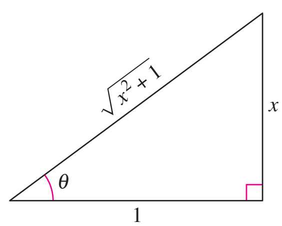
La sustitución trigonométrica produce

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec\theta} && \text{Sustituir.}\\
&= \frac{1}{2}\int \sec\theta\,d\theta && \text{Simplificar.}\\
&= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C && \text{Aplicar la regla de la secante.}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+1} + 2x\right| + C. && \text{Deshacer el cambio.}
\end{aligned}$$

Intentar verificar este resultado con un sistema algebraico por computadora. El resultado, ¿se da en esta forma o en la forma de una función hiperbólica inversa?

Extender el uso de la sustitución trigonométrica para cubrir las integrales conteniendo expresiones como $(a^2 - u^2)^{n/2}$ escribiendo la expresión como

$$(a^2 - u^2)^{n/2} = \left(\sqrt{a^2 - u^2}\right)^n.$$



$\tan\theta = x,\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Figura 8.8

EJEMPLO 3 Sustitución trigonométrica: potencias racionales

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

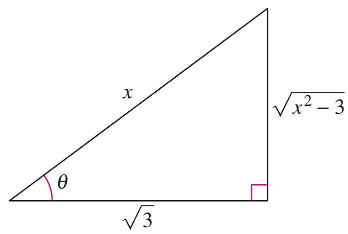
Solución Empezar escribiendo $(x^2+1)^{3/2}$ como $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3$. Entonces, sea $a = 1$ y $u = x = \tan\theta$, como se muestra en la figura 8.8. Usando

$$dx = \sec^2\theta\,d\theta \qquad \text{y} \qquad \sqrt{x^2+1} = \sec\theta$$

aplicar la sustitución trigonométrica como sigue

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} &= \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} && \text{Reescribir el denominador.}\\
&= \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^3\theta} && \text{Sustituir.}\\
&= \int \frac{d\theta}{\sec\theta} && \text{Simplificar.}\\
&= \int \cos\theta\,d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \text{sen}\,\theta + C && \text{Aplicar la regla del coseno.}\\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C && \text{Sustitución hacia atrás.}
\end{aligned}$$

Para las integrales definidas, a menudo es conveniente determinar los límites de la integración para θ, eso evita volver a convertir a x. Repasar este procedimiento en la sección 4.5, ejemplos 8 y 9.



$\sec\theta = \dfrac{x}{\sqrt{3}}, \ \tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}}$

Figura 8.9

EJEMPLO 4 Transformación de los límites de integración

Evaluar $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx$.

Solución Debido a que $\sqrt{x^2-3}$ tiene la forma $\sqrt{u^2-a^2}$, considerar

$$u = x, \quad a = \sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad x = \sqrt{3}\sec\theta$$

como se muestra en la figura 8.9. Entonces,

$$dx = \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\,d\theta \qquad \text{y} \qquad \sqrt{x^2-3} = \sqrt{3}\tan\theta.$$

Para determinar los límites superiores e inferiores de la integración, usar la sustitución $x = \sqrt{3}\sec\theta$ como sigue

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = \sqrt{3}$, $\sec\theta = 1$ y $\theta = 0$.	Cuando $x = 2$, $\sec\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Así, se tiene

Límites de integración para x

Límites de integración para θ

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx &= \int_{0}^{\pi/6} \frac{(\sqrt{3}\tan\theta)(\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta)\,d\theta}{\sqrt{3}\sec\theta} \\
&= \int_{0}^{\pi/6} \sqrt{3}\tan^2\theta\,d\theta \\
&= \sqrt{3}\int_{0}^{\pi/6} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta \\
&= \sqrt{3}\Big[\tan\theta - \theta\Big]_{0}^{\pi/6} \\
&= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \\
&\approx 0.0931.
\end{aligned}$$

En el ejemplo 4, intentar volver a convertir a la variable x y evaluar la antiderivada en los límites originales de integración. Obtener

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx = \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}} - \operatorname{arcsec}\frac{x}{\sqrt{3}}\Bigg]_{\sqrt{3}}^{2}.$$

Al calcular integrales definidas por cambios de variables trigonométricos, verificar que los valores de θ están en los intervalos discutidos al principio de esta sección. Es decir, si se hubiera pedido evaluar la integral definida en el ejemplo 4

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx$$

entonces usando $u = x$ y $a = \sqrt{3}$ en el intervalo $[-2, -\sqrt{3}]$ implicaría que $u < -a$. Así, al determinar los límites superiores e inferiores de integración, se tendría que escoger θ tal que $\pi/2 < \theta \leq \pi$. En este caso la integral sería resuelta como sigue.

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx &= \int_{5\pi/6}^{\pi} \frac{(-\sqrt{3}\tan\theta)(\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta)\,d\theta}{\sqrt{3}\sec\theta} \\
&= \int_{5\pi/6}^{\pi} -\sqrt{3}\tan^2\theta\,d\theta \\
&= -\sqrt{3}\int_{5\pi/6}^{\pi} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta \\
&= -\sqrt{3}\Big[\tan\theta - \theta\Big]_{5\pi/6}^{\pi} \\
&= -\sqrt{3}\left[(0-\pi) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5\pi}{6}\right)\right] \\
&= -1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \\
&\approx -0.0931
\end{aligned}$$

Las sustituciones trigonométricas pueden usarse completando el cuadrado. Por ejemplo, evaluar la integral siguiente.

$$\int \sqrt{x^2 - 2x}\,dx$$

Para empezar, completar el cuadrado y escribir la integral como

$$\int \sqrt{(x-1)^2 - 1^2}\,dx.$$

Las sustituciones trigonométricas pueden usarse para evaluar las tres integrales listadas en el teorema siguiente. Estas integrales se encontrarán varias veces en el resto del texto. Cuando esto pase, simplemente se citará este teorema. (En el ejercicio 85 verificar las fórmulas contenidas en el teorema.)

TEOREMA 8.2 FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN ESPECIALES ($a > 0$)

1. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + u\sqrt{a^2-u^2}\right) + C$

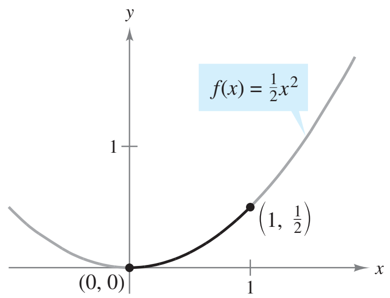
2. $\displaystyle\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2-a^2} - a^2\ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right|\right) + C, \quad u > a$

3. $\displaystyle\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2+a^2} + a^2\ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right|\right) + C$

Aplicaciones

EJEMPLO 5 Cálculo de la longitud de arco

Encontrar la longitud de arco de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ entre $x = 0$ a $x = 1$ (ver figura 8.10).



La longitud de arco de la curva para (0, 0) a $\left(1, \frac{1}{2}\right)$
Figura 8.10

Solución Referirse a la fórmula de longitud de arco en la sección 7.4.

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx && \text{Fórmula para su longitud de arco.}\\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx && f'(x) = x.\\
&= \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta\, d\theta && \text{Sea } a = 1 \text{ y } x = \tan\theta.\\
&= \frac{1}{2}\Big[\sec\theta \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big]_0^{\pi/4} && \text{Ejemplo 5, sección 8.2.}\\
&= \frac{1}{2}\Big[\sqrt{2} + \ln\big(\sqrt{2} + 1\big)\Big] \approx 1.148
\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Comparación de las fuerzas de dos fluidos

Un barril de petróleo sellado (que pesa 48 libras por pie^3) está flotando en el agua de mar (que pesa 64 libras por pie^3), como se muestra en las figuras 8.11 y 8.12. (El barril no está completamente lleno de petróleo. Con el barril recargado de lado, la parte superior, 0.2 pies del barril, está vacía.) Comparar las fuerzas del fluido del interior y del exterior contra un extremo del barril.

El barril no está completamente lleno de petróleo; la parte superior del barril está vacía 0.2 pies
Figura 8.11

Solución En la figura 8.12, localizar el sistema de coordenadas con el origen al centro del círculo dado por $x^2 + y^2 = 1$. Para encontrar la fuerza del fluido contra un extremo *interior* del barril, integrar entre -1 y 0.8 (usando un peso de $w = 48$).

$$\begin{aligned}
F &= w\int_c^d h(y)L(y)\, dy && \text{Ecuación general (ver sección 7.7).}\\
F_{\text{interior}} &= 48\int_{-1}^{0.8} (0.8 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\, dy\\
&= 76.8\int_{-1}^{0.8} \sqrt{1 - y^2}\, dy - 96\int_{-1}^{0.8} y\sqrt{1 - y^2}\, dy
\end{aligned}$$

Para encontrar la fuerza *exterior* del fluido, integrar entre -1 y 0.4 (usando un peso de $w = 64$).

$$\begin{aligned}
F_{\text{exterior}} &= 64\int_{-1}^{0.4} (0.4 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\, dy\\
&= 51.2\int_{-1}^{0.4} \sqrt{1 - y^2}\, dy - 128\int_{-1}^{0.4} y\sqrt{1 - y^2}\, dy
\end{aligned}$$

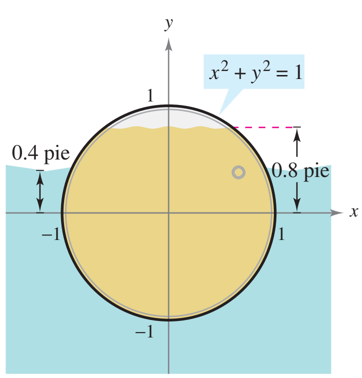


Figura 8.12

Los detalles de integración se dejan para completarse en el ejercicio 84. Intuitivamente, ¿se diría que la fuerza del petróleo (interior) o la fuerza del agua de mar (exterior) es mayor? Evaluando estas dos integrales, determinar que

$$F_{\text{interior}} \approx 121.3 \text{ libras} \quad \text{y} \quad F_{\text{exterior}} \approx 93.0 \text{ libras}$$

8.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, indicar la sustitución trigonométrica que se usaría para encontrar la integral. No efectuar la integración.

1. $\int (9 + x^2)^{-2}\,dx$

2. $\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$

4. $\int x^2(x^2 - 25)^{3/2}\,dx$

En los ejercicios 5 a 8, encontrar la integral indefinida usando la sustitución $x = 4$ sen θ.

5. $\int \frac{1}{(16 - x^2)^{3/2}}\,dx$

6. $\int \frac{4}{x^2\sqrt{16 - x^2}}\,dx$

7. $\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}\,dx$

8. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$

En los ejercicios 9 a 12, encontrar la integral indefinida usando la sustitución $x = 5 \sec \theta$.

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 25}}\,dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}\,dx$

11. $\int x^3\sqrt{x^2 - 25}\,dx$

12. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 25}}\,dx$

En los ejercicios 13 a 16, encontrar la integral indefinida usando la sustitución $x = \tan \theta$.

13. $\int x\sqrt{1 + x^2}\,dx$

14. $\int \frac{9x^3}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$

15. $\int \frac{1}{(1 + x^2)^2}\,dx$

16. $\int \frac{x^2}{(1 + x^2)^2}\,dx$

En los ejercicios 17 a 20, usar las fórmulas de integración especial (teorema 8.2) para encontrar la integral.

17. $\int \sqrt{9 + 16x^2}\,dx$

18. $\int \sqrt{4 + x^2}\,dx$

19. $\int \sqrt{25 - 4x^2}\,dx$

20. $\int \sqrt{5x^2 - 1}\,dx$

En los ejercicios 21 a 42, encontrar la integral.

21. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 36}}\,dx$

22. $\int \frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\,dx$

23. $\int \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$

24. $\int \frac{1}{\sqrt{49 - x^2}}\,dx$

25. $\int \sqrt{16 - 4x^2}\,dx$

26. $\int x\sqrt{16 - 4x^2}\,dx$

27. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$

28. $\int \frac{t}{(4 - t^2)^{3/2}}\,dt$

29. $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^4}\,dx$

30. $\int \frac{\sqrt{4x^2 + 9}}{x^4}\,dx$

31. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 + 9}}\,dx$

32. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 + 16}}\,dx$

33. $\int \frac{-3x}{(x^2 + 3)^{3/2}}\,dx$

34. $\int \frac{1}{(x^2 + 5)^{3/2}}\,dx$

35. $\int e^{2x}\sqrt{1 + e^{2x}}\,dx$

36. $\int (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}\,dx$

37. $\int e^x\sqrt{1 - e^{2x}}\,dx$

38. $\int \frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x}}\,dx$

39. $\int \frac{1}{4 + 4x^2 + x^4}\,dx$

40. $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}\,dx$

41. $\int \operatorname{arcsec} 2x\,dx, \quad x > \frac{1}{2}$

42. $\int x \operatorname{arcsen} x\,dx$

En los ejercicios 43 a 46, completar el cuadrado y encontrar la integral.

43. $\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}\,dx$

44. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx$

45. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 6x + 12}}\,dx$

46. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}\,dx$

En los ejercicios 47 a 52, evaluar, usando la integral, *a*) los límites de integración dados y *b*) los límites obtenidos por la sustitución trigonométrica.

47. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{t^2}{(1 - t^2)^{3/2}}\,dt$

48. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1 - t^2)^{5/2}}\,dt$

49. $\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}}\,dx$

50. $\int_0^{3/5} \sqrt{9 - 25x^2}\,dx$

51. $\int_4^6 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}}\,dx$

52. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2}\,dx$

En los ejercicios 53 y 54, encontrar la solución simbólica de la ecuación diferencial.

53. $x\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 9}, \quad x \geq 3, \quad y(3) = 1$

54. $\sqrt{x^2 + 4}\,\frac{dy}{dx} = 1, \quad x \geq -2, \quad y(0) = 4$

CAS **En los ejercicios 55 a 58, utilizar un sistema algebraico de computadora para encontrar la integral. Verificar el resultado por derivación.**

55. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 10x + 9}}\,dx$

56. $\int (x^2 + 2x + 11)^{3/2}\,dx$

57. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$

58. $\int x^2\sqrt{x^2 - 4}\,dx$

Desarrollo de conceptos

59. Indicar la sustitución que haría si se usara sustitución trigonométrica y la integral con el radical dado, donde $a > 0$. Explicar el razonamiento.

a) $\sqrt{a^2 - u^2}$ *b*) $\sqrt{a^2 + u^2}$ *c*) $\sqrt{u^2 - a^2}$

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

En los ejercicios 60 y 61, indicar el método de integración que se usaría para realizar cada integración. Explicar por qué se eligió tal método. No efectuar la integración.

60. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ **61.** $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$

Para discusión

62. *a*) Evaluar la integral $\int \frac{x}{x^2+9}\,dx$ utilizando la sustitución de u. Evaluar después usando sustitución trigonométrica. Discutir los resultados.

b) Evaluar la integral $\int \frac{x^2}{x^2+9}\,dx$ de manera algebraica utilizando $x^2 = (x^2+9) - 9$. Después, evaluar mediante sustitución trigonométrica. Discutir los resultados.

c) Evaluar la integral $\int \frac{4}{4-x^2}\,dx$ utilizando sustitución trigonométrica. Evaluar después usando la identidad $\frac{4}{4-x^2} = \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}\right)$. Discutir los resultados.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 63 a 66, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.**

63. Si $x = \operatorname{sen}\theta$, entonces $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int d\theta$.

64. Si $x = \sec\theta$, entonces $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int \sec\theta\tan\theta\,d\theta$.

65. Si $x = \tan\theta$, entonces $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_0^{4\pi/3} \cos\theta\,d\theta$.

66. Si $x = \operatorname{sen}\theta$, entonces $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$.

67. ***Área*** Encontrar el área interior de la elipse mostrada en la figura.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

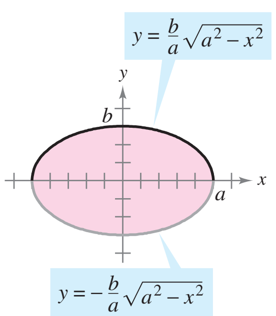


Figura para 67

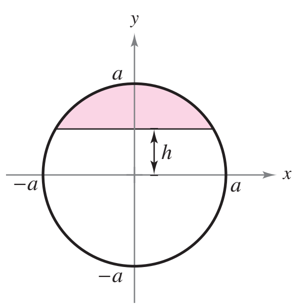


Figura para 68

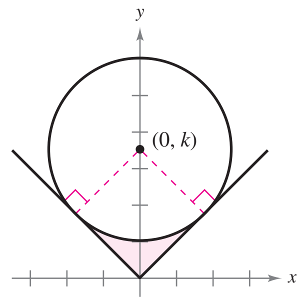
68. ***Área*** Encontrar el área de la región sombreada del círculo de radio a, si la cuerda está h unidades de $(0 < h < a)$ del centro del círculo (ver la figura).

69. ***Diseño mecánico*** La superficie de una parte de la máquina es la región entre las gráficas de $y = |x|$ y $x^2 + (y-k)^2 = 25$ (ver la figura).

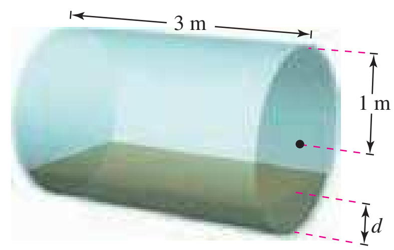
a) Encontrar k si el círculo es tangente a la gráfica de $y = |x|$.

b) Encontrar el área de la superficie de la parte de la máquina.

c) Encontrar el área de la superficie de la parte de la máquina como una función del radio r del círculo.



70. ***Volumen*** El eje de un tanque de almacenamiento cilíndrico horizontal (ver la figura). El radio y longitud del tanque son 1 y 3 metros, respectivamente.



a) Determinar el volumen del fluido en el tanque como una función de la profundidad d.

b) Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la función en el inciso *a*).

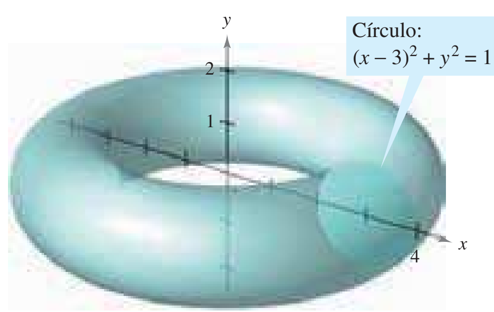
c) Diseñar una varilla de control para el tanque con las marcas de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.

d) El fluido está entrando en el tanque a una velocidad de $\frac{1}{4}$ m^3/min. Determinar la proporción de cambio de la profundidad del fluido como una función de su profundidad d.

e) Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la función en el inciso *d*). ¿Cuándo es mínima la proporción de cambio de la profundidad? ¿Esto está de acuerdo con la intuición? Explicar.

Volumen de un toro **En los ejercicios 71 y 72, encontrar el volumen del toro generado al girar la región acotada por la gráfica del círculo alrededor del eje *y*.**

71. $(x-3)^2 + y^2 = 1$ (ver la figura)



72. $(x-h)^2 + y^2 = r^2,\ h > r$

Longitud de arco **En los ejercicios 73 y 74, encontrar la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.**

73. $y = \ln x, \quad [1, 5]$ **74.** $y = \frac{1}{2}x^2, \quad [0, 4]$

75. ***Longitud de arco*** Mostrar que la longitud de un arco de la curva del seno es igual a la longitud de un arco de la curva del coseno.

76. ***Conjetura***

a) Encontrar las fórmulas para la distancia entre (0, 0) y (a, a^2) a lo largo de la recta entre estos puntos y a lo largo de la parábola $y = x^2$.

b) Usar las fórmulas del inciso *a*) para encontrar las distancias para $a = 1$ y $a = 10$.

c) Hacer una conjetura sobre la diferencia entre las dos distancias cuando *a* crece.

Movimiento del proyectil **En los ejercicios 77 y 78, *a*) usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la trayectoria de un proyectil que sigue el camino dado por la gráfica de la ecuación, *b*) determinar el rango del proyectil y *c*) usar integración en una herramienta de graficación para determinar la distancia de las trayectorias del proyectil.**

77. $y = x - 0.005x^2$ **78.** $y = x - \dfrac{x^2}{72}$

Centroide **En los ejercicios 79 y 80, encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de las desigualdades.**

79. $y \le 3/\sqrt{x^2 + 9}, \; y \ge 0, \; x \ge -4, \; x \le 4$

80. $y \le \frac{1}{4}x^2, \; (x - 4)^2 + y^2 \le 16, \; y \ge 0$

81. ***Área de una superficie*** Encontrar el área de la superficie del sólido generada al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$ alrededor del eje *x*.

82. ***Intensidad de campo*** La intensidad de campo *H* de un imán de longitud $2L$ sobre una partícula a *r* unidades del centro del imán es

$$H = \frac{2mL}{(r^2 + L^2)^{3/2}}$$

donde $\pm m$ son los polos del imán (ver la figura). Encontrar la intensidad de campo media cuando la partícula se mueve de 0 a *R* unidades del centro evaluando la integral

$$\frac{1}{R}\int_0^R \frac{2mL}{(r^2 + L^2)^{3/2}}\, dr.$$

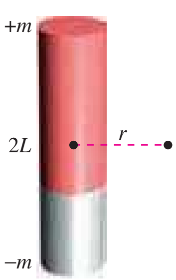


Figura para 82

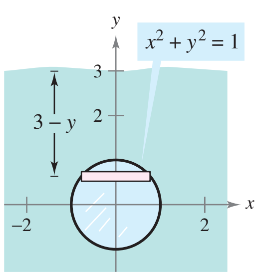


Figura para 83

83. ***Fuerza de un fluido*** Encontrar la fuerza de un fluido sobre una ventana vertical de observación circular de 1 pie de radio dentro de un tanque lleno de agua de un centro piscícola cuando el centro de la ventana es *a*) 3 pies y *b*) *d* pies ($d > 1$) debajo de la superficie de agua (ver la figura). Usar la sustitución trigonométrica para evaluar la integral. (Recordar que en la sección 7.7, en un problema similar, se evaluó una integral por una fórmula geométrica y la otra observando que el integrando era impar.)

84. ***Fuerza de un fluido*** Evaluar las siguientes dos integrales que proporcionan las fuerzas del fluido en el ejemplo 6.

a) $F_{\text{interior}} = 48\displaystyle\int_{-1}^{0.8} (0.8 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\, dy$

b) $F_{\text{exterior}} = 64\displaystyle\int_{-1}^{0.4} (0.4 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\, dy$

85. Usar la sustitución trigonométrica para verificar las fórmulas de la integración dadas en el teorema 8.2.

86. ***Longitud de arco*** Mostrar que la longitud de arco de la gráfica $y =$ sen x en el intervalo $[0, 2\pi]$ es igual a la circunferencia de la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$ (ver la figura).

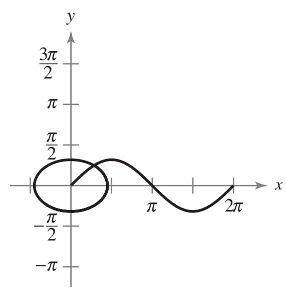


Figura para 86

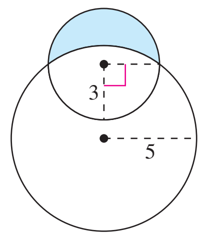
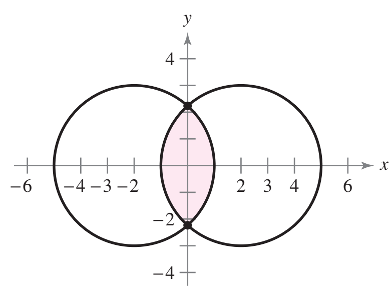


Figura para 87

87. ***Área de un lune*** La región creciente acotada por dos círculos forman un *lune* (ver la figura). Encontrar el área del lune dado que el radio del círculo más pequeño es 3 y el radio del círculo más grande es 5.

88. ***Área*** Dos círculos de radio 3, con centros en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ se intersecan como se muestra en la figura. Encontrar el área de la región sombreada.



Preparación del examen Putnam

89. Evaluar

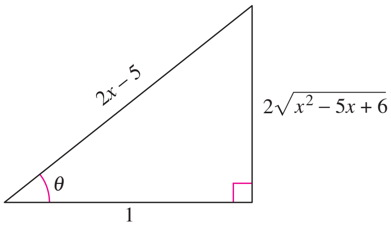
$$\int_0^1 \frac{\ln(x + 1)}{x^2 + 1}\, dx.$$

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.

8.5 Fracciones simples o parciales

- Entender el concepto de una descomposición en fracciones simples o parciales.
- Usar la descomposición de fracciones simples con los factores lineales para integrar las funciones racionales.
- Usar la descomposición de fracciones simples con los factores cuadráticos para integrar las funciones racionales.

Fracciones simples o parciales



$\sec\theta = 2x - 5$
Figura 8.13

En esta sección se examina un procedimiento para descomponer una función racional en funciones racionales más simples para poder aplicar las fórmulas básicas de la integración. Este procedimiento se llama **método de las fracciones simples o parciales**. Para ver el beneficio del método de las fracciones simples, considerar la integral

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx.$$

Para evaluar esta integral *sin* las fracciones parciales, completar el cuadrado y hacer un cambio de variable trigonométrica (ver la figura 8.13) para obtener

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx &= \int \frac{dx}{(x - 5/2)^2 - (1/2)^2} && a = \tfrac{1}{2},\ x - \tfrac{5}{2} = \tfrac{1}{2}\sec\theta. \\
&= \int \frac{(1/2)\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{(1/4)\tan^2\theta} && dx = \tfrac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta. \\
&= 2\int \csc\theta\,d\theta \\
&= 2\ln|\csc\theta - \cot\theta| + C \\
&= 2\ln\left|\frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}}\right| + C \\
&= 2\ln\left|\frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}\right| + C \\
&= 2\ln\left|\frac{\sqrt{x - 3}}{\sqrt{x - 2}}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{x - 3}{x - 2}\right| + C \\
&= \ln|x - 3| - \ln|x - 2| + C.
\end{aligned}$$

Ahora, suponer que se ha observado que

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2}.$$ Descomposición en fracciones parciales.

Entonces, evaluar la integral fácilmente, como sigue.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2}\right) dx \\
&= \ln|x - 3| - \ln|x - 2| + C
\end{aligned}$$

Este método es preferible a los cambios de variable trigonométricas. Sin embargo, su uso depende de la habilidad para factorizar el denominador, $x^2 - 5x + 6$, y para encontrar las **fracciones parciales**

$$\frac{1}{x - 3} \qquad \text{y} \qquad -\frac{1}{x - 2}.$$

En esta sección se estudiarán las técnicas para encontrar las descomposiciones de las fracciones parciales.

Mary Evans Picture Library

JOHN BERNOULLI (1667-1748)
El método de descomposición de las fracciones simples o parciales fue introducido por John Bernoulli, matemático suizo cuyas investigaciones fueron fundamentales en el desarrollo temprano del cálculo. John Bernoulli fue profesor en la Universidad de Basilea donde contó con ilustres discípulos, el más famoso fue Leonhard Euler.