5.2 La función logaritmo natural: integración

- **Usar la regla de logaritmo de integración para integrar una función racional.**
- **Integrar funciones trigonométricas.**

EXPLORACIÓN

Integración de funciones racionales En el capítulo 4 se estudiaron las reglas a seguir para integrar cualquier función polinomial. La regla de logaritmo presentada en esta sección facilita la integración de funciones racionales. Por ejemplo, cada una de las siguientes funciones puede ser integrada con la regla de logaritmo.

$\dfrac{2}{x}$	Ejemplo 1
$\dfrac{1}{4x-1}$	Ejemplo 2
$\dfrac{x}{x^2+1}$	Ejemplo 3
$\dfrac{3x^2+1}{x^3+x}$	Ejemplo 4*a*
$\dfrac{x+1}{x^2+2x}$	Ejemplo 4*c*
$\dfrac{1}{3x+2}$	Ejemplo 4*d*
$\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$	Ejemplo 5
$\dfrac{2x}{(x+1)^2}$	Ejemplo 6

Hay todavía muchas funciones racionales que no pueden ser integradas usando la regla de logaritmo. Dar ejemplos de estas funciones y explicar el razonamiento.

Regla de logaritmo para integración

Las reglas de derivación

$$\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}$$

que se estudiaron en la sección anterior producen las siguientes reglas de integración.

TEOREMA 5.5 REGLA DE LOGARITMO PARA INTEGRACIÓN

Sea u una función derivable de x.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ **2.** $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

Como $du = u'\,dx$, la segunda fórmula también puede expresarse como

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C.$$

Forma alternativa para la regla de logaritmo.

EJEMPLO 1 Uso de la regla de logaritmo para integración

$$\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$
$$= 2\ln|x| + C \qquad \text{Regla de logaritmo para integración.}$$
$$= \ln(x^2) + C \qquad \text{Propiedad de los logaritmos.}$$

Como x^2 no puede ser negativa, el valor absoluto no es necesario en la forma final de la primitiva o antiderivada.

EJEMPLO 2 Uso de la regla de logaritmo con cambio de variables

Hallar $\displaystyle\int \frac{1}{4x-1}\,dx$.

Solución Si se toma $u = 4x - 1$, entonces $du = 4\,dx$.

$$\int \frac{1}{4x-1}\,dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{4x-1}\right)4\,dx \qquad \text{Multiplicar y dividir entre 4.}$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,du \qquad \text{Sustituir } u = 4x - 1.$$
$$= \frac{1}{4}\ln|u| + C \qquad \text{Aplicar la regla de logaritmo.}$$
$$= \frac{1}{4}\ln|4x-1| + C \qquad \text{Sustitución regresiva.}$$

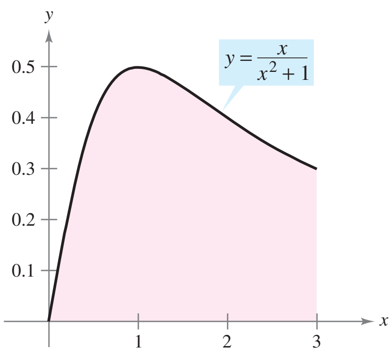
En el ejemplo 3 usar la forma alternativa de la regla de logaritmo. Para aplicar esta regla, buscar cocientes en los que el numerador sea la derivada del denominador.

EJEMPLO 3 Cálculo de un área con la regla de logaritmo

Encontrar el área de la región limitada por la gráfica de

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

el eje x y la recta $x = 3$.



Área $= \int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$

El área de la región limitada por la gráfica de y, el eje x y $x = 3$ es $\frac{1}{2}\ln 10$

Figura 5.8

Solución En la figura 5.8 se puede observar que el área está dada por la integral definida

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx.$$

Si se toma $u = x^2 + 1$, entonces $u' = 2x$. Para aplicar la regla de logaritmo, se debe multiplicar y dividir entre 2 como se muestra.

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2x}{x^2 + 1}\,dx && \text{Multiplicar y dividir entre 2.}\\
&= \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2 + 1)\Big]_0^3 && \int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C\\
&= \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 1)\\
&= \frac{1}{2}\ln 10 && \ln 1 = 0\\
&\approx 1.151
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Integración de cocientes para la regla de logaritmo

a) $$\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x}\,dx = \ln|x^3 + x| + C \qquad u = x^3 + x$$

b) $$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx = \ln|\tan x| + C \qquad u = \tan x$$

c) $$\begin{aligned}\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x}\,dx && u = x^2 + 2x\\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x| + C\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\int \frac{1}{3x + 2}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x + 2}\,dx && u = 3x + 2\\ &= \frac{1}{3}\ln|3x + 2| + C\end{aligned}$$

Con antiderivadas o primitivas que contienen logaritmos es fácil obtener formas que parecen diferentes, pero que son equivalentes. Por ejemplo, las siguientes son equivalentes a la antiderivada o primitiva que aparece en el ejemplo 4*d*.

$$\ln|(3x + 2)^{1/3}| + C \quad \text{y} \quad \ln|3x + 2|^{1/3} + C$$

Las integrales a las que se aplica la regla de logaritmo aparecen a menudo disfrazadas. Por ejemplo, si una función racional tiene un *numerador de grado mayor o igual que el del denominador*, la división puede revelar una forma a la que se pueda aplicar la regla de logaritmo. Esto se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Usar división larga antes de integrar

Hallar $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx.$

Solución Primero se utiliza la división larga para reescribir el integrando.

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 1 \\ x^2+1\,\overline{)\,x^2+x+1} \\ \underline{x^2\qquad+1} \\ x \end{array} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{x}{x^2+1}$$

Ahora, se puede integrar para obtener

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx &= \int\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)dx && \text{Reescribir usando la división larga.} \\ &= \int dx + \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx && \text{Reescribir como dos integrales.} \\ &= x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C. && \text{Integrar.} \end{aligned}$$

Verificar este resultado por derivación para obtener el integrando original.

El siguiente ejemplo presenta otro caso en que el uso de la regla de logaritmo está disfrazado. En este caso, un cambio de la variable ayuda a reconocer la regla de logaritmo.

EJEMPLO 6 Cambio de variable con la regla de logaritmo

Hallar $\displaystyle\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx.$

Solución Si se toma $u = x + 1$, entonces $du = dx$ y $x = u - 1$.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{2(u-1)}{u^2}\,du && \text{Sustituir.} \\ &= 2\int\left(\frac{u}{u^2}-\frac{1}{u^2}\right)du && \text{Reescribir como dos fracciones.} \\ &= 2\int\frac{du}{u} - 2\int u^{-2}\,du && \text{Reescribir como dos integrales.} \\ &= 2\ln|u| - 2\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right)+C && \text{Integrar.} \\ &= 2\ln|u| + \frac{2}{u}+C && \text{Simplificar.} \\ &= 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1}+C && \text{Sustitución regresiva.} \end{aligned}$$

Comprobar este resultado por derivación para obtener el integrando original.

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un sistema algebraico por computadora, se puede usar para resolver las integrales indefinidas de los ejemplos 5 y 6. Comparar las formas de las primitivas dadas con los resultados obtenidos en los ejemplos 5 y 6.

Al estudiar los métodos mostrados en los ejemplos 5 y 6, está claro que ambos métodos involucran reescribir el integrando disfrazado ajustándolo a una o más fórmulas básicas de integración. En las próximas secciones del capítulo 5 y en el capítulo 8, se estudiarán ampliamente las técnicas de integración. Para dominar estas técnicas, se requiere reconocer la naturaleza de "probar y errar" de la integración. En este sentido, la integración no es tan directa como la derivación. La derivación se plantea así:

"He aquí la pregunta; ¿cuál es la respuesta?"

La integración viene a ser más bien

"He aquí la respuesta; ¿cuál es la pregunta?"

Las siguientes son estrategias que se pueden usar para la integración.

AYUDA DE ESTUDIO Tener en cuenta que se puede comprobar la respuesta de un problema de integración al derivar la respuesta. Como se ve en el ejemplo 7, la derivada de $y = \ln|\ln x| + C$ es $y' = 1/(x \ln x)$.

Estrategias para la integración

1. Memorizar una lista básica de fórmulas de integración. (Incluyendo las dadas en esta sección, ya disponemos de 12 fórmulas: la regla de la potencia, la regla de logaritmo y 10 reglas trigonométricas. Al final de la sección 5.7 la lista se ampliará a 20 reglas básicas.)
2. Buscar una fórmula de integración que se parezca total o parcialmente al integrando, y por prueba y error elegir una u que ajuste el integrando a la fórmula.
3. Si no se puede hallar una sustitución u adecuada, intentar transformar el integrando, mediante identidades trigonométricas, multiplicación y división por la misma cantidad, o suma y resta de una misma cantidad. Se requiere ingenio.
4. Si se tiene acceso a un software de computadora que resuelva antiderivadas, es conveniente usarlo.

EJEMPLO 7 Sustitución *u* y la regla de logaritmo

Resolver la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \ln x}$.

Solución La solución se puede escribir como una integral indefinida.

$$y = \int \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

Como el integrando es un cociente con denominador de potencia 1, se puede intentar utilizar la regla de logaritmo. Hay tres formas posibles para u. La forma $u = x$ y $u = x \ln x$, no logra ajustarse a la forma u'/u de la regla de logaritmo, sin embargo, la tercera forma sí se ajusta. Si $u = \ln x$, entonces $u' = 1/x$, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x \ln x}\, dx &= \int \frac{1/x}{\ln x}\, dx && \text{Dividir numerador y denominador por } x.\\
&= \int \frac{u'}{u}\, dx && \text{Sustituir } u = \ln x.\\
&= \ln|u| + C && \text{Aplicar regla de logaritmo.}\\
&= \ln|\ln x| + C && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución es $y = \ln|\ln x| + C$.

Integrales de funciones trigonométricas

En la sección 4.1 se estudiaron seis reglas de integración trigonométrica, las seis que corresponden directamente a reglas de derivación. Con la regla de logaritmo, se puede completar el conjunto de reglas básicas de integración trigonométrica.

EJEMPLO 8 Uso de identidad trigonométrica

Hallar $\int \tan x \, dx$.

Solución Esta integral no parece ajustarse a ninguna de las reglas básicas de la lista. Sin embargo, al utilizar una identidad trigonométrica se tiene

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx.$$

Sabiendo que $D_x[\cos x] = -\operatorname{sen} x$, tenemos $u = \cos x$ y escribimos

$$\begin{aligned}
\int \tan x \, dx &= -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx && \text{Identidad trigonométrica.} \\
&= -\int \frac{u'}{u} \, dx && \text{Sustituir } u = \cos x. \\
&= -\ln|u| + C && \text{Aplicar regla de logaritmo.} \\
&= -\ln|\cos x| + C. && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

En el ejemplo 8 se usó una identidad trigonométrica para derivar una regla de integración de la función tangente. En el siguiente ejemplo, se efectúa un paso algo inusual (multiplicar y dividir entre una misma cantidad) para llegar a una fórmula de integración para la función secante.

EJEMPLO 9 Obtención de la fórmula para secante

Hallar $\int \sec x \, dx$.

Solución Considerar el siguiente procedimiento.

$$\begin{aligned}
\int \sec x \, dx &= \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right) dx \\
&= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx
\end{aligned}$$

Al tomar u como el denominador de este cociente se obtiene

$$u = \sec x + \tan x \quad \Rightarrow \quad u' = \sec x \tan x + \sec^2 x.$$

Así, se puede concluir que

$$\begin{aligned}
\int \sec x \, dx &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx && \text{Reescribir el integrando.} \\
&= \int \frac{u'}{u} \, dx && \text{Sustituir } u = \sec x + \tan x. \\
&= \ln|u| + C && \text{Aplicar regla de logaritmo.} \\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C. && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

Con los resultados de los ejemplos 8 y 9, se dispone de las fórmulas de integración de sen x, cos x, tan x y sec x. Las seis reglas trigonométricas se resumen a continuación. (Las demostraciones de cot u y csc u se dejan como ejercicios 91 y 92.)

NOTA Al utilizar las identidades trigonométricas y las propiedades de los logaritmos, se pueden reescribir esas seis reglas de integración de otras maneras. Por ejemplo,

$$\int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + C.$$

(Ver los ejercicios 93 a 96.)

Integrales de las seis funciones trigonométricas básicas

$$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C \qquad \int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + C \qquad \int \cot u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C \qquad \int \csc u \, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$$

EJEMPLO 10 Integración de funciones trigonométricas

Evaluar $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx$.

Solución Si $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, se puede escribir

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x}\, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \sec x \, dx && \sec x \geq 0 \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \\
&= \ln|\sec x + \tan x| \Big]_0^{\pi/4} \\
&= \ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - \ln 1 \\
&\approx 0.881.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 11 Encontrar un valor promedio

Encontrar el valor promedio de $f(x) = \tan x$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Solución

$$\begin{aligned}
\text{Valor promedio} &= \frac{1}{(\pi/4) - 0} \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx && \text{Valor promedio} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx. \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx && \text{Simplificar.} \\
&= \frac{4}{\pi} \Big[-\ln|\cos x| \Big]_0^{\pi/4} && \text{Integrar.} \\
&= -\frac{4}{\pi} \left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(1) \right] \\
&= -\frac{4}{\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&\approx 0.441
\end{aligned}$$

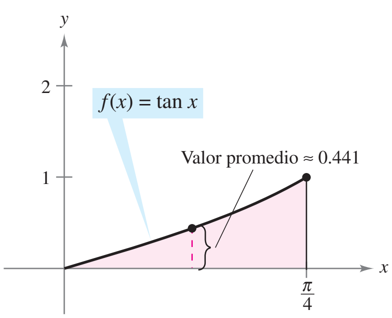


Figura 5.9

El valor promedio está alrededor de 0.441, como se muestra en la figura 5.9.

5.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 26, encontrar la integral indefinida.

1. $\int \frac{5}{x}\,dx$
2. $\int \frac{10}{x}\,dx$
3. $\int \frac{1}{x+1}\,dx$
4. $\int \frac{1}{x-5}\,dx$
5. $\int \frac{1}{2x+5}\,dx$
6. $\int \frac{1}{4-3x}\,dx$
7. $\int \frac{x}{x^2-3}\,dx$
8. $\int \frac{x^2}{5-x^3}\,dx$
9. $\int \frac{4x^3+3}{x^4+3x}\,dx$
10. $\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2}\,dx$
11. $\int \frac{x^2-4}{x}\,dx$
12. $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$
13. $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x}\,dx$
14. $\int \frac{x(x+2)}{x^3+3x^2-4}\,dx$
15. $\int \frac{x^2-3x+2}{x+1}\,dx$
16. $\int \frac{2x^2+7x-3}{x-2}\,dx$
17. $\int \frac{x^3-3x^2+5}{x-3}\,dx$
18. $\int \frac{x^3-6x-20}{x+5}\,dx$
19. $\int \frac{x^4+x-4}{x^2+2}\,dx$
20. $\int \frac{x^3-3x^2+4x-9}{x^2+3}\,dx$
21. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
22. $\int \frac{1}{x\ln x^3}\,dx$
23. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$
24. $\int \frac{1}{x^{2/3}(1+x^{1/3})}\,dx$
25. $\int \frac{2x}{(x-1)^2}\,dx$
26. $\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^3}\,dx$

En los ejercicios 27 a 30, hallar la integral indefinida por sustitución *u*. (*Sugerencia:* Tomar *u* como el denominador del integrando.)

27. $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\,dx$
28. $\int \frac{1}{1+\sqrt{3x}}\,dx$
29. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}\,dx$
30. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$

En los ejercicios 31 a 40, encontrar la integral indefinida.

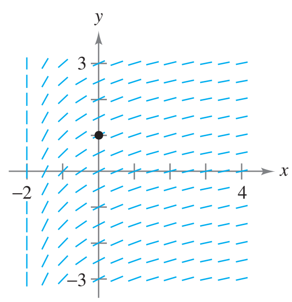
31. $\int \cot\frac{\theta}{3}\,d\theta$
32. $\int \tan 5\theta\,d\theta$
33. $\int \csc 2x\,dx$
34. $\int \sec\frac{x}{2}\,dx$
35. $\int (\cos 3\theta - 1)\,d\theta$
36. $\int \left(2-\tan\frac{\theta}{4}\right)d\theta$
37. $\int \frac{\cos t}{1+\operatorname{sen} t}\,dt$
38. $\int \frac{\csc^2 t}{\cot t}\,dt$
39. $\int \frac{\sec x \tan x}{\sec x - 1}\,dx$
40. $\int (\sec 2x + \tan 2x)\,dx$

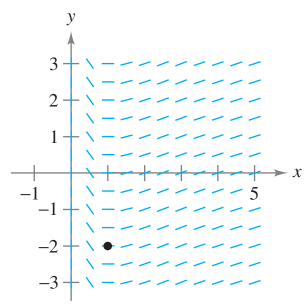
En los ejercicios 41 a 46, resolver la ecuación diferencial. Usar una herramienta de graficación para representar tres soluciones, una de las cuales tiene que pasar por el punto indicado.

41. $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x}$, $(1, 2)$
42. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2}{x}$, $(-1, 0)$
43. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2-x}$, $(1, 0)$
44. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2-9}$, $(0, 4)$
45. $\frac{ds}{d\theta} = \tan 2\theta$, $(0, 2)$
46. $\frac{dr}{dt} = \frac{\sec^2 t}{\tan t + 1}$, $(\pi, 4)$
47. Determinar la función f si $f''(x) = \frac{2}{x^2}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$, $x > 0$.
48. Determinar la función f si $f''(x) = -\frac{4}{(x-1)^2} - 2$, $f(2) = 3$, $f'(2) = 0$, $x > 1$.

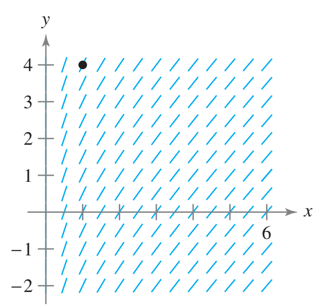
Campos de pendientes **En los ejercicios 49 a 52, se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Trazar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial del campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Hallar por integración la solución particular de la ecuación diferencial y representarla en una herramienta de graficación. Comparar el resultado con los trazos del apartado *a*).**

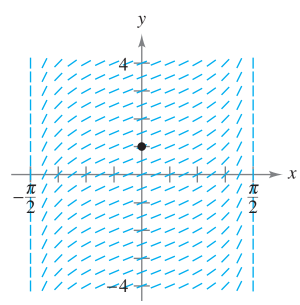
49. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+2}$, $(0, 1)$
50. $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x}$, $(1, -2)$





51. $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x}$, $(1, 4)$
52. $\frac{dy}{dx} = \sec x$, $(0, 1)$





En los ejercicios 53 a 60, calcular la integral. Verificar el resultado con una herramienta de graficación.

53. $\displaystyle\int_0^4 \frac{5}{3x+1}\,dx$

54. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{2x+3}\,dx$

55. $\displaystyle\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$

56. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

57. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2-2}{x+1}\,dx$

58. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,dx$

59. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1-\cos\theta}{\theta-\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

60. $\displaystyle\int_{0.1}^{0.2} (\csc 2\theta - \cot 2\theta)^2\,d\theta$

CAS **En los ejercicios 61 a 66, usar un sistema algebraico por computadora para hallar o evaluar la integral.**

61. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

62. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

63. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx$

64. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$

65. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc x - \operatorname{sen} x)\,dx$

66. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos x}\,dx$

En los ejercicios 67 a 70, encontrar $F'(x)$.

67. $\displaystyle F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

68. $\displaystyle F(x) = \int_0^x \tan t\,dt$

69. $\displaystyle F(x) = \int_1^{3x} \frac{1}{t}\,dt$

70. $\displaystyle F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t}\,dt$

Aproximación **En los ejercicios 71 y 72, determinar el valor que mejor aproxima el área de la región entre el eje x y la gráfica de la función en el intervalo dado. (Basar la elección en un esbozo de la región y no en cálculos.)**

71. $f(x) = \sec x$, $[0, 1]$

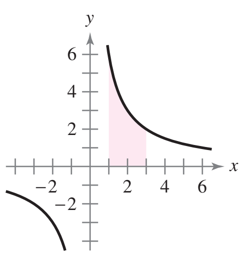
a) 6 *b)* -6 *c)* $\frac{1}{2}$ *d)* 1.25 *e)* 3

72. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $[0, 4]$

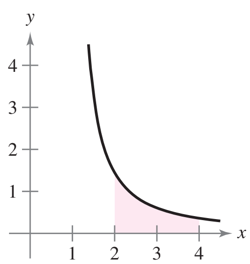
a) 3 *b)* 7 *c)* -2 *d)* 5 *e)* 1

Área **En los ejercicios 73 a 76, calcular el área de la región dada. Verificar el resultado con una herramienta de graficación.**

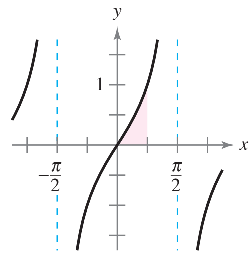
73. $y = \dfrac{6}{x}$



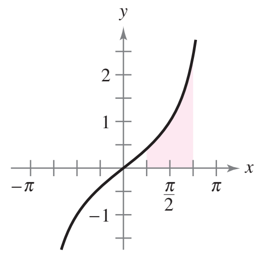
74. $y = \dfrac{2}{x\ln x}$



75. $y = \tan x$



76. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$



Área **En los ejercicios 77 a 80, calcular el área de la región delimitada por la gráfica de las ecuaciones. Verificar el resultado con una herramienta de graficación.**

77. $y = \dfrac{x^2+4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

78. $y = \dfrac{x+6}{x}$, $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$

79. $y = 2\sec\dfrac{\pi x}{6}$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$

80. $y = 2x - \tan 0.3x$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

Integración numérica **En los ejercicios 81 a 84 usar la regla de los trapecios y la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral definida. Tomar $n = 4$ y redondear la respuesta a 4 decimales. Verificar el resultado con una herramienta de graficación.**

81. $\displaystyle\int_1^5 \frac{12}{x}\,dx$

82. $\displaystyle\int_0^4 \frac{8x}{x^2+4}\,dx$

83. $\displaystyle\int_2^6 \ln x\,dx$

84. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x\,dx$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 85 a 88, especificar la fórmula de integración adecuada. No integrar.

85. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx$

86. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$

87. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$

88. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx$

89. Encontrar un valor de x, tal que $\displaystyle\int_1^x \frac{3}{t}\,dt = \int_{1/4}^x \frac{1}{t}\,dt.$

Para discusión

90. Encontrar un valor de x tal que

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

es igual a *a)* ln 5 y *b)* 1.

91. Mostrar que $\int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.

92. Mostrar que $\int \csc u\, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$.

En los ejercicios 93 a 96, mostrar que las dos fórmulas son equivalentes.

93. $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C$

94. $\int \cot x\, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$

$\int \cot x\, dx = -\ln|\csc x| + C$

95. $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

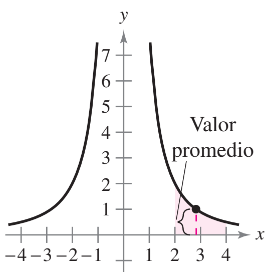
$\int \sec x\, dx = -\ln|\sec x - \tan x| + C$

96. $\int \csc x\, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

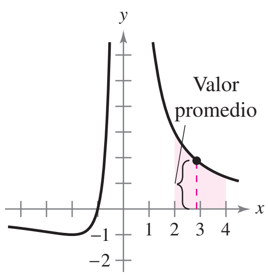
$\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

En los ejercicios 97 a 100, encontrar el valor promedio de la función sobre el intervalo dado.

97. $f(x) = \dfrac{8}{x^2}$, $[2, 4]$



98. $f(x) = \dfrac{4(x + 1)}{x^2}$, $[2, 4]$



99. $f(x) = \dfrac{2 \ln x}{x}$, $[1, e]$

100. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{6}$, $[0, 2]$

101. ***Crecimiento de una población*** Una población de bacterias cambia a una razón

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3\,000}{1 + 0.25t}$$

donde t es el tiempo en días. La población inicial (cuando $t = 0$) era 1 000. Escribir una ecuación que describa la población en cualquier instante t y calcular la población cuando $t = 3$ días.

102. ***Transferencia de calor*** Calcular el tiempo requerido para enfriar un objeto de 300 a 250° F al evaluar

$$t = \frac{10}{\ln 2}\int_{250}^{300} \frac{1}{T - 100}\, dT$$

donde t es el tiempo en minutos.

103. ***Precio promedio*** La ecuación para la demanda de un producto es

$$p = \frac{90\,000}{400 + 3x}.$$

Calcular su precio *promedio* en el intervalo $40 \le x \le 50$.

104. ***Ventas*** La razón de cambio en las ventas S es inversamente proporcional al tiempo t $(t > 1)$ medido en semanas. Encontrar S en función de t, si las ventas después de 2 y 4 semanas son 200 y 300 unidades, respectivamente.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 105 a 108, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que confirme que es falsa.**

105. $(\ln x)^{1/2} = \frac{1}{2}(\ln x)$

106. $\int \ln x\, dx = (1/x) + C$

107. $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|cx|, \quad c \neq 0$

108. $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

109. ***Trayectoria ortogonal***

a) Usar una herramienta de graficación para la ecuación $2x^2 - y^2 = 8$.

b) Evaluar la integral para encontrar y^2 en términos de x.

$$y^2 = e^{-\int (1/x)\, dx}$$

Para un valor particular de la constante de integración, graficar el resultado en la misma ventana usada en el apartado *a*).

c) Verificar que las tangentes para las gráficas en los apartados *a*) y *b*) son perpendiculares a los puntos de intersección.

110. Graficar la función

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

en el intervalo $[0, \infty)$.

a) Encontrar el área delimitada por la gráfica de f y la recta $y = \frac{1}{2}x$.

b) Determinar los valores de la pendiente m en los que la recta $y = mx$ y la gráfica de f están incluidos en la región finita.

c) Calcular el área de esta región como una función de m.

111. ***Desigualdad de Napier*** Para $0 < x < y$, mostrar que

$$\frac{1}{y} < \frac{\ln y - \ln x}{y - x} < \frac{1}{x}.$$

112. Probar que la función

$$F(x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{t}\, dt$$

es constante en el intervalo $(0, \infty)$.

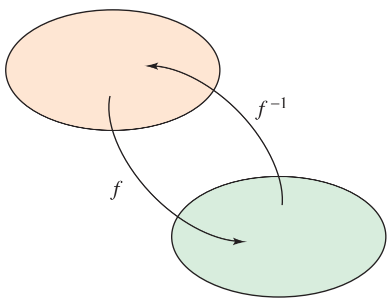
5.3 Funciones inversas

- **Verificar que una función es la inversa de otra.**
- **Determinar si una función tiene una función inversa.**
- **Encontrar la derivada de una función inversa.**

Funciones inversas

Recordar de la sección P.3 que una función se puede representar por un conjunto de pares ordenados. Por ejemplo, la función $f(x) = x + 3$ de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{4, 5, 6, 7\}$, se puede escribir como

$$f: \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}.$$



Dominio de f = recorrido o rango de f^{-1}
Dominio de f^{-1} = recorrido o rango de f
Figura 5.10

Por el intercambio de la primera y segunda coordenadas de cada par ordenado se puede formar la **función inversa** de f. Esta función se denota por f^{-1}. Ésta es una función de B en A, y se escribe como

$$f^{-1}: \{(4, 1), (5, 2), (6, 3), (7, 4)\}.$$

Notar que el dominio de f es el recorrido o rango de f^{-1}, y viceversa, como se ilustra en la figura 5.10. Las funciones f y f^{-1} tienen el efecto de "deshacer" cada una a la otra. Esto es, al componer f con f^{-1} o la composición de f^{-1} con f, se obtiene la función identidad.

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

EXPLORACIÓN

Cálculo de las funciones inversas Explicar cómo "deshacer" lo que hace cada una de las siguientes funciones. Usar la explicación para escribir la función inversa de f.

a) $f(x) = x - 5$
b) $f(x) = 6x$
c) $f(x) = \dfrac{x}{2}$
d) $f(x) = 3x + 2$
e) $f(x) = x^3$
f) $f(x) = 4(x - 2)$

Usar una herramienta de graficación para representar cada función junto con su inversa. ¿Qué observación se puede hacer acerca de cada par de gráficas?

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN INVERSA

Una función g es la **función inversa** de la función f si

$$f(g(x)) = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } g$$

y

$$g(f(x)) = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f.$$

La función g se denota por f^{-1} (se lee como "inversa de f").

NOTA Aunque la notación utilizada para la función inversa se parece a la *notación exponencial*, es un uso distinto del -1 como superíndice. Esto es, en general, $f^{-1}(x) \neq 1/f(x)$. ■

He aquí algunas observaciones relevantes acerca de las funciones inversas.

1. Si g es la función inversa de f, entonces f es la función inversa de g.
2. El dominio de f^{-1} es igual al recorrido o rango de f y el recorrido o rango f^{-1} es igual que el dominio de f.
3. Una función puede no tener función inversa, pero si la tiene, la función inversa es única (ver el ejercicio 108).

Se puede pensar en f^{-1} como una operación que deshace lo hecho por f. Por ejemplo, la resta deshace lo que la suma hace, y la división deshace lo que hace la multiplicación. Usar la definición de función inversa para comprobar:

$$f(x) = x + c \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = x - c \quad \text{son funciones inversas una de la otra.}$$

$$f(x) = cx \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{c},\ c \neq 0, \quad \text{son funciones inversas una de la otra.}$$

EJEMPLO 1 Comprobación de funciones inversas

Demostrar que las funciones siguientes son mutuamente inversas.

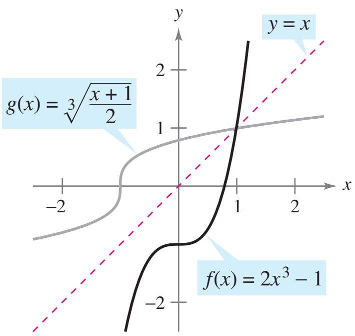
$$f(x) = 2x^3 - 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

Solución Como el dominio y el recorrido o rango de f y g son todos los números reales, se puede concluir que las dos funciones compuestas existen para todo x. La composición de f con g se da por

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 \\ &= 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 \\ &= x + 1 - 1 \\ &= x. \end{aligned}$$

La composición de g con f es

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt[3]{\frac{(2x^3 - 1) + 1}{2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x. \end{aligned}$$



f y *g* son funciones inversas una de la otra
Figura 5.11

Puesto que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, se puede concluir que f y g son inversas una de otra (ver la figura 5.11).

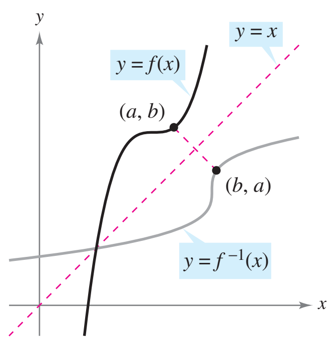
AYUDA DE ESTUDIO En el ejemplo 1, comparar las funciones f y g en forma verbal.

Para f: Primero elevar x al cubo, luego multiplicar por 2, y después restar 1.

Para g: Primero sumar 1, después dividir entre 2, y luego sacar raíz cúbica.

¿Se ve cómo se "deshace el proceso"?

En la figura 5.11, las gráficas de f y $g = f^{-1}$ parecen el reflejo una de la otra respecto a la recta $y = x$. La gráfica de f^{-1} se obtiene **reflejando** la de f en la línea $y = x$. Esta idea generaliza el siguiente teorema.



La gráfica de f^{-1} es un reflejo de la gráfica de f en la recta $y = x$
Figura 5.12

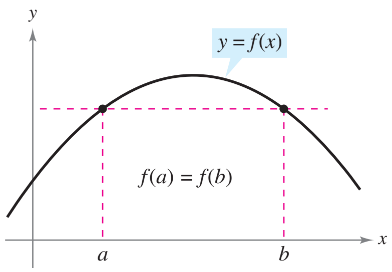
TEOREMA 5.6 PROPIEDAD DE REFLEXIÓN DE LAS FUNCIONES INVERSAS

La gráfica de f contiene el punto (a, b) si y sólo si la gráfica de f^{-1} contiene el punto (b, a).

DEMOSTRACIÓN Si (a, b) está en la gráfica de f, entonces es $f(a) = b$ y se puede escribir

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

De forma que (b, a) está en la gráfica de f^{-1}, como se muestra en la figura 5.12. Un argumento similar demuestra el teorema en la otra dirección.



Si una recta horizontal corta dos veces la gráfica de f, entonces f no es inyectiva
Figura 5.13

Existencia de una función inversa

No todas las funciones tienen función inversa; el teorema 5.6 sugiere un criterio gráfico para aquellas que lo son: el **criterio de la recta horizontal** para una función inversa. Esta prueba establece que la función f tiene inversa si y sólo si toda recta horizontal corta a la gráfica de f a lo más en sólo un punto (figura 5.13). El siguiente teorema explica por qué la prueba de la recta horizontal es válida. (Recordar de la sección 3.3 que la función es *estrictamente monótona* si ésta es creciente o decreciente en todo su dominio.)

TEOREMA 5.7 EXISTENCIA DE LA FUNCIÓN INVERSA

1. Una función tiene función inversa si y sólo si es inyectiva.
2. Si f es estrictamente monótona en todo su dominio, entonces ésta es inyectiva y, por tanto, tiene inversa.

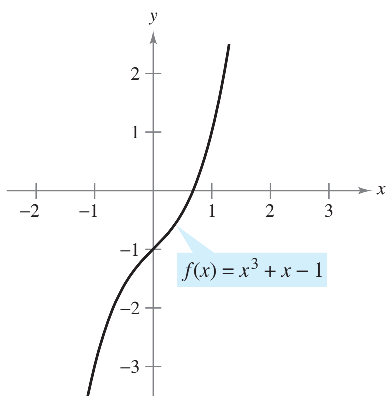
DEMOSTRACIÓN Para demostrar la segunda parte del teorema, recordar de la sección P.3 que f es inyectiva si para x_1 y x_2 en su dominio

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

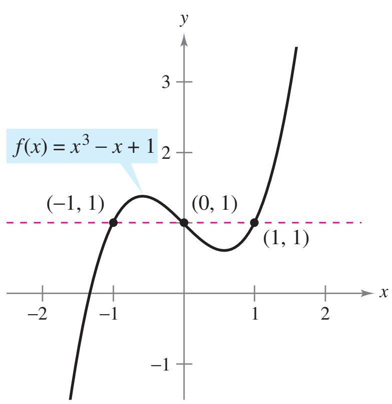
Ahora, se escoge x_1 y x_2 en el dominio de f. Si $x_1 \neq x_2$, entonces, como f es estrictamente monótona, se deduce que

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{o} \qquad f(x_1) > f(x_2).$$

En cualquier caso, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por tanto, f es inyectiva en el intervalo. La demostración de la primera parte del teorema se deja como ejercicio (ver el ejercicio 109).



a) Dado que f es creciente en todo su dominio, tiene función inversa



b) Dado que f no es inyectiva, no tiene una función inversa
Figura 5.14

EJEMPLO 2 Existencia de la función inversa

¿Cuál de las funciones tiene inversa?

a) $f(x) = x^3 + x - 1$ *b*) $f(x) = x^3 - x + 1$

Solución

***a*)** En la figura 5.14*a* se observa una gráfica de f, que aparenta que f es creciente en todo su dominio. Para verificar esto, notar que su derivada, $f'(x) = 3x^2 + 1$, es positiva para todos los valores reales de x. Por tanto, f es estrictamente monótona y debe tener una función inversa.

***b*)** En la figura 5.14*b* se observa una gráfica de f, en la que se puede ver que la función no satisface el criterio de la recta horizontal. En otras palabras, no es inyectiva. Por ejemplo, f toma el mismo valor cuando $x = -1$, 0 y 1.

$$f(-1) = f(1) = f(0) = 1 \qquad \text{No inyectiva.}$$

En consecuencia, por el teorema 5.7, f no admite inversa.

NOTA Suele ser más fácil probar que una función *tiene* función inversa que hallarla. Por ejemplo, sería algebraicamente difícil hallar la función inversa del ejemplo 2*a*.

A continuación se sugiere un procedimiento para encontrar la función inversa de una función.

Estrategia para hallar la inversa de una función

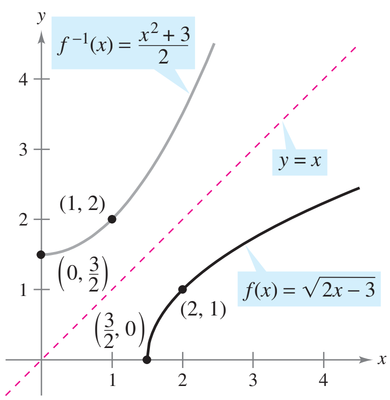
1. Utilizar el teorema 5.7 para determinar si la función dada $y = f(x)$ tiene inversa.
2. Despejar x como función de y: $x = g(y) = f^{-1}(y)$.
3. Intercambiar x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.
4. Definir como dominio de f^{-1} el recorrido de f.
5. Verificar que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

EJEMPLO 3 Cálculo de la inversa de una función

Hallar la función inversa de

$$f(x) = \sqrt{2x-3}.$$

Solución De la gráfica de f en la figura 5.15, aparece que f se incrementa sobre su dominio entero $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$. Para verificar esto, observar que $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$ es positivo sobre el dominio de f. Así, f es estrictamente monótona y debe tener una función inversa. Para encontrar una ecuación para la función inversa, sea $y = f(x)$ y despejar x en términos de y.



El dominio de f^{-1}, $[0, \infty)$ es el recorrido o rango de f
Figura 5.15

$\sqrt{2x-3} = y$	Hacer $y = f(x)$.
$2x - 3 = y^2$	Elevar al cuadrado.
$x = \dfrac{y^2+3}{2}$	Despejar x.
$y = \dfrac{x^2+3}{2}$	Intercambiar x y y.
$f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+3}{2}$	Sustituir y por $f^{-1}(x)$.

El dominio de f^{-1} es el recorrido o rango de f, que es $[0, \infty)$. Se puede verificar este resultado como sigue.

$$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{2\left(\frac{x^2+3}{2}\right) - 3} = \sqrt{x^2} = x, \quad x \geq 0$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 + 3}{2} = \frac{2x-3+3}{2} = x, \quad x \geq \frac{3}{2}$$

NOTA Recordar que se puede utilizar cualquier letra para representar la variable independiente. Así,

$$f^{-1}(y) = \frac{y^2+3}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$$

$$f^{-1}(s) = \frac{s^2+3}{2}$$

representan la misma función.

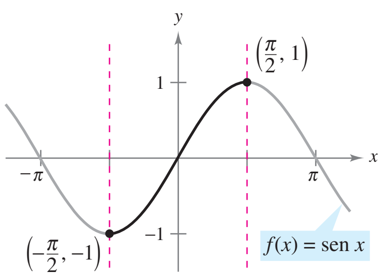
El teorema 5.7 es útil en el siguiente tipo de problemas. Supóngase una función que *no* es inyectiva en su dominio. Al restringir el dominio a un intervalo en que la función sea estrictamente monótona, se obtiene una nueva función que *ya* es inyectiva en el dominio restringido.

EJEMPLO 4 Analizar si una función es inyectiva

Demostrar que la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

no es inyectiva en toda la recta real. Después demostrar que $[-\pi/2, \pi/2]$ es el intervalo más grande, centrado en el origen, en el que f es estrictamente monótona.



f es inyectiva en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$
Figura 5.16

Solución Es claro que f no es inyectiva, ya que muchos valores diferentes de x dan un mismo valor de y. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}(0) = 0 = \operatorname{sen}(\pi).$$

Además, f es creciente en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, porque su derivada

$$f'(x) = \cos x$$

es positiva en él. Por último, como en los puntos terminales a la derecha y a la izquierda hay extremos relativos de la función seno, se puede concluir que la función f es creciente en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$ y que en cualquier otro intervalo mayor, la función no es estrictamente monótona (ver la figura 5.16).

Derivada de la función inversa

Los dos teoremas siguientes discuten la derivada de las funciones inversas. El razonamiento del teorema 8 se sigue de la propiedad reflexiva de la función inversa, como se muestra en la figura 5.12. En el apéndice A pueden verse las demostraciones de los dos teoremas.

TEOREMA 5.8 CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD DE LAS FUNCIONES INVERSAS

Sea f una función cuyo dominio es un intervalo I. Si f tiene una función inversa, entonces los siguientes enunciados son verdaderos.

1. Si f es continua en su dominio, entonces f^{-1} es continua en su dominio.
2. Si f es creciente en su dominio, entonces f^{-1} es creciente en su dominio.
3. Si f es decreciente en su dominio, entonces f^{-1} es decreciente en su dominio.
4. Si f es derivable en c y $f'(c) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(c)$.

TEOREMA 5.9 LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si f tiene una función inversa g, entonces g es derivable para todo x tal que $f'(g(x)) \neq 0$. Además,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(g(x)) \neq 0.$$

EXPLORACIÓN

Graficar las funciones inversas

$$f(x) = x^3$$

y

$$g(x) = x^{1/3}.$$

Calcular la pendiente de f en $(1, 1)$, $(2, 8)$ y $(3, 27)$, y la pendiente de g en $(1, 1)$, $(8, 2)$ y $(27, 3)$. ¿Qué se observa? ¿Qué ocurre en $(0, 0)$?

EJEMPLO 5 Cálculo de la derivada de una función inversa

Sea $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 1$.

a) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(x)$ para $x = 3$?
b) ¿Cuál es el valor de $(f^{-1})'(x)$ para $x = 3$?

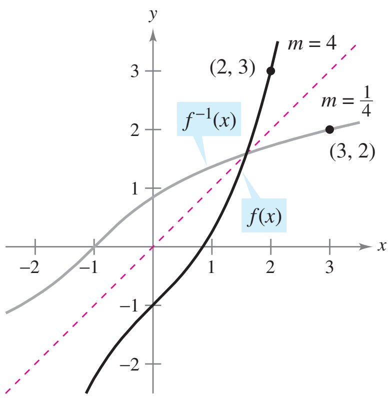
Solución Notar que f es una función inyectiva, así que tiene una función inversa.

a) Como $f(x) = 3$ cuando $x = 2$, se sabe que $f^{-1}(3) = 2$.
b) Como la función f es derivable y tiene inversa, se puede aplicar el teorema 5.9 (con $g = f^{-1}$) y se escribe

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(2)}.$$

Además, usando $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 1$, se concluye que

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{3}{4}(2^2) + 1} = \frac{1}{4}.$$



Las gráficas de las funciones inversas f y f^{-1} tienen pendientes recíprocas en los puntos (a, b) y (b, a)
Figura 5.17

En el ejemplo 5, notar que la pendiente en el punto (2, 3) de la gráfica de f es 4 y la pendiente de f^{-1} en el punto (3, 2) es $\frac{1}{4}$ (ver la figura 5.17). Esta relación recíproca (que se sigue del teorema 5.9) puede escribirse como se muestra.

Si $y = g(x) = f^{-1}(x)$, entonces $f(y) = x$ y $f'(y) = \dfrac{dx}{dy}$. El teorema 5.9 dice que

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(dx/dy)}.$$

Así que, $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy}.}$

EJEMPLO 6 Las gráficas de las funciones inversas tienen pendientes recíprocas

Sea $f(x) = x^2$ (para $x \geq 0$) y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Probar que las pendientes de las gráficas de f y f^{-1} son recíprocas en los puntos siguientes.

a) (2, 4) y (4, 2) ***b)*** (3, 9) y (9, 3)

Solución Las derivadas de f y f^{-1} están dadas por

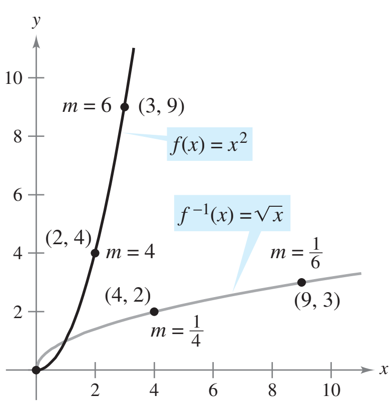
$$f'(x) = 2x \qquad \text{y} \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

a) En (2, 4), la pendiente de la gráfica de f es $f'(2) = 2(2) = 4$. En (4, 2) la pendiente de la gráfica de f^{-1} es

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}.$$

b) En el punto (3, 9), la pendiente de la gráfica de f es $f'(3) = 2(3) = 6$. En (9, 3), la pendiente de la gráfica de f^{-1} es

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}.$$



En (0, 0), la derivada de f es 0, y la derivada de f^{-1} no existe
Figura 5.18

Así, en ambos casos, las pendientes son recíprocas, como ilustra la figura 5.18.

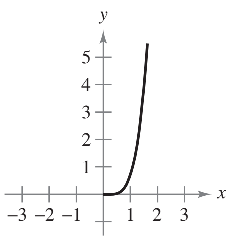
5.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, mostrar que f y g son funciones inversas *a*) analíticamente y *b*) gráficamente.

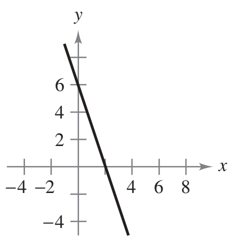
1. $f(x) = 5x + 1, \qquad g(x) = \dfrac{x-1}{5}$
2. $f(x) = 3 - 4x, \qquad g(x) = \dfrac{3-x}{4}$
3. $f(x) = x^3, \qquad g(x) = \sqrt[3]{x}$
4. $f(x) = 1 - x^3, \qquad g(x) = \sqrt[3]{1-x}$
5. $f(x) = \sqrt{x-4}, \qquad g(x) = x^2 + 4, \quad x \geq 0$
6. $f(x) = 16 - x^2, \quad x \geq 0, \qquad g(x) = \sqrt{16-x}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad g(x) = \dfrac{1}{x}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \quad x \geq 0, \qquad g(x) = \dfrac{1-x}{x}, \quad 0 < x \leq 1$

En los ejercicios 9 a 12, relacionar la gráfica de la función con la gráfica de su inversa. [Las gráficas de las funciones inversas están rotuladas *a*), *b*), *c*) y *d*).]

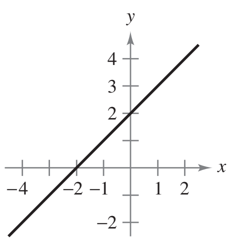
a)



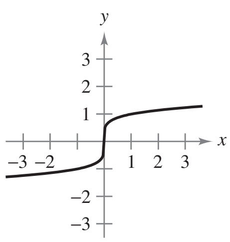
b)



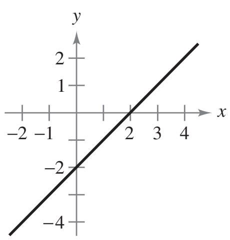
c)



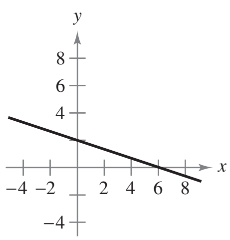
d)



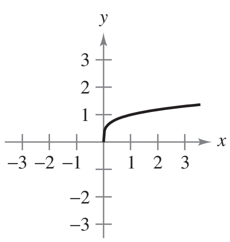
9.



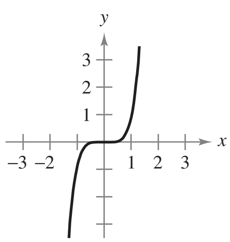
10.



11.



12.



En los ejercicios 13 a 22, usar una herramienta de graficación para representar la función. Entonces, usar la prueba de la recta horizontal para determinar si la función es inyectiva en su dominio entero y así tiene una función inversa.

13. $f(x) = \frac{3}{4}x + 6$
14. $f(x) = 5x - 3$
15. $f(\theta) = \operatorname{sen} \theta$
16. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$
17. $h(s) = \dfrac{1}{s-2} - 3$
18. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$
19. $f(x) = \ln x$
20. $f(x) = 5x\sqrt{x-1}$
21. $g(x) = (x+5)^3$
22. $h(x) = |x+4| - |x-4|$

En los ejercicios 23 a 30, *a*) encontrar la función inversa de f, *b*) graficar f y f^{-1} sobre la misma configuración de ejes coordenados, *c*) describir la relación entre las gráficas y *d*) establecer el dominio y el rango de f y f^{-1}.

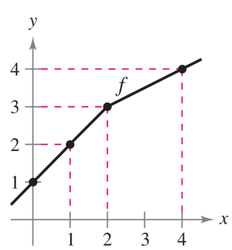
23. $f(x) = 2x - 3$
24. $f(x) = 3x$
25. $f(x) = x^5$
26. $f(x) = x^3 - 1$
27. $f(x) = \sqrt{x}$
28. $f(x) = x^2, \quad x \geq 0$
29. $f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$
30. $f(x) = \sqrt{x^2-4}, \quad x \geq 2$

En los ejercicios 31 a 36, *a*) encontrar la función inversa de f. *b*) Usar una herramienta de graficación para representar f y f^{-1} en la misma pantalla. *c*) Describir la relación entre las gráficas y *d*) establecer el dominio así como el recorrido o rango de f y f^{-1}.

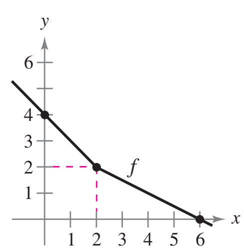
31. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$
32. $f(x) = 3\sqrt[5]{2x-1}$
33. $f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$
34. $f(x) = x^{3/5}$
35. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}$
36. $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$

En los ejercicios 37 y 38, usar la gráfica de la función f para hacer una tabla de valores para los puntos dados. Entonces, hacer una segunda tabla que pueda usarse para encontrar f^{-1} y bosquejar la gráfica de f^{-1}.

37.



38.



39. ***Costo*** Supóngase que se necesitan 50 libras de dos productos que cuestan \$1.25 y \$1.60 por libra.

a) Verificar que el costo total es $y = 1.25x + 1.60(50 - x)$, donde x es el número de libras del producto más barato.

b) Encontrar la función inversa de la función costo. ¿Qué representa cada variable en la función inversa?

c) ¿Cuál es el dominio de la función inversa? Validar o explicar el resultado a partir del contexto del problema.

d) Determinar el número de libras del producto más barato si el costo total es de \$73.

40. ***Temperatura*** La temperatura $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde $F \geq -459.6$, representa la temperatura C en grados Celsius como una función de la temperatura F en grados Fahrenheit.

a) Encontrar la función inversa de C.

b) ¿Qué representa la función inversa?

c) Determinar el dominio de la función inversa. Validar o explicar el resultado con el contexto del problema.

d) La temperatura es de 22° C. ¿Cuál es la temperatura correspondiente en grados Fahrenheit?

En los ejercicios 41 a 46, usar la derivada para determinar si la función es estrictamente monótona en su dominio completo y, por tanto, tiene una función inversa.

41. $f(x) = 2 - x - x^3$
42. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$
43. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$
44. $f(x) = (x + a)^3 + b$
45. $f(x) = \ln(x - 3)$
46. $f(x) = \cos \dfrac{3x}{2}$

En los ejercicios 47 a 52, mostrar que f es estrictamente monótona en el intervalo dado y, por tanto, tiene una función inversa en ese intervalo.

47. $f(x) = (x - 4)^2, \quad [4, \infty)$
48. $f(x) = |x + 2|, \quad [-2, \infty)$
49. $f(x) = \dfrac{4}{x^2}, \quad (0, \infty)$
50. $f(x) = \cot x, \quad (0, \pi)$
51. $f(x) = \cos x, \quad [0, \pi]$
52. $f(x) = \sec x, \quad \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

En los ejercicios 53 y 54, encontrar la inversa de f en el intervalo indicado. Usar una herramienta de graficación para representar f y f^{-1} en una misma pantalla. Describir la relación entre ambas gráficas.

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}, \quad (-2, 2)$
54. $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x^2}, \quad (0, 10)$

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 55 a 58, *a*) usar una herramienta de graficación para representar la función, *b*) representar su función inversa utilizando la herramienta de graficación y *c*) determinar si la gráfica de la relación inversa es una función inversa. Explicar la respuesta.**

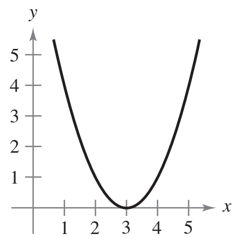
55. $f(x) = x^3 + x + 4$
56. $h(x) = x\sqrt{4 - x^2}$
57. $g(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 1}$
58. $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + 15}}$

En los ejercicios 59 a 62, determinar si la función es inyectiva. Si lo es, encontrar su función inversa.

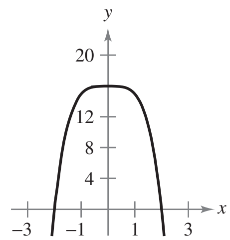
59. $f(x) = \sqrt{x - 2}$
60. $f(x) = -3$
61. $f(x) = |x - 2|, \quad x \leq 2$
62. $f(x) = ax + b, \quad a \neq 0$

En los ejercicios 63 a 66, desechar la parte del dominio con el fin de que la función restringida sea inyectiva. Encontrar la función inversa de la función resultante y dar su dominio. (*Nota*: Hay más de una respuesta correcta.)

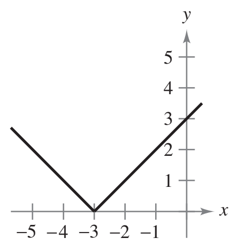
63. $f(x) = (x - 3)^2$



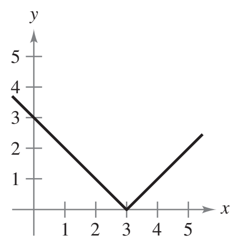
64. $f(x) = 16 - x^4$



65. $f(x) = |x + 3|$



66. $f(x) = |x - 3|$



Para pensar **En los ejercicios 67 a 70, determinar si la función admite inversa. Si es así, ¿cuál es la función inversa?**

67. $g(t)$ es el volumen de agua que ha pasado por una tubería a t minutos de abrir la llave de paso.

68. $h(t)$ es el nivel de la marea t horas pasada la medianoche, donde $0 \leq t < 24$.

69. $C(t)$ es el costo de una llamada telefónica de t minutos.

70. $A(r)$ es el área de un círculo de radio r.

En los ejercicios 71 a 80, verificar si f tiene una inversa. Entonces usar la función f y el número real dado a para encontrar $(f^{-1})'(a)$. (*Sugerencia:* Ver el ejemplo 5.)

71. $f(x) = x^3 - 1, \quad a = 26$
72. $f(x) = 5 - 2x^3, \quad a = 7$
73. $f(x) = x^3 + 2x - 1, \quad a = 2$
74. $f(x) = \frac{1}{27}(x^5 + 2x^3), \quad a = -11$
75. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \quad a = \dfrac{1}{2}$
76. $f(x) = \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \quad a = 1$
77. $f(x) = \dfrac{x + 6}{x - 2}, \quad x > 2, \quad a = 3$

78. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}, \quad x > -1, \quad a = 2$

79. $f(x) = x^3 - \dfrac{4}{x}, \quad x > 0, \quad a = 6$

80. $f(x) = \sqrt{x-4}, \quad a = 2$

En los ejercicios 81 a 84, *a*) hallar el dominio de f y de f^{-1}, *b*) encontrar los recorridos o rangos de f y f^{-1}, *c*) graficar f y f^{-1}, y *d*) demostrar que las pendientes de las gráficas de f y f^{-1} son recíprocas en los puntos dados.

	Funciones	*Punto*
81.	$f(x) = x^3$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$
	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$
82.	$f(x) = 3 - 4x$	$(1, -1)$
	$f^{-1}(x) = \dfrac{3-x}{4}$	$(-1, 1)$
83.	$f(x) = \sqrt{x-4}$	$(5, 1)$
	$f^{-1}(x) = x^2 + 4, \quad x \geq 0$	$(1, 5)$
84.	$f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}, \quad x \geq 0$	$(1, 2)$
	$f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$	$(2, 1)$

En los ejercicios 85 y 86, encontrar dy/dx en los puntos dados para la ecuación.

85. $x = y^3 - 7y^2 + 2, \quad (-4, 1)$ **86.** $x = 2\ln(y^2 - 3), \quad (0, 2)$

En los ejercicios 87 a 90, usar las funciones $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ y $g(x) = x^3$ para encontrar los valores dados.

87. $(f^{-1} \circ g^{-1})(1)$ **88.** $(g^{-1} \circ f^{-1})(-3)$

89. $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$ **90.** $(g^{-1} \circ g^{-1})(-4)$

En los ejercicios 91 a 94, usar las funciones $f(x) = x + 4$ y $g(x) = 2x - 5$ para encontrar las funciones dadas.

91. $g^{-1} \circ f^{-1}$ **92.** $f^{-1} \circ g^{-1}$

93. $(f \circ g)^{-1}$ **94.** $(g \circ f)^{-1}$

Desarrollo de conceptos

95. Describir cómo encontrar la función inversa de una función inyectiva dada por una ecuación en x y y. Dar un ejemplo.

96. Describir la relación entre la gráfica de una función y la gráfica de su función inversa.

En los ejercicios 97 y 98, la derivada de la función tiene el mismo signo para todo x en su dominio, pero la función no es inyectiva. Explicar.

97. $f(x) = \tan x$ **98.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

99. ***Para pensar*** La función $f(x) = k(2 - x - x^3)$ es inyectiva y $f^{-1}(3) = -2$. Encontrar k.

Para discusión

100. ***Para pensar*** El punto (1, 3) se encuentra en la gráfica de f, y la pendiente de la recta tangente por este punto es $m = 2$. Suponer que f^{-1} existe. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente para la gráfica de f^{-1} en el punto (3, 1)?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 101 a 104, determinar cuál de las sentencias es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre que es falsa.**

101. Si f es una función par entonces f^{-1} existe.

102. Si la función inversa de f existe, entonces la intersección en y de f es una intersección en x de f^{-1}.

103. Si $f(x) = x^n$ donde n es impar, entonces f^{-1} existe.

104. No existe ninguna función f tal que $f = f^{-1}$.

105. *a*) Mostrar que $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ no es inyectiva en $(-\infty, \infty)$.

b) Determinar el mayor valor de c de forma que f sea inyectiva en $(-c, c)$.

106. Sean f y g funciones inyectivas. Probar que *a*) $f \circ g$ es inyectiva y *b*) $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

107. Probar que si f tiene una función inversa, entonces $(f^{-1})^{-1} = f$.

108. Demostrar que si una función tiene una función inversa, la función inversa es única.

109. Demostrar que una función tiene inversa si y sólo si es inyectiva.

110. ¿Es cierto el recíproco de la segunda parte del teorema 5.7? Esto es, si una función es inyectiva (y tiene una función inversa), entonces ¿debe ser, por tanto, una función estrictamente monótona? Si es cierto, demostrarlo. Si no lo es, dar un contraejemplo.

111. Sea f dos veces derivable e inyectiva en un intervalo abierto I. Probar que su función inversa g satisface

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3}.$$

Si f es creciente y cóncava hacia abajo, ¿cómo es la concavidad de $f^{-1} = g$?

112. Si $f(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$, encontrar $(f^{-1})'(0)$.

113. Demostrar que $f(x) = \displaystyle\int_2^x \sqrt{1+t^2}\, dt$ es inyectiva y encontrar $(f^{-1})'(0)$.

114. Sea $y = \dfrac{x-2}{x-1}$. Demostrar que y es su propia función inversa. ¿Qué se puede concluir acerca de la gráfica de f? Explicar.

115. Sea $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

a) Mostrar que f es inyectiva si y sólo si $bc - ad \neq 0$.

b) Dado $bc - ad \neq 0$, encontrar f^{-1}.

c) Determinar los valores de a, b, c y d tal que $f = f^{-1}$.

5.4 Funciones exponenciales: derivación e integración

- **Desarrollar las propiedades de la función exponencial natural.**
- **Derivar las funciones exponenciales naturales.**
- **Integrar las funciones exponenciales naturales.**

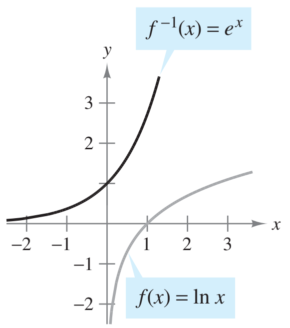
La función exponencial natural

La función $f(x) = \ln x$ es creciente en todo su dominio, y por tanto tiene una función inversa f^{-1}. El dominio de f^{-1} es el conjunto de todos los reales, y el recorrido o rango es el conjunto de todos los reales positivos, como se muestra en la figura 5.19. Así pues, para cualquier número real x,

$$f(f^{-1}(x)) = \ln[f^{-1}(x)] = x. \qquad x \text{ es cualquier número real.}$$

Si x es racional, entonces

$$\ln(e^x) = x \ln e = x(1) = x. \qquad x \text{ es un número racional.}$$



La función inversa de la función logaritmo natural es la función exponencial natural
Figura 5.19

Como la función logaritmo natural es inyectiva, se puede concluir que $f^{-1}(x)$ y e^x son iguales en valores *racionales* de x. La siguiente definición extiende el significado de e^x para incluir *todos* los valores reales de x.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

La función inversa de la función logaritmo natural $f(x) = \ln x$ se llama **función exponencial natural** y se denota por

$$f^{-1}(x) = e^x.$$

Esto es,

$$y = e^x \text{ si y sólo si } x = \ln y.$$

EL NÚMERO e

El símbolo e fue utilizado por primera vez para representar la base de los logaritmos naturales por el matemático Leonhard Euler en una carta a otro matemático, Christian Goldbach, en 1731.

La relación inversa entre las funciones logaritmo natural y exponencial natural se puede resumir como sigue:

$$\ln(e^x) = x \quad \text{y} \quad e^{\ln x} = x \qquad \text{Relación inversa.}$$

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones exponenciales

Resolver $7 = e^{x+1}$.

Solución Se puede pasar de la forma exponencial a la forma logarítmica con sólo *aplicar el logaritmo natural en ambos miembros* de la ecuación.

$$\begin{aligned} 7 &= e^{x+1} && \text{Ecuación original.} \\ \ln 7 &= \ln(e^{x+1}) && \text{Aplicar logaritmo natural a cada lado.} \\ \ln 7 &= x + 1 && \text{Aplicar la propiedad de inversa.} \\ -1 + \ln 7 &= x && \text{Despejar } x. \\ 0.946 &\approx x && \text{Usar la calculadora.} \end{aligned}$$

Verificar esta solución en la ecuación original.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación logarítmica

Resolver $\ln(2x - 3) = 5$.

Solución Para convertir la forma logarítmica en la forma exponencial aplicar la función exponencial de ambos miembros de la ecuación logarítmica.

$$\ln(2x - 3) = 5 \qquad \text{Ecuación original.}$$
$$e^{\ln(2x-3)} = e^5 \qquad \text{Aplicar exponenciales a cada lado.}$$
$$2x - 3 = e^5 \qquad \text{Aplicar la propiedad inversa.}$$
$$x = \tfrac{1}{2}(e^5 + 3) \qquad \text{Despejar } x.$$
$$x \approx 75.707 \qquad \text{Usar la calculadora.}$$

Las reglas usuales para operar con exponentes racionales pueden ser extendidas a la función exponencial natural, como se muestra en el siguiente teorema.

TEOREMA 5.10 OPERACIONES CON FUNCIONES EXPONENCIALES

Sean a y b dos números reales arbitrarios.

1. $e^a e^b = e^{a+b}$
2. $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

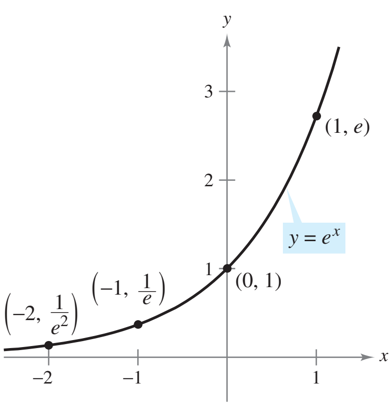
DEMOSTRACIÓN Para demostrar la propiedad 1, se puede escribir

$$\ln(e^a e^b) = \ln(e^a) + \ln(e^b)$$
$$= a + b$$
$$= \ln(e^{a+b}).$$

Como la función logaritmo natural es inyectiva, se puede concluir como

$$e^a e^b = e^{a+b}.$$

La demostración de la segunda propiedad se da en el apéndice A.



La función exponencial natural es creciente y su gráfica es cóncava hacia arriba
Figura 5.20

En la sección 5.3 se aprendió que una función inversa f^{-1} comparte muchas propiedades con f. Así, la función exponencial natural hereda las siguientes propiedades de la función logaritmo natural (ver la figura 5.20).

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

1. El dominio de $f(x) = e^x$ es $(-\infty, \infty)$, y el rango es $(0, \infty)$.
2. La función $f(x) = e^x$ es continua, creciente e inyectiva en todo su dominio.
3. La gráfica de $f(x) = e^x$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio.
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

Derivadas de las funciones exponenciales

Una de las características más intrigantes (y más útiles) de la función exponencial natural es que *su derivada es ella misma*. En otras palabras, es solución de la ecuación diferencial $y' = y$. Este resultado se enuncia en el siguiente teorema.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para encontrar más información acerca de derivadas de funciones exponenciales de orden $\frac{1}{2}$, ver el artículo “A Child's Garden of Fractional Derivates”, de Marcia Kleinz y Thomas J. Osler en *The College Mathematics Journal*.

TEOREMA 5.11 DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Si u es una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$
2. $\dfrac{d}{dx}[e^u] = e^u\dfrac{du}{dx}$

DEMOSTRACIÓN Para probar la propiedad 1, usar el hecho de que $\ln e^x = x$, y derivar cada lado de la ecuación.

$$\ln e^x = x \qquad \text{Definición de la función exponencial.}$$

$$\frac{d}{dx}[\ln e^x] = \frac{d}{dx}[x] \qquad \text{Derivar ambos lados con respecto a } x.$$

$$\frac{1}{e^x}\frac{d}{dx}[e^x] = 1$$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

La derivada e^u se deduce de la regla de la cadena.

NOTA Se puede interpretar este teorema geométricamente diciendo que la pendiente de la gráfica de $f(x) = e^x$ en cualquier punto (x, e^x) es igual a la coordenada y del punto.

EJEMPLO 3 Derivación de funciones exponenciales

a) $\dfrac{d}{dx}[e^{2x-1}] = e^u\dfrac{du}{dx} = 2e^{2x-1}$ $\qquad u = 2x - 1$

b) $\dfrac{d}{dx}[e^{-3/x}] = e^u\dfrac{du}{dx} = \left(\dfrac{3}{x^2}\right)e^{-3/x} = \dfrac{3e^{-3/x}}{x^2}$ $\qquad u = -\dfrac{3}{x}$

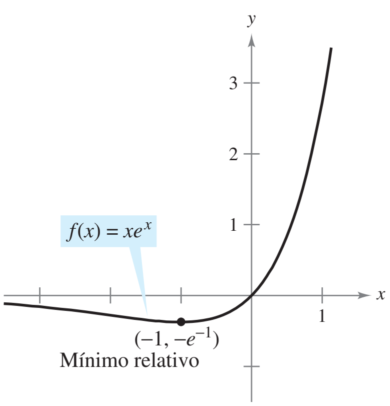
EJEMPLO 4 Localización de extremos relativos

Encontrar los extremos relativos de $f(x) = xe^x$.

Solución La derivada de f está dada por

$$f'(x) = x(e^x) + e^x(1) \qquad \text{Regla del producto.}$$
$$= e^x(x + 1).$$

Como e^x nunca es 0, la derivada es 0 sólo cuando $x = -1$. Además, el criterio de la primera derivada permite determinar que en ese punto hay un mínimo relativo, como se muestra en la figura 5.21. Como la derivada $f'(x) = e^x(x + 1)$ está definida para todo x, no hay otros puntos críticos.



La derivada de f cambia de negativo a positivo en $x = -1$
Figura 5.21

EJEMPLO 5 La función densidad de probabilidad normal estándar

Probar que la *función densidad de probabilidad normal estándar*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

tiene puntos de inflexión cuando $x = \pm 1$.

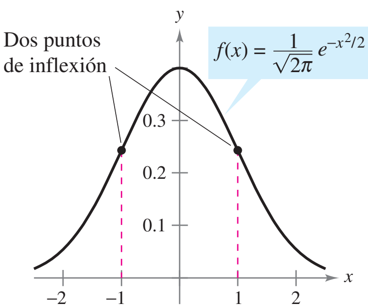
Solución Para localizar los posibles puntos de inflexión, se deben buscar los valores de x para los cuales la segunda derivada es cero.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \qquad \text{Función original.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x)e^{-x^2/2} \qquad \text{Primera derivada.}$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[(-x)(-x)e^{-x^2/2} + (-1)e^{-x^2/2}] \qquad \text{Regla del producto.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-x^2/2})(x^2 - 1) \qquad \text{Segunda derivada.}$$



La curva en forma de campana dada por una función de densidad de probabilidad estándar normal
Figura 5.22

Por tanto, $f''(x) = 0$ cuando $x = \pm 1$, y se pueden aplicar las técnicas del capítulo 3 para concluir que estos valores son los dos puntos de inflexión mostrados en la figura 5.22.

NOTA La forma general de una función de densidad de probabilidad normal (cuya media es 0) está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

donde σ es la desviación estándar (σ es la letra griega minúscula sigma). Esta "curva en forma de campana" tiene puntos de inflexión cuando $x = \pm\sigma$.

EJEMPLO 6 Transacciones comerciales

El número y de transacciones comerciales (en millones) en la bolsa de valores de Nueva York desde 1990 hasta 2005 puede ser modelado por

$$y = 39\,811e^{0.1715t}$$

donde t representa el año, $t = 0$ corresponde a 1990. ¿A qué ritmo o velocidad cambió el número de transacciones comerciales en 2000? (*Fuente: New York Stock Exchange, Inc.*)

Solución La derivada del modelo dado es

$$y' = (0.1715)(39\,811)e^{0.1715t}$$
$$\approx 6\,828e^{0.1715t}.$$

Al evaluar la derivada cuando $t = 10$, se puede concluir que el ritmo o velocidad de cambio en 2000 fue cerca de

37 941 millones de transacciones por año.

La gráfica de este modelo se muestra en la figura 5.23.

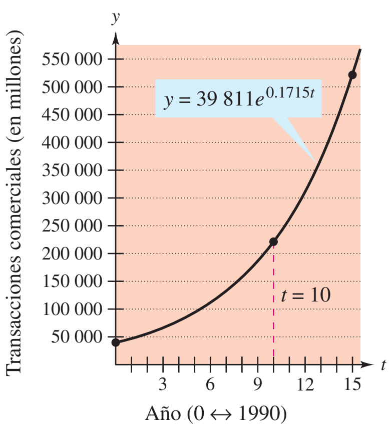


Figura 5.23

Integrales de funciones exponenciales

Cada fórmula de derivación en el teorema 5.11 tiene su correspondiente fórmula de integración.

TEOREMA 5.12 REGLAS DE INTEGRACIÓN PARA FUNCIONES EXPONENCIALES

Si u es una función derivable de x.

1. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$ **2.** $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$

EJEMPLO 7 Integración de funciones exponenciales

Encontrar $\displaystyle\int e^{3x+1}\,dx$.

Solución Si $u = 3x + 1$, entonces $du = 3\,dx$.

$$\int e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1}(3)\,dx \qquad \text{Multiplicar y dividir entre 3.}$$

$$= \frac{1}{3}\int e^{u}\,du \qquad \text{Sustituir } u = 3x + 1.$$

$$= \frac{1}{3}e^{u} + C \qquad \text{Aplicar la regla exponencial.}$$

$$= \frac{e^{3x+1}}{3} + C \qquad \text{Sustituir nuevamente.}$$

NOTA En el ejemplo 7, el factor constante faltante 3 se ha introducido para crear $du = 3\,dx$. Sin embargo, recordemos que no se puede introducir un factor *variable* faltante en el integrando. Por ejemplo,

$$\int e^{-x^2}\,dx \qquad \frac{1}{x}\int e^{-x^2}\,(x\,dx).$$

EJEMPLO 8 Integración de funciones exponenciales

Encontrar $\displaystyle\int 5xe^{-x^2}\,dx$.

Solución Si se tiene $u = -x^2$, entonces $du = -2x\,dx$ o $x\,dx = -du/2$.

$$\int 5xe^{-x^2}dx = \int 5e^{-x^2}(x\,dx) \qquad \text{Reagrupar el integrando.}$$

$$= \int 5e^{u}\left(-\frac{du}{2}\right) \qquad \text{Sustituir } u = -x^2.$$

$$= -\frac{5}{2}\int e^{u}\,du \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= -\frac{5}{2}e^{u} + C \qquad \text{Aplicar la regla exponencial.}$$

$$= -\frac{5}{2}e^{-x^2} + C \qquad \text{Sustitución regresiva.}$$

EJEMPLO 9 Integración de funciones exponenciales

a) $$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = -\int \underbrace{e^{1/x}}_{e^u}\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx}_{du} \qquad u = \frac{1}{x}$$

$$= -e^{1/x} + C$$

b) $$\int \operatorname{sen} x\, e^{\cos x}\,dx = -\int \underbrace{e^{\cos x}}_{e^u}\underbrace{(-\operatorname{sen} x\,dx)}_{du} \qquad u = \cos x$$

$$= -e^{\cos x} + C$$

EJEMPLO 10 Cálculo de áreas acotadas o delimitadas por funciones exponenciales

Evaluar cada una de las integrales definidas.

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ ***c)*** $\displaystyle\int_{-1}^0 [e^x\cos(e^x)]\,dx$

Solución

a) $$\int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big]_0^1 \qquad \text{Ver la figura 5.24}a.$$

$$= -e^{-1} - (-1)$$

$$= 1 - \frac{1}{e}$$

$$\approx 0.632$$

b) $$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x)\Big]_0^1 \qquad \text{Ver la figura 5.24}b.$$

$$= \ln(1+e) - \ln 2$$

$$\approx 0.620$$

c) $$\int_{-1}^0 [e^x\cos(e^x)]\,dx = \operatorname{sen}(e^x)\Big]_{-1}^0 \qquad \text{Ver la figura 5.24}c.$$

$$= \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen}(e^{-1})$$

$$\approx 0.482$$

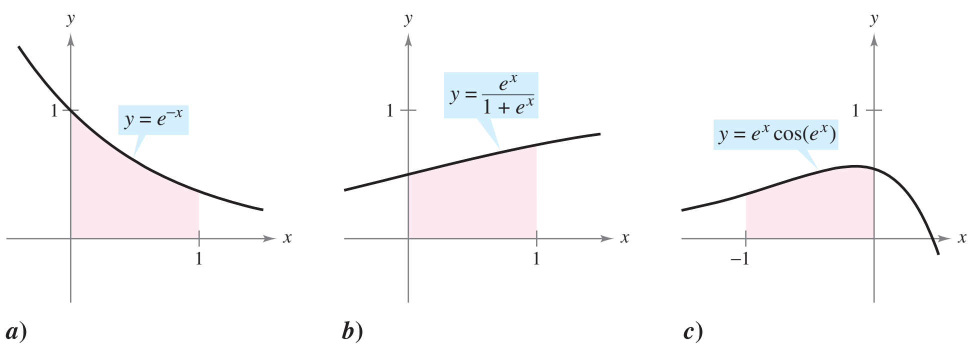


Figura 5.24

5.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 16, calcular x redondeando a tres decimales.

1. $e^{\ln x} = 4$
2. $e^{\ln 2x} = 12$
3. $e^x = 12$
4. $4e^x = 83$
5. $9 - 2e^x = 7$
6. $-6 + 3e^x = 8$
7. $50e^{-x} = 30$
8. $200e^{-4x} = 15$
9. $\dfrac{800}{100 - e^{x/2}} = 50$
10. $\dfrac{5\,000}{1 + e^{2x}} = 2$
11. $\ln x = 2$
12. $\ln x^2 = 10$
13. $\ln(x - 3) = 2$
14. $\ln 4x = 1$
15. $\ln \sqrt{x + 2} = 1$
16. $\ln(x - 2)^2 = 12$

En los ejercicios 17 a 22, dibujar la gráfica de la función

17. $y = e^{-x}$
18. $y = \frac{1}{2}e^x$
19. $y = e^x + 2$
20. $y = e^{x-1}$
21. $y = e^{-x^2}$
22. $y = e^{-x/2}$

23. Usar una herramienta de graficación para representar $f(x) = e^x$ y la función dada en la misma pantalla. ¿Cómo es la relación de las dos gráficas?

a) $g(x) = e^{x-2}$ *b)* $h(x) = -\frac{1}{2}e^x$ *c)* $q(x) = e^{-x} + 3$

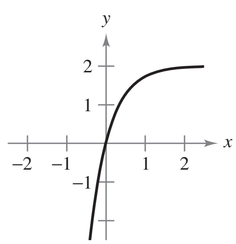
24. Usar una herramienta de graficación para representar la función. Usar la gráfica para determinar las asíntotas de la función.

a) $f(x) = \dfrac{8}{1 + e^{-0.5x}}$

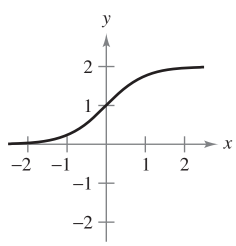
b) $g(x) = \dfrac{8}{1 + e^{-0.5/x}}$

En los ejercicios 25 a 28, asociar cada ecuación con su gráfica. Suponer que a y C son números reales positivos. [Las gráficas están etiquetadas con *a*), *b*), *c*) y *d*).]

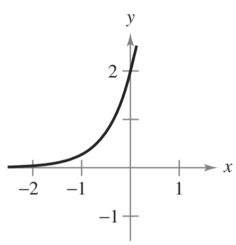
a)



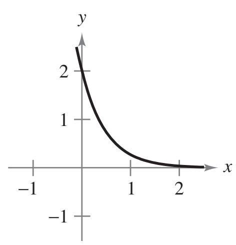
b)



c)



d)



25. $y = Ce^{ax}$
26. $y = Ce^{-ax}$
27. $y = C(1 - e^{-ax})$
28. $y = \dfrac{C}{1 + e^{-ax}}$

En los ejercicios 29 a 32, confirmar que las funciones son inversas una de la otra al representar ambas funciones sobre el mismo sistema de coordenadas.

29. $f(x) = e^{2x}$
$g(x) = \ln \sqrt{x}$

30. $f(x) = e^{x/3}$
$g(x) = \ln x^3$

31. $f(x) = e^x - 1$
$g(x) = \ln(x + 1)$

32. $f(x) = e^{x-1}$
$g(x) = 1 + \ln x$

33. ***Análisis gráfico*** Usar una herramienta de graficación para representar

$$f(x) = \left(1 + \frac{0.5}{x}\right)^x \quad \text{y} \quad g(x) = e^{0.5}$$

en la misma pantalla. ¿Cuál es la relación entre f y g cuando $x \to \infty$?

34. ***Conjetura*** Usar el resultado del ejercicio 33 para hacer una conjetura acerca del valor de

$$\left(1 + \frac{r}{x}\right)^x$$

como $x \to \infty$.

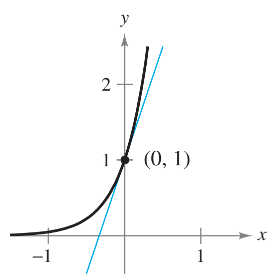
En los ejercicios 35 y 36, comparar los números dados con el número e. ¿Es el número mayor o menor que e?

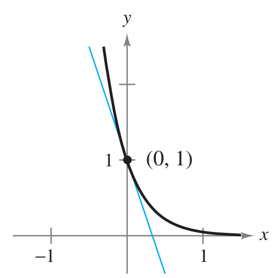
35. $\left(1 + \dfrac{1}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000}$ (ver el ejercicio 34.)

36. $1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{720} + \dfrac{1}{5\,040}$

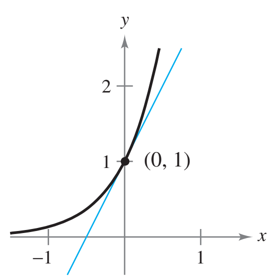
En los ejercicios 37 y 38, encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (0, 1).

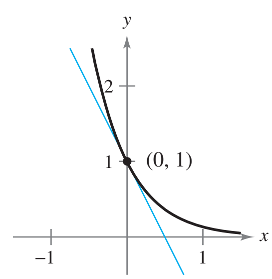
37. *a)* $y = e^{3x}$ *b)* $y = e^{-3x}$





38. *a)* $y = e^{2x}$ *b)* $y = e^{-2x}$





En los ejercicios 39 a 60, encontrar la derivada.

39. $f(x) = e^{2x}$

40. $y = e^{-5x}$

41. $y = e^{\sqrt{x}}$

42. $y = e^{-x^2}$

43. $y = e^{x-4}$

44. $f(x) = 3e^{1-x^2}$

45. $y = e^x \ln x$

46. $y = xe^x$

47. $y = x^3 e^x$

48. $y = x^2 e^{-x}$

49. $g(t) = (e^{-t} + e^t)^3$

50. $g(t) = e^{-3/t^2}$

51. $y = \ln(1 + e^{2x})$

52. $y = \ln\left(\dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}\right)$

53. $y = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

54. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

55. $y = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

56. $y = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

57. $y = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

58. $y = \ln e^x$

59. $F(x) = \displaystyle\int_{\pi}^{\ln x} \cos e^t \, dt$

60. $F(x) = \displaystyle\int_0^{e^{2x}} \ln(t + 1) \, dt$

En los ejercicios 61 a 68, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

61. $f(x) = e^{1-x}, \quad (1, 1)$

62. $y = e^{-2x+x^2}, \quad (2, 1)$

63. $y = \ln(e^{x^2}), \quad (-2, 4)$

64. $y = \ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (0, 0)$

65. $y = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x, \quad (1, e)$

66. $y = xe^x - e^x, \quad (1, 0)$

67. $f(x) = e^{-x} \ln x, \quad (1, 0)$

68. $f(x) = e^3 \ln x, \quad (1, 0)$

En los ejercicios 69 y 70, hallar dy/dx por derivación implícita.

69. $xe^y - 10x + 3y = 0$

70. $e^{xy} + x^2 - y^2 = 10$

En los ejercicios 71 y 72, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

71. $xe^y + ye^x = 1, \quad (0, 1)$

72. $1 + \ln xy = e^{x-y}, \quad (1, 1)$

En los ejercicios 73 y 74, encontrar la segunda derivada de la función.

73. $f(x) = (3 + 2x)e^{-3x}$

74. $g(x) = \sqrt{x} + e^x \ln x$

En los ejercicios 75 a 78, probar que la función $y = f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial.

75. $y = 4e^{-x}$
$y'' - y = 0$

76. $y = e^{3x} + e^{-3x}$
$y'' - 9y = 0$

77. $y = e^x\left(\cos \sqrt{2}\,x + \operatorname{sen} \sqrt{2}\,x\right)$
$y'' - 2y' + 3y = 0$

78. $y = e^x(3 \cos 2x - 4 \operatorname{sen} 2x)$
$y'' - 2y' + 5y = 0$

En los ejercicios 79 a 86, encontrar los extremos y puntos de inflexión (si existen) de la función. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y confirmar los resultados.

79. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

80. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

81. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-2)^2/2}$

82. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/2}$

83. $f(x) = x^2 e^{-x}$

84. $f(x) = xe^{-x}$

85. $g(t) = 1 + (2 + t)e^{-t}$

86. $f(x) = -2 + e^{3x}(4 - 2x)$

87. ***Área*** Calcular el área del rectángulo más grande que puede ser inscrito bajo la curva $y = e^{-x^2}$ en el primer y segundo cuadrantes.

88. ***Área*** Efectuar los pasos siguientes para encontrar el área máxima del rectángulo mostrado en la figura.

a) Despejar c en la ecuación $f(c) = f(c + x)$.

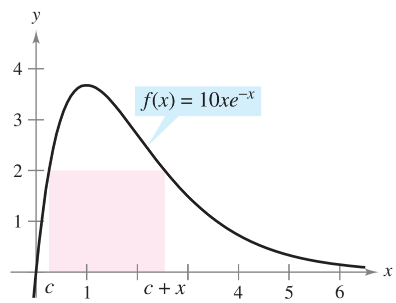
b) Usar el resultado del apartado *a)*, para expresar el área A como función de x. [*Sugerencia:* $A = xf(c)$.]

c) Usar una herramienta de graficación para representar la función área. Usar la gráfica para aproximar las dimensiones del rectángulo de área máxima. Determinar el área máxima.

d) Usar una herramienta de graficación para representar la expresión de c encontrada en *a)*. Usar la gráfica para aproximar.

$$\lim_{x \to 0^+} c \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} c.$$

Usar este resultado para describir los cambios en las dimensiones y posición del rectángulo para $0 < x < \infty$.



89. Encontrar un punto en la gráfica de la función $f(x) = e^{2x}$ tal que la recta tangente a la gráfica en este punto pase por el origen. Usar una herramienta de graficación para representar f y la recta tangente en la misma pantalla.

90. Localizar el punto en la gráfica de $y = e^{-x}$ donde la recta normal a la curva pasa por el origen. (Usar el método de Newton o cálculo de raíces en la herramienta de graficación.)

91. ***Depreciación*** El valor V de un objeto a t años de su adquisición es $V = 15\,000e^{-0.6286t}$, $0 \leq t \leq 10$.

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función.

b) Encontrar la razón de cambio de V respecto de t cuando $t = 1$ y $t = 5$.

c) Usar una herramienta de graficación para representar la recta tangente a la función cuando $t = 1$ y $t = 5$.

92. ***Movimiento armónico*** El desplazamiento desde el equilibrio de una masa que oscila en el extremo de un resorte suspendido del techo es $y = 1.56e^{-0.22t} \cos 4.9t$, donde y es el desplazamiento en pies y t el tiempo en segundos. Representar la función de desplazamiento en el intervalo $[0, 10]$ con la herramienta de graficación. Hallar el valor de t en el que el desplazamiento es menor que 3 pulgadas desde la posición de equilibrio.

93. ***Modelado matemático*** Un meteorólogo mide la presión atmosférica P (en kg por m^2) a la altitud h (en km). La tabla muestra los resultados.

h	0	5	10	15	20
P	10 332	5 583	2 376	1 240	517

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar los puntos $(h, \ln P)$, y usar la función de regresión de la misma para encontrar un modelo lineal para los puntos.

b) La recta en *a*) tiene la forma $\ln P = ah + b$. Escribir la ecuación en forma exponencial.

c) Usar una herramienta de graficación para representar los datos originales y representar el modelo exponencial de *b*).

d) Calcular la razón de cambio de la presión cuando $h = 5$ y $h = 18$.

94. ***Modelado matemático*** La tabla muestra los valores aproximados V de un sedán de tamaño mediano para los años 2003 a 2009. La variable t representa el tiempo en años, con $t = 3$ correspondiendo a 2003.

t	3	4	5	6
V	\$23 046	\$20 596	\$18 851	\$17 001

t	7	8	9
V	\$15 226	\$14 101	\$12 841

a) Usar la función de regresión de una herramienta de graficación para encontrar los modelos lineal y cuadrático para los datos. Representar el modelo.

b) ¿Qué representa la pendiente en el modelo lineal en *a*)?

c) Usar la función de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo exponencial de los datos.

d) Determinar la asíntota horizontal del modelo exponencial del apartado *c*). Interpretar su significado en el contexto del problema.

e) Hallar el ritmo de depreciación en el valor del vehículo cuando $t = 4$ y $t = 8$ usando el modelo exponencial.

Aproximaciones lineal y cuadrática **En los ejercicios 95 y 96, usar una herramienta de graficación para representar la función. Después, trazar la gráfica**

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) \qquad \text{y}$$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \tfrac{1}{2} f''(0)(x - 0)^2$$

en la misma pantalla. Comparar los valores de f, P_1 y P_2 y de sus primeras derivadas en $x = 0$.

95. $f(x) = e^x$ **96.** $f(x) = e^{x/2}$

Fórmula de Stirling **Para grandes valores de n,**

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdot \cdot (n - 1) \cdot n$$

puede aproximarse mediante la fórmula de Stirling, $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

En los ejercicios 97 y 98, encontrar el valor exacto de $n!$ y entonces aproximar $n!$, utilizando la fórmula de Stirling.

97. $n = 12$ **98.** $n = 15$

En los ejercicios 99 a 116, hallar la integral indefinida.

99. $\int e^{5x}(5)\,dx$ **100.** $\int e^{-x^4}(-4x^3)\,dx$

101. $\int e^{2x-1}\,dx$ **102.** $\int e^{1-3x}\,dx$

103. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$ **104.** $\int e^x(e^x + 1)^2\,dx$

105. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **106.** $\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx$

107. $\int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\,dx$ **108.** $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,dx$

109. $\int e^x\sqrt{1 - e^x}\,dx$ **110.** $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

111. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$ **112.** $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}\,dx$

113. $\int \frac{5 - e^x}{e^{2x}}\,dx$ **114.** $\int \frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^x}\,dx$

115. $\int e^{-x}\tan(e^{-x})\,dx$ **116.** $\int \ln(e^{2x-1})\,dx$

En los ejercicios 117 a 126, evaluar la integral definida. Usar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

117. $\int_0^1 e^{-2x}\,dx$ **118.** $\int_3^4 e^{3-x}\,dx$

119. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$ **120.** $\int_{-2}^0 x^2 e^{x^3/2}\,dx$

121. $\int_1^3 \frac{e^{3/x}}{x^2}\,dx$ **122.** $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{-(x^2/2)}\,dx$

123. $\int_0^3 \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,dx$ **124.** $\int_0^1 \frac{e^x}{5 - e^x}\,dx$

125. $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen}\pi x}\cos \pi x\,dx$ **126.** $\int_{\pi/3}^{\pi/2} e^{\sec 2x}\sec 2x \tan 2x\,dx$

Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 127 y 128, resolver la ecuación diferencial.**

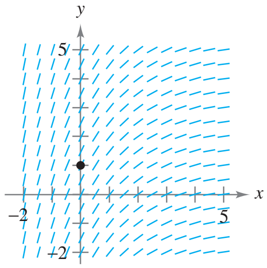
127. $\frac{dy}{dx} = xe^{ax^2}$ **128.** $\frac{dy}{dx} = (e^x - e^{-x})^2$

Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 129 y 130, encontrar la solución particular que satisface las condiciones iniciales.**

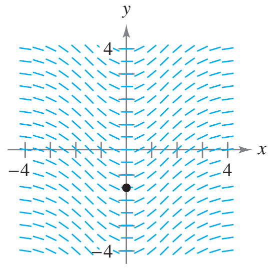
129. $f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $f(0) = 1, f'(0) = 0$ **130.** $f''(x) = \operatorname{sen} x + e^{2x}$, $f(0) = \frac{1}{4}, f'(0) = \frac{1}{2}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 131 y 132 se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Esbozar dos soluciones de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Por integración encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representarla. Comparar el resultado con los esbozos del apartado *a*).**

131. $\dfrac{dy}{dx} = 2e^{-x/2}, \quad (0, 1)$



132. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-0.2x^2}, \quad \left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$



Área **En los ejercicios 133 a 136, calcular el área de la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones. Usar una herramienta de graficación para representar la región y verificar los resultados.**

133. $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 5$

134. $y = e^{-x}, y = 0, x = a, x = b$

135. $y = xe^{-x^2/4}, y = 0, x = 0, x = \sqrt{6}$

136. $y = e^{-2x} + 2, y = 0, x = 0, x = 2$

Integración numérica **En los ejercicios 137 y 138, aproximar la integral usando la regla del punto medio, la de los trapecios y la regla de Simpson con $n = 12$. Usar una herramienta de graficación para verificar los resultados.**

137. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\, e^x \, dx$

138. $\displaystyle\int_0^2 2xe^{-x} \, dx$

139. ***Probabilidad*** Ciertas baterías para automóvil tienen una vida media de 48 meses con una desviación estándar de 6 meses. Las vidas de las baterías siguen una distribución normal. La probabilidad de que una batería dure entre 48 y 60 meses es $0.0665 \int_{48}^{60} e^{-0.0139(t-48)^2} \, dt$. Usar la función de integración de una herramienta de graficación para aproximar la integral. Interpretar los resultados.

140. ***Probabilidad*** El tiempo medio de espera (en minutos) en una tienda está dado por la solución de la ecuación $\int_0^x 0.3e^{-0.3t} \, dt = \frac{1}{2}$. Resolver la ecuación.

141. ***Movimiento horizontal*** La función posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x es $x(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt}$ donde A, B y k son constantes positivas.

a) ¿Durante qué tiempo t la partícula está más cercana al origen?

b) Mostrar que la aceleración de la partícula es proporcional a la posición de la partícula. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

142. ***Modelado matemático*** Una válvula de un depósito se abre durante 4 horas para dejar salir un producto químico en un proceso de manufactura. El ritmo o velocidad de flujo de salida R (en litros por hora) en el instante t (en horas) está dado en la siguiente tabla.

t	0	1	2	3	4
R	425	240	118	71	36

Tabla para 142

a) Usar la función de regresión en la herramienta de graficación para calcular un modelo lineal para los puntos $(t, \ln R)$. Escribir la ecuación resultante de la forma $\ln R = at + b$, de manera exponencial.

b) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo exponencial.

c) Usar la integral definida para aproximar el número de litros del producto químico que han salido durante esas cuatro horas.

Desarrollo de conceptos

143. Con sus propias palabras, enunciar las propiedades de la función exponencial natural.

144. ¿Existe una función f tal que $f(x) = f'(x)$? Si es así, ¿cuál es?

145. Sin integrar, enunciar la fórmula que podría utilizarse para efectuar las integrales siguientes.

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$ *b*) $\displaystyle\int xe^{x^2} \, dx$

146. Considerar la función $f(x) = \dfrac{2}{1 + e^{1/x}}$.

a) Usar una herramienta de graficación para graficar f.

b) Escribir un párrafo corto explicando por qué la gráfica tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ y por qué la función tiene una discontinuidad no desmontable en $x = 0$.

147. Al ser $e^x \geq 1$ para $x \geq 0$, se tiene que $\displaystyle\int_0^x e^t \, dt \geq \int_0^x 1 \, dt$. Efectuar esta integración para deducir la desigualdad $e^x \geq 1 + x$ para $x \geq 0$.

Para discusión

148. Describir la relación entre las gráficas de $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^x$.

149. Encontrar, con tres decimales, el valor de x tal que $e^{-x} = x$. (Usar el método de Newton.)

150. Encontrar el valor de a del área comprendida entre $y = e^{-x}$, el eje x, $x = -a$ y $x = a$ es $\frac{8}{3}$.

151. Verificar que la función

$$y = \frac{L}{1 + ae^{-x/b}}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad L > 0$$

se incrementa a una razón máxima cuando $y = L/2$.

152. Sea $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

a) Representar gráficamente f en $(0, \infty)$ y probar que f es estrictamente decreciente en (e, ∞).

b) Demostrar que si $e \leq A < B$, entonces $A^B > B^A$.

c) Usar el apartado *b*) para demostrar que $e^\pi > \pi^e$.

5.5 Otras bases distintas de *e* y aplicaciones

- **Definir funciones exponenciales con bases distintas de *e*.**
- **Derivar e integrar funciones exponenciales con bases distintas de *e*.**
- **Usar las funciones exponenciales como modelos para el interés compuesto y el crecimiento exponencial.**

Otras bases de e

La **base** de la función exponencial natural es e. Esta base "natural" se puede utilizar para dar el significado de cualquier base general a.

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL BASE *a*

Si a es un número real positivo $(a \neq 1)$ y x es cualquier número real, entonces la **función exponencial base *a*** se denota por a^x y se define como

$$a^x = e^{(\ln a)x}.$$

Si $a = 1$, entonces $y = 1^x = 1$ es una función constante.

Estas funciones obedecen las leyes usuales de los exponentes. Éstas son algunas propiedades familiares.

1. $a^0 = 1$ **2.** $a^x a^y = a^{x+y}$

3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ **4.** $(a^x)^y = a^{xy}$

Cuando se desea plantear un modelo exponencial para la semivida o vida media de un elemento radiactivo, por ejemplo, es conveniente usar $\frac{1}{2}$ como base del modelo. (La *vida media* es el número de años requerido para que la mitad de los átomos en una muestra de material radiactivo decaigan.)

EJEMPLO 1 Modelo de la semivida (o vida media) de un elemento radiactivo

La semivida o vida media del carbono-14 es aproximadamente 5 715 años. Si se tiene una muestra de 1 g de carbono-14, ¿qué cantidad existirá dentro de 10 000 años?

Solución Sean $t = 0$ el momento actual y y la cantidad de carbono-14 (en gramos) en la muestra. Al usar como base $\frac{1}{2}$, se puede plantear el modelo y dado mediante la ecuación

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5\,715}.$$

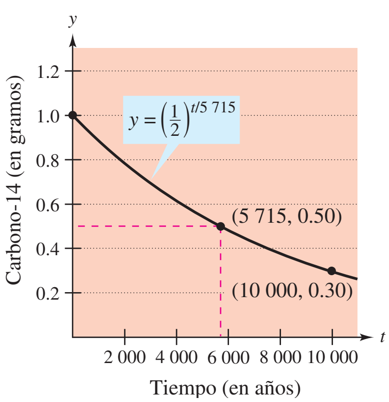
Notar que cuando $t = 5\,715$, la cantidad se ha reducido a la mitad de la original.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{5\,715/5\,715} = \frac{1}{2} \text{ gramo}$$

Cuando $t = 11\,430$, se ha reducido a un cuarto de la cantidad inicial y así sucesivamente. Para hallar la cantidad de carbono-14 que queda después de 10 000 años, sustituir $t = 10\,000$.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{10\,000/5\,715} \approx 0.30 \text{ gramo}$$

La gráfica de y se muestra en la figura 5.25.



La vida media del carbono-14 es de aproximadamente 5 715 años
Figura 5.25

Las funciones logarítmicas con base diferente de e se definen de manera muy similar a las funciones exponenciales con otras bases.

NOTA En los cursos previos de cálculo, se ha aprendido que $\log_a x$ es el valor al que hay que elevar a para obtener x. Esto concuerda con la definición dada ya que

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= a^{(1/\ln a)\ln x} \\ &= (e^{\ln a})^{(1/\ln a)\ln x} \\ &= e^{(\ln a/\ln a)\ln x} \\ &= e^{\ln x} \\ &= x. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE BASE *a*

Si a es un número real positivo $(a \neq 1)$ y x es cualquier número real positivo, entonces la **función logarítmica base *a*** se denota $\log_a x$ y se define como

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x.$$

Las funciones logarítmicas base a tienen las mismas propiedades que la función logaritmo natural, dadas en el teorema 5.2. (Suponer que x y y son números positivos y n es un racional.)

1. $\log_a 1 = 0$ — Logaritmo de 1.
2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ — Logaritmo de un producto.
3. $\log_a x^n = n \log_a x$ — Logaritmo de una potencia.
4. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ — Logaritmo de un cociente.

De las definiciones de funciones exponenciales y logarítmicas base a, se sigue que $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$ son funciones inversas una de otra.

PROPIEDADES DE FUNCIONES INVERSAS

1. $y = a^x$ si y sólo si $x = \log_a y$
2. $a^{\log_a x} = x$, para $x > 0$
3. $\log_a a^x = x$, para todo x

La función logaritmo base 10 se llama **función logarítmica común o decimal**. Así, $y = 10^x$ si y sólo si $x = \log_{10} y$.

EJEMPLO 2 Otras bases distintas de e

Despejar x en las siguientes ecuaciones.

a) $3^x = \dfrac{1}{81}$ ***b)*** $\log_2 x = -4$

Solución

a) Resolver la ecuación aplicando la función logaritmo base 3 en ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} 3^x &= \frac{1}{81} \\ \log_3 3^x &= \log_3 \frac{1}{81} \\ x &= \log_3 3^{-4} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

b) Resolver la ecuación aplicando la función exponencial base 2 en ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} \log_2 x &= -4 \\ 2^{\log_2 x} &= 2^{-4} \\ x &= \frac{1}{2^4} \\ x &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Derivación e integración

Para derivar funciones exponenciales y logarítmicas de base arbitraria, existen tres opciones: 1) usar las definiciones de a^x y $\log_a x$ y obtener la derivada mediante las reglas válidas para las funciones exponencial natural y logarítmica, 2) usar derivación logarítmica o 3) usar las siguientes reglas de derivación para bases diferentes de e.

TEOREMA 5.13 DERIVADAS PARA OTRAS BASES DE *e*

Sean a un número real positivo ($a \neq 1$) y u una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[a^x] = (\ln a)a^x$

2. $\dfrac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u \dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}[\log_a x] = \dfrac{1}{(\ln a)x}$

4. $\dfrac{d}{dx}[\log_a u] = \dfrac{1}{(\ln a)u} \dfrac{du}{dx}$

DEMOSTRACIÓN Por definición, $a^x = e^{(\ln a)x}$. Por tanto, se puede demostrar la primera regla si $u = (\ln a)\,x$, y al derivar con base e se obtiene

$$\frac{d}{dx}[a^x] = \frac{d}{dx}[e^{(\ln a)x}] = e^u \frac{du}{dx} = e^{(\ln a)x}(\ln a) = (\ln a)a^x.$$

Para demostrar la tercera regla, se puede escribir

$$\frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\ln a}\ln x\right] = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{(\ln a)x}.$$

La segunda y la cuarta fórmulas simplemente son versiones de la regla de la cadena de la primera y la tercera reglas.

NOTA Estas reglas de derivación son análogas a las de la función exponencial natural y logaritmo natural. De hecho, sólo difieren en los factores constantes $\ln a$ y $1/\ln a$. He aquí una de las razones que hacen de e la base más conveniente para el cálculo.

EJEMPLO 3 Derivación de funciones de base distinta

Encontrar la derivada de cada una de estas funciones.

a) $y = 2^x$

b) $y = 2^{3x}$

c) $y = \log_{10} \cos x$

Solución

a) $y' = \dfrac{d}{dx}[2^x] = (\ln 2)2^x$

b) $y' = \dfrac{d}{dx}[2^{3x}] = (\ln 2)2^{3x}(3) = (3 \ln 2)2^{3x}$

Escribir 2^{3x} como 8^x y derivar para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

c) $y' = \dfrac{d}{dx}[\log_{10} \cos x] = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{(\ln 10)\cos x} = -\dfrac{1}{\ln 10} \tan x$

En ocasiones, un integrando contiene una función exponencial en una base distinta de e. En tal caso, hay dos opciones: 1) pasar a base e usando la fórmula $a^x = e^{(\ln a)x}$ y entonces integrar, o 2) integrar directamente, usando la fórmula de integración

$$\int a^x\,dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^x + C$$

(que se deduce del teorema 5.13).

EJEMPLO 4 Integración de una función exponencial en una base distinta

Hallar $\int 2^x\,dx$.

Solución

$$\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}2^x + C$$

Cuando fue introducida la regla de la potencia $D_x[x^n] = nx^{n-1}$ en el capítulo 2, se exigió que n fuese racional. Ahora la regla se extiende a cualquier valor real de n. Intentar probar este teorema usando derivación logarítmica.

TEOREMA 5.14 REGLA DE LA POTENCIA PARA EXPONENTES REALES

Sea n cualquier número real y sea u una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$

2. $\dfrac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

El siguiente ejemplo compara las derivadas de cuatro tipos de funciones. Cada función requiere una fórmula de derivación diferente para la obtención de la derivada, dependiendo de si la base y el exponente son constantes o variables.

EJEMPLO 5 Comparación de variables y constantes

a) $\dfrac{d}{dx}[e^e] = 0$ Regla de la constante.

b) $\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$ Regla exponencial.

c) $\dfrac{d}{dx}[x^e] = ex^{e-1}$ Regla de la potencia.

d) $y = x^x$ Derivación logarítmica.

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$$

$$y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

NOTA Asegurarse de ver que no existe una regla sencilla de derivación para $y = x^x$. En general, si $y = u(x)^{v(x)}$, se necesita recurrir a la derivación logarítmica.

Aplicaciones de las funciones exponenciales

n	A
1	\$1 080.00
2	\$1 081.60
4	\$1 082.43
12	\$1 083.00
365	\$1 083.28

Si se depositan P dólares en una cuenta a una tasa anual de interés r (en forma decimal) y los intereses se acumulan en la cuenta, ¿cuál es el balance en la cuenta al cabo de 1 año? La respuesta depende del número n de veces que el interés se compone de acuerdo con la fórmula

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

Por ejemplo, el resultado para un depósito de \$1 000 a 8% de interés compuesto n veces al año se muestra en la tabla de la izquierda.

Al crecer n, el balance A tiende a un límite. Para hallarlo, utilizar el siguiente teorema. Para comprobar las razones de su contenido, calcular $[(x + 1)/x]^x$ para varios valores de x, como se puede ver en la tabla inferior izquierda. (Una demostración del teorema se puede consultar en el apéndice A.)

x	$\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$
10	2.59374
100	2.70481
1 000	2.71692
10 000	2.71815
100 000	2.71827
1 000 000	2.71828

TEOREMA 5.15 UN LÍMITE QUE INVOLUCRA AL NÚMERO *e*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e$$

Ahora, regresar a la fórmula del balance A en una cuenta con interés compuesto n veces por año. Al tomar el límite cuando n tiende a infinito, se obtiene

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n && \text{Tomar el límite cuando } n \to \infty.\\
&= P \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r}\right]^r && \text{Reescribir.}\\
&= P\left[\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^r && \text{Hacer } x = n/r. \text{ Entonces } x \to \infty \text{ cuando } n \to \infty.\\
&= Pe^r. && \text{Aplicar el teorema 5.15.}
\end{aligned}$$

Este límite produce el balance después de 1 año de interés **compuesto continuo**. Así, para un depósito inicial de \$1 000 a 8% de interés compuesto continuo, el balance al fin de año sería

$$\begin{aligned}
A &= 1\,000e^{0.08}\\
&\approx \$1\,083.29
\end{aligned}$$

Estos resultados se resumen a continuación.

Resumen de las fórmulas de interés compuesto

Sea P = cantidad a depositar, t = número de años, A = balance después de t años, r = tasa de interés anual (forma decimal) y n = número de veces que se compone por año.

1. Compuesto n veces por año: $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
2. Compuesto continuamente: $A = Pe^{rt}$

EJEMPLO 6 Comparación de interés compuesto continuo, mensual y trimestral

Se hace un depósito de \$2 500 en una cuenta que paga un interés anual de 5%. Calcular el balance en la cuenta al final de 5 años si el interés se compone *a*) trimestralmente, *b*) mensualmente y *c*) continuamente.

Solución

a) $$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 2\,500\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^{4(5)}$$ Compuesto trimestralmente.

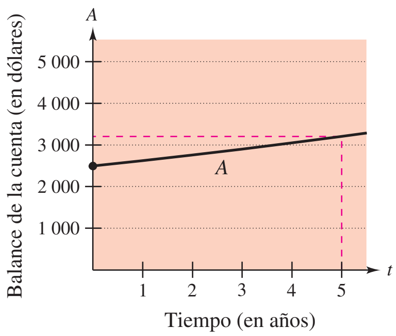
$$= 2\,500(1.0125)^{20}$$
$$\approx \$3\,205.09$$

b) $$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 2\,500\left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12(5)}$$ Compuesto mensualmente.

$$\approx 2\,500(1.0041667)^{60}$$
$$\approx \$3\,208.40$$

c) $$A = Pe^{rt} = 2\,500[e^{0.05(5)}]$$ Compuesto continuamente.

$$= 2\,500e^{0.25} \approx \$3\,210.06$$



El balance en una cuenta de ahorros crece exponencialmente
Figura 5.26

La figura 5.26 muestra cómo se incrementa el balance durante el periodo de 5 años. Notar que se debe hacer constar que la escala de la figura no distingue gráficamente entre los tres tipos de crecimiento exponencial en *a*), *b*) y *c*).

EJEMPLO 7 Crecimiento de un cultivo de bacterias

Un cultivo de bacterias crece según la *función logística de crecimiento*

$$y = \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4t}}, \quad t \geq 0$$

donde y es el peso del cultivo en gramos y t es el tiempo en horas. Calcular el peso del cultivo después de *a*) 0 horas, *b*) 1 hora y *c*) 10 horas. *d*) ¿Cuál es el límite cuando t tiende a infinito?

Solución

a) Cuando $t = 0$, $$y = \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4(0)}}$$
$$= 1 \text{ gramo.}$$

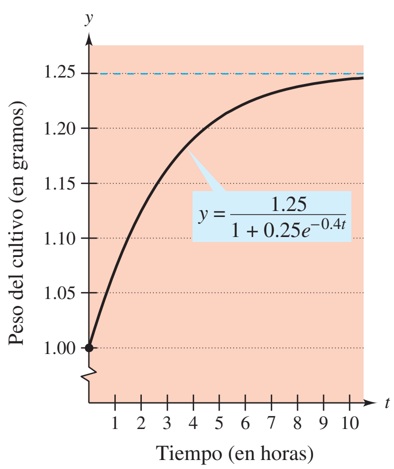
b) Cuando $t = 1$, $$y = \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4(1)}}$$
$$\approx 1.071 \text{ gramos.}$$

c) Cuando $t = 10$, $$y = \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4(10)}}$$
$$\approx 1.244 \text{ gramos.}$$

d) Por último, al tomar el límite para t tendiendo a infinito, se obtiene

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4t}} = \frac{1.25}{1 + 0} = 1.25 \text{ gramos.}$$

La figura 5.27 muestra la gráfica de la función.



El límite de peso del cultivo cuando $t \to \infty$ es 1.25 gramos
Figura 5.27

5.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, evaluar la expresión sin usar calculadora.

1. $\log_2 \frac{1}{8}$
2. $\log_{27} 9$
3. $\log_7 1$
4. $\log_a \dfrac{1}{a}$

En los ejercicios 5 a 8, escribir la ecuación exponencial en forma logarítmica o viceversa.

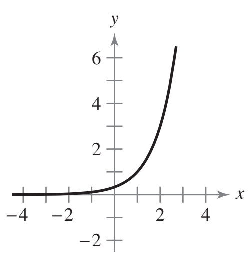
5. *a*) $2^3 = 8$ *b*) $3^{-1} = \frac{1}{3}$
6. *a*) $27^{2/3} = 9$ *b*) $16^{3/4} = 8$
7. *a*) $\log_{10} 0.01 = -2$ *b*) $\log_{0.5} 8 = -3$
8. *a*) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ *b*) $49^{1/2} = 7$

En los ejercicios 9 a 14, dibujar a mano la gráfica de la función.

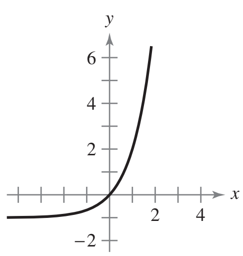
9. $y = 3^x$
10. $y = 3^{x-1}$
11. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
12. $y = 2^{x^2}$
13. $h(x) = 5^{x-2}$
14. $y = 3^{-|x|}$

En los ejercicios 15 a 18, encontrar la función de la gráfica. [Las gráficas son marcadas como *a*), *b*), *c*) y *d*).]

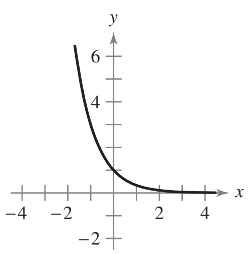
a)



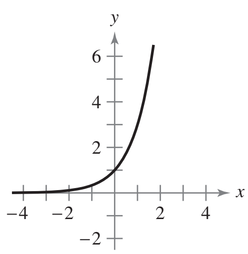
b)



c)



d)



15. $f(x) = 3^x$
16. $f(x) = 3^{-x}$
17. $f(x) = 3^x - 1$
18. $f(x) = 3^{x-1}$

En los ejercicios 19 a 24, despejar *x* o *b*.

19. *a*) $\log_{10} 1\,000 = x$ *b*) $\log_{10} 0.1 = x$
20. *a*) $\log_3 \frac{1}{81} = x$ *b*) $\log_6 36 = x$
21. *a*) $\log_3 x = -1$ *b*) $\log_2 x = -4$
22. *a*) $\log_b 27 = 3$ *b*) $\log_b 125 = 3$
23. *a*) $x^2 - x = \log_5 25$ *b*) $3x + 5 = \log_2 64$
24. *a*) $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 1$ *b*) $\log_{10}(x + 3) - \log_{10} x = 1$

En los ejercicios 25 a 34, resolver la ecuación y aproximarla a tres decimales.

25. $3^{2x} = 75$
26. $5^{6x} = 8\,320$
27. $2^{3-z} = 625$
28. $3(5^{x-1}) = 86$
29. $\left(1 + \dfrac{0.09}{12}\right)^{12t} = 3$
30. $\left(1 + \dfrac{0.10}{365}\right)^{365t} = 2$
31. $\log_2(x - 1) = 5$
32. $\log_{10}(t - 3) = 2.6$
33. $\log_3 x^2 = 4.5$
34. $\log_5 \sqrt{x - 4} = 3.2$

En los ejercicios 35 a 38, usar una herramienta de graficación para representar la función y aproximar su(s) cero(s) hasta tres decimales.

35. $g(x) = 6(2^{1-x}) - 25$
36. $f(t) = 300(1.0075^{12t}) - 735.41$
37. $h(s) = 32 \log_{10}(s - 2) + 15$
38. $g(x) = 1 - 2 \log_{10}[x(x - 3)]$

En los ejercicios 39 y 40 ilustrar cuáles de las funciones son inversas una de otra al dibujar sus gráficas en unos mismos ejes de coordenadas.

39. $f(x) = 4^x$, $g(x) = \log_4 x$
40. $f(x) = 3^x$, $g(x) = \log_3 x$

En los ejercicios 41 a 62, encontrar las derivadas de la función. (*Sugerencia*: En algunos ejercicios, puede ser de ayuda aplicar las propiedades de los logaritmos *antes* de derivar.)

41. $f(x) = 4^x$
42. $f(x) = 3^{2x}$
43. $y = 5^{-4x}$
44. $y = 7^{2x-1}$
45. $f(x) = x\,9^x$
46. $y = x(6^{-2x})$
47. $g(t) = t^2 2^t$
48. $f(t) = \dfrac{3^{2t}}{t}$
49. $h(\theta) = 2^{-\theta} \cos \pi\theta$
50. $g(\alpha) = 5^{-\alpha/2} \operatorname{sen} 2\alpha$
51. $y = \log_4(5x + 1)$
52. $y = \log_3(x^2 - 3x)$
53. $h(t) = \log_5(4 - t)^2$
54. $g(t) = \log_2(t^2 + 7)^3$
55. $y = \log_5 \sqrt{x^2 - 1}$
56. $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{2x + 1}$
57. $f(x) = \log_2 \dfrac{x^2}{x - 1}$
58. $y = \log_{10} \dfrac{x^2 - 1}{x}$
59. $h(x) = \log_3 \dfrac{x\sqrt{x - 1}}{2}$
60. $g(x) = \log_5 \dfrac{4}{x^2\sqrt{1 - x}}$
61. $g(t) = \dfrac{10 \log_4 t}{t}$
62. $f(t) = t^{3/2} \log_2 \sqrt{t + 1}$

En los ejercicios 63 a 66, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en los puntos dados.

63. $y = 2^{-x}$, $(-1, 2)$
64. $y = 5^{x-2}$, $(2, 1)$
65. $y = \log_3 x$, $(27, 3)$
66. $y = \log_{10} 2x$, $(5, 1)$

En los ejercicios 67 a 70, usar derivación logarítmica para hallar dy/dx.

67. $y = x^{2/x}$

68. $y = x^{x-1}$

69. $y = (x - 2)^{x+1}$

70. $y = (1 + x)^{1/x}$

En los ejercicios 71 a 74, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en los puntos siguientes.

71. $y = x^{\operatorname{sen} x}, \quad \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

72. $y = (\operatorname{sen} x)^{2x}, \quad \left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

73. $y = (\ln x)^{\cos x}, \quad (e, 1)$

74. $y = x^{1/x}, \quad (1, 1)$

En los ejercicios 75 a 82, hallar la integral.

75. $\displaystyle\int 3^x\, dx$

76. $\displaystyle\int 5^{-x}\, dx$

77. $\displaystyle\int (x^2 + 2^{-x})\, dx$

78. $\displaystyle\int (x^3 + 3^{-x})\, dx$

79. $\displaystyle\int x(5^{-x^2})\, dx$

80. $\displaystyle\int (3 - x)7^{(3-x)^2}\, dx$

81. $\displaystyle\int \frac{3^{2x}}{1 + 3^{2x}}\, dx$

82. $\displaystyle\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx$

En los ejercicios 83 a 86, evaluar la integral.

83. $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2^x\, dx$

84. $\displaystyle\int_{-2}^{2} 4^{x/2}\, dx$

85. $\displaystyle\int_{0}^{1} (5^x - 3^x)\, dx$

86. $\displaystyle\int_{1}^{e} (6^x - 2^x)\, dx$

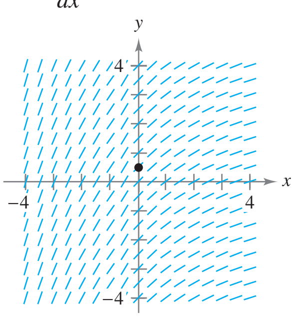
Área **En los ejercicios 87 y 88, calcular el área de la región delimitada por las gráficas de la ecuación.**

87. $y = 3^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

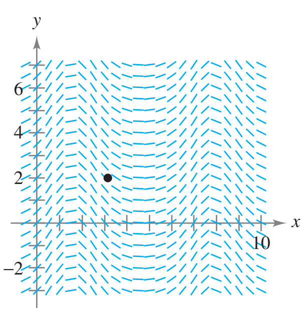
88. $y = 3^{\cos x} \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi$

Campos de pendientes **En los ejercicios 89 y 90, se proporcionan una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Esbozar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y con una herramienta de graficación representar la solución. Comparar el resultado con los esbozos del apartado *a*).**

89. $\dfrac{dy}{dx} = 0.4^{x/3}, \quad \left(0, \tfrac{1}{2}\right)$



90. $\dfrac{dy}{dx} = e^{\operatorname{sen} x} \cos x, \quad (\pi, 2)$



Desarrollo de conceptos

91. Considerar la función $f(x) = \log_{10} x$.

a) ¿Cuál es el dominio de f?

b) Encontrar f^{-1}.

c) Si x es un número real entre 1 000 y 10 000, determinar el intervalo en el cual $f(x)$ puede ser encontrado.

d) Determinar el intervalo en el cual se encuentra x si $f(x)$ es negativo.

e) Si $f(x)$ aumenta en una unidad, ¿por qué factor hay que multiplicar x?

f) Hallar el cociente entre x_1 a x_2 sabiendo que $f(x_1) = 3n$ y $f(x_2) = n$.

92. Ordenar las funciones

$$f(x) = \log_2 x,\ \ g(x) = x^x,\ \ h(x) = x^2 \quad \text{y} \quad k(x) = 2^x$$

desde la que tiene mayor ritmo de crecimiento hasta la que tiene el menor, para valores grandes de x.

93. Calcular la derivada de cada función, para a constante.

a) $y = x^a$ *b*) $y = a^x$

c) $y = x^x$ *d*) $y = a^a$

Para discusión

94. La tabla de valores se obtuvo para evaluación de una función. Determinar cuáles de los enunciados pueden ser ciertos o falsos y explicar la razón.

x	1	2	8
y	0	1	3

a) y es una función exponencial de x.

b) y es una función logarítmica de x.

c) x es una función exponencial de y.

d) y es una función lineal de x.

95. ***Inflación*** Si el ritmo o tasa de inflación anual es, en promedio, de 5% para los próximos 10 años, el costo aproximado C de bienes o servicios durante una década es

$$C(t) = P(1.05)^t$$

donde t es el tiempo en años y P es el costo actual.

a) Si el cambio de aceite del automóvil cuesta hoy \$24.95, estimar el precio dentro de 10 años.

b) Calcular el ritmo o velocidad de cambio de C respecto a t para $t = 1$ y $t = 8$.

c) Verificar que el ritmo de cambio de C es proporcional a C. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

96. ***Depreciación*** Después de t años, el valor de un automóvil adquirido por \$25 000 es

$$V(t) = 25\,000\left(\tfrac{3}{4}\right)^t.$$

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función y determinar el valor del automóvil 2 años después de su compra.
b) Calcular la razón de cambio de V respecto a t para $t = 1$ y $t = 4$.
c) Usar una herramienta de graficación para representar $V'(t)$ y determinar la asíntota horizontal. Interpretar su significado en el contexto del problema.

Interés compuesto **En los ejercicios 97 a 100, completar la tabla al determinar el balance A para P dólares invertidos a una tasa de interés r, durante t años, n veces al año.**

n	1	2	4	12	365	Intereses continuos
A						

97. $P = \$1\,000$
$r = 3\frac{1}{2}\%$
$t = 10$ años

98. $P = \$2\,500$
$r = 6\%$
$t = 20$ años

99. $P = \$1\,000$
$r = 5\%$
$t = 30$ años

100. $P = \$5\,000$
$r = 7\%$
$t = 25$ años

Interés compuesto **En los ejercicios 101 a 104, completar la tabla al determinar la cantidad de dinero P (valor presente) que debe ser depositada a una tasa r de interés anual para producir un balance de \$100 000 en t años.**

t	1	10	20	30	40	50
P						

101. $r = 5\%$
Interés compuesto continuo

102. $r = 6\%$
Interés compuesto continuo

103. $r = 5\%$
Interés compuesto mensual

104. $r = 7\%$
Interés compuesto diario

105. ***Interés compuesto*** Se tiene una inversión de una renta de 6% compuesto diariamente. ¿Cuál de las siguientes opciones produciría un balance mayor después de 8 años?

a) \$20 000 ahora
b) \$30 000 después de 8 años
c) \$8 000 ahora y \$20 000 después de 4 años
d) \$9 000 ahora, \$9 000 después de 4 años y \$9 000 después de 8 años.

106. ***Interés compuesto*** Considerar un depósito de \$100 a r% de interés compuesto continuo durante 20 años. Usar una herramienta de graficación para representar las funciones exponenciales que describen el crecimiento del capital en los siguientes veinte años para cada una de las tasas de interés que se especifican. Comparar los balances finales de cada una de las tasas.

a) $r = 3\%$
b) $r = 5\%$
c) $r = 6\%$

107. ***Producción de madera*** El rendimiento V (en millones de pies cúbicos por acre) de un bosque de t años de edad es

$$V = 6.7e^{(-48.1)/t}$$

donde t es medido en años.

a) Calcular el volumen límite de madera por acre cuando t tiende a infinito.
b) Encontrar el ritmo o velocidad de cambio de V cuando $t = 20$ años y cuando $t = 60$ años.

108. ***Teoría del aprendizaje*** Un modelo matemático para la proporción P de respuestas correctas tras n ensayos, en un experimento sobre aprendizaje, resultó seguir el modelo

$$P = \frac{0.86}{1 + e^{-0.25n}}.$$

a) Calcular la proporción límite de respuestas correctas cuando n tiende a infinito.
b) Calcular el ritmo de cambio P después de $n = 3$ pruebas y de $n = 10$ pruebas.

109. ***Defoliación forestal*** Para estimar la defoliación producida por las lagartas durante un año, un ingeniero forestal cuenta el número de montones de huevos en $\frac{1}{40}$ de acre en el otoño anterior. El porcentaje de defoliación y está dado aproximadamente por

$$y = \frac{300}{3 + 17e^{-0.0625x}}$$

donde x es el número de montones en miles. (*Fuente: USDA Forest Service*.)

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función.
b) Estimar el porcentaje de defoliación si se cuentan 2 000 montones de huevos.
c) Estimar el número de montones de huevos que existen si se observa que aproximadamente $\frac{2}{3}$ del bosque se han defoliado.
d) Mediante el cálculo, estimar el valor de x para el que y crece más rápidamente.

110. ***Crecimiento poblacional*** Un lago se repuebla con 500 peces, y su población crece de acuerdo con la curva logística

$$p(t) = \frac{10\,000}{1 + 19e^{-t/5}}$$

donde t se mide en meses.

a) Usar la función de regresión de una herramienta de graficación para representar la función.
b) ¿Cuál es el tamaño límite de la población de peces?
c) ¿A qué ritmo o velocidad crece la población de peces al final de 1 mes y al final del décimo mes?
d) ¿Después de cuántos meses crece más de prisa la población?

111. ***Modelado matemático*** La tabla muestra la resistencia B (en toneladas) a la ruptura de un cable de acero de varios diámetros d (en pulgadas).

d	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
B	9.85	21.8	38.3	59.2	84.4	114.0

a) Usar la función de regresión de la herramienta de graficación para ajustar un modelo exponencial a los datos.
b) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.
c) Calcular el retorno o la tasa de crecimiento del modelo cuando $d = 0.8$ y $d = 1.5$.

112. ***Comparación de modelos*** Los números y (en miles) de trasplantes de órganos en Estados Unidos de 2001 a 2006 se muestran en la tabla, con $x = 1$ correspondiendo a 2001. (*Fuente: Organ Procurement and Transplantation Network*)

x	1	2	3	4	5	6
y	24.2	24.9	25.5	27.0	28.1	28.9

a) Usar la habilidad de regresión de una herramienta de graficación para encontrar los siguientes modelos para los datos.

$y_1 = ax + b$ $\qquad y_2 = a + b \ln x$

$y_3 = ab^x$ $\qquad y_4 = ax^b$

b) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y graficar cada uno de los modelos. ¿Qué modelo se ajusta mejor a los datos?
c) Interpretar la pendiente del modelo lineal en el contexto del problema.
d) Encontrar la razón de cambio de cada uno de los modelos para el año 2004. ¿Qué modelo se incrementa a la más grande razón en 2004?

113. ***Conjetura***

a) Usar una herramienta de graficación que aproxime las integrales de las funciones

$$f(t) = 4\left(\frac{3}{8}\right)^{2t/3}, \; g(t) = 4\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{4}\right)^{t} \text{ y } h(t) = 4e^{-0.653886t}$$

en el intervalo [0, 4].
b) Usar una herramienta de graficación para representar las tres funciones.
c) Usar los resultados de los apartados *a*) y *b*) para formular una conjetura acerca de las tres funciones. ¿Podría haber realizado una conjetura usando sólo el apartado *a*)? Explicar. Demostrar la conjetura analíticamente.

114. Completar la tabla para demostrar que e puede definirse también como $\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x}$.

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
$(1 + x)^{1/x}$					

En los ejercicios 115 y 116, encontrar una función exponencial que se ajuste a los datos experimentales tomados en los tiempos t indicados.

115.

t	0	1	2	3	4
y	1 200.00	720.00	432.00	259.20	155.52

116.

t	0	1	2	3	4
y	600.00	630.00	661.50	694.58	729.30

En los ejercicios 117 a 120, encontrar el valor exacto de la expresión.

117. $5^{1/\ln 5}$ **118.** $6^{\ln 10/\ln 6}$

119. $9^{1/\ln 3}$ **120.** $32^{1/\ln 2}$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 121 a 126, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.**

121. $e = \dfrac{271\,801}{99\,900}$

122. Si $f(x) = \ln x$, entonces $f(e^{n+1}) - f(e^n) = 1$ para cualquier valor de n.

123. Las funciones $f(x) = 2 + e^x$ y $g(x) = \ln(x - 2)$ son inversas una de otra.

124. La función exponencial $y = Ce^x$ es la solución de la ecuación diferencial $d^n y/dx^n = y$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

125. Las gráficas $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en ángulo recto.

126. Si $f(x) = g(x)\,e^x$, los únicos ceros de f son los ceros de g.

127. *a*) Mostrar que $(2^3)^2 \neq 2^{(3^2)}$.
b) ¿Son $f(x) = (x^x)^x$ y $g(x) = x^{(x^x)}$ la misma función? ¿Por qué sí o por qué no?
c) Encontrar $f'(x)$ y $g'(x)$.

128. Sea $f(x) = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$ para $a > 0$, $a \neq 1$. Mostrar que f tiene una función inversa. Entonces encontrar f^{-1}.

129. Demostrar que al resolver la ecuación diferencial logística

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8}{25}y\left(\frac{5}{4} - y\right), \quad y(0) = 1$$

se obtiene la función de crecimiento logístico del ejemplo 7.

$$\left[\textit{Sugerencia: } \frac{1}{y\left(\frac{5}{4} - y\right)} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{\frac{5}{4} - y}\right)\right]$$

130. Dada la función exponencial $f(x) = a^x$, demostrar que

a) $f(u + v) = f(u) \cdot f(v)$

b) $f(2x) = [f(x)]^2$.

131. *a*) Determinar y' dado $y^x = x^y$.

b) Encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y^x = x^y$ en cada uno de los siguientes puntos.

i) (c, c)

ii) $(2, 4)$

iii) $(4, 2)$

c) En cuáles puntos de la gráfica de $y^x = x^y$ no existe la recta tangente?

132. Considerar la función $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = b^x$, $b > 1$.

a) Sea $b = 2$, usar la herramienta de graficación para representar f y g en la misma pantalla. Identificar los puntos de intersección.

b) Repetir el apartado *a*) usando $b = 3$.

c) Calcular todos los valores de b tales que $g(x) \geq f(x)$ para todo x.

Preparación del examen Putnam

133. ¿Cuál es mayor

$$\left(\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n+1}} \qquad \text{o} \qquad \left(\sqrt{n+1}\right)^{\sqrt{n}}$$

donde $n > 8$?

134. Demostrar que si x es positivo, entonces

$$\log_e\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1 + x}.$$

PROYECTO DE TRABAJO

Estimación gráfica de pendientes

Sea $f(x) = \begin{cases} |x|^x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

a) Usar una herramienta de graficación para representar f en la ventana $-3 \leq x \leq 3$, $-2 \leq y \leq 2$. ¿Cuál es el dominio de f?

b) Usar las funciones *trace* y *zoom* de la herramienta de graficación para estimar

$$\lim_{x \to 0} f(x).$$

c) Explicar brevemente por qué la función f es continua en todos los números reales.

d) Estimar a simple vista la pendiente de f en el punto $(0, 1)$.

e) Explicar por qué la derivada de una función se puede aproximar mediante la fórmula.

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

para valores pequeños de Δx. Usar esta fórmula para aproximar la pendiente de f en el punto $(0, 1)$.

$$f'(0) \approx \frac{f(0 + \Delta x) - f(0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - f(-\Delta x)}{2\Delta x}$$

¿Cuál es la pendiente de f en $(0, 1)$?

f) Hallar una fórmula para la derivada de f y determinar $f'(0)$. Explicar por escrito por qué una herramienta de graficación puede proporcionar un valor incorrecto de la pendiente de una gráfica.

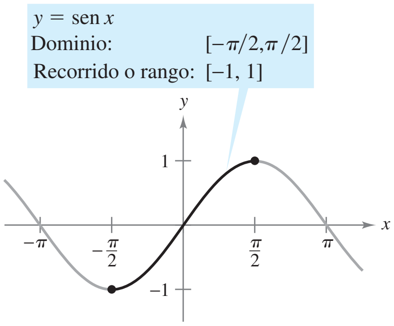
g) Usar esa fórmula para la derivada de f con el fin de encontrar los extremos relativos de f. Verificar su respuesta con la herramienta de graficación.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para saber más sobre el uso de herramientas de graficación para estimar pendientes, ver el artículo "Computer-Aided Delusions", de Richard L. Hall en *The College Mathematics Journal*.

5.6 Funciones trigonométricas inversas: derivación

- **Desarrollar propiedades de las seis funciones trigonométricas inversas.**
- **Derivar las funciones trigonométricas inversas.**
- **Repasar las reglas básicas de derivación de las funciones elementales.**

Funciones trigonométricas inversas



La función seno es inyectiva en $[-\pi/2, \pi/2]$
Figura 5.28

Esta sección comienza con una afirmación sorprendente: *ninguna de las seis funciones trigonométricas tienen inversa*. Y es cierto, ya que las seis funciones trigonométricas son periódicas y, en consecuencia, no son inyectivas. En esta sección se analizan esas seis funciones para ver si es posible redefinir su dominio de manera tal que, en el *dominio restringido*, tengan funciones inversas.

En el ejemplo 4 de la sección 5.3 se vio que la función seno es creciente (y por tanto inyectiva) en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (ver la figura 5.28). En ese intervalo se puede definir la inversa de la función seno *restringida* como

$$y = \operatorname{arcsen} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad \operatorname{sen} y = x$$

donde $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le \operatorname{arcsen} x \le \pi/2$.

Bajo restricciones adecuadas, cada una de las seis funciones trigonométricas es inyectiva y admite inversa, como se muestra en las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

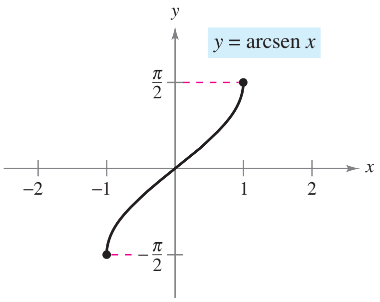
Función	*Dominio*	*Recorrido o rango*
$y = \operatorname{arcsen} x$ si y sólo si $\operatorname{sen} y = x$	$-1 \le x \le 1$	$-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$ si y sólo si $\cos y = x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$
$y = \arctan x$ si y sólo si $\tan y = x$	$-\infty < x < \infty$	$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arccot} x$ si y sólo si $\cot y = x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$
$y = \operatorname{arcsec} x$ si y sólo si $\sec y = x$	$\lvert x\rvert \ge 1$	$0 \le y \le \pi, \quad y \ne \dfrac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arccsc} x$ si y sólo si $\csc y = x$	$\lvert x\rvert \ge 1$	$-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}, \quad y \ne 0$

NOTA El término "arcsen x" se lee "el arco seno de x" o algunas veces "el ángulo cuyo seno es x". Una notación alternativa de la función inversa del seno es "$\operatorname{sen}^{-1} x$".

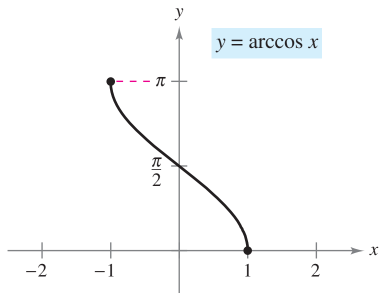
EXPLORACIÓN

La función inversa de la secante En la definición anterior, la función inversa de la secante se ha definido restringiendo el dominio de la función secante a los intervalos $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$. La mayoría de los libros coincide en la restricción elegida, pero algunos discrepan. ¿Qué otros dominios podrían adoptarse? Explicar el razonamiento gráficamente. La mayoría de las calculadoras no dispone de la función inversa de la secante. ¿Cómo se puede evaluar la función inversa de la secante con la calculadora?

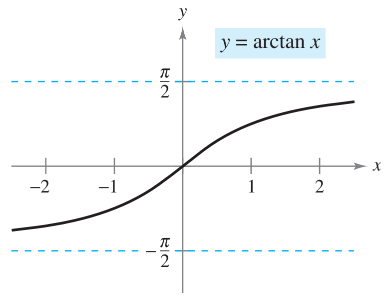
Las gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas se muestran en la figura 5.29.



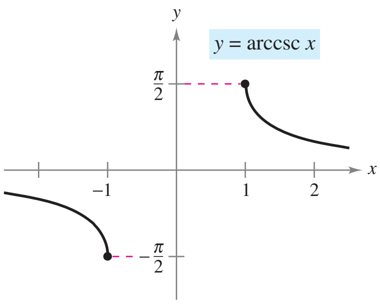
Dominio: $[-1, 1]$
Recorrido o rango: $[-\pi/2, \pi/2]$



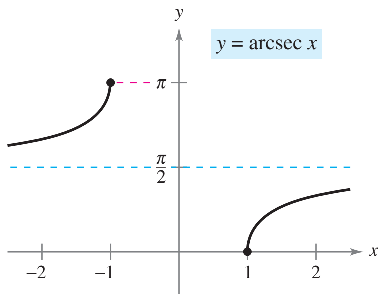
Dominio: $[-1, 1]$
Recorrido o rango: $[0, \pi]$



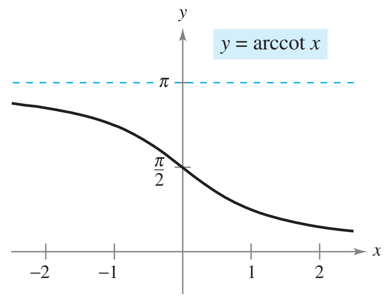
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\pi/2, \pi/2)$



Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Recorrido o rango: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$



Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Recorrido o rango: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(0, \pi)$

Figura 5.29

EJEMPLO 1 Evaluación de las funciones trigonométricas inversas

Evaluar cada una de las funciones.

a) $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ***b)*** arccos 0 ***c)*** $\arctan \sqrt{3}$ ***d)*** arcsen(0.3)

Solución

a) Por definición, $y = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ implica que sen $y = -\frac{1}{2}$. En el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ el valor correcto de y es $-\pi/6$.

$$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

b) Por definición $y = \arccos 0$ implica que $\cos y = 0$. En el intervalo $[0, \pi]$ se tiene $y = \pi/2$.

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

c) Por definición, $y = \arctan \sqrt{3}$ implica que $\tan y = \sqrt{3}$. En el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, se tiene $y = \pi/3$.

$$\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

d) Al utilizar la calculadora en modo *radianes* se obtiene

$$\operatorname{arcsen}(0.3) \approx 0.305.$$

NOTA Al evaluar funciones trigonométricas inversas es importante recordar que los *ángulos están medidos en radianes.*

EXPLORACIÓN

Graficar $y = \arccos(\cos x)$ para $-4\pi \leq x \leq 4\pi$. ¿Por qué la gráfica no es la misma que la gráfica de $y = x$?

Las funciones inversas tienen las propiedades

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Cuando se aplican estas relaciones a las funciones trigonométricas inversas, debe tenerse en cuenta que las funciones trigonométricas tienen inversas sólo en dominios restringidos. Para valores de x fuera de esos dominios, esas dos propiedades no son válidas. Por ejemplo, arcsen (sen π) es 0, no π.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, entonces

$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ y $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} y) = y$.

Si $-\pi/2 < y < \pi/2$, entonces

$\tan(\arctan x) = x$ y $\arctan(\tan y) = y$.

Si $|x| \geq 1$ y $0 \leq y < \pi/2$ o $\pi/2 < y \leq \pi$, entonces

$\sec(\operatorname{arcsec} x) = x$ y $\operatorname{arcsec}(\sec y) = y$.

Propiedades análogas son válidas para otras funciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación

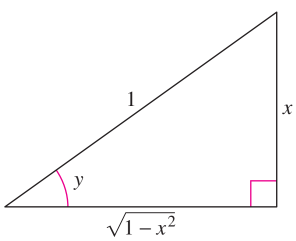
$$\arctan(2x - 3) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{Ecuación original.}$$

$$\tan[\arctan(2x - 3)] = \tan\frac{\pi}{4} \qquad \text{Tomar tangentes en ambos lados.}$$

$$2x - 3 = 1 \qquad \tan(\arctan x) = x.$$

$$x = 2 \qquad \text{Despejar } x.$$

Algunos problemas de cálculo requieren la evaluación de expresiones del tipo cos(arcsen x), como se muestra en el ejemplo 3.



$y = \operatorname{arcsen} x$
Figura 5.30

EJEMPLO 3 Uso de triángulos rectángulos

a) Dado $y = \operatorname{arcsen} x$, donde $0 < y < \pi/2$, encontrar cos y.
b) Dado $y = \operatorname{arcsec}(\sqrt{5}/2)$, encontrar tan y.

Solución

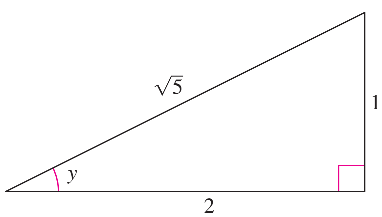
a) Como $y = \operatorname{arcsen} x$, se sabe que sen $y = x$. Esta relación entre x y y puede representarse en un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 5.30.

$$\cos y = \cos(\operatorname{arcsen} x) = \frac{\text{adj.}}{\text{hip.}} = \sqrt{1 - x^2}$$

(Este resultado es también válido para $-\pi/2 < y < 0$.)

b) Al utilizar el triángulo rectángulo mostrado en la figura 5.31 se obtiene

$$\tan y = \tan\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \frac{\text{op.}}{\text{adj.}} = \frac{1}{2}$$



$y = \operatorname{arcsec}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
Figura 5.31

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

En la sección 5.1 se vio que la derivada de la función *trascendente* $f(x) = \ln x$ es la función *algebraica* $f'(x) = 1/x$. A continuación se verá que las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son también algebraicas (aunque las funciones trigonométricas inversas son trascendentes).

El próximo teorema presenta las derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas. En el apéndice A se presentan las demostraciones para arcsen u y arccos u, y el resto se deja como ejercicio (ver el ejercicio 104). Notar que las derivadas de arccos u, arccot u y arccsc u son las *negativas* de la derivada de arcsen u, arctan u y arcsec u, respectivamente.

TEOREMA 5.16 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si u es una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\text{arcsen}\, u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arccot}\, u] = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arcsec}\, u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arccsc}\, u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

NOTA No hay acuerdo universal sobre la definición de arcsec x (o de arccsc x) para valores negativos de x. Cuando se definió aquí el recorrido o rango de arco secante, se eligió preservar la identidad recíproca.

$$\text{arcsec}\, x = \arccos \frac{1}{x}.$$

Por ejemplo, para evaluar arcsec (-2), se puede escribir

$$\text{arcsec}(-2) = \arccos(-0.5) \approx 2.09.$$

Una de las consecuencias de la definición de la inversa de la función secante dada en este texto es que su gráfica tiene pendiente positiva en todo valor de x de su dominio. (Ver la figura 5.29.) Ello se refleja en el signo de valor absoluto en la fórmula de la derivada de arcsec x. ■

TECNOLOGÍA Si la herramienta de graficación no tiene la función arco secante, se puede obtener la gráfica usando

$$f(x) = \text{arcsec}\, x = \arccos \frac{1}{x}.$$

EJEMPLO 4 Derivación de funciones trigonométricas inversas

a) $\dfrac{d}{dx}[\text{arcsen}(2x)] = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

b) $\dfrac{d}{dx}[\arctan(3x)] = \dfrac{3}{1+(3x)^2} = \dfrac{3}{1+9x^2}$

c) $\dfrac{d}{dx}[\text{arcsen}\, \sqrt{x}] = \dfrac{(1/2)\,x^{-1/2}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

d) $\dfrac{d}{dx}[\text{arcsec}\, e^{2x}] = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{(e^{2x})^2-1}} = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}}$

El signo de valor absoluto no es necesario, porque $e^{2x} > 0$.

EJEMPLO 5 Una derivada que puede ser simplificada

$$\begin{aligned}
y &= \text{arcsen}\, x + x\sqrt{1-x^2} \\
y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x\left(\frac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-1/2} + \sqrt{1-x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \\
&= \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \\
&= 2\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 5, se aprecia una de las ventajas de las funciones trigonométricas inversas: pueden utilizarse para integrar funciones algebraicas comunes. Por ejemplo, del resultado mostrado en el ejemplo se desprende que

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\text{arcsen}\, x + x\sqrt{1-x^2}\right).$$

■

EJEMPLO 6 Análisis de la gráfica de una función trigonométrica inversa

Analizar la gráfica de $y = (\arctan x)^2$.

Solución De la derivada

$$y' = 2(\arctan x)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$= \frac{2\arctan x}{1+x^2}$$

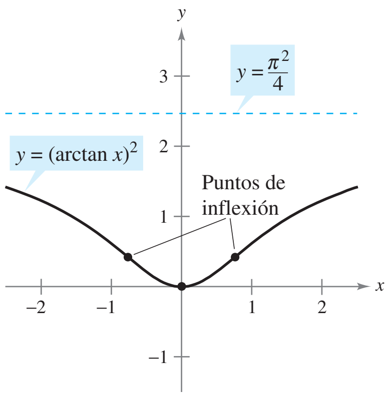
se puede observar que el único punto crítico es $x = 0$. Por el criterio de la primera derivada, este valor corresponde a un mínimo relativo. De la segunda derivada se obtiene

$$y'' = \frac{(1+x^2)\left(\frac{2}{1+x^2}\right) - (2\arctan x)(2x)}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{2(1-2x\arctan x)}{(1+x^2)^2}$$

se concluye que los puntos de inflexión se presentan donde $2x\arctan x = 1$. Al utilizar el método de Newton, esos puntos son $x \approx \pm 0.765$. Por último, como

$$\lim_{x\to\pm\infty} (\arctan x)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

se concluye que la gráfica tiene a $y = \pi^2/4$ como asíntota horizontal. La figura 5.32 muestra la gráfica.



La gráfica de $y = (\arctan x)^2$ tiene una asíntota horizontal a $y = \pi^2/4$
Figura 5.32

EJEMPLO 7 Obtener un ángulo máximo

Un fotógrafo está fotografiando un cuadro de 4 pies de altura colgado en una pared de una galería de arte. La lente de la cámara está a 1 pie bajo el extremo inferior del cuadro como se muestra en la figura 5.33. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse la cámara para conseguir que el ángulo subtendido por la lente de la cámara sea máximo?

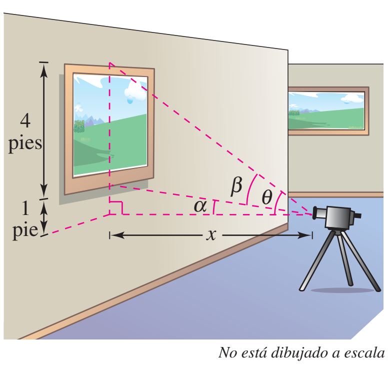
Solución En la figura 5.33, sea β el ángulo que se desea maximizar

$$\beta = \theta - \alpha$$
$$= \operatorname{arccot}\frac{x}{5} - \operatorname{arccot} x$$

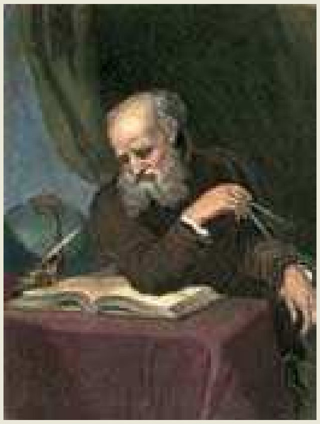
Al derivar se obtiene

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{-1/5}{1+(x^2/25)} - \frac{-1}{1+x^2}$$
$$= \frac{-5}{25+x^2} + \frac{1}{1+x^2}$$
$$= \frac{4(5-x^2)}{(25+x^2)(1+x^2)}.$$

como $d\beta/dx = 0$ cuando $x = \sqrt{5}$, se puede concluir por el criterio de la primera derivada que esta distancia hace maximizar el ángulo β. Así pues, la distancia es $x \approx 2.236$ pies y el ángulo máximo es $\beta \approx 0.7297$ radianes $\approx 41.81°$.



La cámara debe estar a 2.236 pies de la pared para maximizar el ángulo β
Figura 5.33



GALILEO GALILEI (1564-1642)

La visión de la ciencia de Galileo difería de la aceptada perspectiva aristotélica de que la Naturaleza tiene magnitudes susceptibles de descripción, tales como "fluidez" o "potencialidad". Él quiso describir el mundo físico en términos de *cantidades medibles*, como el tiempo, la distancia, la fuerza y la masa.

Resumen de las reglas básicas de derivación

A principios del siglo XVII, Europa se vio inmersa en una era científica representada por grandes pensadores como Descartes, Galileo, Huygens, Newton y Kepler. Estos hombres creían en una naturaleza gobernada por leyes básicas, expresables en gran parte en términos matemáticos. Una de las publicaciones más influyentes de la época —el *Dialogo soprai die massimi sistemi del mondo* de Galileo Galilei— se ha convertido en una descripción clásica del pensamiento científico moderno.

Conforme las matemáticas se han ido desarrollando en los siglos posteriores, se ha visto que unas cuantas funciones elementales son suficientes para modelar la mayoría* de los fenómenos de la física, la química, la biología, la ingeniería, la economía y otros campos. Una **función elemental** es una función de la lista siguiente o una que puede obtenerse con éstas mediante sumas, productos, cocientes o composiciones.

Funciones algebraicas	*Funciones trascendentes*
Funciones polinomiales	Funciones logarítmicas
Funciones racionales	Funciones exponenciales
Funciones con radicales	Funciones trigonométricas
	Funciones trigonométricas inversas

Con las reglas de derivación introducidas hasta ahora en el texto es posible derivar *cualquier* función elemental. Por conveniencia, se resumen esas reglas a continuación.

Reglas básicas de derivación de funciones elementales

1. $\dfrac{d}{dx}[cu] = cu'$

2. $\dfrac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$

3. $\dfrac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$

4. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{u}{v}\right] = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

5. $\dfrac{d}{dx}[c] = 0$

6. $\dfrac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$

7. $\dfrac{d}{dx}[x] = 1$

8. $\dfrac{d}{dx}[|u|] = \dfrac{u}{|u|}(u'), \quad u \neq 0$

9. $\dfrac{d}{dx}[\ln u] = \dfrac{u'}{u}$

10. $\dfrac{d}{dx}[e^u] = e^u\, u'$

11. $\dfrac{d}{dx}[\log_a u] = \dfrac{u'}{(\ln a)u}$

12. $\dfrac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u u'$

13. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = (\cos u)u'$

14. $\dfrac{d}{dx}[\cos u] = -(\operatorname{sen} u)u'$

15. $\dfrac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)u'$

16. $\dfrac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)u'$

17. $\dfrac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)u'$

18. $\dfrac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)u'$

19. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

20. $\dfrac{d}{dx}[\arccos u] = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

21. $\dfrac{d}{dx}[\arctan u] = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

22. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$

23. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

24. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

---

* *Algunas funciones importantes usadas en ingeniería y ciencias (como las funciones de Bessel y la función gamma) no son funciones elementales.*

5.6 Ejercicios

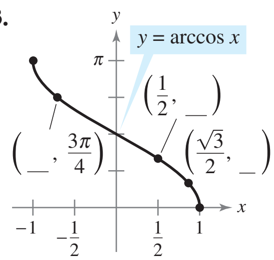
Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 1 y 2, *a*) usar una herramienta de graficación para completar la tabla, *b*) representar a mano los puntos de la tabla y la función, *c*) usar una herramienta de graficación para representar la función y comparar con el dibujo del apartado *b*) y *d*) hallar las intersecciones con los ejes y las simetrías de la gráfica.**

x	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y											

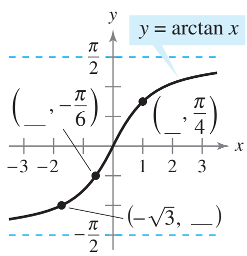
1. $y = \operatorname{arcsen} x$ **2.** $y = \arccos x$

En los ejercicios 3 y 4, determinar las coordenadas faltantes de los puntos sobre la gráfica de la función.

3.



4.



En los ejercicios 5 a 12, evaluar la expresión sin usar calculadora.

5. $\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}$ **6.** $\operatorname{arcsen} 0$

7. $\arccos \frac{1}{2}$ **8.** $\arccos 1$

9. $\arctan \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **10.** $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$

11. $\operatorname{arccsc}(-\sqrt{2})$ **12.** $\operatorname{arcsec}(-\sqrt{2})$

En los ejercicios 13 a 16, usar la calculadora para aproximar el valor. Redondear la respuesta a dos decimales.

13. $\arccos(-0.8)$ **14.** $\operatorname{arcsen}(-0.39)$

15. $\operatorname{arcsec} 1.269$ **16.** $\arctan(-5)$

En los ejercicios 17 a 20, evaluar la expresión sin usar calculadora. (*Sugerencia:* Ver el ejercicio 3.)

17. *a*) $\operatorname{sen}\left(\arctan \dfrac{3}{4}\right)$
b) $\sec\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{4}{5}\right)$

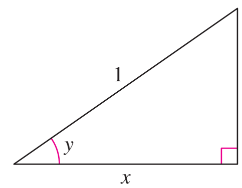
18. *a*) $\tan\left(\arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
b) $\cos\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{5}{13}\right)$

19. *a*) $\cot\left[\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]$
b) $\csc\left[\arctan\left(-\dfrac{5}{12}\right)\right]$

20. *a*) $\sec\left[\arctan\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right]$
b) $\tan\left[\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{5}{6}\right)\right]$

En los ejercicios 21 a 26, usar la figura para escribir la expresión en forma algebraica dada $y = \arccos x$, donde $0 < y < \pi/2$.

21. $\cos y$
22. $\operatorname{sen} y$
23. $\tan y$
24. $\cot y$
25. $\sec y$
26. $\csc y$



En los ejercicios 27 a 34, escribir la expresión en la forma algebraica. [*Sugerencia:* Trazar un triángulo rectángulo, como se demostró en el ejemplo 3.]

27. $\cos(\operatorname{arcsen} 2x)$ **28.** $\sec(\arctan 4x)$

29. $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsec} x)$ **30.** $\cos(\operatorname{arccot} x)$

31. $\tan\left(\operatorname{arcsec} \dfrac{x}{3}\right)$ **32.** $\sec[\operatorname{arcsen}(x - 1)]$

33. $\csc\left(\arctan \dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$ **34.** $\cos\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{x - h}{r}\right)$

En los ejercicios 35 y 36, *a*) utilizar una herramienta de graficación para representar *f* y *g* en la misma pantalla para verificar si son iguales, *b*) usar álgebra para verificar que *f* y *g* son iguales y *c*) identificar las asíntotas horizontales de las gráficas.

35. $f(x) = \operatorname{sen}(\arctan 2x), \quad g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$

36. $f(x) = \tan\left(\arccos \dfrac{x}{2}\right), \quad g(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$

En los ejercicios 37 a 40, despejar *x*.

37. $\operatorname{arcsen}(3x - \pi) = \frac{1}{2}$ **38.** $\arctan(2x - 5) = -1$

39. $\operatorname{arcsen}\sqrt{2x} = \arccos\sqrt{x}$ **40.** $\arccos x = \operatorname{arcsec} x$

En los ejercicios 41 y 42, verificar cada identidad.

41. *a*) $\operatorname{arccsc} x = \operatorname{arcsen} \dfrac{1}{x}, \quad x \geq 1$
b) $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}, \quad x > 0$

42. *a*) $\operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen} x, \quad |x| \leq 1$
b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \leq 1$

En los ejercicios 43 a 62, hallar la derivada de la función.

43. $f(x) = 2 \operatorname{arcsen}(x - 1)$ **44.** $f(t) = \operatorname{arcsen} t^2$

45. $g(x) = 3 \arccos \dfrac{x}{2}$ **46.** $f(x) = \operatorname{arcsec} 2x$

47. $f(x) = \arctan e^x$ **48.** $f(x) = \arctan\sqrt{x}$

49. $g(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen} 3x}{x}$ **50.** $h(x) = x^2 \arctan 5x$

51. $h(t) = \operatorname{sen}(\arccos t)$ **52.** $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$

53. $y = 2x \arccos x - 2\sqrt{1 - x^2}$

54. $y = \ln(t^2 + 4) - \frac{1}{2}\arctan \frac{t}{2}$

55. $y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + \arctan x\right)$

56. $y = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{4 - x^2} + 4\,\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

57. $y = x\,\text{arcsen}\,x + \sqrt{1 - x^2}$

58. $y = x\arctan 2x - \frac{1}{4}\ln(1 + 4x^2)$

59. $y = 8\,\text{arcsen}\frac{x}{4} - \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{2}$

60. $y = 25\,\text{arcsen}\frac{x}{5} - x\sqrt{25 - x^2}$

61. $y = \arctan x + \frac{x}{1 + x^2}$

62. $y = \arctan\frac{x}{2} - \frac{1}{2(x^2 + 4)}$

En los ejercicios 63 a 68, encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto dado.

63. $y = 2\,\text{arcsen}\,x, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$

64. $y = \frac{1}{2}\arccos x, \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{8}\right)$

65. $y = \arctan\frac{x}{2}, \quad \left(2, \frac{\pi}{4}\right)$

66. $y = \text{arcsec}\,4x, \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

67. $y = 4x\arccos(x - 1), \quad (1, 2\pi)$

68. $y = 3x\,\text{arcsen}\,x, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

CAS ***Aproximación lineal y cuadrática*** **En los ejercicios 69 a 72, usar un sistema algebraico por computadora para hallar la aproximación lineal $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ y la aproximación cuadrática $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$ de la función f en $x = a$. Dibujar la gráfica de la función y sus aproximaciones lineal y cuadrática.**

69. $f(x) = \arctan x, \quad a = 0$

70. $f(x) = \arccos x, \quad a = 0$

71. $f(x) = \text{arcsen}\,x, \quad a = \frac{1}{2}$

72. $f(x) = \arctan x, \quad a = 1$

En los ejercicios 73 a 76, encontrar los extremos relativos de la función.

73. $f(x) = \text{arcsec}\,x - x$

74. $f(x) = \text{arcsen}\,x - 2x$

75. $f(x) = \arctan x - \arctan(x - 4)$

76. $h(x) = \text{arcsen}\,x - 2\arctan x$

En los ejercicios 77 a 80, analizar y bosquejar una gráfica de la función. Identificar algún extremo relativo, puntos de inflexión, y asíntotas. Usar una herramienta de graficación para verificar sus resultados.

77. $f(x) = \text{arcsen}(x - 1)$

78. $f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2}$

79. $f(x) = \text{arcsec}\,2x$

80. $f(x) = \arccos\frac{x}{4}$

Derivación implícita **En los ejercicios 81 a 84, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el punto dado.**

81. $x^2 + x\arctan y = y - 1, \quad \left(-\frac{\pi}{4}, 1\right)$

82. $\arctan(xy) = \text{arcsen}(x + y), \quad (0, 0)$

83. $\text{arcsen}\,x + \text{arcsen}\,y = \frac{\pi}{2}, \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

84. $\arctan(x + y) = y^2 + \frac{\pi}{4}, \quad (1, 0)$

Desarrollo de conceptos

85. Explicar por qué los dominios de las funciones trigonométricas están restringidos cuando se calcula la función trigonométrica inversa.

86. Explicar por qué $\tan \pi = 0$ no implica que $\arctan 0 = \pi$.

87. Explicar cómo dibujar $y = \text{arccot}\,x$ en una herramienta de graficación que no tiene la función arco cotangente.

88. ¿Son las derivadas de las funciones trigonométricas inversas algebraicas o trascendentales? Mencionar las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

89. *a)* Usar una herramienta de graficación para evaluar arcsen (arcsen 0.5) y arcsen (arcsen 1).

b) Sea $f(x) = \text{arcsen}(\text{arcsen}\,x)$. Hallar el valor de x en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ tal que $f(x)$ es un número real.

Para discusión

90. El punto $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ está en la gráfica de $y = \cos x$. ¿$\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ se encuentra en la gráfica de $y = \arccos x$? Si no es así, ¿esto contradice la definición de la función inversa?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 91 a 96, determinar si la expresión es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

91. Dado que $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, se tiene que $\arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

92. $\text{arcsen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

93. La pendiente de la gráfica de la función tangente inversa es positiva para todo x.

94. El dominio de $y = \text{arcsen}\,x$ es $[0, \pi]$.

95. $\frac{d}{dx}[\arctan(\tan x)] = 1$ para todo x en su dominio.

96. $\text{arcsen}^2 x + \arccos^2 x = 1$.

97. ***Razón de cambio angular*** Un aeroplano vuela a una altitud de 5 millas hacia un punto directamente sobre un observador. Considerar θ y x como se muestra en la figura siguiente.

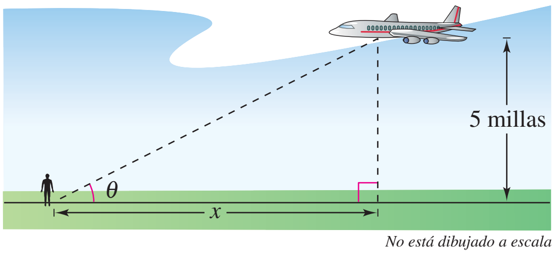


Figura para 97

a) Escribir θ como una función de x.

b) La velocidad del aeroplano es 400 millas por hora. Encontrar $d\theta/dt$ cuando $x = 10$ millas y cuando $x = 3$ millas.

98. ***Redactar*** Repetir el ejercicio 97 si la altitud del aeroplano es 3 millas y describir cómo la altitud afecta la razón de cambio de θ.

99. ***Ritmo o velocidad de cambio angular*** En un experimento sobre caída libre, se deja caer un objeto desde una altura de 256 pies. Una cámara situada en el suelo y distante 500 pies del punto de impacto, toma imágenes de la caída (ver la figura).

a) Hallar la función posición que describe la altura del objeto en cada instante t, suponer que se deja caer en $t = 0$. ¿En qué momento el objeto llega al suelo?

b) Calcular la razón de cambio del ángulo de elevación de la cámara cuando $t = 1$ y $t = 2$.

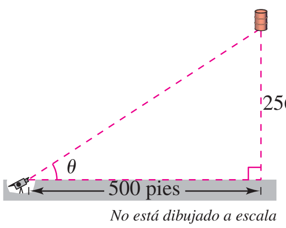


Figura para 99

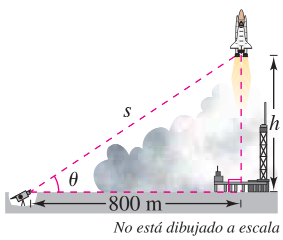


Figura para 100

100. ***Razón de cambio angular*** Una cámara de televisión a nivel del suelo graba el despegue vertical de un cohete desde un punto a 800 metros del punto de lanzamiento. Sea θ el ángulo de elevación del cohete y s la distancia entre la cámara y el cohete (ver la figura). Expresar θ como función de s durante el ascenso del cohete. Diferenciar el resultado para hallar $d\theta/dt$ en términos de s y de ds/dt.

101. ***Maximización de un ángulo*** Una cartelera de 85 pies de distancia de separación es perpendicular a un camino recto y está a 40 pies del camino (ver la figura). Encontrar el punto sobre el camino en el cual el ángulo θ subtendido por la carretera es un máximo.

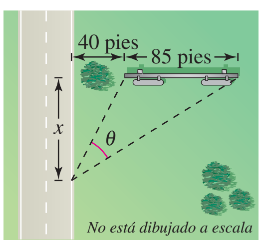


Figura para 101

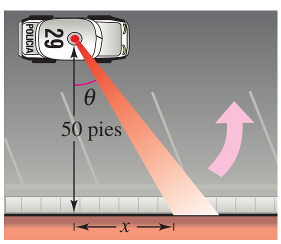


Figura para 102

102. ***Velocidad angular*** Un carro patrulla está estacionado a 50 pies de un almacén grande (ver la figura). La luz giratoria en la parte superior del carro gira a una razón de 30 revoluciones por minuto. Escribir θ como una función de x. ¿Qué tan lejos está el rayo de luz moviéndose a lo largo de la pared cuando el rayo hace un ángulo de $\theta = 45°$ con la línea perpendicular desde la luz hasta la pared?

103. *a*) Demostrar que $\arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$, $xy \neq 1$.

b) Usar la fórmula del apartado *a*) para probar que

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

104. Verificar las siguientes fórmulas de derivación.

a) $\dfrac{d}{dx}[\arctan u] = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

b) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$

c) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

d) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

105. ***Existencia de una inversa*** Determinar los valores de k para los que la función $f(x) = kx + \operatorname{sen} x$ tiene función inversa.

106. ***Para pensar*** Usar una herramienta de graficación para representar $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.

a) ¿Por qué la gráfica de g no es la recta $y = x$?

b) Hallar los extremos de g.

107. *a*) Representar la función $f(x) = \arccos x + \operatorname{arcsen} x$ sobre el intervalo $[-1, 1]$.

b) Describir la gráfica de f.

c) Comprobar el resultado del apartado *b*) analíticamente.

108. Comprobar que $\operatorname{arcsen} x = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$, $|x| < 1$.

109. Calcular el valor de c en el intervalo $[0, 4]$ sobre el eje x que maximiza el ángulo θ.

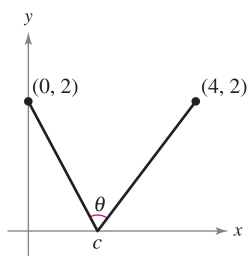


Figura para 109

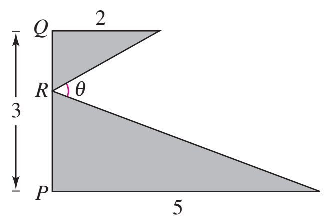


Figura para 110

110. Encontrar PR tal que $0 \leq PR \leq 3$ y $m \angle \theta$ sea un máximo.

111. Algunos textos de cálculo definen la inversa de la función secante usando el dominio $[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$.

a) Hacer un boceto de la gráfica $y = \operatorname{arcsec} x$ usando este rango.

b) Mostrar que $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

5.7 Funciones trigonométricas inversas: integración

- **Integrar funciones cuyas primitivas o antiderivadas contienen funciones trigonométricas inversas.**
- **Integrar funciones completando un cuadrado.**
- **Resumir las reglas básicas de integración de funciones elementales.**

Integrales que contienen funciones trigonométricas inversas

Las derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas se agrupan en tres pares. En cada par, la derivada de una es la negativa de la otra. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}[\text{arcsen } x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y

$$\frac{d}{dx}[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cuando se hace una lista de las *antiderivadas* o *primitivas* que corresponden a cada una de las funciones trigonométricas inversas, es suficiente citar una de cada par. Es conveniente usar arcsen x como primitiva de $1/\sqrt{1-x^2}$, en lugar de $-\arccos x$. El siguiente teorema da una fórmula para la primitiva de cada una de las tres parejas. La demostración de estas reglas de integración se deja como ejercicio (ver ejercicios 87 a 89).

PARA MAYOR INFORMACIÓN En el artículo “A Direct Proof of the Integral Formula for Arctangent”, de Arnold J. Insel, en *The College Mathematics Journal*, se puede encontrar una detallada demostración de la parte 2 del teorema 5.17.

TEOREMA 5.17 INTEGRALES QUE INVOLUCRAN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Sea u una función derivable de x, y sea $a > 0$.

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arcsen}\frac{u}{a} + C$ **2.** $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\text{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

EJEMPLO 1 Integrales con funciones trigonométricas inversas

a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \text{arcsen}\frac{x}{2} + C$$

b) $$\int \frac{dx}{2+9x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{(\sqrt{2})^2+(3x)^2} \qquad u = 3x,\ a = \sqrt{2}$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{3x}{\sqrt{2}} + C$$

c) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{2\,dx}{2x\sqrt{(2x)^2-3^2}} \qquad u = 2x,\ a = 3$$
$$= \frac{1}{3}\text{arcsec}\frac{|2x|}{3} + C$$

Las integrales del ejemplo 1 son aplicaciones a simple vista de las fórmulas de integración. Desafortunadamente, no es lo frecuente. Las fórmulas de integración que involucran funciones trigonométricas inversas pueden aparecer de muy diversas formas.

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Integrales como la del ejemplo 2 son fáciles con ayuda de programas de integración simbólica en computadora. No obstante, al usarlos hay que recordar que pueden no ser capaces de encontrar una primitiva debido a dos razones. En primer lugar, algunas funciones elementales tienen primitivas no elementales. En segundo lugar, todos esos programas tienen limitaciones, así que puede darse una función para cuya integración no está preparado el programa. Recordar, asimismo, que las primitivas o antiderivadas que involucran funciones trigonométricas o logarítmicas se pueden expresar de maneras muy diversas. Por ejemplo, al utilizar uno de esos programas para la integral del ejemplo 2 se obtiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \arctan \sqrt{e^{2x}-1} + C.$$

Demostrar que esta antiderivada es equivalente a la obtenida en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Integración por sustitución

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Solución Tal como está, la integral no se ajusta a ninguna de las tres fórmulas para las funciones trigonométricas inversas. Pero haciendo la sustitución de $u = e^x$, se obtiene

$$u = e^x \quad \Rightarrow \quad du = e^x\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}.$$

Con esta sustitución, ya se puede integrar como sigue:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(e^x)^2-1}} && \text{Escribir } e^{2x} \text{ como } (e^x)^2.\\
&= \int \frac{du/u}{\sqrt{u^2-1}} && \text{Sustituir.}\\
&= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} && \text{Reescribir para que se ajuste a la regla arcsec.}\\
&= \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{1} + C && \text{Aplicar la regla arcsec.}\\
&= \operatorname{arcsec} e^x + C && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Reescribir como suma de dos cocientes

Hallar $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

Solución Esta integral tampoco parece ajustarse a las fórmulas. Sin embargo, desdoblando el integrando en dos partes, la primera es integrable por la regla de la potencia y la segunda da una función seno inversa.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\
&= -\frac{1}{2}\int (4-x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{(4-x^2)^{1/2}}{1/2}\right] + 2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} + C\\
&= -\sqrt{4-x^2} + 2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

Completar el cuadrado

Cuando hay funciones cuadráticas en el integrando, completar el cuadrado ayuda a resolver la integral. Por ejemplo, la expresión cuadrática $x^2 + bx + c$ puede escribirse como diferencia de dos cuadrados al sumar y restar $(b/2)^2$.

$$\begin{aligned}
x^2 + bx + c &= x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\\
&= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Completar el cuadrado

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}$.

Solución Se puede escribir el denominador como la suma de dos cuadrados como se muestra.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 7 &= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 7 \\ &= (x - 2)^2 + 3 = u^2 + a^2 \end{aligned}$$

En esta forma de cuadrados completados, al tomar $u = x - 2$ y $a = \sqrt{3}$.

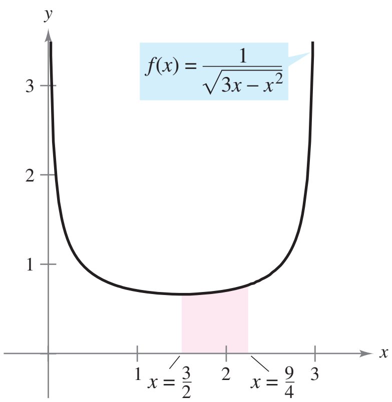
$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C$$

Si el coeficiente dominante no es 1, conviene sacarlo como factor común del cuadrado. Por ejemplo, se puede completar el cuadrado en la expresión $2x^2 - 8x + 10$ factorizando primero.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 10 &= 2(x^2 - 4x + 5) \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4 + 5) \\ &= 2[(x-2)^2 + 1] \end{aligned}$$

Para completar el cuadrado cuando el coeficiente de x^2 es negativo, el mismo proceso de factorización sirve. Por ejemplo, se puede completar el cuadrado en la expresión $3x - x^2$ como se muestra.

$$\begin{aligned} 3x - x^2 &= -(x^2 - 3x) \\ &= -\left[x^2 - 3x + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2\right] \\ &= \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$



El área de la gráfica en la región delimitada por la gráfica de f, el eje x, $x = \frac{3}{2}$, y $x = \frac{9}{4}$ es $\pi/6$

Figura 5.34

EJEMPLO 5 Completar el cuadrado (coeficiente dominante negativo)

Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}$$

el eje x, y las rectas $x = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{9}{4}$.

Solución En la figura 5.34 se ve que el área está dada por

$$\text{Área} = \int_{3/2}^{9/4} \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}\, dx.$$

Al utilizar la expresión con el cuadrado completo antes obtenido, se puede integrar como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{3/2}^{9/4} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2}} &= \int_{3/2}^{9/4} \frac{dx}{\sqrt{(3/2)^2 - [x - (3/2)]^2}} \\ &= \arcsin \frac{x - (3/2)}{3/2}\Bigg]_{3/2}^{9/4} \\ &= \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 \\ &= \frac{\pi}{6} \\ &\approx 0.524 \end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Ante integrales como la del ejemplo 5 siempre queda el recurso de una solución numérica. Así, aplicando la regla de Simpson (con $n = 12$) a la integral de este ejemplo, se obtiene

$$\int_{3/2}^{9/4} \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}\, dx \approx 0.523599.$$

Este valor difiere del valor exacto de la integral ($\pi/6 \approx 0.5235988$) en menos de una millonésima.

Repaso a las reglas básicas de integración

Ya se ha terminado la introducción a las **reglas básicas de integración**. Si se quiere llegar a un uso eficaz de tales fórmulas, es conveniente practicarlas hasta que se consiga aprenderlas de memoria.

Reglas básicas de integración ($a > 0$)

1. $\displaystyle\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$

2. $\displaystyle\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$

3. $\displaystyle\int du = u + C$

4. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

5. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

6. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$

7. $\displaystyle\int a^u\,du = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^u + C$

8. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

9. $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

10. $\displaystyle\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

11. $\displaystyle\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

12. $\displaystyle\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

13. $\displaystyle\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$

14. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

15. $\displaystyle\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

16. $\displaystyle\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

17. $\displaystyle\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

18. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C$

19. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$

20. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$

Se aprende mucho acerca de la naturaleza de la integración comparando esta lista con la de las reglas de derivación dadas en la sección anterior. Se dispone ya de suficientes reglas de derivación para derivar *cualquier* función elemental. Sin embargo, la situación en la integración no es la misma.

Las reglas recogidas en la lista de arriba son esencialmente las que se han podido deducir de las reglas de derivación. Hasta ahora, no se han desarrollado reglas para integrar un producto o un cociente general, o la función logaritmo natural o las funciones trigonométricas inversas. Lo que es más importante, ninguna de las reglas de la lista es aplicable si no se logra dar el *du* apropiado correspondiente a la *u* de la fórmula. La cuestión es que se necesita trabajar más sobre técnicas de integración, lo cual se hará en el capítulo 8. Los dos ejemplos siguientes dan una idea más clara de lo que *se puede* y de lo que *no se puede* hacer con las técnicas disponibles hasta este momento.

EJEMPLO 6 Comparación de problemas de integración

De las siguientes integrales encontrar tantas como sea posible, al utilizar las fórmulas y técnicas estudiadas hasta ahora en este texto.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ ***b***) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ ***c***) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

Solución

a) *Se puede* encontrar la integral (se emplea la regla del arco secante).

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}|x| + C$$

b) *Se puede* encontrar la integral (se emplea la regla de la potencia).

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \frac{1}{2}\int (x^2-1)^{-1/2}(2x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2-1)^{1/2}}{1/2}\right] + C\\ &= \sqrt{x^2-1} + C\end{aligned}$$

c) *No se pueden* integrar con las técnicas estudiadas. (Verificar esta conclusión revisando las fórmulas de la lista.)

EJEMPLO 7 Comparación de problemas de integración

Hallar tantas de las integrales siguientes como sea posible mediante las técnicas y fórmulas estudiadas hasta ahora en este texto.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$ ***b***) $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x}$ ***c***) $\displaystyle\int \ln x\,dx$

Solución

a) *Se puede* calcular la integral (se emplea la regla para el logaritmo).

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\ln x} &= \int \frac{1/x}{\ln x}\,dx\\ &= \ln|\ln x| + C\end{aligned}$$

b) *Se puede* calcular la integral (se emplea la regla de la potencia).

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x\,dx}{x} &= \int \left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^1\,dx\\ &= \frac{(\ln x)^2}{2} + C\end{aligned}$$

c) *No se puede* integrar con las técnicas estudiadas.

NOTA Observar que en los ejemplos 6 y 7 son precisamente las funciones *más simples* las que no se pueden integrar todavía.

5.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 24, hallar la integral.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
3. $\displaystyle\int \frac{7}{16+x^2}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{12}{1+9x^2}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{4+(x-3)^2}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{t}{t^4+16}\,dt$
9. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-4}}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{t}{t^4+25}\,dt$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx$
13. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{4+e^{4x}}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{3+(x-2)^2}\,dx$
15. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{25-\tan^2 x}}\,dx$
16. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{7+\cos^2 x}\,dx$
17. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{3}{2\sqrt{x}(1+x)}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+1}\,dx$
22. $\displaystyle\int \frac{4x+3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
23. $\displaystyle\int \frac{x+5}{\sqrt{9-(x-3)^2}}\,dx$
24. $\displaystyle\int \frac{x-2}{(x+1)^2+4}\,dx$

En los ejercicios 25 a 38, evaluar la integral.

25. $\displaystyle\int_0^{1/6} \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$
26. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
27. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$
28. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{6}{9+x^2}\,dx$
29. $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
30. $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx$
31. $\displaystyle\int_3^{6} \frac{1}{25+(x-3)^2}\,dx$
32. $\displaystyle\int_1^{4} \frac{1}{x\sqrt{16x^2-5}}\,dx$
33. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$
34. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx$
35. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$
36. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$
37. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
38. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

En los ejercicios 39 a 50, calcular o evaluar la integral (completando el cuadrado cuando sea necesario).

39. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{x^2-2x+2}$
40. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4x+13}$
41. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+6x+13}\,dx$
42. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2+2x+2}\,dx$
43. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx$
44. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx$
45. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx$
46. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx$
47. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$
48. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}\,dx$
49. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+2x^2+2}\,dx$
50. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9+8x^2-x^4}}\,dx$

En los ejercicios 51 a 54, hallar o evaluar la integral mediante sustitución especificada.

51. $\displaystyle\int \sqrt{e^t-3}\,dt$

$u = \sqrt{e^t-3}$

52. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,dx$

$u = \sqrt{x-2}$

53. $\displaystyle\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

$u = \sqrt{x}$

54. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{2\sqrt{3-x}\sqrt{x+1}}$

$u = \sqrt{x+1}$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 55 a 57, determinar cuáles de las integrales pueden hallarse usando las reglas básicas estudiadas hasta ahora en el texto.

55. *a)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$

56. *a)* $\displaystyle\int e^{x^2}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}e^{1/x}\,dx$

57. *a)* $\displaystyle\int \sqrt{x-1}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

58. Determinar qué valor aproxima mejor el área de la región entre el eje x y la función.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

en el intervalo $[-0.5, 0.5]$. (Basar la elección en un dibujo de la región, *no* en cálculos.)

a) 4 *b)* -3 *c)* 1 *d)* 2 *e)* 3

59. Decidir si se puede calcular la integral

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

al utilizar las fórmulas y técnicas estudiadas. Explicar el razonamiento.

Para discusión

60. Determinar cuál de las integrales puede encontrarse usando las fórmulas de integración básicas que se han estudiado hasta ahora en el texto.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ *c*) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

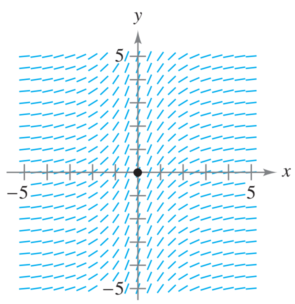
Ecuación diferencial **En los ejercicios 61 y 62, usar la ecuación diferencial y las condiciones especificadas para encontrar *y*.**

61. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
$y(0) = \pi$

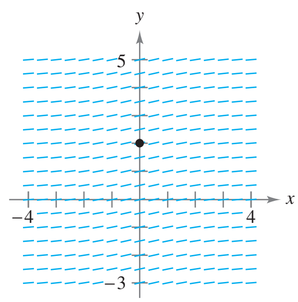
62. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{4+x^2}$
$y(2) = \pi$

Campos de pendientes **En los ejercicios 63 a 66 se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto especificado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representar la solución. Comparar los resultados con los dibujos del apartado *a*).**

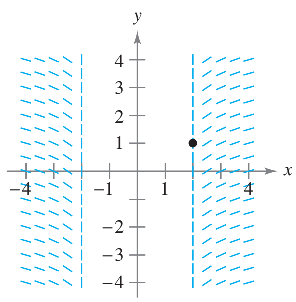
63. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{1+x^2}$, $(0, 0)$



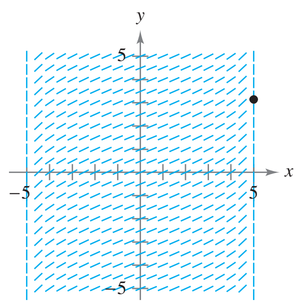
64. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{9+x^2}$, $(0, 2)$



65. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-4}}$, $(2, 1)$



66. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{\sqrt{25-x^2}}$, $(5, \pi)$



CAS ***Campo de pendientes*** **En los ejercicios 67 a 70, usar un sistema algebraico por computadora para graficar el campo de pendientes de la ecuación diferencial y representar la solución que satisface la condición inicial.**

67. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10}{x\sqrt{x^2-1}}$, $y(3) = 0$

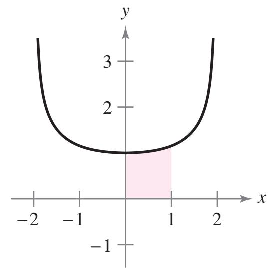
68. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{12+x^2}$, $y(4) = 2$

69. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{\sqrt{16-x^2}}$, $y(0) = 2$

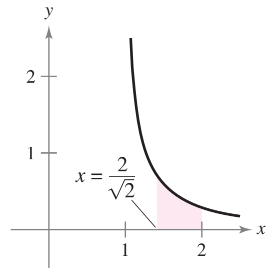
70. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y}}{1+x^2}$, $y(0) = 4$

Área **En los ejercicios 71 a 76, encontrar el área de la región.**

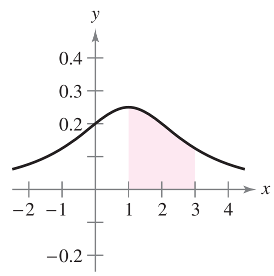
71. $y = \dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}$



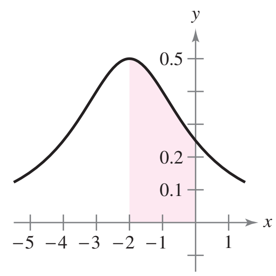
72. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$



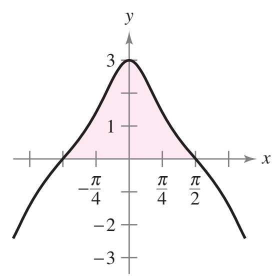
73. $y = \dfrac{1}{x^2-2x+5}$



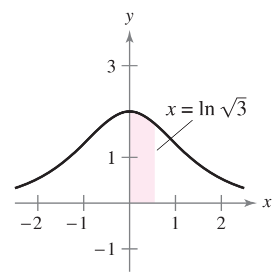
74. $y = \dfrac{2}{x^2+4x+8}$



75. $y = \dfrac{3\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$



76. $y = \dfrac{4e^x}{1+e^{2x}}$



En los ejercicios 77 y 78, *a*) verificar la fórmula de integración, después *b*) usar ésta para encontrar el área de la región.

77. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\arctan x}{x} + C$

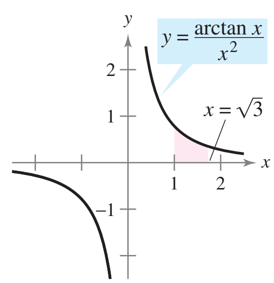


Figura para 77

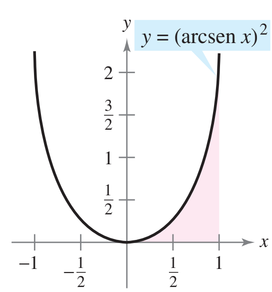


Figura para 78

78. $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$

$= x(\operatorname{arcsen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x + C$

79. *a*) Dibujar la región representada por

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x\, dx.$$

b) Usar la función de integración de una herramienta de graficación para aproximar el área.

c) Encontrar analíticamente el área exacta.

80. *a*) Mostrar que $\int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}\, dx = \pi.$

b) Estimar el número π usando la regla de Simpson (con $n = 6$) y la integral en el apartado *a*).

c) Estimar el número π usando la capacidad de integración de una herramienta de graficación.

81. ***Investigación*** Considerar la función $F(x) = \frac{1}{2}\int_x^{x+2} \frac{2}{t^2 + 1}\, dt.$

a) Escribir una breve interpretación geométrica de $F(x)$ con relación a la función $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$. Empleando la explicación, estimar el valor de x donde F es máxima.

b) Efectuar la integración para hallar una forma alternativa de $F(x)$. Usar el cálculo para localizar el valor de x que hace a F máxima y comparar los resultados con lo estimado en el apartado *a*).

82. Considerar la integral $\int \frac{1}{\sqrt{6x - x^2}}\, dx.$

a) Hallar la integral completando el cuadrado en el radicando.

b) Hallarla al sustituir $u = \sqrt{x}$.

c) Las primitivas o antiderivadas obtenidas en *a*) y *b*) parecen muy diferentes. Usar una herramienta de graficación para representar cada primitiva en la misma pantalla y determinar la relación entre ellas. Determinar sus dominios.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 83 a 86, determinar si la expresión es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

83. $\int \frac{dx}{3x\sqrt{9x^2 - 16}} = \frac{1}{4}\operatorname{arcsec}\frac{3x}{4} + C$

84. $\int \frac{dx}{25 + x^2} = \frac{1}{25}\arctan\frac{x}{25} + C$

85. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = -\arccos\frac{x}{2} + C$

86. Una forma de hallar $\int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{9 - e^{2x}}}\, dx$ es mediante la regla del arcoseno.

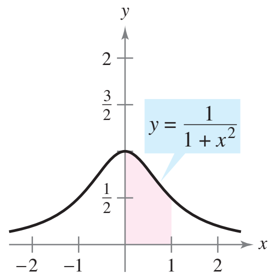
Verificación de las reglas de integración **En los ejercicios 87 a 89, verificar cada regla por diferenciación. Sea $a > 0$.**

87. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$

88. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

89. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

90. ***Integración numérica*** *a*) Escribir una integral que represente el área de la región. *b*) Después usar la regla de los trapecios con $n = 8$ para estimar el área de la región. *c*) Explicar cómo se pueden usar los resultados de los apartados *a*) y *b*) para estimar π.



91. ***Movimiento vertical*** Un objeto es lanzado desde el suelo hacia arriba con velocidad inicial de 500 pies por segundo. En este ejercicio, el objetivo es analizar el movimiento mientras asciende.

a) Despreciando la resistencia al aire, expresar la velocidad en función del tiempo. Representar esta función en la herramienta de graficación.

b) Usando los resultados del apartado *a*) encontrar la función posición y determinar la altura máxima alcanzada por el objeto.

c) Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, la ecuación obtenida es

$$\frac{dv}{dt} = -(32 + kv^2)$$

donde -32 pies/s^2 en la aceleración de la gravedad y k una constante. Hallar la velocidad en función del tiempo al resolver la ecuación.

$$\int \frac{dv}{32 + kv^2} = -\int dt.$$

d) Usar una herramienta de graficación para representar la función velocidad $v(t)$ del apartado *c*) si $k = 0.001$. Usar la gráfica para estimar el instante t_0 en el que el objeto alcanza la máxima altura.

e) Usar la función integración de la herramienta de graficación para aproximar el valor de

$$\int_0^{t_0} v(t)\, dt$$

donde $v(t)$ y t_0 son los obtenidos en el apartado *d*). Ésta es la aproximación de la máxima altura del objeto.

f) Explicar la diferencia entre los resultados de los apartados *b*) y *e*).

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este tópico, ver el artículo "What Goes Up Must Come Down; Will Air Resistance Make It Return Sooner, or Later?", de John Lekner, en *Mathematics Magazine*.

92. Representar $y_1 = \frac{x}{1 + x^2}$, $y_2 = \arctan x$, y $y_3 = x$ sobre $[0, 10]$.

Demostrar que $\frac{x}{1 + x^2} < \arctan x < x$ para $x > 0$.

5.8 Funciones hiperbólicas

- Desarrollar las propiedades de las funciones hiperbólicas.
- Derivar e integrar funciones hiperbólicas.
- Desarrollar las propiedades de las funciones hiperbólicas inversas.
- Derivar e integrar funciones que contienen funciones hiperbólicas inversas.

JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777)

La primera persona que publicó un estudio acerca de las funciones hiperbólicas fue Johann Heinrich Lambert, un matemático germano-suizo y colega de Euler.

Funciones hiperbólicas

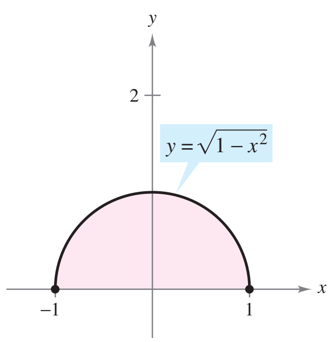
En esta sección se verá brevemente una clase especial de funciones exponenciales llamadas **funciones hiperbólicas**. El nombre de *funciones hiperbólicas* proviene de la comparación entre el área de una región semicircular, como se muestra en la figura 5.35, con el área de una región bajo una hipérbola, como se muestra en la figura 5.36. La integral que da el área del semicírculo emplea una función trigonométrica (circular) inversa:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.571.$$

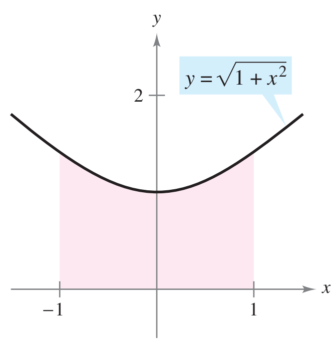
La integral que da el área de la región hiperbólica emplea una función hiperbólica inversa:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{senh}^{-1} x\Big]_{-1}^{1} \approx 2.296.$$

Ésta es sólo una de las muchas analogías existentes entre las funciones hiperbólicas y las trigonométricas.



Círculo: $x^2 + y^2 = 1$
Figura 5.35



Hipérbola: $-x^2 + y^2 = 1$
Figura 5.36

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre el desarrollo de funciones hiperbólicas, ver el artículo "An Introduction to Hyperbolic Functions in Elementary Calculus", de Jerome Rosenthal en *Mathematics Teacher*.

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

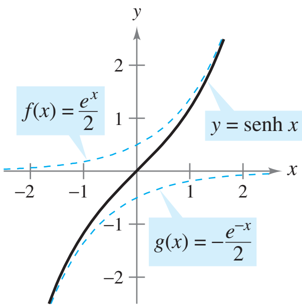
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}, \quad x \neq 0$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

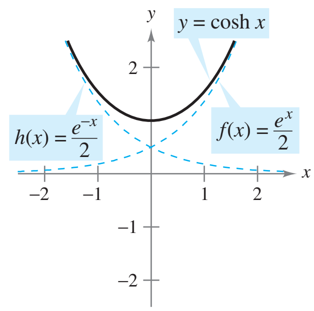
$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x}, \quad x \neq 0$$

NOTA senh x se lee "seno hiperbólico de x", cosh x se lee "coseno hiperbólico de x", etcétera.

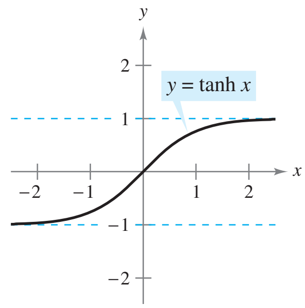
La figura 5.37 muestra las gráficas de las seis funciones hiperbólicas, así como sus dominios y recorridos o rangos. Nótese que la gráfica de senh x se puede obtener al sumar la coordenada y que corresponde a las funciones exponenciales $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ y $g(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$. De manera semejante, la gráfica de cosh x puede ser obtenida al sumar la coordenada y que corresponde a las funciones exponenciales $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ y $h(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$.



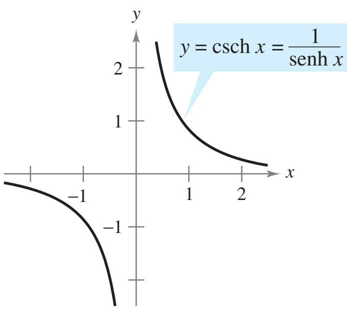
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$



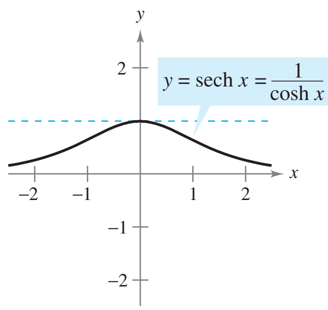
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $[1, \infty)$



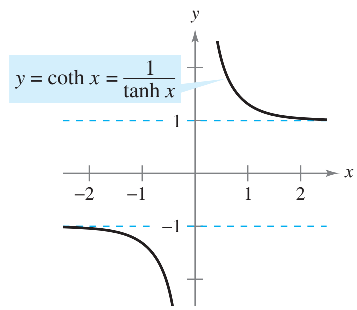
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-1, 1)$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(0, 1]$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Figura 5.37

Muchas identidades trigonométricas tienen sus correspondientes *identidades hiperbólicas*. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \text{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{4}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
2\, \text{senh}\, x \cosh x &= 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\
&= \text{senh}\, 2x.
\end{aligned}$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para entender geométricamente la relación entre las funciones hiperbólica y exponencial, ver el artículo "A Short Proof. Linking the Hyperbolic and Exponential Functions", de Michael J. Seery en *The AMATYC Review*.

Identidades hiperbólicas

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad \operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1 \qquad \operatorname{senh}(x-y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1 \qquad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{senh}^2 x = \frac{-1 + \cosh 2x}{2} \qquad \cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$$

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

Derivación e integración de funciones hiperbólicas

Debido a que las funciones hiperbólicas se expresan en términos de e^x y e^{-x}, es fácil obtener reglas de derivación para sus derivadas. El siguiente teorema presenta estas derivadas con las reglas de integración correspondientes.

TEOREMA 5.18 DERIVADAS E INTEGRALES DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Sea u una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{senh} u] = (\cosh u)u' \qquad \int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$$

$$\frac{d}{dx}[\cosh u] = (\operatorname{senh} u)u' \qquad \int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$$

$$\frac{d}{dx}[\tanh u] = (\operatorname{sech}^2 u)u' \qquad \int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$$

$$\frac{d}{dx}[\coth u] = -(\operatorname{csch}^2 u)u' \qquad \int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech} u] = -(\operatorname{sech} u \tanh u)u' \qquad \int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{csch} u] = -(\operatorname{csch} u \coth u)u' \qquad \int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\operatorname{senh} x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]\\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x\\ \frac{d}{dx}[\tanh x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right]\\ &= \frac{\cosh x(\cosh x) - \operatorname{senh} x(\operatorname{senh} x)}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{1}{\cosh^2 x}\\ &= \operatorname{sech}^2 x\end{aligned}$$

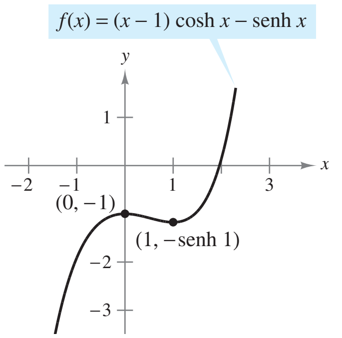
En los ejercicios 122 a 124, se pide la demostración de algunas de las reglas de derivación.

EJEMPLO 1 Derivación de funciones hiperbólicas

a) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{senh}(x^2-3)] = 2x\cosh(x^2-3)$ **b)** $\dfrac{d}{dx}[\ln(\cosh x)] = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \tanh x$

c) $\dfrac{d}{dx}[x\operatorname{senh} x - \cosh x] = x\cosh x + \operatorname{senh} x - \operatorname{senh} x = x\cosh x$

EJEMPLO 2 Localización de los extremos relativos



$f''(0) < 0$, entonces $(0, -1)$ es un máximo relativo. $f''(1) > 0$, para $(1, -\operatorname{senh} 1)$ es un mínimo relativo
Figura 5.38

Localizar los extremos relativos de $f(x) = (x-1)\cosh x - \operatorname{senh} x$.

Solución Se comienza por igualar a cero la derivada de f.

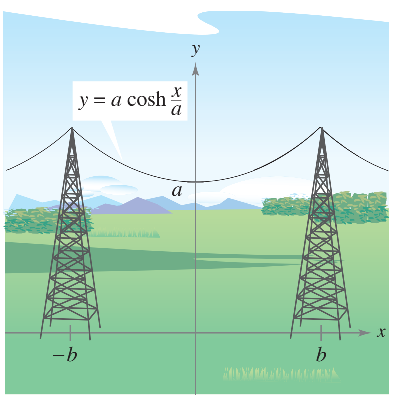
$$\begin{aligned} f'(x) = (x-1)\operatorname{senh} x + \cosh x - \cosh x &= 0 \\ (x-1)\operatorname{senh} x &= 0 \end{aligned}$$

Así pues, los puntos críticos son $x = 1$ y $x = 0$. Con el criterio de la segunda derivada es fácil comprobar que el punto $(0, -1)$ da un máximo relativo y el punto $(1, -\operatorname{senh} 1)$ da un mínimo relativo, como muestra la figura 5.38. Confirmar este resultado gráficamente usando una herramienta de graficación. Si no se dispone de las funciones hiperbólicas en la herramienta de graficación, se pueden utilizar funciones exponenciales como a continuación.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\left(\tfrac{1}{2}\right)(e^x + e^{-x}) - \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &= \tfrac{1}{2}(xe^x + xe^{-x} - e^x - e^{-x} - e^x + e^{-x}) \\ &= \tfrac{1}{2}(xe^x + xe^{-x} - 2e^x) \end{aligned}$$

Cuando un cable flexible uniforme, como un cable telefónico, está suspendido entre dos puntos, adopta la forma de una *catenaria*, que se estudia en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Cables colgantes



Catenaria
Figura 5.39

Los cables de un tendido eléctrico están suspendidos entre dos torres, formando la catenaria que se muestra en la figura 5.39. La ecuación de la catenaria es

$$y = a\cosh\frac{x}{a}.$$

La distancia entre las dos torres es $2b$. Calcular la pendiente de la catenaria en el punto de sujeción del cable en la torre de la derecha.

Solución Derivando se obtiene

$$y' = a\left(\frac{1}{a}\right)\operatorname{senh}\frac{x}{a} = \operatorname{senh}\frac{x}{a}.$$

En el punto $(b, a\cosh(b/a))$, la pendiente (desde la izquierda) viene dada por $m = \operatorname{senh}\dfrac{b}{a}$.

PARA MAYOR INFORMACIÓN En el ejemplo 3, el cable es una curva catenaria entre dos soportes de la misma altura. Para aprender acerca de la forma del cable sostenido entre dos soportes de diferente altura, ver el artículo “Reexamining the Catenary”, de Paul Cella en *The College Mathematics Journal*.

EJEMPLO 4 Integración de una función hiperbólica

Calcular $\int \cosh 2x \operatorname{senh}^2 2x \, dx$.

Solución

$$\begin{aligned}\int \cosh 2x \operatorname{senh}^2 2x \, dx &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{senh} 2x)^2(2\cosh 2x)\, dx & u = \operatorname{senh} 2x\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\operatorname{senh} 2x)^3}{3}\right] + C\\ &= \frac{\operatorname{senh}^3 2x}{6} + C\end{aligned}$$

Funciones hiperbólicas inversas

A diferencia de las funciones trigonométricas, las funciones hiperbólicas no son periódicas. De hecho, volviendo a la figura 5.37 se ve que cuatro de las seis funciones hiperbólicas son inyectivas (el seno, la tangente, la cosecante y la cotangente hiperbólicos). Así, se puede aplicar el teorema 5.7, el cual afirma que esas cuatro funciones tienen funciones inversas. Las otras dos (las funciones coseno y secante hiperbólicas) son inyectivas si se restringe su dominio a los números reales positivos, y es en este dominio restringido donde tienen función inversa. Debido a que las funciones hiperbólicas se definen en términos de las funciones exponenciales, no es de extrañar que las funciones hiperbólicas inversas puedan expresarse en términos de funciones logarítmicas, como se muestra en el teorema 5.19.

TEOREMA 5.19 FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Función	*Dominio*
$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	$(-\infty, \infty)$
$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$	$[1, \infty)$
$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$(-1, 1)$
$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$	$(0, 1]$
$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{\lvert x\rvert}\right)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

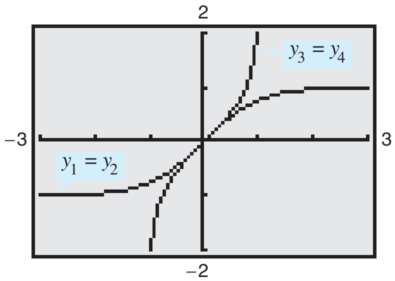
DEMOSTRACIÓN La demostración de este teorema es una aplicación directa de las propiedades de las funciones exponencial y logarítmica. Por ejemplo, si

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

y

$$g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

se puede ver que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, lo cual implica que g es la función inversa de f.



Gráfica de la función tangente hiperbólica y la función tangente hiperbólica inversa
Figura 5.40

TECNOLOGÍA Se puede utilizar una herramienta de graficación para verificar gráficamente los resultados del teorema 5.19. Por ejemplo, dibujando las gráficas de las funciones siguientes.

$y_1 = \tanh x$ — Tangente hiperbólica.

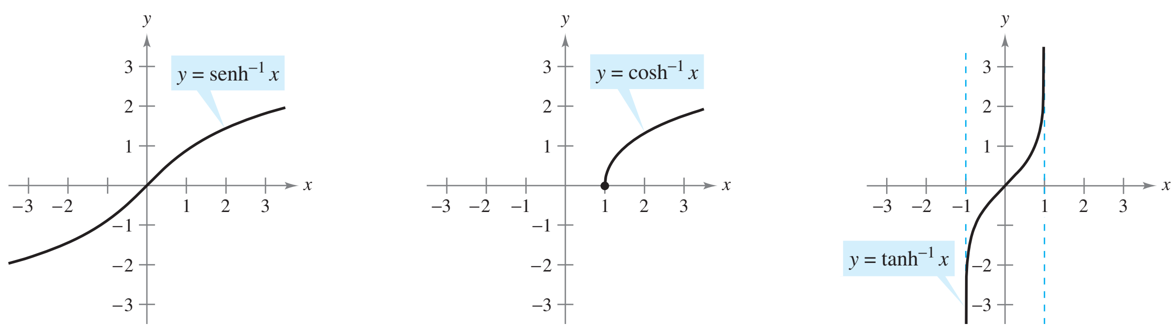
$y_2 = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ — Definición de la tangente hiperbólica.

$y_3 = \tanh^{-1} x$ — Tangente hiperbólica inversa.

$y_4 = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$ — Definición de la tangente hiperbólica inversa.

Los resultados se muestran en la figura 5.40. En ella se aprecia que $y_1 = y_2$ y $y_3 = y_4$. También se puede ver que la gráfica de y_1 es el reflejo de la de y_3 en la recta $y = x$.

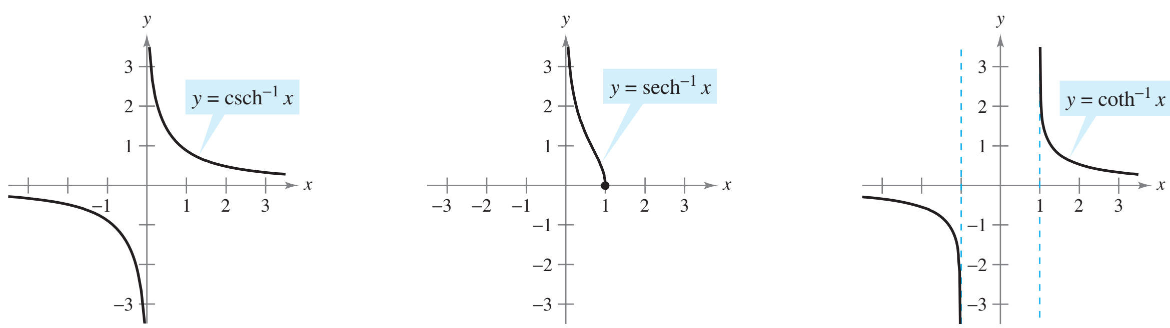
Las gráficas de las funciones hiperbólicas inversas se muestran en la figura 5.41.



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$

Dominio: $[1, \infty)$
Recorrido o rango: $[0, \infty)$

Dominio: $(-1, 1)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$



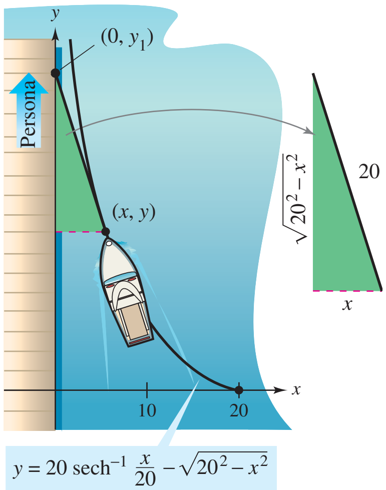
Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Dominio: $(0, 1]$
Recorrido o rango: $[0, \infty)$

Dominio: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Figura 5.41

La secante hiperbólica inversa se puede utilizar para definir la curva llamada *tractriz* o *curva de persecución*, que se analiza en el ejemplo 5.



Una persona tiene que caminar 41.27 pies para acercar el bote a 5 pies del muelle
Figura 5.42

EJEMPLO 5 Tractriz

Una persona sostiene una cuerda que está atada a un bote, como se muestra en la figura 5.42. Mientras la persona camina por el muelle, el bote recorre una **tractriz**, dada por la ecuación

$$y = a \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

donde a es la longitud de la cuerda. Si $a = 20$ pies, calcular la distancia que la persona debe caminar para llevar el bote a 5 pies del muelle.

Solución En la figura 5.42, notar que la distancia recorrida por la persona se da por

$$\begin{aligned} y_1 &= y + \sqrt{20^2 - x^2} = \left(20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{20} - \sqrt{20^2 - x^2}\right) + \sqrt{20^2 - x^2} \\ &= 20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{20}. \end{aligned}$$

Cuando $x = 5$, esta distancia es

$$\begin{aligned} y_1 = 20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{5}{20} &= 20 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (1/4)^2}}{1/4} \\ &= 20 \ln\left(4 + \sqrt{15}\right) \\ &\approx 41.27 \text{ pies.} \end{aligned}$$

Derivación e integración de funciones hiperbólicas inversas

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas, que recuerdan las de las funciones trigonométricas inversas, se enumeran en el teorema 5.20, junto con las correspondientes fórmulas de integración (en forma logarítmica). Se puede comprobar cada una de ellas al aplicar las definiciones logarítmicas de las funciones hiperbólicas inversas. (Ver los ejercicios 119 a 121.)

TEOREMA 5.20 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Sea u una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{senh}^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}} \qquad \frac{d}{dx}[\cosh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2} \qquad \frac{d}{dx}[\coth^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1} u] = \frac{-u'}{u\sqrt{1 - u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{csch}^{-1} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1 + u^2}}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C$$

EJEMPLO 6 Más sobre la tractriz

Para la tractriz del ejemplo 5, mostrar que el bote apunta siempre hacia la persona que tira de él.

Solución En un punto (x, y) de la tractriz, la pendiente de la gráfica marca la dirección del bote, como se muestra en la figura 5.42.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\left[20 \operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{20} - \sqrt{20^2 - x^2}\right] \\ &= -20\left(\frac{1}{20}\right)\left[\frac{1}{(x/20)\sqrt{1-(x/20)^2}}\right] - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-2x}{\sqrt{20^2 - x^2}}\right) \\ &= \frac{-20^2}{x\sqrt{20^2 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{20^2 - x^2}} \\ &= -\frac{\sqrt{20^2 - x^2}}{x} \end{aligned}$$

Sin embargo, en la figura 5.42 se puede ver que la pendiente del segmento de recta que une el punto $(0, y_1)$ con el punto (x, y) es también

$$m = -\frac{\sqrt{20^2 - x^2}}{x}.$$

Así pues, el bote apunta hacia la persona en todo momento. (Por esta razón se llama *curva de persecución*.)

EJEMPLO 7 Integración usando funciones hiperbólicas inversas

Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9x^2}}$.

Solución Sea $a = 2$ y $u = 3x$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{4-9x^2}} &= \int \frac{3\,dx}{(3x)\sqrt{4-9x^2}} && \int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} \\ &= -\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{4-9x^2}}{|3x|} + C && -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{|u|} + C \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Integración usando funciones hiperbólicas inversas

Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 4x^2}$.

Solución Sea $a = \sqrt{5}$ y $u = 2x$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5-4x^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{(\sqrt{5})^2 - (2x)^2} && \int \frac{du}{a^2-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2x}{\sqrt{5}-2x}\right|\right) + C && \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C \\ &= \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2x}{\sqrt{5}-2x}\right| + C \end{aligned}$$

5.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, evaluar la función. Si el valor no es un número racional, dar la respuesta con tres decimales.

1. *a*) $\operatorname{senh} 3$
   b) $\tanh(-2)$
2. *a*) $\cosh 0$
   b) $\operatorname{sech} 1$
3. *a*) $\operatorname{csch}(\ln 2)$
   b) $\coth(\ln 5)$
4. *a*) $\operatorname{senh}^{-1} 0$
   b) $\tanh^{-1} 0$
5. *a*) $\cosh^{-1} 2$
   b) $\operatorname{sech}^{-1} \frac{2}{3}$
6. *a*) $\operatorname{csch}^{-1} 2$
   b) $\coth^{-1} 3$

En los ejercicios 7 a 16, verificar la identidad.

7. $e^x = \operatorname{senh} x + \cosh x$
8. $e^{2x} = \operatorname{senh} 2x + \cosh 2x$
9. $\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$
10. $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$
11. $\cosh^2 x = \dfrac{1 + \cosh 2x}{2}$
12. $\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{-1 + \cosh 2x}{2}$
13. $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$
14. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
15. $\operatorname{senh} 3x = 3 \operatorname{senh} x + 4 \operatorname{senh}^3 x$
16. $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \dfrac{x + y}{2} \cosh \dfrac{x - y}{2}$

En los ejercicios 17 y 18, usar el valor de la función hiperbólica dada para hallar los valores de las otras funciones hiperbólicas en *x*.

17. $\operatorname{senh} x = \dfrac{3}{2}$
18. $\tanh x = \dfrac{1}{2}$

En los ejercicios 19 a 30, encontrar la derivada de la función.

19. $f(x) = \operatorname{senh} 3x$
20. $f(x) = \cosh(x - 2)$
21. $y = \operatorname{sech}(5x^2)$
22. $y = \tanh(3x^2 - 1)$
23. $f(x) = \ln(\operatorname{senh} x)$
24. $g(x) = \ln(\cosh x)$
25. $y = \ln\left(\tanh \dfrac{x}{2}\right)$
26. $y = x \cosh x - \operatorname{senh} x$
27. $h(x) = \dfrac{1}{4} \operatorname{senh} 2x - \dfrac{x}{2}$
28. $h(t) = t - \coth t$
29. $f(t) = \arctan(\operatorname{senh} t)$
30. $g(x) = \operatorname{sech}^2 3x$

En los ejercicios 31 a 34, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

31. $y = \operatorname{senh}(1 - x^2),\ (1, 0)$
32. $y = x^{\cosh x},\ (1, 1)$
33. $y = (\cosh x - \operatorname{senh} x)^2,\ (0, 1)$
34. $y = e^{\operatorname{senh} x},\ (0, 1)$

En los ejercicios 35 a 38, hallar los extremos relativos de la función. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

35. $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x - \cos x \cosh x, \quad -4 \leq x \leq 4$
36. $f(x) = x \operatorname{senh}(x - 1) - \cosh(x - 1)$
37. $g(x) = x \operatorname{sech} x$
38. $h(x) = 2 \tanh x - x$

En los ejercicios 39 y 40, demostrar que la función satisface la ecuación diferencial.

	Función	*Ecuación diferencial*
39.	$y = a \operatorname{senh} x$	$y''' - y' = 0$
40.	$y = a \cosh x$	$y'' - y = 0$

CAS *Aproximaciones lineal y cuadrática* **En los ejercicios 41 y 42, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la aproximación lineal. $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ y la aproximación cuadrática $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$ de la función f en $x = a$. Usar una herramienta de graficación para representar la función y las aproximaciones lineal y cuadrática.**

41. $f(x) = \tanh x, \quad a = 0$
42. $f(x) = \cosh x, \quad a = 0$

Catenarias **En los ejercicios 43 y 44, se proporciona un modelo de cables de alta tensión suspendidos entre dos torres. *a*) Representar gráficamente el modelo, *b*) calcular la altura del cable en los puntos de sujeción y en el punto medio entre las torres y *c*) encontrar la pendiente del modelo en el punto donde el cable está sujeto a la torre de la derecha.**

43. $y = 10 + 15 \cosh \dfrac{x}{15}, \quad -15 \leq x \leq 15$
44. $y = 18 + 25 \cosh \dfrac{x}{25}, \quad -25 \leq x \leq 25$

En los ejercicios 45 a 58, hallar la integral.

45. $\displaystyle\int \cosh 2x \, dx$
46. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(-x) \, dx$
47. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(1 - 2x) \, dx$
48. $\displaystyle\int \frac{\cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$
49. $\displaystyle\int \cosh^2(x - 1) \operatorname{senh}(x - 1) \, dx$
50. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh} x}{1 + \operatorname{senh}^2 x} \, dx$
51. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} \, dx$
52. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(2x - 1) \, dx$
53. $\displaystyle\int x \operatorname{csch}^2 \frac{x^2}{2} \, dx$
54. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^3 x \tanh x \, dx$
55. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{csch}(1/x) \coth(1/x)}{x^2} \, dx$
56. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\sqrt{9 - \operatorname{senh}^2 x}} \, dx$
57. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4 + 1} \, dx$
58. $\displaystyle\int \frac{2}{x\sqrt{1 + 4x^2}} \, dx$

En los ejercicios 59 a 64, evaluar la integral.

59. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \tanh x \, dx$
60. $\displaystyle\int_0^1 \cosh^2 x \, dx$
61. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{25 - x^2} \, dx$
62. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} \, dx$
63. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/4} \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} \, dx$
64. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} 2e^{-x} \cosh x \, dx$

En los ejercicios 65 a 74, calcular la derivada de la función.

65. $y = \cosh^{-1}(3x)$

66. $y = \tanh^{-1} \dfrac{x}{2}$

67. $y = \tanh^{-1} \sqrt{x}$

68. $f(x) = \coth^{-1}(x^2)$

69. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$

70. $y = \tanh^{-1}(\operatorname{sen} 2x)$

71. $y = (\operatorname{csch}^{-1} x)^2$

72. $y = \operatorname{sech}^{-1}(\cos 2x), \quad 0 < x < \pi/4$

73. $y = 2x \operatorname{senh}^{-1}(2x) - \sqrt{1 + 4x^2}$

74. $y = x \tanh^{-1} x + \ln \sqrt{1 - x^2}$

Desarrollo de conceptos

75. Discutir en qué son similares las funciones hiperbólicas y las funciones trigonométricas.

76. Dibujar la gráfica de cada una de las funciones hiperbólicas. Después identificar el dominio y el recorrido o rango de cada función.

77. ¿Cuál de las fórmulas de derivadas hiperbólicas difiere de sus contrapartes trigonométricas por un signo menos?

Para discusión

78. ¿Qué función hiperbólica toma sólo valores positivos? ¿Qué funciones hiperbólicas se incrementan en sus dominios?

Límites **En los ejercicios 79 a 86, encontrar los límites.**

79. $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{senh} x$

80. $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{senh} x$

81. $\lim\limits_{x \to \infty} \tanh x$

82. $\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh x$

83. $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{sech} x$

84. $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{csch} x$

85. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x}{x}$

86. $\lim\limits_{x \to 0^-} \coth x$

En los ejercicios 87 a 96, calcular la integral indefinida usando las fórmulas del teorema 5.20.

87. $\displaystyle\int \frac{1}{3 - 9x^2}\, dx$

88. $\displaystyle\int \frac{1}{2x\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx$

89. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}}\, dx$

90. $\displaystyle\int \frac{x}{9 - x^4}\, dx$

91. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1 + x}}\, dx$

92. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + x^3}}\, dx$

93. $\displaystyle\int \frac{-1}{4x - x^2}\, dx$

94. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 8}}$

95. $\displaystyle\int \frac{1}{1 - 4x - 2x^2}\, dx$

96. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{2x^2 + 4x + 8}}$

En los ejercicios 97 a 100, evaluar la integral usando las fórmulas del teorema 5.20.

97. $\displaystyle\int_3^7 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$

98. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{4 + x^2}}\, dx$

99. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{16 - 9x^2}\, dx$

100. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{25x^2 + 1}}\, dx$

En los ejercicios 101 a 104, resolver la ecuación diferencial.

101. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{80 + 8x - 16x^2}}$

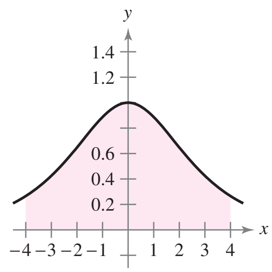
102. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(x - 1)\sqrt{-4x^2 + 8x - 1}}$

103. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 - 21x}{5 + 4x - x^2}$

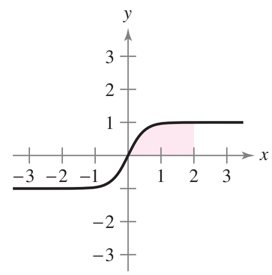
104. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - 2x}{4x - x^2}$

Área **En los ejercicios 105 a 108, encontrar el área de la región.**

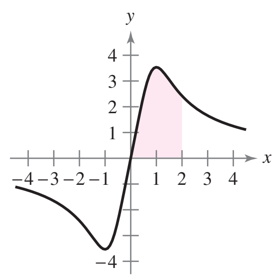
105. $y = \operatorname{sech} \dfrac{x}{2}$



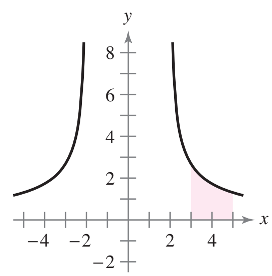
106. $y = \tanh 2x$



107. $y = \dfrac{5x}{\sqrt{x^4 + 1}}$



108. $y = \dfrac{6}{\sqrt{x^2 - 4}}$



En los ejercicios 109 y 110, evaluar la integral en términos de *a*) logaritmos naturales y *b*) funciones hiperbólicas inversas.

109. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

110. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2}$

111. ***Reacciones químicas*** Las sustancias químicas A y B se combinan en razón de 3 a 1 para formar un compuesto. La cantidad x de compuesto producida hasta el instante t es proporcional a las cantidades que quedan sin transformar de A y B en la disolución. Así pues, si se mezclan 3 kilogramos de A con 2 kilogramos de B, se tiene

$$\frac{dx}{dt} = k\left(3 - \frac{3x}{4}\right)\left(2 - \frac{x}{4}\right) = \frac{3k}{16}(x^2 - 12x + 32).$$

Un kilogramo del compuesto se ha formado en 10 minutos. Calcular la cantidad formada en 20 minutos y resolver la ecuación

$$\int \frac{3k}{16}\, dt = \int \frac{dx}{x^2 - 12x + 32}.$$

112. ***Movimiento vertical*** Un objeto es arrojado desde una altura de 400 pies.

a) Expresar la velocidad del objeto en función del tiempo (despreciando la resistencia al aire sobre el objeto).

b) Utilizando el resultado del apartado *a*) encontrar la función posición.

c) Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces $dv/dt = -32 + kv^2$, donde -32 pies/s^2 es la aceleración de la gravedad y k es una constante. Mostrar que la velocidad v es la función del tiempo

$$v(t) = -\sqrt{\frac{32}{k}}\tanh\left(\sqrt{32k}\,t\right)$$

al efectuar la siguiente integración y simplificando el resultado:

$$\int \frac{dv}{(32 - kv^2)} = -\int$$

d) Usando el resultado del apartado *c*) calcular $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$ e interpretarlo.

e) Integrar la función velocidad del apartado *c*) y hallar la posición s del objeto en función de t. Usar una herramienta de graficación para representar la función posición $k = 0.01$ y la función posición del apartado *b*) en la misma pantalla. Estimar el tiempo adicional requerido para que el objeto alcance el suelo, cuando se tiene en cuenta la resistencia al aire.

f) Describir qué sucedería si se aumenta el valor de k. A continuación, comprobar la afirmación con un valor particular de k.

Tractriz **En los ejercicios 113 y 114, usar la ecuación de la tractriz** $y = a\,\mathrm{sech}^{-1}\dfrac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$.

113. Encontrar dy/dx.

114. Sea L la recta tangente a la tractriz en el punto P. Si L corta al eje y en el punto Q, probar que la distancia entre P y Q es a.

115. Demostrar que $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $-1 < x < 1$.

116. Demostrar que $\mathrm{senh}^{-1}\, t = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$.

117. Demostrar que $\arctan(\mathrm{senh}\, x) = \mathrm{arcsen}(\tanh x)$.

118. Sean $x > 0$ y $b > 0$. Demostrar que $\displaystyle\int_{-b}^{b} e^{xt}\,dt = \frac{2\,\mathrm{senh}\, bx}{x}$.

En los ejercicios 119 a 124, verificar la fórmula de derivación.

119. $\dfrac{d}{dx}[\mathrm{sech}^{-1} x] = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

120. $\dfrac{d}{dx}[\cosh^{-1} x] = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

121. $\dfrac{d}{dx}[\mathrm{senh}^{-1} x] = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

122. $\dfrac{d}{dx}[\cosh x] = \mathrm{senh}\, x$

123. $\dfrac{d}{dx}[\coth x] = -\mathrm{csch}^2\, x$

124. $\dfrac{d}{dx}[\mathrm{sech}\, x] = -\mathrm{sech}\, x \tanh x$

Preparación del examen Putnam

125. Desde el vértice $(0, c)$ de la catenaria $y = c\cosh(x/c)$, se dibuja una recta L perpendicular a la tangente de la catenaria en el punto P. Demostrar que la longitud de L intersecada por los ejes es igual a la ordenada y del punto P.

126. Aprobar o rechazar que existe al menos una recta normal a la gráfica de $y = \cosh x$ en un punto $(a, \cosh a)$ y también normal a la gráfica de $y = \mathrm{senh}\, x$ en un punto $(c, \mathrm{senh}\, c)$.

[En un punto de la gráfica, una recta normal es la perpendicular a la recta tangente al punto. También, $x = (e^x + e^{-x})/2$ y $\mathrm{senh}\, x = (e^x - e^{-x})/2$.]

PROYECTO DE TRABAJO

Arco de San Luis

National Geographic/Getty Images

El arco de entrada a San Luis, Missouri, fue diseñada utilizando la función coseno hiperbólico. La ecuación utilizada para la construcción del arco es

$y = 693.8597 - 68.7672\cosh 0.0100333x,$

$-299.2239 \leq x \leq 299.2239$

donde x y y se miden en pies. Las secciones del arco son triángulos equiláteros, y (x, y) describe la trayectoria de los centros de masas de esos triángulos. Para cada valor de x, el área del triángulo de la sección transversal es $A = 125.1406\cosh 0.0100333x$. (*Fuente: Owner's Manual for the Gateway Arch, Saint Louis, MO, de William Thayer*)

a) ¿A qué altura sobre el suelo está el centro del triángulo más alto? (Al nivel del suelo es $y = 0$.)

b) ¿Cuál es la altura del arco? (*Sugerencia:* En un triángulo equilátero, $A = \sqrt{3}c^2$, donde c es la mitad de la base del triángulo y el centro de masa del triángulo está situado a dos tercios de la altura del triángulo.)

c) ¿Qué anchura tiene el arco en su base?

5 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, esbozar a mano la gráfica de la función. Identificar sus asíntotas.

1. $f(x) = \ln x - 3$
2. $f(x) = \ln(x + 3)$

En los ejercicios 3 y 4, usar las propiedades de los logaritmos para desarrollar la función logarítmica.

3. $\ln \sqrt[5]{\dfrac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}}$
4. $\ln[(x^2 + 1)(x - 1)]$

En los ejercicios 5 y 6, escribir la expresión como el logaritmo de una única cantidad.

5. $\ln 3 + \frac{1}{3}\ln(4 - x^2) - \ln x$
6. $3[\ln x - 2\ln(x^2 + 1)] + 2\ln 5$

En los ejercicios 7 y 8, despejar x.

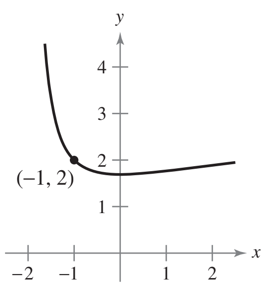
7. $\ln \sqrt{x + 1} = 2$
8. $\ln x + \ln(x - 3) = 0$

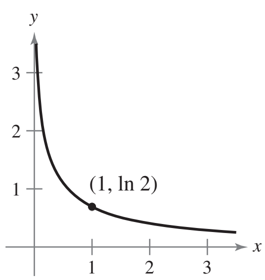
En los ejercicios 9 a 14, hallar la derivada de la función.

9. $g(x) = \ln \sqrt{2x}$
10. $h(x) = \ln \dfrac{x(x - 1)}{x - 2}$
11. $f(x) = x\sqrt{\ln x}$
12. $f(x) = \ln[x(x^2 - 2)^{2/3}]$
13. $y = \dfrac{1}{b^2}[a + bx - a\ln(a + bx)]$
14. $y = -\dfrac{1}{ax} + \dfrac{b}{a^2}\ln \dfrac{a + bx}{x}$

En los ejercicios 15 y 16, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

15. $y = \ln(2 + x) + \dfrac{2}{2 + x}$
16. $y = \ln \dfrac{1 + x}{x}$





En los ejercicios 17 a 24, hallar o evaluar la integral.

17. $\displaystyle\int \frac{1}{7x - 2}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 1}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x}\,dx$
21. $\displaystyle\int_1^4 \frac{2x + 1}{2x}\,dx$
22. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$
23. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sec \theta\,d\theta$
24. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx$

En los ejercicios 25 a 30, *a*) hallar la inversa de *f*, *b*) usar una herramienta de graficación para representar *f* y f^{-1} en una misma pantalla, *c*) comprobar que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ y *d*) establecer los dominios y rangos de *f* y f^{-1}.

25. $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$
26. $f(x) = 5x - 7$
27. $f(x) = \sqrt{x + 1}$
28. $f(x) = x^3 + 2$
29. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$
30. $f(x) = x^2 - 5, \quad x \geq 0$

En los ejercicios 31 a 34, verificar que *f* tiene una inversa. Entonces usar la función *f* del número real dado *a* para encontrar $(f^{-1})'(a)$. (*Sugerencia:* Usar el teorema 5.9.)

31. $f(x) = x^3 + 2, \quad a = -1$
32. $f(x) = x\sqrt{x - 3}, \quad a = 4$
33. $f(x) = \tan x, \quad -\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}, \quad a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
34. $f(x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad a = 0$

En los ejercicios 35 y 36, *a*) hallar la función inversa de *f*, *b*) usar una herramienta de graficación para representar *f* y f^{-1} en una misma pantalla, *c*) comprobar que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ y *d*) establecer los dominios y rangos de *f* y f^{-1}.

35. $f(x) = \ln \sqrt{x}$
36. $f(x) = e^{1-x}$

En los ejercicios 37 y 38, dibujar sin ayuda de una herramienta de graficación la gráfica de la función.

37. $y = e^{-x/2}$
38. $y = e^{-x^2}$

En los ejercicios 39 a 44, encontrar la derivada de la función.

39. $g(t) = t^2 e^t$
40. $g(x) = \ln \dfrac{e^x}{1 + e^x}$
41. $y = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$
42. $h(z) = e^{-z^2/2}$
43. $g(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$
44. $y = 3e^{-3/t}$

En los ejercicios 45 y 46, encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

45. $f(x) = \ln(e^{-x^2}), \quad (2, -4)$
46. $f(\theta) = \dfrac{1}{2}e^{\operatorname{sen} 2\theta}, \quad \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

En los ejercicios 47 y 48, hallar dy/dx por derivación implícita.

47. $y\ln x + y^2 = 0$
48. $\cos x^2 = xe^y$

En los ejercicios 49 a 56, encontrar o evaluar la integral.

49. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-3x^2}\,dx$
50. $\displaystyle\int_{1/2}^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$
51. $\displaystyle\int \frac{e^{4x} - e^{2x} + 1}{e^x}\,dx$
52. $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\,dx$

53. $\int xe^{1-x^2}\,dx$

54. $\int x^2 e^{x^3+1}\,dx$

55. $\int_1^3 \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx$

56. $\int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$

57. Demostrar que $y = e^x(a\cos 3x + b\,\text{sen}\,3x)$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 10y = 0$.

58. ***Depreciación*** El valor V de un artículo después de t años es comparado por $V = 9\,000e^{-0.6t}$, $0 \le t \le 5$.

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función.

b) Encontrar la razón de cambio de V respecto de t cuando $t = 1$ y $t = 4$.

c) Usar una herramienta de graficación para representar las líneas tangentes a la función cuando $t = 1$ y $t = 4$.

En los ejercicios 59 y 60, calcular el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones.

59. $y = xe^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$

60. $y = 2e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

En los ejercicios 61 a 64, dibujar a mano la gráfica de la función.

61. $y = 3^{x/2}$

62. $y = 6(2^{-x^2})$

63. $y = \log_2(x-1)$

64. $y = \log_4 x^2$

En los ejercicios 65 a 70, encontrar la derivada de la función.

65. $f(x) = 3^{x-1}$

66. $f(x) = (4e)^x$

67. $y = x^{2x+1}$

68. $y = x(4^{-x})$

69. $g(x) = \log_3 \sqrt{1-x}$

70. $h(x) = \log_5 \frac{x}{x-1}$

En los ejercicios 71 y 72, encontrar la integral indefinida.

71. $\int (x+1)5^{(x+1)^2}\,dx$

72. $\int \frac{2^{-1/t}}{t^2}\,dt$

73. ***Ritmo o velocidad de ascenso*** El tiempo t (en minutos) que tarda un avión pequeño en subir a una altitud de h pies es

$$t = 50\log_{10}\frac{18\,000}{18\,000 - h}$$

donde 18 000 pies es el tope de altitud alcanzable por el avión.

a) Determinar el dominio de la función apropiada al contexto del problema.

b) Usar una herramienta de graficación para la función tiempo e identificar las asíntotas.

c) Encontrar el instante en el que la altitud crece a mayor ritmo o velocidad.

74. ***Interés compuesto***

a) ¿Qué capital hay que invertir continuamente a 5% de interés compuesto para que, al cabo de 15 años, el balance final sea $10 000?

b) Un depósito a una tasa de r% de interés compuesto continuo duplica su valor en 10 años. Calcular r.

En los ejercicios 75 y 76, representar la gráfica de la función.

75. $f(x) = 2\arctan(x+3)$

76. $h(x) = -3\,\text{arcsen}\,2x$

En los ejercicios 77 y 78, evaluar la expresión sin usar una calculadora. (*Sugerencia:* Dibujar un triángulo rectángulo.)

77. *a*) $\text{sen}(\text{arcsen}\,\frac{1}{2})$

b) $\cos(\text{arcsen}\,\frac{1}{2})$

78. *a*) $\tan(\text{arccot}\,2)$

b) $\cos(\text{arcsec}\,\sqrt{5})$

En los ejercicios 79 a 84, encontrar la derivada de la función.

79. $y = \tan(\text{arcsen}\,x)$

80. $y = \arctan(x^2 - 1)$

81. $y = x\,\text{arcsec}\,x$

82. $y = \frac{1}{2}\arctan e^{2x}$

83. $y = x(\text{arcsen}\,x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\,\text{arcsen}\,x$

84. $y = \sqrt{x^2-4} - 2\,\text{arcsec}\,\frac{x}{2}$, $\quad 2 < x < 4$

En los ejercicios 85 a 90, encontrar la integral indefinida.

85. $\int \frac{1}{e^{2x}+e^{-2x}}\,dx$

86. $\int \frac{1}{3+25x^2}\,dx$

87. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

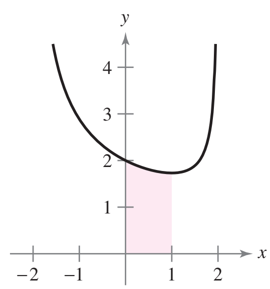
88. $\int \frac{1}{16+x^2}\,dx$

89. $\int \frac{\arctan(x/2)}{4+x^2}\,dx$

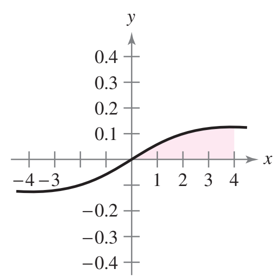
90. $\int \frac{\text{arcsen}\,2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

En los ejercicios 91 y 92, encontrar el área de la región.

91. $y = \frac{4-x}{\sqrt{4-x^2}}$



92. $y = \frac{x}{16+x^2}$



93. ***Movimiento armónico*** Un peso de masa m está sujeto al extremo de un resorte que oscila con movimiento armónico simple. Según la ley de Hooke, se puede determinar que

$$\int \frac{dy}{\sqrt{A^2-y^2}} = \int \sqrt{\frac{k}{m}}\,dt$$

donde A es el desplazamiento máximo, t el tiempo y k una constante. Expresar y en función de t, teniendo que $y = 0$ cuando $t = 0$.

En los ejercicios 94 y 95, encontrar la derivada de la función.

94. $y = 2x - \cosh\sqrt{x}$

95. $y = x\tanh^{-1}2x$

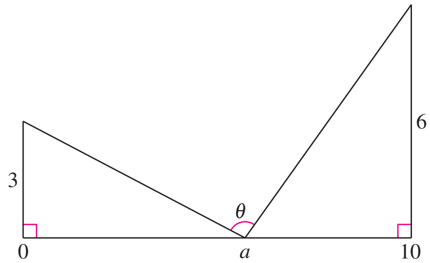
En los ejercicios 96 y 97, encontrar la integral indefinida.

96. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$

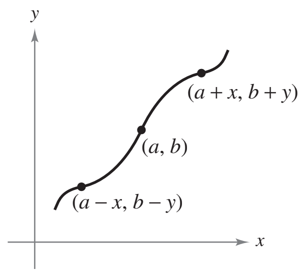
97. $\int x^2\,\text{sech}^2\,x^3\,dx$

SP Solución de problemas

1. Encontrar el valor de a que maximiza el ángulo θ mostrado en la figura. ¿Cuál es el valor aproximado de este ángulo?



2. Recordar que la gráfica de una función $y = f(x)$ es simétrica respecto al origen si (x, y) es un punto de la gráfica, $(-x, -y)$ lo es también. La gráfica de la función $y = f(x)$ es **simétrica respecto al punto (a, b)** siempre que $(a - x, b - y)$ es un punto de la gráfica, $(a + x, b + y)$ lo es también, como se muestra en la figura.



a) Trazar la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Escribir un párrafo breve explicando cómo la simetría de la gráfica respecto al punto $(0, \pi)$ permite concluir que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 0.$$

b) Trazar la gráfica de $y = \operatorname{sen} x + 2$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Usar la simetría de la gráfica respecto al punto $(\pi, 2)$ para evaluar la integral

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} x + 2)\, dx.$$

c) Trazar la gráfica de $y = \arccos x$ en el intervalo $[-1, 1]$. Usar la simetría de la gráfica para evaluar la integral

$$\int_{-1}^{1} \arccos x\, dx$$

d) Evaluar la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}\, dx.$

3. *a*) Usar una herramienta de graficación para representar $f(x) = \dfrac{\ln(x + 1)}{x}$ sobre el intervalo $[-1, 1]$.

b) Usar la gráfica para estimar $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$.

c) Usar la definición de derivada para justificar la respuesta del apartado *b*).

4. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$.

a) Determinar el dominio de la función f.

b) Encontrar dos valores de x que satisfagan $f(x) = 1$.

c) Encontrar dos valores de x que satisfagan $f(x) = -1$.

d) ¿Cuál es el recorrido o rango de la función f?

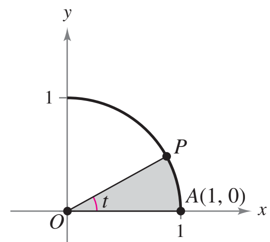
e) Calcular $f'(x)$ y usar el cálculo para encontrar el valor máximo de f en el intervalo $[1, 10]$.

f) Usar una herramienta de graficación para representar f en la pantalla $[0, 5] \times [-2, 2]$ y estimar $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$, si es que existe.

g) Determinar $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$ analíticamente, si es que existe.

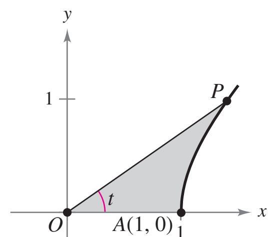
5. Graficar la función exponencial $y = a^x$ para $a = 0.5$, 1.2 y 2.0. ¿Cuál de estas curvas interseca la recta $y = x$? Determinar todos los valores positivos de a para los cuales la curva $y = a^x$ hace intersección con la recta $y = x$.

6. *a*) Sea $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ un punto sobre el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante (ver la figura). Mostrar que t es igual a dos veces el área del sector circular sombreado AOP.



b) Sea $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ un punto sobre la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ en el primer cuadrante (ver la figura). Mostrar que t es igual a dos veces el área de la región sombreada AOP. Empezar por mostrar que el área AOP está dada por la fórmula

$$A(t) = \frac{1}{2}\cosh t \operatorname{senh} t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1}\, dx.$$

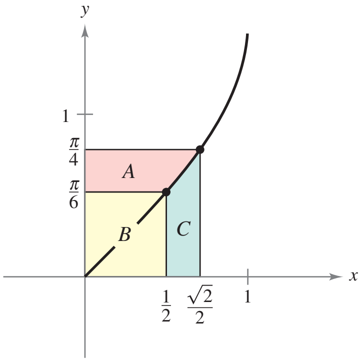


7. Aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = \ln x$ sobre el intervalo cerrado $[1, e]$. Encontrar el valor de c en el intervalo abierto $(1, e)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1}.$$

8. Mostrar que $f(x) = \dfrac{\ln x^n}{x}$ es una función decreciente para $x > e$ y $n > 0$.

9. Considerar las tres regiones A, B y C determinadas por la gráfica de $f(x) = \text{arcsen } x$, como se muestra en la figura.



a) Calcular las áreas de las regiones A y B.

b) Usar la respuesta del apartado *a)* para evaluar la integral

$$\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \text{arcsen } x \, dx.$$

c) Usar la respuesta del apartado *a)* para evaluar la integral

$$\int_{1}^{3} \ln x \, dx.$$

d) Usar la respuesta del apartado *a)* para evaluar la integral

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx.$$

10. Sea L la recta tangente de la gráfica de la función $y = \ln x$ en el punto (a, b). Demostrar que la distancia entre b y c siempre es igual a uno.

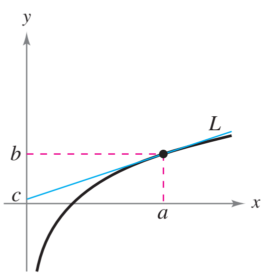


Figura para 10

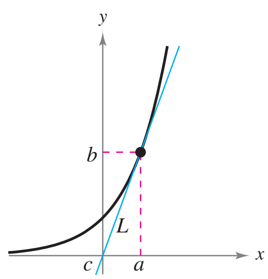


Figura para 11

11. Sea L la línea tangente de la gráfica de la función $y = e^x$ en el punto (a, b). Demostrar que la distancia entre a y c siempre es igual a uno.

12. La **función gudermanniana** de x es $\text{gd}(x) = \arctan(\text{senh } x)$

a) Graficar gd usando una herramienta de graficación.

b) Mostrar que gd es una función impar.

c) Mostrar que gd es monótona y, por tanto, tiene una inversa.

d) Encontrar el punto de inflexión de gd.

e) Verificar que $\text{gd}(x) = \text{arcsen}(\tanh x)$.

f) Verificar que $\text{gd}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\cosh t}$.

13. Usar integración por sustitución para encontrar el área bajo la curva

$$y = \frac{1}{\sqrt{x} + x}$$

entre $x = 1$ y $x = 4$.

14. Usar la integración por sustitución para encontrar el área bajo la curva

$$y = \frac{1}{\text{sen}^2 x + 4 \cos^2 x}$$

entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.

15. *a)* Usar una herramienta de graficación para comparar la gráfica de la función $y = e^x$ con las gráficas de cada una de las funciones dadas.

i) $y_1 = 1 + \dfrac{x}{1!}$

ii) $y_2 = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!}$

iii) $y_3 = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$

b) Identificar el patrón de las funciones polinomiales sucesivas en el apartado *a)*, extender el patrón un término más y comparar la gráfica de la función polinomial resultante con la gráfica de $y = e^x$.

c) ¿Qué implica este patrón?

16. Una hipoteca de una casa por \$120 000 por 35 años a un $9\frac{1}{2}\%$ tiene un pago mensual de \$985.93. Parte de este pago mensual va al interés sobre el balance no pagado y el resto del pago se utiliza para reducir el capital principal. La cantidad que va para el interés es

$$u = M - \left(M - \frac{Pr}{12}\right)\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$$

y la cantidad que va directamente hacia la reducción del capital principal es

$$v = \left(M - \frac{Pr}{12}\right)\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}.$$

En esas fórmulas P es la cantidad de la hipoteca, r la tasa de interés, M el pago mensual y t el tiempo en años.

a) Usar una herramienta de graficación para representar cada función en la misma pantalla. (La pantalla debe mostrar los 35 años de pagos de la hipoteca.)

b) En los primeros años, ¿a qué corresponde la mayor parte de la mensualidad? Estimar el momento en que se dedican cantidades iguales a los intereses y a la amortización.

c) Usar las gráficas del apartado *a)* para formular una conjetura acerca de la relación entre las pendientes de las rectas tangentes de las dos curvas para un valor específico de t. Proporcionar un argumento analítico para verificar la conjetura. Encontrar $u'(15)$ y $v'(15)$.

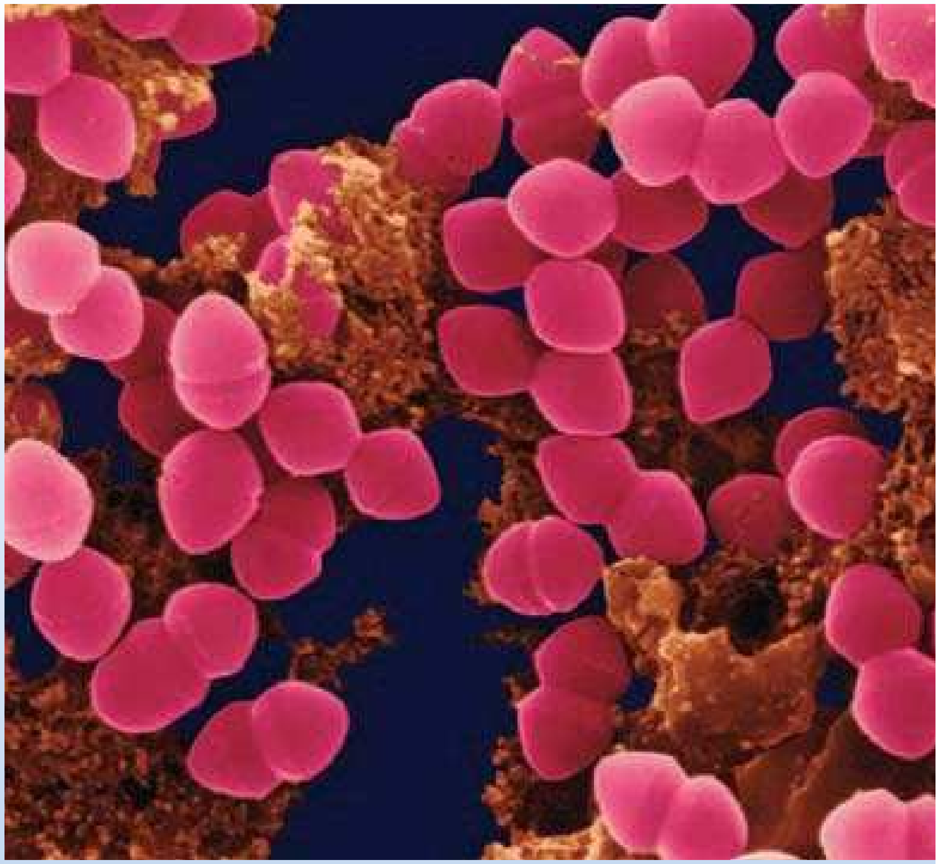
d) Repetir los apartados *a)* y *b)* para un plazo de 20 años ($M = \$1\,118.56$). ¿Qué se puede concluir?

6 Ecuaciones diferenciales

En este capítulo se estudiará una de las más importantes aplicaciones del cálculo: *las ecuaciones diferenciales*. El lector aprenderá varios métodos para resolver diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, como las homogéneas, las lineales de primer orden y las de Bernoulli. Posteriormente aplicará esas reglas para resolver ecuaciones diferenciales en problemas de aplicación.

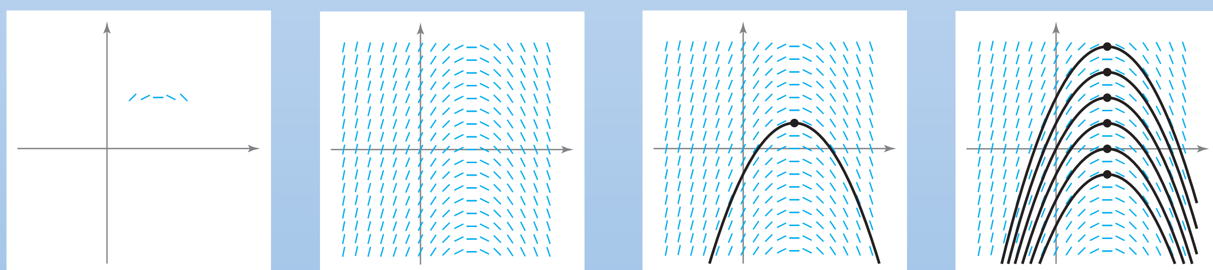
En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo generar un campo de pendientes de una ecuación diferencial y encontrar una solución particular. (6.1)
- Cómo usar una función exponencial para modelos de crecimiento y decrecimiento. (6.2)
- Cómo usar el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales. (6.3)
- Cómo resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y la ecuación diferencial de Bernoulli. (6.4)



Dr. Dennis Kunkel/Getty Images

Según el tipo de bacteria, el tiempo que le toma duplicar su peso al cultivo puede variar mucho, desde varios minutos hasta varios días. ¿Cómo se usaría una ecuación diferencial para modelar la tasa de crecimiento del peso del cultivo de una bacteria? (Ver la sección 6.3, ejercicio 84.)



Una función $y = f(x)$ es una solución de una ecuación diferencial, si la ecuación se satisface cuando y y sus derivadas se reemplazan por $f(x)$ y sus derivadas. Una manera de resolver una ecuación diferencial es mediante los campos de pendientes, los cuales muestran la forma de todas las soluciones de una ecuación diferencial. (Ver la sección 6.1.)

6.1 Campos de pendientes y método de Euler

- **Usar condiciones iniciales para encontrar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales.**
- **Usar campos de pendientes para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales.**
- **Usar el método de Euler para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales.**

Soluciones general y particular

En este texto se aprenderá que los fenómenos físicos se pueden describir por medio de ecuaciones diferenciales. Hay que recordar que una **ecuación diferencial** en x y y es una ecuación que incluye x, y y derivadas de y. En la sección 6.2 se observará que los problemas acerca de la descomposición radiactiva, el crecimiento poblacional y las leyes de enfriamiento de Newton se pueden formular en términos de ecuaciones diferenciales.

Una función $y = f(x)$ se denomina **solución** de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface cuando y y sus derivadas se reemplazan por $f(x)$ y sus derivadas. Por ejemplo, la derivación y sustitución demostrarán que $y = e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = 0$. Esto demuestra que cada solución de esta ecuación diferencial es de la forma

$$y = Ce^{-2x} \qquad \text{Solución general de } y' + 2y = 0.$$

donde C es cualquier número real. La solución se llama **solución general**. Algunas ecuaciones diferenciales tienen **soluciones singulares** que no se pueden escribir como casos especiales de la solución general. Sin embargo, tales soluciones no se consideran en este texto. El **orden** de una ecuación diferencial se determina por la derivada de mayor orden en la ecuación. Como ejemplo, $y' = 4y$ es una ecuación diferencial de primer orden. Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se discutirán en la sección 6.4.

En la sección 4.1, ejemplo 8, se observó que la ecuación diferencial de segundo orden $s''(t) = -32$ tiene la solución general

$$s(t) = -16t^2 + C_1t + C_2 \qquad \text{Solución general de } s''(t) = -32.$$

que contiene dos constantes arbitrarias. Se puede mostrar que una ecuación diferencial de orden n tiene una solución general con n constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1 Verificación de soluciones

Determinar si la función es una solución de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$.

a) $y = \operatorname{sen} x$ ***b***) $y = 4e^{-x}$ ***c***) $y = Ce^x$

Solución

a) Dado que $y = \operatorname{sen} x$, $y' = \cos x$, y $y'' = -\operatorname{sen} x$, se deduce que

$$y'' - y = -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = -2 \operatorname{sen} x \neq 0.$$

Así, $y = \operatorname{sen} x$ *no* es una solución.

b) Dado que $y = 4e^{-x}$, $y' = -4e^{-x}$, y $y'' = 4e^{-x}$, se deduce que

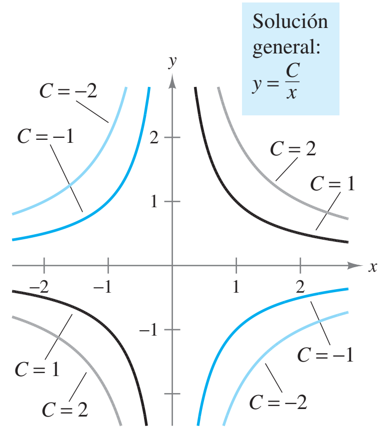
$$y'' - y = 4e^{-x} - 4e^{-x} = 0.$$

Así, $y = 4e^{-x}$ es una solución.

c) Dado que $y = Ce^x$, $y' = Ce^x$, y $y'' = Ce^x$, se deduce que

$$y'' - y = Ce^x - Ce^x = 0.$$

Así, $y = Ce^x$ es una solución para cualquier valor de C.



Curvas solución para $xy' + y = 0$
Figura 6.1

Geométricamente, la solución general de una ecuación diferencial de primer orden representa una familia de curvas conocidas como **curvas solución**, una para cada valor asignado a la constante arbitraria. Por ejemplo, se puede verificar que cada función de la forma

$$y = \frac{C}{x}$$ Solución general de $xy' + y = 0$.

es una solución de la ecuación diferencial $xy' + y = 0$. La figura 6.1 muestra cuatro de las curvas solución correspondientes a diferentes valores de C.

Como se discutió en la sección 4.1, las **soluciones particulares** de la ecuación diferencial se obtienen de las **condiciones iniciales** que da el valor de la variable dependiente o una de sus derivadas para un valor particular de la variable independiente. El término "condición inicial" deriva del hecho de que, con frecuencia en problemas que involucran tiempo, el valor de la variable dependiente o una de sus derivadas es conocida en el tiempo *inicial* $t = 0$. Como ejemplo, la ecuación diferencial de segundo orden $s''(t) = -32$ tiene la solución general

$$s(t) = -16t^2 + C_1t + C_2$$ Solución general de $s''(t) = -32$.

podrá tener las siguientes condiciones iniciales.

$$s(0) = 80, \qquad s'(0) = 64$$ Condiciones iniciales.

En este caso, las condiciones iniciales llevan a la solución particular

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80.$$ Solución particular.

EJEMPLO 2 Encontrar una solución particular

Dada la ecuación diferencial $xy' - 3y = 0$, verificar que $y = Cx^3$ es una solución, y encontrar la solución particular determinada por la condición inicial $y = 2$ cuando $x = -3$.

Solución Se sabe que $y = Cx^3$ es una solución dado que $y' = 3Cx^2$ y

$$\begin{aligned} xy' - 3y &= x(3Cx^2) - 3(Cx^3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, la condición inicial $y = 2$ cuando $x = -3$ lleva a

$$y = Cx^3$$ Solución general.

$$2 = C(-3)^3$$ Sustituye la condición inicial.

$$-\frac{2}{27} = C$$ Solución para C.

y se puede concluir que la solución particular es

$$y = -\frac{2x^3}{27}.$$ Solución particular.

Verificar esta solución al sustituir y y y' en la ecuación diferencial original.

NOTA Para determinar una solución particular, el número de condiciones iniciales debe corresponder al número de constantes en la solución general.

Campos de pendientes

Resolver una ecuación diferencial analíticamente puede ser difícil o casi imposible. Sin embargo, existe una aproximación gráfica que se puede usar para aprender mucho acerca de la solución de una ecuación diferencial. Considerar una ecuación diferencial de la forma

$$y' = F(x, y) \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

donde $F(x, y)$ es alguna expresión en x y y. En cada punto (x, y) en el plano xy donde F está definida la ecuación diferencial determina la pendiente $y' = F(x, y)$ de la solución en ese punto. Si se dibuja una recta corta con pendiente $F(x, y)$ en los puntos seleccionados (x, y) en el dominio de F, entonces esos segmentos forman un **campo de pendientes** o un *campo de direcciones* para la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$. Cada segmento tiene la misma pendiente que la curva de solución a través de ese punto. Un campo de pendientes muestra la forma general de todas las soluciones y puede ser útil en la obtención de una perspectiva visual de las direcciones de las soluciones de una ecuación diferencial.

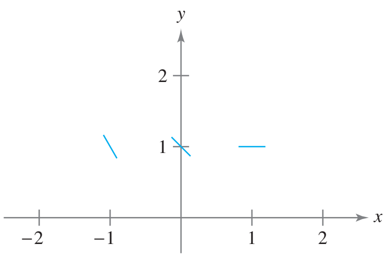


Figura 6.2

EJEMPLO 3 Representación gráfica de un campo de pendientes

Representar un campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = x - y$ para los puntos $(-1, 1)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$.

Solución La pendiente de la curva solución en cualquier punto (x, y) es $F(x, y) = x - y$. Así, la pendiente en el punto $(-1, 1)$ es $y' = -1 - 1 = -2$, la pendiente en $(0, 1)$ es $y' = 0 - 1 = -1$, y la pendiente en $(1, 1)$ es $y' = 1 - 1 = 0$. Dibujar segmentos cortos en los tres puntos con sus respectivas pendientes, como se muestra en la figura 6.2.

EJEMPLO 4 Identificar campos de pendientes para ecuaciones diferenciales

Asociar a cada campo vectorial su ecuación diferencial.

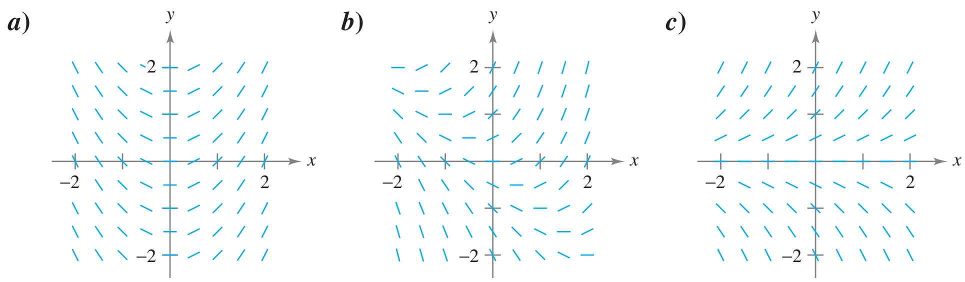


Figura 6.3

i) $y' = x + y$ *ii*) $y' = x$ *iii*) $y' = y$

Solución

a) En la figura 6.3*a* se puede observar que la pendiente de cualquier punto a lo largo del eje y es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = x$. Así, la gráfica corresponde con *ii*).

b) En la figura 6.3*b* se puede observar que la pendiente en el punto $(1, -1)$ es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = x + y$. Así, la gráfica corresponde con *i*).

c) En la figura 6.3*c* se puede observar que la pendiente de algún punto a lo largo del eje x es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = y$. Así, la gráfica corresponde con *iii*).

Una curva solución de una ecuación diferencial $y' = F(x, y)$ es simplemente una curva en el plano xy cuya recta tangente en cada punto (x, y) tiene pendiente igual a $F(x, y)$. Esto se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Trazado de una solución mediante un campo de pendientes

Trazar un campo de pendientes para la ecuación diferencial

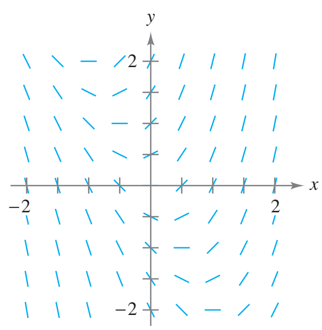
$$y' = 2x + y.$$

Usar un campo de pendientes para representar gráficamente la solución que pasa por el punto $(1, 1)$.

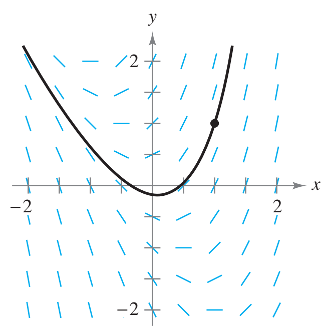
Solución Hacer una tabla que muestre las pendientes en varios puntos. La tabla siguiente es un pequeño ejemplo. Se deben calcular las pendientes de muchos puntos para obtener un campo de pendientes representativo.

x	-2	-2	-1	-1	0	0	1	1	2	2
y	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
$y' = 2x + y$	-5	-3	-3	-1	-1	1	1	3	3	5

A continuación, dibujar segmentos de rectas en los puntos con sus respectivas pendientes, como se muestra en la figura 6.4.



Campo de pendientes para $y' = 2x + y$
Figura 6.4



Solución particular para $y' = 2x + y$ que pasa a través de $(1, 1)$
Figura 6.5

Después de dibujar el campo de pendientes, se comienza en el punto inicial $(1, 1)$ y se mueve a la derecha en dirección del segmento. A continuación, dibujar la curva solución tal que ésta se mueva paralela al segmento más cercano. Hacer lo mismo para la izquierda de $(1, 1)$. La solución resultante se muestra en la figura 6.5.

Del ejemplo 5, notar que el campo de pendientes muestra que mientras x aumenta, y' lo hace hasta el infinito.

NOTA Dibujar un campo de pendientes a mano es tedioso. En la práctica, los campos de pendientes usualmente se dibujan mediante un método gráfico.

Método de Euler

El **método de Euler** es un método numérico para aproximar la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = F(x, y)$$

que pasa a través del punto (x_0, y_0). Con esta información se sabe que la gráfica de esa solución pasa a través del punto (x_0, y_0) y tiene una pendiente de $F(x_0, y_0)$ en ese punto. Esto da un "punto inicial" para aproximar la solución.

A partir del punto inicial, se sigue en la dirección indicada por la pendiente. Mediante un pequeño paso h, se mueve a lo largo de la recta tangente hasta llegar al punto (x_1, y_1), donde

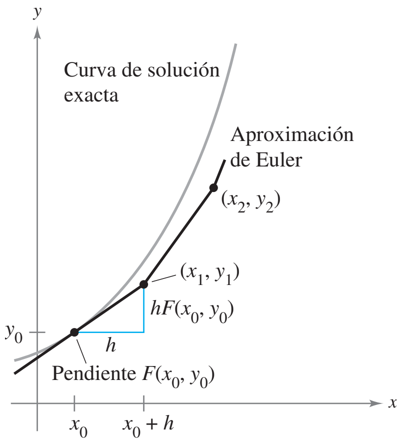


Figura 6.6

$$x_1 = x_0 + h \quad \text{y} \quad y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

como se muestra en la figura 6.6. Si se considera (x_1, y_1) como un nuevo punto inicial, se puede repetir el proceso para obtener un segundo punto (x_2, y_2). Los valores de x_i y y_i son los siguientes.

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + h & y_1 &= y_0 + hF(x_0, y_0)\\
x_2 &= x_1 + h & y_2 &= y_1 + hF(x_1, y_1)\\
&\vdots & &\vdots\\
x_n &= x_{n-1} + h & y_n &= y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})
\end{aligned}$$

NOTA Se pueden obtener mejores aproximaciones de la solución exacta si se escogen tamaños de paso cada vez más pequeños. ■

EJEMPLO 6 Aproximar una solución mediante el método de Euler

Usar el método de Euler para aproximar la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = x - y$$

que pasa a través del punto (0, 1). Usar un paso de $h = 0.1$.

Solución Mediante $h = 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $F(x, y) = x - y$, se tiene $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3, \ldots,$ y

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + (0.1)(0 - 1) = 0.9\\
y_2 &= y_1 + hF(x_1, y_1) = 0.9 + (0.1)(0.1 - 0.9) = 0.82\\
y_3 &= y_2 + hF(x_2, y_2) = 0.82 + (0.1)(0.2 - 0.82) = 0.758.
\end{aligned}$$

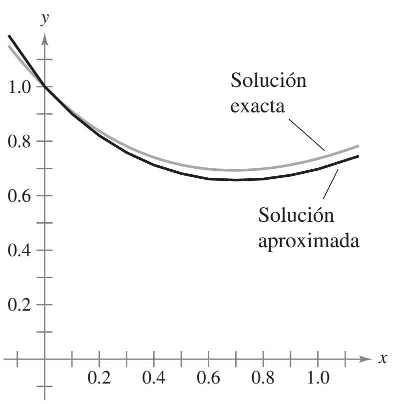


Figura 6.7

Las primeras diez aproximaciones se muestran en la tabla. Se pueden representar esos valores para obtener una gráfica de la solución aproximada, como se muestra en la figura 6.7.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	1	0.900	0.820	0.758	0.712	0.681	0.663	0.657	0.661	0.675	0.697

NOTA Para la ecuación diferencial aplicada en el ejemplo 6, se puede verificar que la solución exacta es $y = x - 1 + 2e^{-x}$. La figura 6.7 compara esta solución exacta con la solución aproximada obtenida en el ejemplo 6. ■

6.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, verificar la solución de la ecuación diferencial.

	Solución	*Ecuación diferencial*
1.	$y = Ce^{4x}$	$y' = 4y$
2.	$y = e^{-2x}$	$3y' + 5y = -e^{-2x}$
3.	$x^2 + y^2 = Cy$	$y' = 2xy/(x^2 - y^2)$
4.	$y^2 - 2\ln y = x^2$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{y^2 - 1}$
5.	$y = C_1 \operatorname{sen} x - C_2 \cos x$	$y'' + y = 0$
6.	$y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x} \operatorname{sen} x$	$y'' + 2y' + 2y = 0$
7.	$y = -\cos x \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert$	$y'' + y = \tan x$
8.	$y = \frac{2}{5}(e^{-4x} + e^{x})$	$y'' + 4y' = 2e^{x}$

En los ejercicios 9 a 12, verificar la solución particular de la ecuación diferencial.

	Solución	*Ecuación diferencial y condición inicial*
9.	$y = \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x$	$2y + y' = 2\operatorname{sen}(2x) - 1$ $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$
10.	$y = \frac{1}{2}x^2 - 2\cos x - 3$	$y' = x + 2\operatorname{sen} x$ $y(0) = -5$
11.	$y = 4e^{-6x^2}$	$y' = -12xy$ $y(0) = 4$
12.	$y = e^{-\cos x}$	$y' = y \operatorname{sen} x$ $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

En los ejercicios 13 a 20, determinar si la función es una solución de la ecuación diferencial $y^{(4)} - 16y = 0$.

13. $y = 3\cos x$

14. $y = 2\operatorname{sen} x$

15. $y = 3\cos 2x$

16. $y = 3\operatorname{sen} 2x$

17. $y = e^{-2x}$

18. $y = 5\ln x$

19. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 \operatorname{sen} 2x + C_4 \cos 2x$

20. $y = 3e^{2x} - 4\operatorname{sen} 2x$

En los ejercicios 21 a 28, determinar si la función es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 2y = x^3e^x$.

21. $y = x^2$ **22.** $y = x^3$

23. $y = x^2e^x$ **24.** $y = x^2(2 + e^x)$

25. $y = \operatorname{sen} x$ **26.** $y = \cos x$

27. $y = \ln x$ **28.** $y = x^2e^x - 5x^2$

En los ejercicios 29 a 32 se dan algunas de las curvas correspondientes a los diferentes valores de C en la solución general de la ecuación diferencial. Encontrar la solución particular que pasa a través del punto mostrado en la gráfica.

	Solución	*Ecuación diferencial*
29.	$y = Ce^{-x/2}$	$2y' + y = 0$
30.	$y(x^2 + y) = C$	$2xy + (x^2 + 2y)y' = 0$
31.	$y^2 = Cx^3$	$2xy' - 3y = 0$
32.	$2x^2 - y^2 = C$	$yy' - 2x = 0$

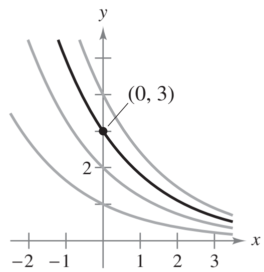


Figura para 29

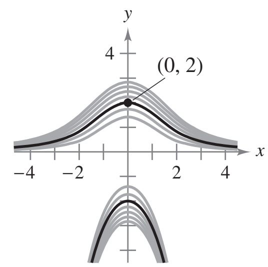


Figura para 30

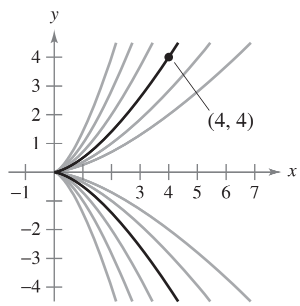


Figura para 31

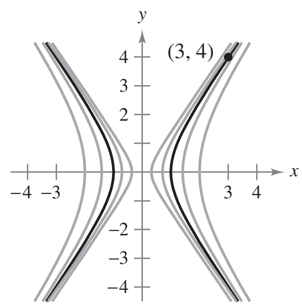


Figura para 32

En los ejercicios 33 y 34, la solución general de la ecuación diferencial está dada. Usar una herramienta de graficación para graficar las soluciones particulares para los valores dados de C.

33. $4yy' - x = 0$
$4y^2 - x^2 = C$
$C = 0, C = \pm 1, C = \pm 4$

34. $yy' + x = 0$
$x^2 + y^2 = C$
$C = 0, C = 1, C = 4$

En los ejercicios 35 a 40, verificar que la solución general satisface la ecuación diferencial. Después encontrar la solución particular que satisface la condición inicial.

35. $y = Ce^{-2x}$
$y' + 2y = 0$
$y = 3$ cuando $x = 0$

36. $3x^2 + 2y^2 = C$
$3x + 2yy' = 0$
$y = 3$ cuando $x = 1$

37. $y = C_1 \operatorname{sen} 3x + C_2 \cos 3x$
$y'' + 9y = 0$
$y = 2$ cuando $x = \pi/6$
$y' = 1$ cuando $x = \pi/6$

38. $y = C_1 + C_2 \ln x$
$xy'' + y' = 0$
$y = 0$ cuando $x = 2$
$y' = \frac{1}{2}$ cuando $x = 2$

39. $y = C_1x + C_2x^3$
$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$
$y = 0$ cuando $x = 2$
$y' = 4$ cuando $x = 2$

40. $y = e^{2x/3}(C_1 + C_2x)$
$9y'' - 12y' + 4y = 0$
$y = 4$ cuando $x = 0$
$y = 0$ cuando $x = 3$

En los ejercicios 41 a 52, encontrar la solución general de la ecuación diferencial por integración.

41. $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2$

42. $\dfrac{dy}{dx} = 2x^3 - 3x$

43. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{1 + x^2}$

44. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{4 + e^x}$

45. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 2}{x}$

46. $\dfrac{dy}{dx} = x \cos x^2$

47. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 2x$

48. $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2 x$

49. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{x - 6}$

50. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{3 - x}$

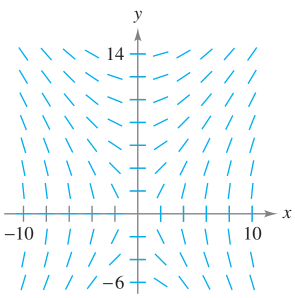
51. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{x^2}$

52. $\dfrac{dy}{dx} = 5e^{-x/2}$

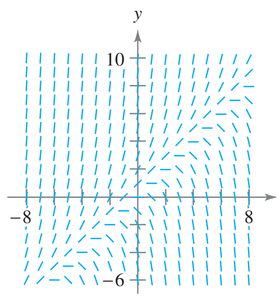
Campos de pendientes **En los ejercicios 53 a 56, se dan una ecuación diferencial y su campo de pendientes. Determinar las pendientes (si es posible) en el campo de pendientes en los puntos dados en la tabla.**

x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx						

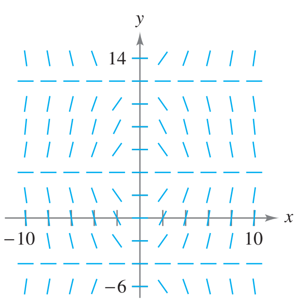
53. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y}$



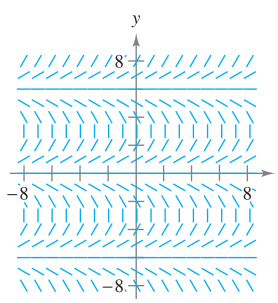
54. $\dfrac{dy}{dx} = y - x$



55. $\dfrac{dy}{dx} = x \cos \dfrac{\pi y}{8}$

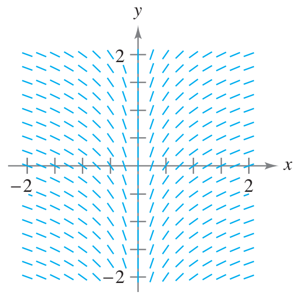


56. $\dfrac{dy}{dx} = \tan\left(\dfrac{\pi y}{6}\right)$

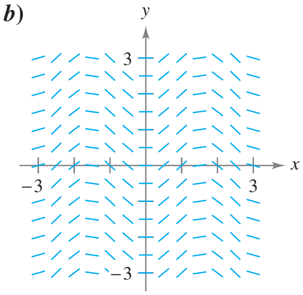


En los ejercicios 57 a 60, ubicar la ecuación diferencial con su respectivo campo de pendientes. [Los campos de pendientes se etiquetaron como *a*), *b*), *c*) y *d*).]

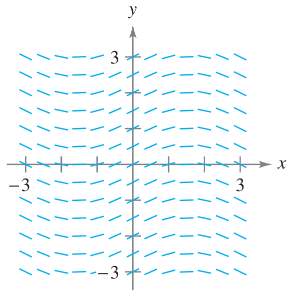
***a*)**



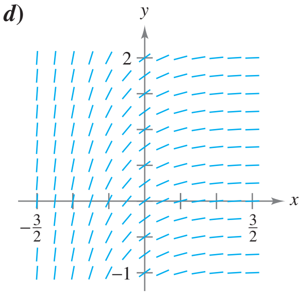
***b*)**



***c*)**



***d*)**



57. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(2x)$

58. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\cos x$

59. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-2x}$

60. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 61 a 64, *a*) trazar la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial, *b*) usar el campo de pendientes para trazar la gráfica de la función que pasa a través del punto dado, y *c*) discutir la gráfica de la solución cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$. Usar una herramienta de graficación para verificar los resultados.**

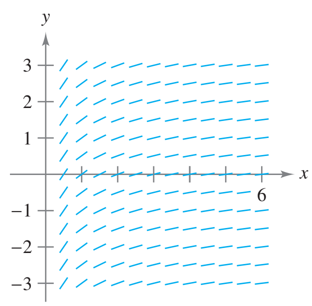
61. $y' = 3 - x, \quad (4, 2)$

62. $y' = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x, \quad (1, 1)$

63. $y' = y - 4x, \quad (2, 2)$

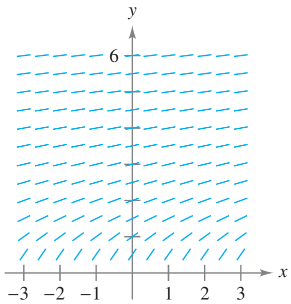
64. $y' = y + xy, \quad (0, -4)$

65. ***Campo de pendientes*** **Usar el campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = 1/x$, donde $x > 0$, para representar la gráfica de la solución que satisface cada condición inicial. Entonces realizar una conjetura acerca del comportamiento de una solución particular de $y' = 1/x$ cuando $x \to \infty$.**



a) $(1, 0)$ *b*) $(2, -1)$

66. ***Campo de pendientes*** **Usar el campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = 1/y$, donde $y > 0$, para esbozar la gráfica de la solución que satisface cada condición inicial. Entonces realizar una conjetura acerca del comportamiento de una solución particular de $y' = 1/y$ cuando $x \to \infty$.**



a) (0, 1) *b)* (1, 1)

CAS ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 67 a 72, usar un sistema algebraico por computadora para *a)* trazar la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y *b)* trazar la gráfica de la solución que satisface la condición inicial especificada.**

67. $\dfrac{dy}{dx} = 0.25y, \quad y(0) = 4$

68. $\dfrac{dy}{dx} = 4 - y, \quad y(0) = 6$

69. $\dfrac{dy}{dx} = 0.02y(10 - y), \quad y(0) = 2$

70. $\dfrac{dy}{dx} = 0.2x(2 - y), \quad y(0) = 9$

71. $\dfrac{dy}{dx} = 0.4y(3 - x), \quad y(0) = 1$

72. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}e^{-x/8} \operatorname{sen} \dfrac{\pi y}{4}, \quad y(0) = 2$

Método de Euler **En los ejercicios 73 a 78, usar el método de Euler para hacer una tabla de valores para la solución aproximada de la ecuación diferencial con un valor inicial específico. Usar *n* pasos de tamaño *h*.**

73. $y' = x + y, \quad y(0) = 2, \quad n = 10, \quad h = 0.1$

74. $y' = x + y, \quad y(0) = 2, \quad n = 20, \quad h = 0.05$

75. $y' = 3x - 2y, \quad y(0) = 3, \quad n = 10, \quad h = 0.05$

76. $y' = 0.5x(3 - y), \quad y(0) = 1, \quad n = 5, \quad h = 0.4$

77. $y' = e^{xy}, \quad y(0) = 1, \quad n = 10, \quad h = 0.1$

78. $y' = \cos x + \operatorname{sen} y, \quad y(0) = 5, \quad n = 10, \quad h = 0.1$

En los ejercicios 79 a 81, completar la tabla mediante la solución exacta de la ecuación diferencial y dos aproximaciones obtenidas mediante el método de Euler para aproximar la solución particular de la ecuación diferencial. Usar $h = 0.2$ y $h = 0.1$ y calcular cada aproximación con cuatro decimales.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y(x)$ (exacta)						
$y(x)$ ($h = 0.2$)						
$y(x)$ ($h = 0.1$)						

Tabla para 79 a 81

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*	*Solución exacta*
79.	$\dfrac{dy}{dx} = y$	(0, 3)	$y = 3e^x$
80.	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y}$	(0, 2)	$y = \sqrt{2x^2 + 4}$
81.	$\dfrac{dy}{dx} = y + \cos(x)$	(0, 0)	$y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x + e^x)$

82. Comparar los valores de las aproximaciones en los ejercicios 79 a 81 con los valores dados por la solución exacta. ¿Cómo cambia el error cuando se incrementa *h*?

83. ***Temperatura*** En el tiempo $t = 0$ minutos, la temperatura de un objeto es 140°F. La temperatura del objeto cambia en un ritmo o velocidad dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}(y - 72).$$

a) Usar una herramienta de graficación y el método de Euler para aproximar las soluciones de esta ecuación diferencial en $t = 1$, 2 y 3. Usar un tamaño de paso de $h = 0.1$.

b) Comparar los resultados con la solución exacta

$y = 72 + 68e^{-t/2}$.

c) Repetir los incisos *a)* y *b)* con un tamaño de paso de $h = 0.05$. Comparar los resultados.

Para discusión

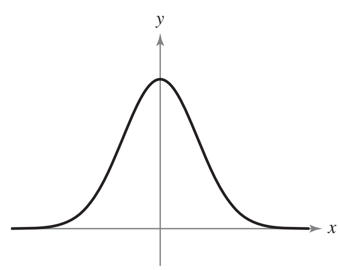
84. La gráfica muestra una solución de una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Determinar la ecuación correcta. Explicar su razonamiento.

a) $y' = xy$

b) $y' = \dfrac{4x}{y}$

c) $y' = -4xy$

d) $y' = 4 - xy$



Desarrollo de conceptos

85. Describir la diferencia entre una solución general de una ecuación diferencial y una solución particular.

86. Explicar cómo interpretar un campo de pendientes.

87. Describir cómo usar el método de Euler para aproximar la solución particular de una ecuación diferencial.

88. Se sabe que $y = Ce^{kx}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = 0.07y$. ¿Es posible determinar C o k con la información dada? Si es posible, encontrar sus valores.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 89 a 92, determinar si los enunciados son verdaderos o falsos. Si son falsos, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

89. Si $y = f(x)$ es una solución de una ecuación diferencial de primer orden, entonces $y = f(x) + C$ es también una solución.

90. La solución general de una ecuación diferencial es $y = -4.9x^2 + C_1x + C_2$. Para encontrar la solución particular se deben tener dos condiciones iniciales.

91. Los campos de pendientes representan las soluciones generales de ecuaciones diferenciales.

92. Un campo de pendientes muestra que la pendiente en el punto $(1, 1)$ es 6. Este campo de pendientes representa la familia de soluciones para la ecuación diferencial $y' = 4x + 2y$.

93. ***Error y método de Euler*** La solución exacta de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

donde $y(0) = 4$, es $y = 4e^{-2x}$.

a) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla, donde y es el valor exacto de la solución, y_1 es la solución aproximada que se tiene mediante el método de Euler con $h = 0.1$, y_2 es la solución aproximada obtenida mediante el método de Euler con $h = 0.2$, e_1 es el error absoluto $|y - y_1|$, e_2 es el error absoluto $|y - y_2|$, y r es la relación e_1/e_2.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y						
y_1						
y_2						
e_1						
e_2						
r						

b) ¿Qué se puede concluir acerca de la razón r a medida que cambia h?

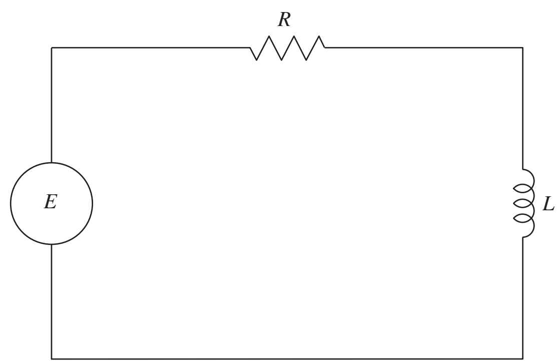
c) Predecir el error absoluto cuando $h = 0.05$.

94. ***Error y método de Euler*** Repetir el ejercicio 93 cuya solución exacta de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x - y$$

donde $y(0) = 1$, es $y = x - 1 + 2e^{-x}$.

95. ***Circuitos eléctricos*** El diagrama muestra un circuito eléctrico simple que consiste de una fuente de potencia, un resistor y un inductor.



Un modelo de la corriente I, en amperes (A), en un tiempo t, está dado por la ecuación diferencial de primer orden

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

donde $E(t)$ es el voltaje (V) producido por la fuente de potencia, R es la resistencia, en ohms (Ω), y L es la inductancia, en henrys (H). Suponer que el circuito eléctrico consiste de una fuente de potencia de 24 V, un resistor de 12 Ω y un inductor de 4 H.

a) Trazar la gráfica para el campo de pendientes de la ecuación diferencial.

b) ¿Cuál es el valor limitante de la corriente? Explicar.

96. ***Para pensar*** Se sabe que $y = e^{kt}$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 16y = 0$. Encontrar los valores de k.

97. ***Para pensar*** Se sabe que $y = A \operatorname{sen} \omega t$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + 16y = 0$. Encontrar los valores de ω.

Preparación del examen Putnam

98. Sea f una función de valor real dos veces derivable que satisfaga

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x)$$

donde $g(x) \geq 0$ para todo x real. Probar que $|f(x)|$ está acotada.

99. Probar si la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \qquad p(x) \cdot q(x) \neq 0$$

es cortada por la recta $x = k$, las tangentes de los puntos de intersección son concurrentes.

6.2 Ecuaciones diferenciales: crecimiento y decrecimiento

- **Usar la separación de variables para resolver una ecuación diferencial simple.**
- **Usar funciones exponenciales para modelar el crecimiento y decrecimiento en problemas de aplicación.**

Ecuaciones diferenciales

En la sección anterior se aprendió a analizar de manera visual las soluciones de ecuaciones diferenciales mediante los campos de pendientes, y la solución aproximada de forma numérica mediante el método de Euler. Analíticamente, se aprendió a resolver sólo dos tipos de ecuaciones diferenciales, las de las formas $y' = f(x)$ y $y'' = f(x)$. En esta sección, se aprenderá a resolver un tipo más general de ecuaciones diferenciales. La estrategia es reescribir la ecuación de manera tal que cada variable ocurre sólo en un lado de la ecuación. La estrategia se denomina *separación de variables*. (Se estudiará esa estrategia más a detalle en la sección 6.3.)

EJEMPLO 1 Resolver una ecuación diferencial

$$y' = \frac{2x}{y}$$ Escribir la ecuación original.

$$yy' = 2x$$ Multiplicar ambos miembros por y.

$$\int yy'\,dx = \int 2x\,dx$$ Integrar con respecto a x.

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$ $dy = y'dx$.

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$$ Aplicar la regla de la potencia.

$$y^2 - 2x^2 = C$$ Reescribir, sea $C = 2C_1$.

Así, la solución general está dada por $y^2 - 2x^2 = C$.

AYUDA DE ESTUDIO Se puede usar derivación implícita para verificar la solución en el ejemplo 1.

EXPLORACIÓN

En el ejemplo 1, la solución general de la ecuación diferencial es

$y^2 - 2x^2 = C.$

Usar una herramienta de graficación para graficar varias soluciones particulares, éstas se dan por $C = \pm 2$, $C = \pm 1$ y $C = 0$. Describir las soluciones gráficamente. ¿Es verdadero o falso el enunciado de cada solución?

La pendiente de la gráfica en el punto (x, y) es igual a dos veces la razón de x y y.

Explicar el razonamiento. ¿Están todas las curvas para las cuales este enunciado es verdadero representadas por la solución general?

Cuando se integran ambos miembros de la ecuación en el ejemplo 1, no se necesita agregar una constante de integración a ambos miembros de la ecuación. Si se hace, se obtendrá el mismo resultado que en el ejemplo 1.

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 + C_2 = x^2 + C_3$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = x^2 + (C_3 - C_2)$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$$

En la práctica, más personas prefieren usar la notación de Leibniz y las diferenciales cuando se aplica separación de variables. La solución del ejemplo 1 se muestra abajo por medio de esta notación.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$

$$y\,dy = 2x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$$

$$y^2 - 2x^2 = C$$

Modelos de crecimiento y decrecimiento

En muchas aplicaciones, el ritmo o velocidad de cambio de una variable y es proporcional al valor de y. Si y es una función del tiempo t, la proporción se puede escribir como se muestra.

Razón de cambio de y — es — proporcional a y.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

La solución general de esta ecuación diferencial se proporciona en el siguiente teorema.

TEOREMA 6.1 MODELO DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO EXPONENCIAL

Si y es una función derivable de t tal que $y > 0$ y $y' = ky$, para alguna constante k, entonces

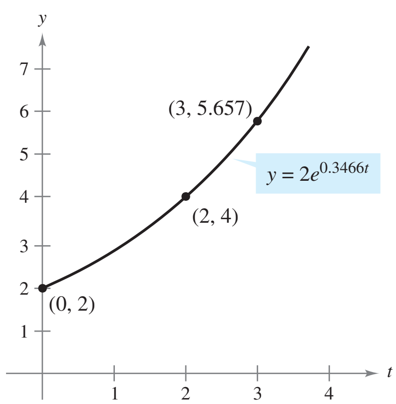
$$y = Ce^{kt}$$

C es el **valor inicial** de y, y k es la **constante de proporcionalidad**. El **crecimiento exponencial** se produce cuando $k > 0$, y el **decrecimiento** cuando $k < 0$.

Demostración

$y' = ky$	Escribir la ecuación original.
$\dfrac{y'}{y} = k$	Separar variables.
$\displaystyle\int \frac{y'}{y}\,dt = \int k\,dt$	Integrar con respecto a t.
$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$	$dy = y'\,dt$.
$\ln y = kt + C_1$	Encontrar la antiderivada de cada miembro.
$y = e^{kt}e^{C_1}$	Despejar y.
$y = Ce^{kt}$	Sea $C = e^{C_1}$.

Así, todas las soluciones de $y' = ky$ son de la forma $y = Ce^{kt}$. Diferenciar la función $y = Ce^{kt}$ con respecto a t, y verificar que $y' = ky$.



Si la razón de cambio de y es proporcional a y, entonces y sigue un modelo exponencial
Figura 6.8

AYUDA DE ESTUDIO Mediante propiedades logarítmicas, notar que el valor de k en el ejemplo 2 puede también escribirse como $\ln\left(\sqrt{2}\right)$. Así, el modelo se convierte en $y = 2e^{(\ln\sqrt{2})t}$, el cual se puede reescribir como $y = 2\left(\sqrt{2}\right)^t$.

EJEMPLO 2 Uso de un modelo de crecimiento exponencial

La razón de cambio de y es proporcional a y. Cuando $t = 0$, $y = 2$. Cuando $t = 2$, $y = 4$. ¿Cuál es el valor de y cuando $t = 3$?

Solución Dado que $y' = ky$, se sabe que y y t se relacionan con la ecuación $y = Ce^{kt}$. Al aplicar las condiciones iniciales se encuentran los valores de las constantes C y k.

$2 = Ce^0 \;\Rightarrow$	$C = 2$	Cuando $t = 0$, $y = 2$.
$4 = 2e^{2k} \;\Rightarrow$	$k = \dfrac{1}{2}\ln 2 \approx 0.3466$	Cuando $t = 2$, $y = 4$.

Así, el modelo es $y \approx 2e^{0.3466t}$. Cuando $t = 3$, el valor de y es $2e^{0.3466(3)} \approx 5.657$. (Ver la figura 6.8.)

TECNOLOGÍA La mayoría de las herramientas de graficación tiene funciones para ajustar curvas que se pueden usar para encontrar modelos que representen los datos. Usar la función de *regresión exponencial* y la información del ejemplo 2 para encontrar un modelo para los datos. ¿Cómo se podría comparar el modelo obtenido con el modelo dado?

El decrecimiento radiactivo se mide en términos de la *vida media* que es el número de años requeridos para reducir la muestra radiactiva a la mitad. La tasa de desintegración es proporcional a la cantidad presente. Las vidas medias de algunos isótopos radiactivos comunes muestran:

Uranio (^{238}U)	4 470 000 000 años
Plutonio (^{239}Pu)	24 100 años
Carbono (^{14}C)	5 715 años
Radio (^{226}Ra)	1 599 años
Einstenio (^{254}Es)	276 años
Nobelio (^{257}No)	25 segundos

EJEMPLO 3 Desintegración radiactiva

Suponer que 10 gramos del isótopo ^{239}Pu se liberaron en el accidente nuclear de Chernobyl. ¿Cuánto tiempo tomará a los 10 gramos disminuir a 1 gramo?

Solución Considerar que y representa la masa (en gramos) del plutonio. Dado que la tasa de desintegración es proporcional a y, se sabe que

$$y = Ce^{kt}$$

donde t es el tiempo en años. Para encontrar los valores de las constantes C y k, aplicar las condiciones iniciales. Con base en que $y = 10$ cuando $t = 0$, se puede escribir

$$10 = Ce^{k(0)} = Ce^{0}$$

lo cual implica que $C = 10$. Luego, con base en el hecho de que la vida media de ^{239}Pu es de 24 100 años se puede tener $y = 10/2 = 5$ cuando $t = 24\,100$, se puede escribir

$$\begin{aligned} 5 &= 10e^{k(24\,100)} \\ \frac{1}{2} &= e^{24\,100k} \\ \frac{1}{24\,100}\ln\frac{1}{2} &= k \\ -0.000028761 &\approx k. \end{aligned}$$

Así, el modelo es

$$y = 10e^{-0.000028761t}.$$ Modelo de vida media.

Para encontrar el tiempo en que 10 gramos decrecen a 1 gramo, se puede despejar para t en la ecuación

$$1 = 10e^{-0.000028761t}.$$

La solución es aproximadamente 80 059 años.

NOTA El modelo de decrecimiento exponencial en el ejemplo 3 se pudo escribir como $y = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{t/24\,100}$. Este modelo es más fácil de derivar, pero para algunas aplicaciones no es conveniente usarlo.

Del ejemplo 3, notar que en un crecimiento o decrecimiento exponencial es fácil obtener el valor de C cuando se da el valor de y para $t = 0$. El siguiente ejemplo demuestra un procedimiento para resolver C y k cuando no se conoce el valor de y en $t = 0$.

EJEMPLO 4 Crecimiento de población

Suponer que una población experimental de moscas se incrementa conforme a la ley de crecimiento exponencial. Había 100 moscas antes del segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día. ¿Cuántas moscas, aproximadamente, había en la población original?

Solución Sea $y = Ce^{kt}$ el número de moscas al momento t, donde t se mide en días. Notar que y es continua donde el número de moscas es discreto. Dado que $y = 100$ cuando $t = 2$ y $y = 300$ cuando $t = 4$, se puede escribir

$$100 = Ce^{2k} \qquad \text{y} \qquad 300 = Ce^{4k}$$

Por la primera ecuación, se sabe que $C = 100e^{-2k}$. Al sustituir este valor en la segunda ecuación, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} 300 &= 100e^{-2k}e^{4k} \\ 300 &= 100e^{2k} \\ \ln 3 &= 2k \\ \frac{1}{2}\ln 3 &= k \\ 0.5493 &\approx k \end{aligned}$$

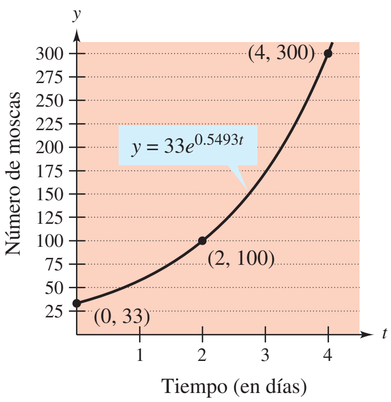


Figura 6.9

Así, el modelo de crecimiento exponencial es

$$y = Ce^{0.5493t}.$$

Para resolver C, reaplicar la condición $y = 100$ cuando $t = 2$ y obtener

$$\begin{aligned} 100 &= Ce^{0.5493(2)} \\ C &= 100e^{-1.0986} \approx 33. \end{aligned}$$

Así, la población original (cuando $t = 0$) consistía en aproximadamente $y = C = 33$ moscas, como se muestra en la figura 6.9.

EJEMPLO 5 Ventas decrecientes

Cuatro meses después de que se detuviera la publicidad, una compañía fabricante notifica que sus ventas han caído de 100 000 unidades por mes a 80 000. Si las ventas siguen un patrón de decrecimiento exponencial, ¿qué unidades habrá después de los siguientes dos meses?

Solución Usar el modelo de decrecimiento exponencial $y = Ce^{kt}$, donde t se mide en meses. De la condición inicial ($t = 0$), se sabe que $C = 100\,000$. Además, dado que $y = 80\,000$ cuando $t = 4$, se tiene

$$\begin{aligned} 80\,000 &= 100\,000e^{4k} \\ 0.8 &= e^{4k} \\ \ln(0.8) &= 4k \\ -0.0558 &\approx k. \end{aligned}$$

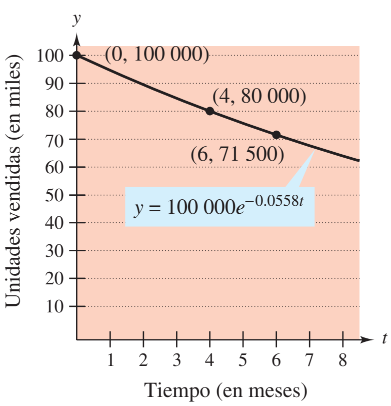


Figura 6.10

Así, después de 2 meses más ($t = 6$), se puede especular que la tasa de ventas mensuales será

$$\begin{aligned} y &\approx 100\,000e^{-0.0558(6)} \\ &\approx 71\,500 \text{ unidades.} \end{aligned}$$

Ver la figura 6.10.

En los ejemplos 2 al 5, en realidad no se tuvo que resolver la ecuación diferencial

$$y' = ky.$$

(Esto se hizo una vez en la prueba del teorema 6.1.) El siguiente ejemplo ilustra un problema cuya solución involucra la técnica de separación de variables. El ejemplo concierne a la **ley de enfriamiento de Newton**, la cual establece que la razón de cambio en la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del medio circundante.

EJEMPLO 6 Ley de enfriamiento de Newton

Sea y la temperatura (en °F) de un objeto en una habitación cuya temperatura se conserva constante a 60°. Si la temperatura del objeto baja de 100° a 90° en 10 minutos, ¿cuánto tiempo se requerirá para bajar la temperatura a 80°?

Solución Por la ley de enfriamiento de Newton, se sabe que la razón de cambio en y es proporcional a la diferencia entre y y 60. Esto se puede escribir como

$$y' = k(y - 60), \qquad 80 \le y \le 100.$$

Para resolver esta ecuación diferencial, usar la separación de variables, como se muestra.

$$\frac{dy}{dt} = k(y - 60) \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

$$\left(\frac{1}{y - 60}\right) dy = k\,dt \qquad \text{Separar variables.}$$

$$\int \frac{1}{y - 60}\,dy = \int k\,dt \qquad \text{Integrar cada miembro.}$$

$$\ln|y - 60| = kt + C_1 \qquad \text{Encontrar la antiderivada o primitiva de cada miembro.}$$

Dado que $y > 60$, $|y - 60| = y - 60$, se pueden omitir los signos del valor absoluto. Mediante notación exponencial, se tiene

$$y - 60 = e^{kt + C_1} \implies y = 60 + Ce^{kt}. \qquad C = e^{C_1}$$

Mediante $y = 100$ cuando $t = 0$, se obtiene $100 = 60 + Ce^{k(0)} = 60 + C$, lo cual implica que $C = 40$. Dado que $y = 90$ cuando $t = 10$,

$$90 = 60 + 40e^{k(10)}$$
$$30 = 40e^{10k}$$
$$k = \tfrac{1}{10}\ln\tfrac{3}{4} \approx -0.02877.$$

Así, el modelo es

$$y = 60 + 40e^{-0.02877t} \qquad \text{Modelo de enfriamiento.}$$

y finalmente, cuando $y = 80$, se obtiene

$$80 = 60 + 40e^{-0.02877t}$$
$$20 = 40e^{-0.02877t}$$
$$\tfrac{1}{2} = e^{-0.02877t}$$
$$\ln\tfrac{1}{2} = -0.02877t$$
$$t \approx 24.09 \text{ minutos.}$$

Así, se requerirán alrededor de 14.09 minutos *más* para enfriar el objeto a una temperatura de 80° (ver la figura 6.11).

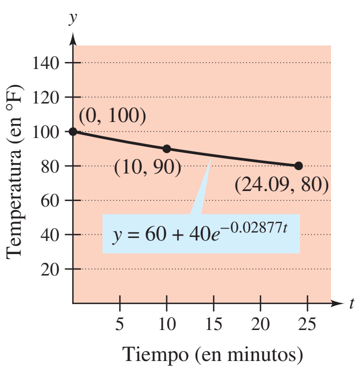


Figura 6.11

6.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, resolver la ecuación diferencial.

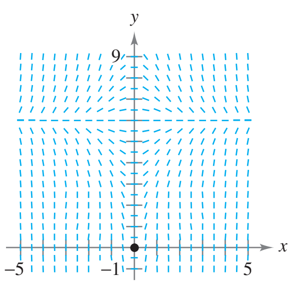
1. $\dfrac{dy}{dx} = x + 3$
2. $\dfrac{dy}{dx} = 6 - x$
3. $\dfrac{dy}{dx} = y + 3$
4. $\dfrac{dy}{dx} = 6 - y$
5. $y' = \dfrac{5x}{y}$
6. $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{7y}$
7. $y' = \sqrt{x}\, y$
8. $y' = x(1 + y)$
9. $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$
10. $xy + y' = 100x$

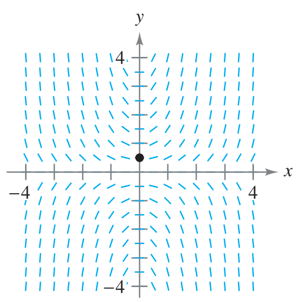
En los ejercicios 11 a 14, escribir y resolver la ecuación diferencial que modela el enunciado verbal.

11. La razón de cambio de Q con respecto a t es inversamente proporcional al cuadrado de t.
12. La razón de cambio de P con respecto a t es proporcional a $25 - t$.
13. La razón de cambio de N con respecto a s es proporcional a $500 - s$.
14. La razón de cambio de y con respecto a x varía juntamente con x y $L - y$.

Campos de pendientes **En los ejercicios 15 y 16, una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes son dados. *a*) Trazar la gráfica de dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, uno de los cuales pasa a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representar la solución. Comparar el resultado con la gráfica en el apartado *a*).**

15. $\dfrac{dy}{dx} = x(6 - y), \quad (0, 0)$
16. $\dfrac{dy}{dx} = xy, \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)$





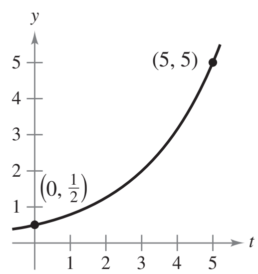
En los ejercicios 17 a 20, encontrar la función $y = f(t)$ que pasa a través del punto (0, 10) con la primera derivada dada. Usar una herramienta de graficación para representar la solución.

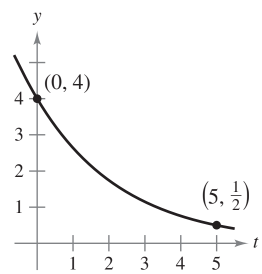
17. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}t$
18. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{3}{4}\sqrt{t}$
19. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{2}y$
20. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{4}y$

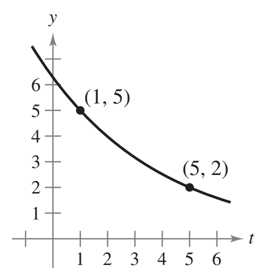
En los ejercicios 21 a 24, escribir y resolver la ecuación diferencial que modele el enunciado verbal. Evaluar la solución en los valores específicos de la variable independiente.

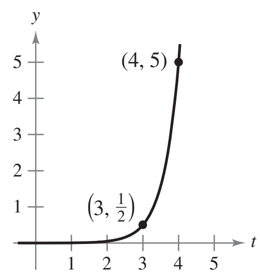
21. La razón de cambio de y es proporcional a y. Cuando $x = 0$, $y = 6$ y cuando $x = 4$, $y = 15$. ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 8$?
22. La razón de cambio de N es proporcional a N. Cuando $t = 0$, $N = 250$ y cuando $t = 1$, $N = 400$. ¿Cuál es el valor de N cuando $t = 4$?
23. La razón de cambio de V es proporcional a V. Cuando $t = 0$, $V = 20\,000$, y cuando $t = 4$, $V = 12\,500$. ¿Cuál es el valor de V cuando $t = 6$?
24. La razón de cambio de P es proporcional a P. Cuando $t = 0$, $P = 5\,000$, y cuando $t = 1$, $P = 4\,750$. ¿Cuál es el valor de P cuando $t = 5$?

En los ejercicios 25 a 28, encontrar la función exponencial $y = Ce^{kt}$ que pase a través de los dos puntos dados.

25.


26.


27.


28.


Desarrollo de conceptos

29. Describir qué representan los valores de C y k en el modelo de crecimiento y decrecimiento exponencial, $y = Ce^{kt}$.
30. Proporcionar una ecuación diferencial que modele el crecimiento y decrecimiento exponencial.

En los ejercicios 31 y 32, determinar los cuadrantes en los cuales la solución de la ecuación diferencial es una función creciente. Explicar. (No resolver la ecuación diferencial.)

31. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}xy$
32. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x^2y$

Desintegración radiactiva **En los ejercicios 33 a 40, completar la tabla de los isótopos radiactivos.**

	Isótopo	*Semivida o vida media (en años)*	*Cantidad inicial*	*Cantidad después de 1 000 años*	*Cantidad después de 10 000 años*
33.	^{226}Ra	1 599	20 g		
34.	^{226}Ra	1 599		1.5 g	
35.	^{226}Ra	1 599			0.1 g
36.	^{14}C	5 715			3 g
37.	^{14}C	5 715	5 g		
38.	^{14}C	5 715		1.6 g	
39.	^{239}Pu	24 100		2.1 g	
40.	^{239}Pu	24 100			0.4 g

41. ***Desintegración radiactiva*** El radio radiactivo tiene una semivida o vida media de aproximadamente 1 599 años. ¿Qué porcentaje de una cantidad dada permanece después de 100 años?

42. ***La prueba del carbono 14*** La prueba del carbono 14 supone que el contenido de dióxido de carbono sobre la Tierra hoy tiene el mismo contenido radiactivo que el de hace siglos. Si esto es cierto, la cantidad de ^{14}C absorbido por un árbol que creció hace varios siglos debe tener la misma cantidad de ^{14}C absorbida por un árbol que crece hoy. Una pieza de carbón viejo contiene sólo 15% de la cantidad de carbono de una pieza de carbón actual. ¿Hace cuánto tiempo fue quemado el árbol para formar la pieza antigua de leño? (La vida media del ^{14}C es 5 715 años.)

Interés compuesto **En los ejercicios 43 a 48, completar la tabla para una cuenta de ahorros en la que se tiene un interés continuo.**

	Inversión inicial	*Tasa anual*	*Tiempo para duplicar*	*Cantidad después de 10 años*
43.	\$4 000	6%		
44.	\$18 000	$5\frac{1}{2}\%$		
45.	\$750		$7\frac{3}{4}$ años	
46.	\$12 500		5 años	
47.	\$500			\$1 292.85
48.	\$2 000			\$5 436.56

Interés compuesto **En los ejercicios 49 a 52, encontrar el capital principal *P* que debe invertirse a una tasa *r*, a un interés mensual compuesto, tal que \$1 000 000 garanticen la jubilación en *t* años.**

49. $r = 7\frac{1}{2}\%, \quad t = 20$ **50.** $r = 6\%, \quad t = 40$

51. $r = 8\%, \quad t = 35$ **52.** $r = 9\%, \quad t = 25$

Interés compuesto **En los ejercicios 53 a 56, encontrar el tiempo necesario para que \$1 000 se dupliquen si se invierten a una tasa de *r* compuesta *a*) anual, *b*) mensual, *c*) diaria y *d*) continua.**

53. $r = 7\%$ **54.** $r = 6\%$

55. $r = 8.5\%$ **56.** $r = 5.5\%$

Población **En los ejercicios 57 a 61, se dan la población (en millones) de un país en 2007 y la razón de cambio continua anual especulada *k* de la población. (*Fuente: U.S. Census Bureau, International Data Base.*)**

a) **Encontrar el modelo de crecimiento exponencial $P = Ce^{kt}$ de la población con $t = 0$ correspondiente a 2000.**

b) **Usar el modelo para predecir la población del país en 2015.**

c) **Discutir la relación entre el signo de *k* y el cambio en la población para el país.**

	País	*Población de 2007*	*k*
57.	Letonia	2.3	-0.006
58.	Egipto	80.3	0.017
59.	Paraguay	6.7	0.024
60.	Hungría	10.0	-0.003
61.	Uganda	30.3	$+0.036$

Para discusión

62. *a*) Suponiendo un incremento en la población de insectos en un número constante cada mes, explicar por qué el número de insectos puede ser representado por función lineal.

b) Suponiendo un incremento en la población de insectos en un porcentaje constante cada mes, explicar por qué el número de insectos puede ser representado por función exponencial.

63. ***Modelo matemático*** Sea un cultivo con una cantidad inicial de cien bacterias y *N* el número de bacterias que se cuentan cada hora durante 5 horas. Los resultados se muestran en la tabla, donde *t* es el tiempo en horas.

t	0	1	2	3	4	5
N	100	126	151	198	243	297

a) Usar la función de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo exponencial para los datos.

b) Usar el modelo para estimar el tiempo requerido para que la población se cuadriplique.

64. ***Crecimiento de bacterias*** El número de bacterias en un cultivo se incrementó de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Después de 2 horas se tienen 125 bacterias en el cultivo y 350 bacterias después de 4 horas.

a) Encontrar la población inicial.

b) Escribir un modelo de crecimiento exponencial de la población bacteriana. Sea *t* el tiempo en horas.

c) Usar el modelo para determinar el número de bacterias después de 8 horas.

d) ¿Después de cuántas horas la cantidad de bacterias será de 25 000?

65. ***Curva de aprendizaje*** El gerente de una fábrica ha calculado que un trabajador puede producir más de 30 unidades en un día. La curva de aprendizaje del número *N* de unidades producidas por día después de que un nuevo empleado haya trabajado *t* días es $N = 30(1 - e^{kt})$. Después de 20 días en el trabajo, un trabajador produce 19 unidades.

a) Encontrar la curva de aprendizaje de este trabajador.
b) ¿Cuántos días pasarían antes de que este trabajador produzca 25 unidades por día?

66. ***Curva de aprendizaje*** Si en el ejercicio 65 el gerente requiere que un nuevo empleado produzca al menos 20 unidades por día después de 30 días en el trabajo, encontrar *a*) la curva de aprendizaje que describe este requisito mínimo y *b*) los días necesarios antes de que un trabajador produzca, como mínimo, 25 unidades por día.

67. ***Análisis de datos*** La tabla muestra la población P (en millones) de Estados Unidos desde 1960 hasta 2000. (*Fuente: U.S. Census Bureau*)

Año	1960	1970	1980	1990	2000
Población, *P*	181	205	228	250	282

a) Usar los datos de 1960 y 1970 para encontrar un modelo exponencial P_1 para los datos. Considerar $t = 0$ en 1960.
b) Usar una herramienta de graficación para representar un modelo exponencial P_2 para los datos. Considerar $t = 0$ en 1960.
c) Usar una herramienta de graficación para trazar los datos y los modelos P_1 y P_2 en la misma pantalla. Comparar el dato real con las predicciones. ¿Qué modelo se ajusta mejor a los datos?
d) Estimar cuándo la población será de 320 millones.

68. ***Análisis de datos*** La tabla muestra los ingresos netos y las cantidades requeridas para satisfacer la deuda nacional (fondos de garantía de los intereses adecuados por la Tesorería) de Estados Unidos desde 2001 hasta 2010. Los años de 2007 a 2010 son estimados y las cantidades monetarias se dan en miles de millones de dólares. (*Fuente: U.S. Office of Management and Budget*)

Año	2001	2002	2003	2004	2005
Ingresos	1 991.4	1 853.4	1 782.5	1 880.3	2 153.9
Intereses	359.5	332.5	318.1	321.7	352.3

Año	2006	2007	2008	2009	2010
Ingresos	2 407.3	2 540.1	2 662.5	2 798.3	2 954.7
Intereses	405.9	433.0	469.9	498.0	523.2

a) Usar la capacidad de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo exponencial R para los ingresos y un modelo cuártico I para la cantidad necesaria para satisfacer la deuda. Considerar t como el tiempo en años, con $t = 1$ que corresponde a 2001.
b) Usar una herramienta de graficación para trazar los puntos correspondientes a los ingresos, y trazar el correspondiente modelo. Con base en el modelo, ¿cuál es la tasa de crecimiento continuo de los ingresos?
c) Usar una herramienta de graficación para representar los puntos que corresponden a la cantidad necesaria para satisfacer la deuda, y trazar el modelo cuártico.
d) Encontrar una función $P(t)$ que aproxime el porcentaje de los ingresos necesarios para satisfacer la deuda nacional. Usar una herramienta de graficación para representar esta función.

69. ***Intensidad del sonido*** El nivel del sonido β (en decibeles), con una intensidad de I es $\beta(I) = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ donde I_0 es una intensidad de 10^{-16} watts por centímetro cuadrado, que corresponde a la intensidad del sonido más débil que se puede escuchar. Determinar $\beta(I)$ para

a) $I = 10^{-14}$ watts por centímetro cuadrado (susurro)
b) $I = 10^{-9}$ watts por centímetro cuadrado (esquina de calle ruidosa)
c) $I = 10^{-6.5}$ watts por centímetro cuadrado (golpe de martillo)
d) $I = 10^{-4}$ watts por centímetro cuadrado (umbral de dolor)

70. ***Nivel de ruido*** Con la instalación de materiales de aislamiento sonoro, el nivel de ruido en un auditorio se redujo de 93 a 80 decibeles. Usar la función exponencial del ejercicio 69 para encontrar el porcentaje de decrecimiento en el nivel de intensidad del ruido como un resultado de la instalación de esos materiales.

71. ***Silvicultura*** El valor de un terreno de árboles maderables es $V(t) = 100\,000e^{0.8\sqrt{t}}$ donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiente a 2008. Si el dinero gana intereses continuamente de 10%, el actual valor del bosque maderero en cualquier tiempo t es $A(t) = V(t)e^{-0.10t}$. Encontrar el año en el cual el bosque se talará para maximizar la presente función valor.

72. ***Intensidad del terremoto*** En la escala de Richter, la magnitud R de un terremoto de intensidad I es

$$R = \frac{\ln I - \ln I_0}{\ln 10}$$

donde I_0 es la intensidad mínima usada como comparación. Suponer que $I_0 = 1$.

a) Encontrar la intensidad del terremoto de San Francisco en 1906 ($R = 8.3$).
b) Encontrar el factor para el cual la intensidad aumente si la medida en la escala Richter es el doble.
c) Encontrar dR/dI.

73. ***Ley de enfriamiento de Newton*** Cuando un objeto se extrae del horno y se coloca en un entorno con una temperatura constante de 80° F, la temperatura en el centro es 1 500° F. Una hora después de extraerlo, la temperatura del centro es 1 120° F. Encontrar la temperatura del centro 5 horas después de extraer el objeto del horno.

74. ***Ley de enfriamiento de Newton*** Un contenedor de líquido caliente se coloca en un congelador que se mantiene a una temperatura constante de 20° F. La temperatura inicial del líquido es 160° F. Después de 5 minutos, la temperatura del líquido es 60° F. ¿Cuánto tiempo se necesitará para que su temperatura disminuya a 30° F?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 75 a 78, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

75. En el crecimiento exponencial, la tasa de crecimiento es constante.

76. En el crecimiento lineal, la tasa de crecimiento es constante.

77. Si los precios aumentan a una tasa de 0.5% mensual, entonces éstos aumentan a una tasa de 6% por año.

78. El modelo exponencial de la ecuación diferencial de crecimiento es $dy/dx = ky$, donde k es una constante.

6.3 Separación de variables y la ecuación logística

- **Reconocer y resolver las ecuaciones diferenciales que se pueden resolver mediante separación de variables.**
- **Reconocer y resolver ecuaciones diferenciales homogéneas.**
- **Usar ecuaciones diferenciales para modelar y resolver problemas de aplicación.**
- **Resolver y analizar las ecuaciones diferenciales logísticas.**

Separación de variables

Considerar una ecuación diferencial que pueda escribirse de la forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

donde M es una función continua sólo de x y N es una función continua sólo de y. Como se observó en la sección anterior, para este tipo de ecuación, todos los términos x se pueden agrupar con dx y todos los de y con dy, y se puede obtener una solución por integración. Tales ecuaciones se dice que son **separables**, y el procedimiento de solución se denomina **separación de variables**. Abajo se muestran algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales que son separables.

Ecuación diferencial original	*Reescrita con variables separables*
$x^2 + 3y\dfrac{dy}{dx} = 0$	$3y\,dy = -x^2\,dx$
$(\operatorname{sen} x)y' = \cos x$	$dy = \cot x\,dx$
$\dfrac{xy'}{e^y + 1} = 2$	$\dfrac{1}{e^y + 1}\,dy = \dfrac{2}{x}\,dx$

EJEMPLO 1 Separación de variables

Encontrar la solución general de $(x^2+4)\dfrac{dy}{dx} = xy$.

Solución Para iniciar, observar que $y = 0$ es una solución. Para encontrar otras soluciones, suponer que $y \neq 0$ y separar las variables como se muestra.

$$(x^2 + 4)\,dy = xy\,dx \qquad \text{Forma diferencial.}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2+4}\,dx \qquad \text{Separar variables.}$$

Ahora, integrar para obtener

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx \qquad \text{Integrar.}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C_1$$

$$\ln|y| = \ln\sqrt{x^2+4} + C_1$$

$$|y| = e^{C_1}\sqrt{x^2+4}$$

$$y = \pm e^{C_1}\sqrt{x^2+4}.$$

Dado que $y = 0$ es también una solución, se puede escribir la solución general como

$$y = C\sqrt{x^2+4}. \qquad \text{Solución general } (C = \pm e^{C_1})$$

NOTA Asegurarse de verificar las soluciones de este capítulo. En el ejemplo 1, se debe verificar la solución $y = C\sqrt{x^2+4}$ por derivación y sustitución en la ecuación original.

$$(x^2+4)\frac{dy}{dx} = xy$$

$$(x^2+4)\frac{Cx}{\sqrt{x^2+4}} \stackrel{?}{=} x\left(C\sqrt{x^2+4}\right)$$

$$Cx\sqrt{x^2+4} = Cx\sqrt{x^2+4}$$

Así, la solución concuerda.

En algunos casos, no es factible escribir la solución general en la forma explícita $y = f(x)$. El siguiente ejemplo ilustra tal situación. La derivación implícita se puede usar para verificar esta solución.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para un ejemplo (de ingeniería) de una ecuación diferencial que es separable, ver el artículo “Designing a Rose Cutter”, de J. S. Hartzler en *The College Mathematics Journal*.

EJEMPLO 2 Encontrar una solución particular

Dada la condición inicial $y(0) = 1$, encontrar la solución particular de la ecuación

$$xy\,dx + e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy = 0.$$

Solución Notar que $y = 0$ es una solución de la ecuación diferencial, pero esta solución no satisface la condición inicial. Así, se puede suponer que $y \neq 0$. Para separar variables, se debe despejar el primer término de y y el segundo término de e^{-x^2}. Así, se debe multiplicar por e^{x^2}/y y obtener lo siguiente.

$$\begin{aligned} xy\,dx + e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy &= 0 \\ e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy &= -xy\,dx \\ \int\left(y - \frac{1}{y}\right)dy &= \int -xe^{x^2}\,dx \\ \frac{y^2}{2} - \ln|y| &= -\frac{1}{2}e^{x^2} + C \end{aligned}$$

De la condición inicial $y(0) = 1$, se tiene $\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2} + C$, lo cual implica que $C = 1$. Así, la solución particular tiene la forma implícita

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} - \ln|y| &= -\frac{1}{2}e^{x^2} + 1 \\ y^2 - \ln y^2 + e^{x^2} &= 2. \end{aligned}$$

Se puede verificar esto derivando y reescribiendo para obtener la ecuación original.

EJEMPLO 3 Encontrar la curva de una solución particular

Encontrar la ecuación de la curva que pasa a través del punto $(1, 3)$ y tiene pendiente de y/x^2 en cualquier punto (x, y).

Solución Dado que la pendiente de la curva está dada por y/x^2, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$$

con la condición inicial $y(1) = 3$. Separando las variables e integrándolas se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x^2}, \quad y \quad 0 \\ \ln|y| &= -\frac{1}{x} + C_1 \\ y &= e^{-(1/x) + C_1} = Ce^{-1/x}. \end{aligned}$$

Dado que $y = 3$ cuando $x = 1$, se concluye que $3 = Ce^{-1}$ y $C = 3e$. Así, la ecuación de la curva especificada es

$$y = (3e)e^{-1/x} = 3e^{(x-1)/x}, \quad x > 0.$$

Ya que la solución no se define en $x = 0$ y la condición inicial se da en $x = 1$, x está restringida a valores positivos. Ver la figura 6.12.

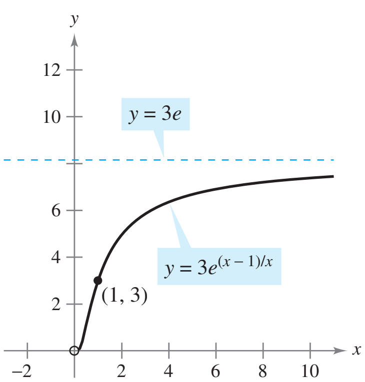


Figura 6.12

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Algunas ecuaciones diferenciales que no son separables en x y y se pueden separar por un cambio de variables. Éste es el caso de ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x, y)$, donde f es una **función homogénea**. La función dada por $f(x, y)$ es **homogénea de grado *n*** si

NOTA La notación $f(x, y)$ se usó para denotar una función de dos variables de la misma forma como $f(x)$ denota una función de una variable. Se estudiarán funciones de dos variables a detalle en el capítulo 13.

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Función homogénea de grado n.

donde n es un número real.

EJEMPLO 4 Verificar funciones homogéneas

a) $f(x, y) = x^2y - 4x^3 + 3xy^2$ es una función homogénea de grado 3 dado que

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2(ty) - 4(tx)^3 + 3(tx)(ty)^2 \\ &= t^3(x^2y) - t^3(4x^3) + t^3(3xy^2) \\ &= t^3(x^2y - 4x^3 + 3xy^2) \\ &= t^3 f(x, y). \end{aligned}$$

b) $f(x, y) = xe^{x/y} + y \text{ sen } (y/x)$ es una función homogénea de grado 1 dado que

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= txe^{tx/ty} + ty \text{ sen } \frac{ty}{tx} \\ &= t\left(xe^{x/y} + y \text{ sen } \frac{y}{x}\right) \\ &= tf(x, y). \end{aligned}$$

c) $f(x, y) = x + y^2$ *no* es una función homogénea dado que

$$f(tx, ty) = tx + t^2y^2 = t(x + ty^2) \neq t^n(x + y^2).$$

d) $f(x, y) = x/y$ es una función homogénea de grado 0 dado que

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{ty} = t^0 \frac{x}{y}.$$

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL HOMOGÉNEA

Una **ecuación diferencial homogénea** es una ecuación de la forma

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

donde M y N son funciones homogéneas del mismo grado.

EJEMPLO 5 Prueba para ecuaciones diferenciales homogéneas

a) $(x^2 + xy)\, dx + y^2\, dy = 0$ es homogénea de grado 2.

b) $x^3\, dx = y^3\, dy$ es homogénea de grado 3.

c) $(x^2 + 1)\, dx + y^2\, dy = 0$ *no* es una ecuación diferencial homogénea.

Para resolver una ecuación diferencial homogénea por el método de separación de variables, usar el siguiente teorema de cambio de variables.

TEOREMA 6.2 CAMBIO DE VARIABLES PARA ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Si $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es homogénea, entonces se puede transformar en una ecuación diferencial cuyas variables son separables por la sustitución

$$y = vx$$

donde v es una función derivable de x.

EJEMPLO 6 Resolver una ecuación diferencial homogénea

Encontrar la solución general de

$$(x^2 - y^2)\,dx + 3xy\,dy = 0.$$

AYUDA DE ESTUDIO La sustitución $y = vx$ llevará a una ecuación diferencial que es separable con respecto a las variables x y v. Se debe escribir su solución final, sin embargo, en términos de x y y.

Solución Dado que $(x^2 - y^2)$ y $3xy$ son homogéneas de grado 2, usar $y = vx$ para obtener $dy = x\,dv + v\,dx$. Entonces, por sustitución, se tiene

$$\begin{aligned}
(x^2 - v^2x^2)\,dx + 3x(vx)\overbrace{(x\,dv + v\,dx)}^{dy} &= 0\\
(x^2 + 2v^2x^2)\,dx + 3x^3v\,dv &= 0\\
x^2(1 + 2v^2)\,dx + x^2(3vx)\,dv &= 0.
\end{aligned}$$

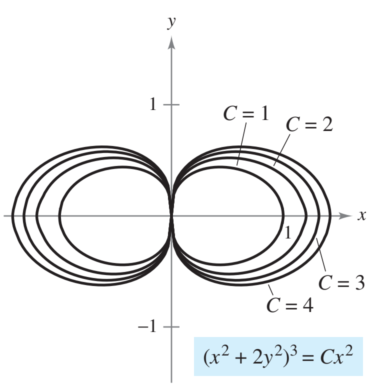
Al dividir entre x^2 y separar variables, se produce

$$\begin{aligned}
(1 + 2v^2)\,dx &= -3vx\,dv\\
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{-3v}{1 + 2v^2}\,dv\\
\ln|x| &= -\frac{3}{4}\ln(1 + 2v^2) + C_1\\
4\ln|x| &= -3\ln(1 + 2v^2) + \ln|C|\\
\ln x^4 &= \ln\left|C(1 + 2v^2)^{-3}\right|\\
x^4 &= C(1 + 2v^2)^{-3}.
\end{aligned}$$

Al sustituir por v se produce la siguiente solución general.

$$\begin{aligned}
x^4 &= C\left[1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{-3}\\
\left(1 + \frac{2y^2}{x^2}\right)^3 x^4 &= C\\
(x^2 + 2y^2)^3 &= Cx^2 \qquad \text{Solución general.}
\end{aligned}$$

Se puede verificar esto al derivar y reescribir para obtener la ecuación original.



Solución general de $(x^2 - y^2)\,dx + 3xy\,dy = 0$
Figura 6.13

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a una herramienta de graficación, representar varias soluciones para el ejemplo 6. La figura 6.13 muestra las gráficas de

$$(x^2 + 2y^2)^3 = Cx^2$$

para $C = 1, 2, 3$ y 4.

Aplicaciones

EJEMPLO 7 Población salvaje

La razón de cambio del número de coyotes $N(t)$ en una población es directamente proporcional a $650 - N(t)$, donde t es el tiempo en años. Cuando $t = 0$, la población es 300, y cuando $t = 2$, la población se incrementó a 500. Encontrar la población cuando $t = 3$.

Solución Dado que el ritmo o velocidad de cambio de la población es proporcional a $650 - N(t)$, se puede escribir la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dN}{dt} = k(650 - N)$$

Se puede resolver esta ecuación diferencial por separación de variables.

$$dN = k(650 - N)\,dt \qquad \text{Forma diferencial.}$$

$$\frac{dN}{650 - N} = k\,dt \qquad \text{Variables separables.}$$

$$-\ln|650 - N| = kt + C_1 \qquad \text{Integrar.}$$

$$\ln|650 - N| = -kt - C_1$$

$$650 - N = e^{-kt - C_1} \qquad \text{Suponer } N < 650.$$

$$N = 650 - Ce^{-kt} \qquad \text{Solución general.}$$

Si se usa $N = 300$ cuando $t = 0$, se puede concluir que $C = 350$, lo cual produce

$$N = 650 - 350e^{-kt}.$$

Entonces, mediante el valor de $N = 500$ cuando $t = 2$, se deduce que

$$500 = 650 - 350e^{-2k} \quad \Rightarrow \quad e^{-2k} = \tfrac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad k \approx 0.4236.$$

Así, el modelo para la población de coyotes es

$$N = 650 - 350e^{-0.4236t}. \qquad \text{Modelo para la población.}$$

Cuando $t = 3$, se puede aproximar la población a

$$N = 650 - 350e^{-0.4236(3)} \approx 552 \text{ coyotes.}$$

En la figura 6.14 se muestra el modelo de población. Note que $N = 650$ es la asíntota horizontal de la gráfica y es la *capacidad de carga* del modelo. Es posible aprender más acerca de la capacidad de carga después en esta sección.

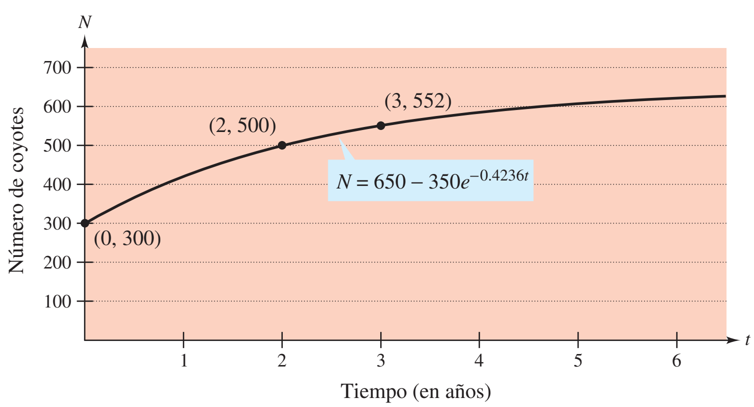
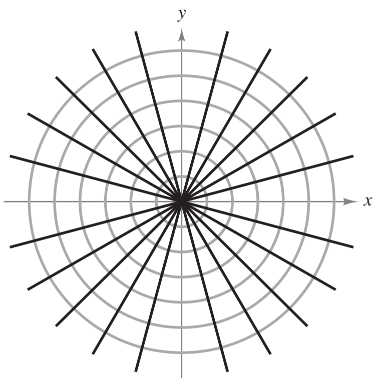


Figura 6.14



Cada recta $y = Kx$ es una trayectoria ortogonal de la familia de circunferencias
Figura 6.15

Un problema común en electrostática, termodinámica e hidrodinámica involucra encontrar una familia de curvas, cada una de las cuales es ortogonal a todos los miembros de una familia de curvas dada. Por ejemplo, la figura 6.15 muestra una familia de circunferencias

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{Familia de circunferencias.}$$

cada una de las cuales interseca las rectas en la familia

$$y = Kx \qquad \text{Familia de rectas.}$$

en ángulos rectos. Esas dos familias de curvas se dice que son **mutuamente ortogonales**, y cada curva en una de las familias se denomina como una **trayectoria ortogonal** de la otra familia. En electrostática, las líneas de fuerzas son ortogonales a las *curvas equipotenciales*. En termodinámica, el flujo de calor que atraviesa una superficie plana es ortogonal a las *curvas isotérmicas*. En hidrodinámica, las líneas de flujo (corriente) son trayectorias ortogonales a las *curvas de potencial de velocidad*.

EJEMPLO 8 Trayectorias ortogonales

Describir las trayectorias ortogonales para la familia de curvas dada por

$$y = \frac{C}{x}$$

para $C \neq 0$. Trazar la gráfica para varios miembros de cada familia.

Solución Primero, resolver la ecuación dada para C y escribir $xy = C$. Entonces, por derivación implícita con respecto a x, se obtiene la ecuación diferencial

$$xy' + y = 0 \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

$$x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \qquad \text{Pendiente de familia dada.}$$

Dado que y' representa la pendiente de la familia de curvas dada en (x, y), se deduce que la familia ortogonal tiene la pendiente recíproca negativa x/y. Así,

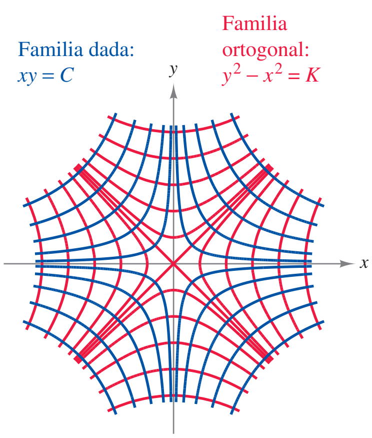
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}. \qquad \text{Pendiente de familia ortogonal.}$$

Ahora se puede encontrar la familia ortogonal por separación de variables e integrando.

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y^2 - x^2 = K$$



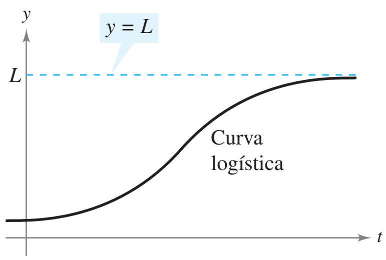
Trayectorias ortogonales
Figura 6.16

Los centros están en el origen y los ejes transversales son verticales para $K > 0$ y horizontales para $K < 0$. Si $K = 0$, las trayectorias ortogonales son las líneas $y = \pm x$. Si $K \neq 0$, las trayectorias ortogonales son hipérbolas. Varias trayectorias se muestran en la figura 6.16.

Ecuación diferencial logística

En la sección 6.2, el modelo de crecimiento exponencial se deriva del hecho de que la razón de cambio de una variable y es proporcional al valor de y. Se observó que la ecuación diferencial $dy/dt = ky$ tiene la solución general $y = Ce^{kt}$. El crecimiento exponencial es ilimitado, pero cuando describe una población, con frecuencia existe algún límite superior L más allá del cual no puede haber crecimiento. El límite superior L se denomina **capacidad límite** o **de soporte**, la cual es la máxima población $y(t)$ que se puede sostener o soportar a medida que se incrementa el tiempo t. Un modelo que con regularidad se usa para este tipo de crecimiento es la **ecuación diferencial logística**

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$$ Ecuación diferencial logística.



Notar que, como $t \to \infty$, $y \to L$
Figura 6.17

donde k y L son constantes positivas. Una población que satisface esta ecuación no crece sin límite, pero se aproxima a la capacidad límite o de soporte L al aumentar t.

De la ecuación se puede observar que si y está entre 0 y la capacidad límite o de soporte L, entonces $dy/dt > 0$, y la población se incrementa. Si y es mayor que L, entonces $dy/dt < 0$, y la población decrece. La gráfica de la función y se denomina *curva logística*, como se muestra en la figura 6.17.

EJEMPLO 9 Obtención de la solución general

Resolver la ecuación diferencial logística $\dfrac{dy}{dt} = ky\left(1 - \dfrac{y}{L}\right)$.

Solución Empezar por separar variables.

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$$ Escribir la ecuación diferencial.

$$\frac{1}{y(1 - y/L)}dy = k\,dt$$ Variables separables.

$$\int \frac{1}{y(1 - y/L)}dy = \int k\,dt$$ Integrar cada miembro.

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{L - y}\right)dy = \int k\,dt$$ Reescribir el primer miembro mediante fracciones parciales.

$$\ln|y| - \ln|L - y| = kt + C$$ Encontrar la antiderivada de cada miembro.

$$\ln\left|\frac{L - y}{y}\right| = -kt - C$$ Multiplicar cada miembro por –1 y simplificar.

$$\left|\frac{L - y}{y}\right| = e^{-kt - C} = e^{-C}e^{-kt}$$ Tomar exponenciales en cada miembro.

$$\frac{L - y}{y} = be^{-kt}$$ Sea $\pm e^{-C} = b$.

Al resolver esta ecuación para y se produce $y = \dfrac{L}{1 + be^{-kt}}$.

EXPLORACIÓN

Usar una herramienta de graficación para investigar los efectos de los valores de L, b y k sobre la gráfica de

$$y = \frac{L}{1 + be^{-kt}}.$$

Incluir algunos ejemplos para justificar los resultados.

Del ejemplo 9, se puede concluir que todas las soluciones de la ecuación diferencial logística son de la forma

$$y = \frac{L}{1 + be^{-kt}}.$$

EJEMPLO 10 Solución de una ecuación diferencial logística

Una comisión estatal libera 40 alces en una zona de refugio. Después de 5 años, la población de alces es de 104. La comisión cree que la zona no puede soportar más de 4 000 alces. La tasa de crecimiento de la población de alces p es

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{4\,000}\right), \quad 40 \leq p \leq 4\,000$$

donde t es el número de años.

a) Escribir un modelo para la población de alces en términos de t.
b) Representar el campo de pendientes de la ecuación diferencial y la solución que pasa a través del punto (0, 40).
c) Usar el modelo para estimar la población de alces después de 15 años.
d) Encontrar el límite del modelo cuando $t \to \infty$.

EXPLORACIÓN

Explicar qué sucede si $p(0) = L$.

Solución

a) Se sabe que $L = 4\,000$. Así, la solución de la ecuación diferencial es de la forma

$$p = \frac{4\,000}{1 + be^{-kt}}.$$

Dado que $p(0) = 40$, se puede resolver para b como se muestra.

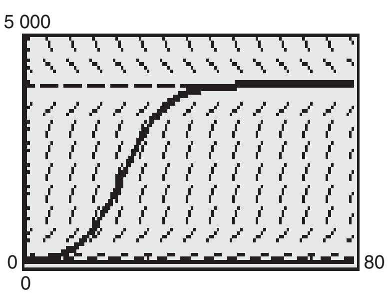
$$40 = \frac{4\,000}{1 + be^{-k(0)}}$$

$$40 = \frac{4\,000}{1 + b} \quad \Rightarrow \quad b = 99$$

Entonces, dado que $p = 104$ cuando $t = 5$, se puede resolver para k.

$$104 = \frac{4\,000}{1 + 99e^{-k(5)}} \quad \Rightarrow \quad k \approx 0.194$$

Así, un modelo para la población de alces está dada por $p = \dfrac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194t}}$.



Campo de pendientes para

$$\frac{dp}{dt} = 0.194p\left(1 - \frac{p}{4\,000}\right)$$

Y la solución que pasa a través de (0, 40)
Figura 6.18

b) Utilizando una herramienta de graficación, se puede representar el campo de pendientes de

$$\frac{dp}{dt} = 0.194p\left(1 - \frac{p}{4\,000}\right)$$

y la solución pasa a través de (0, 40), como se muestra en la figura 6.18.

c) Para estimar la población de alces después de 15 años, sustituir 15 para t en el modelo.

$$p = \frac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194(15)}} \qquad \text{Sustituir 15 para } t.$$

$$= \frac{4\,000}{1 + 99e^{-2.91}} \approx 626 \qquad \text{Simplificar.}$$

d) Como t se incrementa sin saltos, el denominador de $\dfrac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194t}}$ se cierra a 1.

Así, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194t}} = 4\,000.$

6.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 14, encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{y^2}$

3. $x^2 + 5y\dfrac{dy}{dx} = 0$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 3}{6y^2}$

5. $\dfrac{dr}{ds} = 0.75r$

6. $\dfrac{dr}{ds} = 0.75s$

7. $(2 + x)y' = 3y$

8. $xy' = y$

9. $yy' = 4 \operatorname{sen} x$

10. $yy' = -8\cos(\pi x)$

11. $\sqrt{1 - 4x^2}\, y' = x$

12. $\sqrt{x^2 - 16}\, y' = 11x$

13. $y \ln x - xy' = 0$

14. $12yy' - 7e^x = 0$

En los ejercicios 15 a 24, encontrar la solución particular que satisface la condición inicial.

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*
15.	$yy' - 2e^x = 0$	$y(0) = 3$
16.	$\sqrt{x} + \sqrt{y}\, y' = 0$	$y(1) = 9$
17.	$y(x + 1) + y' = 0$	$y(-2) = 1$
18.	$2xy' - \ln x^2 = 0$	$y(1) = 2$
19.	$y(1 + x^2)y' - x(1 + y^2) = 0$	$y(0) = \sqrt{3}$
20.	$y\sqrt{1 - x^2}\, y' - x\sqrt{1 - y^2} = 0$	$y(0) = 1$
21.	$\dfrac{du}{dv} = uv \operatorname{sen} v^2$	$u(0) = 1$
22.	$\dfrac{dr}{ds} = e^{r-2s}$	$r(0) = 0$
23.	$dP - kP\, dt = 0$	$P(0) = P_0$
24.	$dT + k(T - 70)\, dt = 0$	$T(0) = 140$

En los ejercicios 25 a 28, encontrar una ecuación para las gráficas que pasen por los puntos y tengan la pendiente dada.

25. $(0, 2), \quad y' = \dfrac{x}{4y}$

26. $(1, 1), \quad y' = -\dfrac{9x}{16y}$

27. $(9, 1), \quad y' = \dfrac{y}{2x}$

28. $(8, 2), \quad y' = \dfrac{2y}{3x}$

En los ejercicios 29 y 30, encontrar todas las funciones *f* que tienen la propiedad indicada.

29. La tangente de la gráfica de f en el punto (x, y) en intersección con el eje x en $(x + 2, 0)$.

30. Todas las tangentes de la gráfica de f que pasan a través del origen.

En los ejercicios 31 a 38, determinar si la función es homogénea y, si lo es, determinar su grado.

31. $f(x, y) = x^3 - 4xy^2 + y^3$

32. $f(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 - 2y^2$

33. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

34. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

35. $f(x, y) = 2 \ln xy$

36. $f(x, y) = \tan(x + y)$

37. $f(x, y) = 2 \ln \dfrac{x}{y}$

38. $f(x, y) = \tan \dfrac{y}{x}$

En los ejercicios 39 a 44, resolver la ecuación diferencial homogénea.

39. $y' = \dfrac{x + y}{2x}$

40. $y' = \dfrac{x^3 + y^3}{xy^2}$

41. $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$

42. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$

43. $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

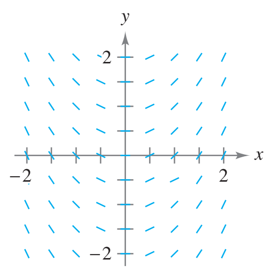
44. $y' = \dfrac{2x + 3y}{x}$

En los ejercicios 45 a 48, encontrar la solución particular que satisface la condición inicial.

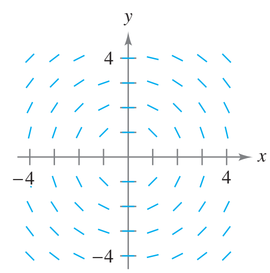
	Ecuación diferencial	*Condición inicial*
45.	$x\, dy - (2xe^{-y/x} + y)\, dx = 0$	$y(1) = 0$
46.	$-y^2\, dx + x(x + y)\, dy = 0$	$y(1) = 1$
47.	$\left(x \sec \dfrac{y}{x} + y\right) dx - x\, dy = 0$	$y(1) = 0$
48.	$(2x^2 + y^2)\, dx + xy\, dy = 0$	$y(1) = 0$

Campos de pendientes **En los ejercicios 49 a 52, representar algunas soluciones de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes y entonces encontrar la solución general analíticamente.**

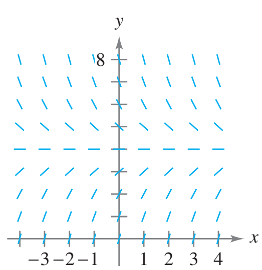
49. $\dfrac{dy}{dx} = x$



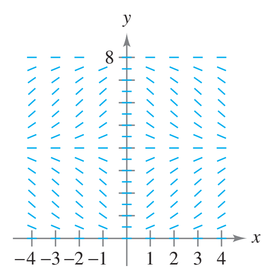
50. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$



51. $\dfrac{dy}{dx} = 4 - y$



52. $\dfrac{dy}{dx} = 0.25x(4 - y)$



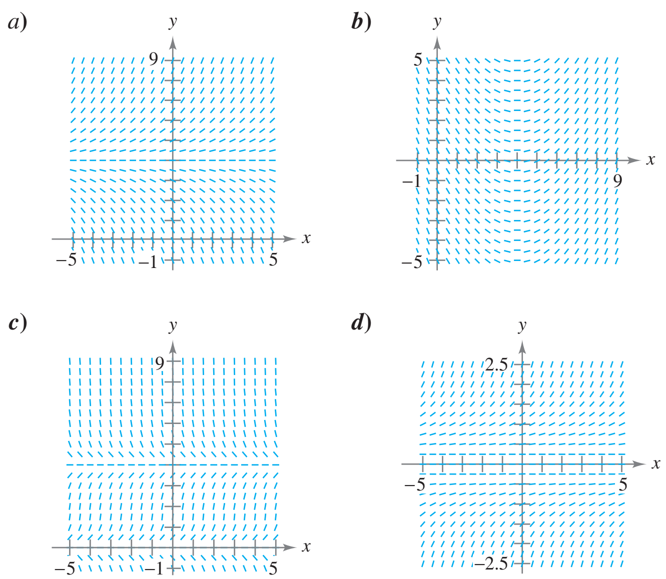
Método de Euler **En los ejercicios 53 a 56, *a*) usar el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 0.1$ para aproximar la solución particular del problema de valor inicial en un valor de x dado, *b*) encontrar analíticamente la solución exacta de la ecuación diferencial y *c*) comparar las soluciones en los valores de x dados.**

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*	*Valor x*
53.	$\frac{dy}{dx} = -6xy$	$(0, 5)$	$x = 1$
54.	$\frac{dy}{dx} + 6xy^2 = 0$	$(0, 3)$	$x = 1$
55.	$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 12}{3y^2 - 4}$	$(1, 2)$	$x = 2$
56.	$\frac{dy}{dx} = 2x(1 + y^2)$	$(1, 0)$	$x = 1.5$

57. ***Desintegración radiactiva*** La tasa de descomposición de radio radiactivo es proporcional a la cantidad presente en cualquier tiempo. La semivida o vida media de radio radiactivo es de 1 599 años. ¿Qué cantidad permanecerá después de 50 años?

58. ***Reacción química*** En una reacción química, un compuesto se transforma en otro a una tasa proporcional a la cantidad no cambiada. Si inicialmente existen 40 gramos del compuesto original, y permanecen 35 gramos después de 1 hora, ¿cuándo se transformará 75% del compuesto?

Campos de pendientes **En los ejercicios 59 a 62, *a*) escribir una ecuación diferencial para el enunciado, *b*) corresponder la ecuación diferencial con un posible campo de pendientes, y *c*) verificar los resultados mediante una herramienta de graficación para trazar un campo de pendientes de la ecuación diferencial. [Los campos de pendientes se marcaron con *a*), *b*), *c*) y *d*).]**



59. La razón de cambio de y con respecto a x es proporcional a la diferencia entre y y 4.

60. La razón de cambio de y con respecto a x es proporcional a la diferencia entre x y 4.

61. La razón de cambio de y con respecto a x es proporcional al producto de y y la diferencia entre y y 4.

62. La razón de cambio de y con respecto a x es proporcional a y^2.

CAS **63.** ***Ganancia de peso*** Un becerro que pesa 60 libras al nacer gana peso a razón de $dw/dt = k(1\,200 - w)$, donde w es el peso en libras y t es el tiempo en años. Resolver la ecuación diferencial.

a) Usar un sistema algebraico por computadora para resolver la ecuación diferencial para $k = 0.8$, 0.9 y 1. Representar las tres soluciones.

b) Si el animal se vende cuando su peso alcanza 800 libras, encontrar el tiempo de venta de cada uno de los modelos en el apartado *a*).

c) ¿Cuál es el peso máximo del animal para cada uno de los modelos?

64. ***Ganancia de peso*** Un becerro que pesa w_0 libras al nacer gana peso a razón de $dw/dt = 1\,200 - w$, donde w es el peso en libras y t es el tiempo en años. Resolver la ecuación diferencial.

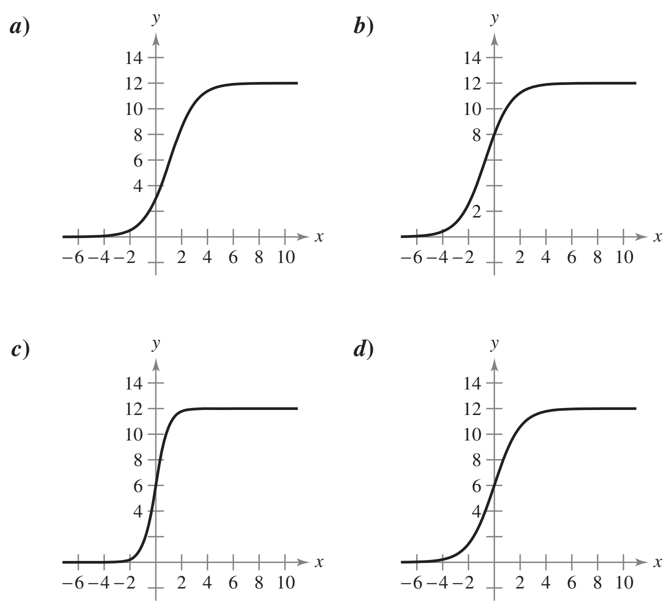
En los ejercicios 65 a 70, encontrar las trayectorias ortogonales de la familia. Usar una herramienta de graficación para obtener varios miembros de cada familia.

65. $x^2 + y^2 = C$ **66.** $x^2 - 2y^2 = C$

67. $x^2 = Cy$ **68.** $y^2 = 2Cx$

69. $y^2 = Cx^3$ **70.** $y = Ce^x$

En los ejercicios 71 a 74, señalar la ecuación logística con su gráfica. [Las gráficas se marcan con *a*), *b*), *c*) y *d*).]



71. $y = \frac{12}{1 + e^{-x}}$ **72.** $y = \frac{12}{1 + 3e^{-x}}$

73. $y = \frac{12}{1 + \frac{1}{2}e^{-x}}$ **74.** $y = \frac{12}{1 + e^{-2x}}$

En los ejercicios 75 y 76, la ecuación logística modela el crecimiento de una población. Usar la ecuación para *a*) encontrar el valor de *k*, *b*) encontrar la capacidad límite o de soporte, *c*) encontrar la población inicial, *d*) determinar cuándo la población alcanzará 50% de su capacidad límite o de soporte y *e*) escribir una ecuación diferencial logística que tiene la solución *P*(*t*).

75. $P(t) = \dfrac{2\,100}{1 + 29e^{-0.75t}}$ **76.** $P(t) = \dfrac{5\,000}{1 + 39e^{-0.2t}}$

CAS **En los ejercicios 77 y 78, la ecuación diferencial logística modela la tasa de crecimiento de una población. Usar la ecuación diferencial para *a*) encontrar el valor de *k*, *b*) encontrar la capacidad de soporte, *c*) usar un sistema algebraico por computadora para trazar la gráfica de un campo de pendientes y *d*) determinar el valor de *P* en el cual la tasa del crecimiento de población es el más alto.**

77. $\dfrac{dP}{dt} = 3P\left(1 - \dfrac{P}{100}\right)$ **78.** $\dfrac{dP}{dt} = 0.1P - 0.0004P^2$

En los ejercicios 79 a 82, encontrar la ecuación logística que satisface la condición inicial.

	Ecuación diferencial logística	*Condición inicial*
79.	$\dfrac{dy}{dt} = y\left(1 - \dfrac{y}{36}\right)$	(0, 4)
80.	$\dfrac{dy}{dt} = 2.8y\left(1 - \dfrac{y}{10}\right)$	(0, 7)
81.	$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{4y}{5} - \dfrac{y^2}{150}$	(0, 8)
82.	$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3y}{20} - \dfrac{y^2}{1\,600}$	(0, 15)

83. ***Especies en peligro*** Una organización de conservación libera 25 panteras de Florida en una zona de refugio. Después de 2 años, hay 39 panteras en la zona. El refugio tiene una capacidad límite o de soporte de 200 panteras.

a) Escribir una ecuación logística que modele la población de las panteras en el refugio.

b) Encontrar la población después de 5 años.

c) ¿Cuándo la población será de 100 panteras?

d) Escribir una ecuación diferencial logística que modele la tasa de crecimiento de la población de las panteras. Entonces repetir el apartado *b*) mediante el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 1$. Comparar la aproximación con las respuestas exactas.

e) ¿En qué tiempo la población de las panteras crecerá más rápidamente? Explicar.

84. ***Crecimiento de bacterias*** En el tiempo $t = 0$, un cultivo bacteriano pesa 1 gramo. Dos horas después, el cultivo pesa 4 gramos. El peso máximo del cultivo es de 20 gramos.

a) Escribir una ecuación logística que modele el peso del cultivo bacteriano.

b) Encontrar el peso del cultivo después de 5 horas.

c) ¿Cuándo el peso del cultivo será de 18 gramos?

d) Escribir una ecuación diferencial logística que modele la razón de crecimiento del peso del cultivo. Entonces repetir el inciso *b*) mediante el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 1$. Comparar la aproximación con los resultados exactos.

e) ¿En qué tiempo se incrementará el peso más rápidamente? Explicar.

Desarrollo de conceptos

85. Describir cómo reconocer y resolver ecuaciones diferenciales que se pueden resolver por separación de variables.

86. Establecer la prueba para determinar si una ecuación diferencial es homogénea. Dar un ejemplo.

87. Describir la relación entre dos familias de curvas que son mutuamente ortogonales.

Para discusión

88. Suponer que el crecimiento de una población está modelada por una ecuación logística. Conforme la población se incrementa, su razón de crecimiento decrece. ¿Ocurre esto en situaciones reales, como en poblaciones de animales o humanos?

89. Demostrar que si $y = \dfrac{1}{1+be^{-kt}}$, entonces $\dfrac{dy}{dt} = ky(1-y)$.

90. ***Navegación*** Un bote de navegación, que parte del reposo, acelera (dv/dt) a una tasa proporcional a la diferencia entre las velocidades del viento y el bote. Se ignora la resistencia del aire.

a) El viento sopla a 20 nudos, y después de media hora el bote se mueve a 10 nudos. Escribir la velocidad v como función del tiempo t.

b) Usar el resultado del inciso *a*) para escribir la distancia que se desplazó el bote como función del tiempo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 91 a 94, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o dar un contraejemplo.**

91. La función $y = 0$ es siempre una solución de una ecuación diferencial que puede resolverse por separación de variables.

92. La ecuación diferencial $y' = xy - 2y + x - 2$ se puede escribir en forma de variables separadas.

93. La función $f(x, y) = x^2 - 4xy + 6y^2 + 1$ es homogénea.

94. Las familias $x^2 + y^2 = 2Cy$ y $x^2 + y^2 = 2Kx$ son mutuamente ortogonales.

Preparación del examen Putnam

95. En un error de cálculo muy común, se cree que la regla del producto para derivadas dice que $(fg)' = f'g'$. Si $f(x) = e^{x^2}$, determinar, con prueba, si existe un intervalo abierto (a, b) y una función distinta de cero g definida en (a, b) tal que esta regla errónea del producto sea verdadera para x en (a, b).

Este problema fue preparado por el Committee on the Putman Prize Competition.

6.4 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

- Resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden.
- Usar ecuaciones diferenciales lineales para resolver problemas de aplicación.
- Resolver una ecuación diferencial de Bernoulli.

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

En esta sección se estudiará cómo resolver una clase muy importante de ecuaciones diferenciales de primer orden: las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** es una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones continuas de x. Se dice que esta ecuación diferencial lineal de primer orden es de la **forma normal**.

Para resolver una ecuación diferencial lineal, hay que escribirla en forma normal para identificar las funciones $P(x)$ y $Q(x)$. Después integrar $P(x)$ y formar la expresión

$$u(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \text{Factor integrante.}$$

el cual se denomina **factor integrante**. La solución general de la ecuación es

$$y = \frac{1}{u(x)}\int Q(x)u(x)\,dx. \qquad \text{Solución general.}$$

NOTA Es útil ver por qué el factor integrante ayuda a resolver una ecuación diferencial lineal de la forma $y' + P(x)y = Q(x)$. Cuando ambos miembros de la ecuación se multiplican por el factor integrante $u(x) = e^{\int P(x)dx}$, el primer miembro se convierte en la derivada de un producto.

$$y'e^{\int P(x)\,dx} + P(x)ye^{\int P(x)\,dx} = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

$$\left[ye^{\int P(x)\,dx}\right]' = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

Al integrar ambos miembros de la segunda ecuación y dividir entre $u(x)$ se produce la solución general. ■

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación diferencial lineal

Encontrar la solución general de

$$y' + y = e^x.$$

Solución Para esta ecuación, $P(x) = 1$ y $Q(x) = e^x$. Así, el factor integrante es

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\int P(x)\,dx} && \text{Factor integrante.} \\ &= e^{\int dx} \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Esto implica que la solución general es

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{u(x)}\int Q(x)u(x)\,dx \\ &= \frac{1}{e^x}\int e^x(e^x)\,dx \\ &= e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right) \\ &= \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}. && \text{Solución general.} \end{aligned}$$

TEOREMA 6.3 SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Un factor integrante para la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

es $u(x) = e^{\int P(x)dx}$. La solución de la ecuación diferencial es

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C.$$

Anna Johnson Pell Wheeler
(1883-1966)

Anna Johnson Pell Wheeler obtuvo su maestría en la Universidad de Iowa con su tesis *La extensión de la teoría de Galois a ecuaciones diferenciales* en 1904. Influida por David Hilbert, trabajó en ecuaciones diferenciales mientras estudiaba espacios lineales infinitos.

AYUDA DE ESTUDIO Más que memorizar la fórmula del teorema 6.3, basta con recordar que al multiplicar por el factor integrante $e^{\int P(x)dx}$, se convierte el miembro izquierdo de la ecuación diferencial en la derivada del producto $ye^{\int P(x)dx}$.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

Encontrar la solución de

$$xy' - 2y = x^2.$$

Solución La forma normal de la ecuación dada es

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$y' - \left(\frac{2}{x}\right)y = x. \qquad \text{Forma normal.}$$

Así, $P(x) = -2/x$, y se tiene

$$\int P(x)\,dx = -\int \frac{2}{x}\,dx$$

$$= -\ln x^2$$

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{-\ln x^2}$$

$$= \frac{1}{e^{\ln x^2}}$$

$$= \frac{1}{x^2}. \qquad \text{Factor integrante.}$$

Así, al multiplicar cada miembro de la forma normal por $1/x^2$ se llega a

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{x^2}\right] = \frac{1}{x}$$

$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{y}{x^2} = \ln|x| + C$$

$$y = x^2(\ln|x| + C). \qquad \text{Solución general.}$$

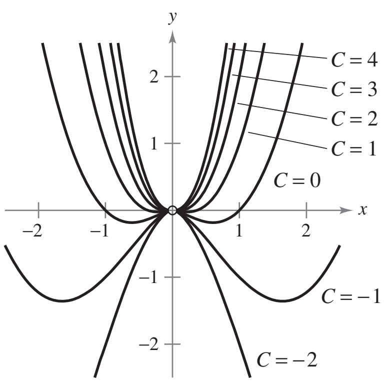


Figura 6.19

En la figura 6.19 se muestran varias curvas solución (para $C = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4) .

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

Encontrar la solución general de $y' - y \tan t = 1, -\pi/2 < t < \pi/2$.

Solución La ecuación ya está en la forma normal $y' + P(t)y = Q(t)$. Así, $P(t) = -\tan t$, y

$$\int P(t)\,dt = -\int \tan t\,dt = \ln|\cos t|$$

Como $-\pi/2 < t < \pi/2$, se pueden dejar los signos de valor absoluto y concluir que el factor integrante es

$$e^{\int P(t)\,dt} = e^{\ln(\cos t)} = \cos t. \qquad \text{Factor integrante.}$$

Así, al multiplicar $y' - y \tan t = 1$ por $\cos t$ se obtiene

$$\frac{d}{dt}[y \cos t] = \cos t$$

$$y \cos t = \int \cos t\,dt$$

$$y \cos t = \operatorname{sen} t + C$$

$$y = \tan t + C \sec t. \qquad \text{Solución general.}$$

Varias curvas solución se muestran en la figura 6.20.

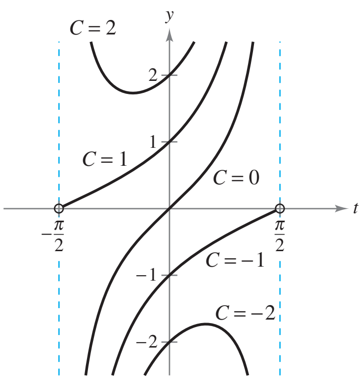


Figura 6.20

Aplicaciones

Un tipo de problema que se puede describir en términos de una ecuación diferencial involucra mezclas químicas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Un problema de mezcla

Un tanque contiene 50 galones de una disolución compuesta por 90% agua y 10% alcohol. Una segunda disolución que contiene 50% agua y 50% alcohol se agrega al tanque a una tasa de 4 galones por minuto. Conforme se añade la segunda, el tanque empieza a drenar a una tasa de 5 galones por minuto, como se muestra en la figura 6.21. Si se supone que la disolución en el tanque se agita constantemente, ¿cuánto alcohol permanecerá en el tanque después de 10 minutos?

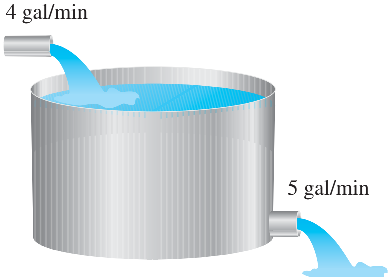


Figura 6.21

Solución Sea y el número de galones de alcohol en el tanque en cualquier instante t. Se sabe que $y = 5$ cuando $t = 0$. Dado que el número de galones en el tanque en cualquier tiempo es $50 - t$, y que el tanque pierde 5 galones por minuto, se debe perder $[5/(50 - t)]y$ galones de alcohol por minuto. Además, ya que el tanque gana 2 galones de alcohol por minuto, el ritmo o velocidad de cambio de alcohol en el tanque está dada por

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \left(\frac{5}{50 - t}\right)y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dt} + \left(\frac{5}{50 - t}\right)y = 2.$$

Para resolver esta ecuación lineal, sea $P(t) = 5/(50 - t)$ y se obtiene

$$\int P(t)\,dt = \int \frac{5}{50 - t}\,dt = -5 \ln|50 - t|.$$

Ya que $t < 50$, se puede eliminar el signo del valor absoluto y concluir que

$$e^{\int P(t)\,dt} = e^{-5 \ln(50 - t)} = \frac{1}{(50 - t)^5}.$$

Así, la solución general es

$$\frac{y}{(50-t)^5} = \int \frac{2}{(50-t)^5}\,dt = \frac{1}{2(50-t)^4} + C$$

$$y = \frac{50-t}{2} + C(50-t)^5.$$

Dado que $y = 5$ cuando $t = 0$, se tiene

$$5 = \frac{50}{2} + C(50)^5 \quad \Rightarrow \quad -\frac{20}{50^5} = C$$

lo cual significa que la solución particular es

$$y = \frac{50-t}{2} - 20\left(\frac{50-t}{50}\right)^5.$$

Por último, cuando $t = 10$, la cantidad de alcohol en el tanque es

$$y = \frac{50-10}{2} - 20\left(\frac{50-10}{50}\right)^5 \approx 13.45 \text{ gal}$$

lo cual representa una solución que contiene 33.6% de alcohol.

Hasta ahora en problemas relacionados con la caída de un cuerpo se ha despreciado la resistencia del aire. El siguiente ejemplo incluye este factor. En el ejemplo, la resistencia del aire sobre el objeto que cae se supone proporcional a su velocidad v. Si g es la constante gravitacional, la fuerza descendente F sobre el objeto que cae de masa m se da por medio de la diferencia $mg - kv$. Pero, por la segunda ley de movimiento de Newton, se sabe que

$$F = ma = m(dv/dt) \qquad a = \text{aceleración.}$$

lo cual lleva a la siguiente ecuación diferencial.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

EJEMPLO 5 Un objeto que cae con resistencia al aire

Un objeto de masa m cae desde un helicóptero. Encontrar su velocidad en función del tiempo t, si se supone que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto.

Solución La velocidad v satisface la ecuación

$$\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g. \qquad \begin{aligned} &g = \text{constante gravitacional.}\\ &k = \text{constante de proporcionalidad.}\end{aligned}$$

Si $b = k/m$, se pueden *separar variables* para obtener

$$dv = (g - bv)\,dt$$

$$\int \frac{dv}{g - bv} = \int dt$$

$$-\frac{1}{b}\ln|g - bv| = t + C_1$$

$$\ln|g - bv| = -bt - bC_1$$

$$g - bv = Ce^{-bt}. \qquad C = e^{-bC_1}$$

Dado que el objeto cayó, $v = 0$ cuando $t = 0$; así $g = C$, y se deduce que

$$-bv = -g + ge^{-bt} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{g - ge^{-bt}}{b} = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}).$$

NOTA Observar en el ejemplo 5 que la velocidad se aproxima al límite mg/k como resultado de la resistencia al aire. Para problemas de objetos que caen y en los que la resistencia al aire es despreciada, la velocidad se incrementa sin límite.

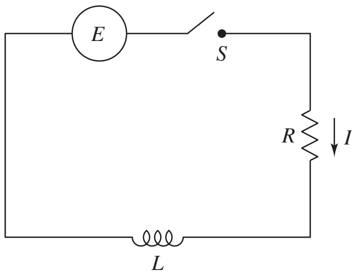


Figura 6.22

Un circuito eléctrico simple consta de una corriente eléctrica I (en amperes), una resistencia R (en ohms), una inductancia L (en henrys), y una fuerza electromotriz E constante (en volts), como se muestra en la figura 6.22. Con base en la segunda ley de Kirchhoff, si el interruptor S se cierra cuando $t = 0$, la fuerza electromotriz aplicada (voltaje) es igual a la suma de la caída de voltaje en el resto del circuito. De hecho, esto significa que la corriente I satisface la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

EJEMPLO 6 Un problema de circuitos eléctricos

Encontrar la corriente I como función del tiempo t (en segundos), dado que I satisface la ecuación diferencial

$$L(dI/dt) + RI = \text{sen } 2t,$$

donde R y L son constantes diferentes de cero.

Solución En forma normal, la ecuación lineal dada es

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{1}{L}\text{sen } 2t.$$

Sea $P(t) = R/L$, tal que $e^{\int P(t)\,dt} = e^{(R/L)t}$, y, por el teorema 6.3,

$$\begin{aligned} Ie^{(R/L)t} &= \frac{1}{L}\int e^{(R/L)t}\text{ sen } 2t\, dt \\ &= \frac{1}{4L^2 + R^2}e^{(R/L)t}(R \text{ sen } 2t - 2L\cos 2t) + C. \end{aligned}$$

Así, la solución general es

$$I = e^{-(R/L)t}\left[\frac{1}{4L^2 + R^2}e^{(R/L)t}(R \text{ sen } 2t - 2L\cos 2t) + C\right]$$

$$I = \frac{1}{4L^2 + R^2}(R \text{ sen } 2t - 2L\cos 2t) + Ce^{-(R/L)t}.$$

TECNOLOGÍA La integral del ejemplo 6 se encontró mediante un software de álgebra simbólica. Si se tiene acceso a *Maple*, *Mathematica*, o *TI-89*, tratar de usarlo para integrar

$$\frac{1}{L}\int e^{(R/L)t}\text{ sen } 2t\, dt.$$

En el capítulo 8 se estudiará cómo integrar funciones de ese tipo mediante integración por partes.

Ecuación de Bernoulli

La también conocida ecuación no lineal que reduce a una lineal con una apropiada sustitución, es la **ecuación de Bernoulli**, llamada así por James Bernoulli (1654-1705).

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \qquad \text{Ecuación de Bernoulli.}$$

Esta ecuación es lineal si $n = 0$, y tiene variables separadas si $n = 1$. Así, en el siguiente desarrollo se supone que $n \neq 0$ y $n \neq 1$. Al multiplicar por y^{-n} y $(1 - n)$ se obtiene

$$\begin{aligned} y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} &= Q(x) \\ (1-n)y^{-n}y' + (1-n)P(x)y^{1-n} &= (1-n)Q(x) \\ \frac{d}{dx}[y^{1-n}] + (1-n)P(x)y^{1-n} &= (1-n)Q(x) \end{aligned}$$

la cual es una ecuación lineal en la variable y^{1-n}. Considerar que $z = y^{1-n}$ produce la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Por último, mediante el teorema 6.3, la *solución general de la ecuación de Bernoulli* es

$$y^{1-n}e^{\int(1-n)P(x)\,dx} = \int (1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)\,dx}\,dx + C.$$

EJEMPLO 7 Solución de una ecuación de Bernoulli

Encontrar la solución de $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$.

Solución Para esta ecuación de Bernoulli, sea $n = -3$, y usar la sustitución

$$\begin{aligned} z &= y^4 && \text{Sea } z = y^{1-n} = y^{1-(-3)}. \\ z' &= 4y^3y'. && \text{Derivar.} \end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación original por $4y^3$ se produce

$$\begin{aligned} y' + xy &= xe^{-x^2}y^{-3} && \text{Escribir la ecuación original.} \\ 4y^3y' + 4xy^4 &= 4xe^{-x^2} && \text{Multiplicar cada miembro por } 4y^3. \\ z' + 4xz &= 4xe^{-x^2}. && \text{Ecuación lineal: } z' + P(x)z = Q(x). \end{aligned}$$

Esta ecuación es lineal en z. Mediante $P(x) = 4x$ se produce

$$\begin{aligned} \int P(x)\,dx &= \int 4x\,dx \\ &= 2x^2 \end{aligned}$$

lo cual implica que e^{2x^2} es un factor integrante. Al multiplicar la ecuación lineal por este factor se produce

$$\begin{aligned} z' + 4xz &= 4xe^{-x^2} && \text{Ecuación lineal.} \\ z'e^{2x^2} + 4xze^{2x^2} &= 4xe^{x^2} && \text{Multiplicar por el factor integrante.} \\ \frac{d}{dx}[ze^{2x^2}] &= 4xe^{x^2} && \text{Escribir el miembro izquierdo como una derivada.} \\ ze^{2x^2} &= \int 4xe^{x^2}\,dx && \text{Integrar cada miembro.} \\ ze^{2x^2} &= 2e^{x^2} + C \\ z &= 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}. && \text{Dividir cada miembro entre } e^{2x^2}. \end{aligned}$$

Por último, al sustituir $z = y^4$, la solución general es

$$y^4 = 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}. \qquad \text{Solución general.}$$

Hasta aquí se han estudiado varios tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden. De éstas, el caso de las variables separables es usualmente el más simple, y la solución por factor integrante es ordinariamente usada sólo como último recurso.

Resumen de ecuaciones diferenciales de primer orden

Método	*Forma de ecuación*
1. Variables separables:	$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$
2. Homogéneas:	$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, donde M y N son homogéneas de n-ésimo grado
3. Lineal:	$y' + P(x)y = Q(x)$
4. Ecuación de Bernoulli:	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$

6.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, determinar si la ecuación diferencial es lineal. Explicar las razones.

1. $x^3y' + xy = e^x + 1$ **2.** $2xy - y'\ln x = y$

3. $y' - y \operatorname{sen} x = xy^2$ **4.** $\dfrac{2 - y'}{y} = 5x$

En los ejercicios 5 a 14, resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden.

5. $\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = 6x + 2$ **6.** $\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{2}{x}\right)y = 3x - 5$

7. $y' - y = 16$ **8.** $y' + 2xy = 10x$

9. $(y + 1)\cos x\,dx - dy = 0$ **10.** $(y - 1)\operatorname{sen} x\,dx - dy = 0$

11. $(x - 1)y' + y = x^2 - 1$ **12.** $y' + 3y = e^{3x}$

13. $y' - 3x^2y = e^{x^3}$ **14.** $y' + y\tan x = \sec x$

Campos de pendientes **En los ejercicios 15 y 16, *a*) representar manualmente una solución gráfica aproximada de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial sobre el campo de pendientes, *b*) encontrar la solución particular que satisface la condición inicial y *c*) usar una herramienta de graficación para representar la solución particular. Comparar la gráfica con la realizada manualmente en el inciso *a*).**

15. $\dfrac{dy}{dx} = e^x - y$ **16.** $y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = \operatorname{sen} x^2$

$(0, 1)$ $(\sqrt{\pi}, 0)$

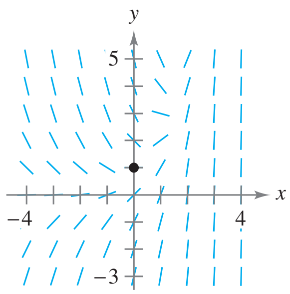


Figura para 15

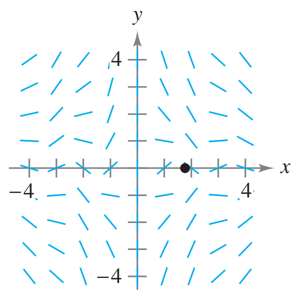


Figura para 16

En los ejercicios 17 a 24, encontrar la solución particular de la ecuación diferencial que satisface las condiciones de frontera iniciales especificadas.

	Ecuación diferencial	*Condición límite o de frontera*
17.	$y'\cos^2 x + y - 1 = 0$	$y(0) = 5$
18.	$x^3y' + 2y = e^{1/x^2}$	$y(1) = e$
19.	$y' + y\tan x = \sec x + \cos x$	$y(0) = 1$
20.	$y' + y\sec x = \sec x$	$y(0) = 4$
21.	$y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = 0$	$y(2) = 2$
22.	$y' + (2x - 1)y = 0$	$y(1) = 2$
23.	$x\,dy = (x + y + 2)\,dx$	$y(1) = 10$
24.	$2xy' - y = x^3 - x$	$y(4) = 2$

25. ***Crecimiento de población*** Cuando se predice el crecimiento de una población, los demógrafos deben considerar tasa de natalidad y mortalidad (mortandad) así como el cambio neto causado por la diferencia entre las tasas de inmigración y emigración. Sea P la población en un tiempo t y N el incremento neto por unidad de tiempo resultante de la diferencia entre inmigración y emigración. Así, la tasa de crecimiento de la población está dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP + N, \qquad N \text{ es constante.}$$

Resolver esta ecuación diferencial para encontrar P como función del tiempo si en $t = 0$ el tamaño de la población es P_0.

26. ***Aumento de inversión*** Una gran corporación inicia en $t = 0$ para invertir parte de sus ingresos continuamente a una razón de P dólares por año, en un fondo para una futura expansión corporativa. Suponer que el fondo gana r por ciento de interés compuesto continuo por año. Así, la tasa de crecimiento de la cantidad A en el fondo está dada por

$$\frac{dA}{dt} = rA + P$$

donde $A = 0$ cuando $t = 0$. Resolver esta ecuación diferencial para A como función de t.

Aumento de inversión **En los ejercicios 27 y 28, use el resultado del ejercicio 26.**

27. Encontrar A para los siguientes casos.

a) $P = \$275\,000$, $r = 8\%$ y $t = 10$ años

b) $P = \$550\,000$, $r = 5.9\%$ y $t = 25$ años

28. Encontrar t si la corporación necesita \$1 000 000 y se pueden invertir \$125 000 por año en un fondo que gana 8% de interés compuesto en forma continua.

29. ***Alimentación intravenosa*** La glucosa se agrega por vía intravenosa al flujo sanguíneo a una tasa de q unidades por minuto, y el cuerpo elimina glucosa del flujo sanguíneo a una tasa proporcional a la cantidad presente. Suponer que $Q(t)$ es la cantidad de glucosa en el flujo sanguíneo en un tiempo t.

a) Determinar la ecuación diferencial que describe la razón de cambio de glucosa en el flujo sanguíneo con respecto al tiempo.

b) Resolver la ecuación diferencial del inciso *a*) y considerar $Q = Q_0$ cuando $t = 0$.

c) Encontrar el límite de $Q(t)$ cuando $t \to \infty$.

30. ***Curva de aprendizaje*** El gerente de una empresa ha encontrado que el número máximo de unidades que un trabajador puede producir en un día es 75. La tasa de incremento en el número N de unidades producido con respecto al tiempo t en días por un nuevo empleado es proporcional a $75 - N$.

a) Determinar la ecuación diferencial que describe la razón de cambio con respecto al tiempo.

b) Resolver la ecuación diferencial del inciso *a*).

c) Encontrar la solución particular para un nuevo empleado que produce 20 unidades en el primer día y 35 unidades en el día 20.

Mezcla **En los ejercicios 31 a 35, considerar un tanque que en el tiempo $t = 0$ contiene v_0 galones de una disolución de la cual, por peso, q_0 libras es disolución concentrada. Otra disolución que contiene q_1 libras del concentrado por galón fluye dentro del tanque a una tasa de r_1 galones por minuto. La disolución en el tanque se conserva bien mezclada y está concentrada a una tasa de r_2 galones por minuto.**

31. Si Q es la cantidad de concentrado en la disolución en cualquier tiempo t, demostrar que

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{r_2 Q}{v_0 + (r_1 - r_2)t} = q_1 r_1.$$

32. Si Q es la cantidad de concentración en la disolución en cualquier tiempo t, escribir la ecuación diferencial para la razón de cambio de Q respecto de t si $r_1 = r_2 = r$.

33. Un tanque de 200 galones se llena con una disolución que contiene 25 libras de concentración. Al iniciar en el tiempo $t = 0$, se añade agua destilada en el tanque a una tasa de 10 galones por minuto, y la disolución mezclada se elimina con la misma tasa.

a) Encontrar la cantidad de concentración Q en la disolución como función de t.

b) Encontrar el tiempo en el cual la cantidad de concentración en el tanque alcanza 15 libras.

c) Encontrar la cantidad de concentración en la disolución cuando $t \to \infty$.

34. Repetir el ejercicio 33, si se supone que la disolución entera del tanque contiene 0.04 libras de concentrado por galón.

35. Un tanque de 200 galones está lleno a la mitad de agua destilada. En el tiempo $t = 0$, una solución que contiene 0.5 libras de concentrado por galón entra al tanque a razón de 5 galones por minuto, y la mezcla bien agitada es eliminada a una tasa de 3 galones por minuto.

a) ¿En qué tiempo se llenará el tanque?

b) En el tiempo en que el tanque se llena, ¿cuántas libras de concentrado contendrá?

c) Repetir los incisos *a*) y *b*), suponiendo que la solución entrante al tanque contiene una libra de concentrado por galón.

Para discusión

36. Suponiendo que la expresión $u(x)$ es un factor integrante para $y' + P(x)y = Q(x)$, ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a $u'(x)$? Verificar su respuesta.

a) $P(x)\,u(x)$

b) $P'(x)\,u(x)$

c) $Q(x)\,u(x)$

d) $Q'(x)\,u(x)$

Objeto que cae **En los ejercicios 37 y 38, considerar un objeto de ocho libras que cae desde una altura de 5 000 pies, donde la resistencia al aire es proporcional a la velocidad.**

37. Escribir la velocidad en función del tiempo si su velocidad después de 5 segundos es, aproximadamente, 101 pies por segundo. ¿Cuál es el valor limitante de la función velocidad?

38. Usar el resultado del ejercicio 37 para escribir la posición del objeto como función del tiempo. Aproximar la velocidad del objeto cuando éste alcance el suelo.

Circuitos eléctricos **En los ejercicios 39 y 40, usar la ecuación diferencial para circuitos eléctricos dada por**

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

En esta ecuación, I es la corriente, R es la resistencia, L es la inductancia y E es la fuerza electromotriz (voltaje).

39. Resolver la ecuación diferencial dado un voltaje constante E_0.

40. Usar el resultado del ejercicio 39 para encontrar la ecuación para la corriente si $I(0) = 0$, $E_0 = 120$ volts, $R = 600$ ohms y $L = 4$ henrys. ¿Cuándo alcanzará la corriente 90% de su valor limitante?

Desarrollo de conceptos

41. Se da la forma normal de una ecuación diferencial lineal de primer orden. ¿Cuál es su factor integrante?

42. Se da la forma normal de la ecuación de Bernoulli. Describir cómo ésta se reduce a una ecuación lineal.

En los ejercicios 43 a 46, marcar la ecuación diferencial con su respectiva solución.

Ecuación diferencial	*Solución*
43. $y' - 2x = 0$	*a)* $y = Ce^{x^2}$
44. $y' - 2y = 0$	*b)* $y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$
45. $y' - 2xy = 0$	*c)* $y = x^2 + C$
46. $y' - 2xy = x$	*d)* $y = Ce^{2x}$

En los ejercicios 47-54, resolver la ecuación diferencial de Bernoulli.

47. $y' + 3x^2y = x^2y^3$

48. $y' + xy = xy^{-1}$

49. $y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = xy^2$

50. $y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = x\sqrt{y}$

51. $xy' + y = xy^3$

52. $y' - y = y^3$

53. $y' - y = e^x\sqrt[3]{y}$

54. $yy' - 2y^2 = e^x$

Campo de pendientes **En los ejercicios 55 a 58, *a*) usar una herramienta de graficación para representar el campo de pendientes para la ecuación diferencial, *b*) encontrar la solución particular de la ecuación diferencial que pasa a través de los puntos dados y *c*) usar una herramienta de graficación para representar la solución particular sobre el campo de pendientes.**

Ecuación diferencial	*Puntos*
55. $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2$	$(-2, 4),\ (2, 8)$
56. $\frac{dy}{dx} + 4x^3y = x^3$	$\left(0, \frac{7}{2}\right),\ \left(0, -\frac{1}{2}\right)$
57. $\frac{dy}{dx} + (\cot x)y = 2$	$(1, 1),\ (3, -1)$
58. $\frac{dy}{dx} + 2xy = xy^2$	$(0, 3),\ (0, 1)$

En los ejercicios 59 a 70, resolver la ecuación diferencial por el método apropiado.

59. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x+y}}{e^{x-y}}$

60. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-3}{y(y+4)}$

61. $y\cos x - \cos x + \frac{dy}{dx} = 0$

62. $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$

63. $(3y^2 + 4xy)\,dx + (2xy + x^2)\,dy = 0$

64. $(x + y)\,dx - x\,dy = 0$

65. $(2y - e^x)\,dx + x\,dy = 0$

66. $(y^2 + xy)\,dx - x^2\,dy = 0$

67. $(x^2y^4 - 1)\,dx + x^3y^3\,dy = 0$

68. $y\,dx + (3x + 4y)\,dy = 0$

69. $3(y - 4x^2)\,dx + x\,dy = 0$

70. $x\,dx + (y + e^y)(x^2 + 1)\,dy = 0$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 71 y 72, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué, o dar un contraejemplo.**

71. $y' + x\sqrt{y} = x^2$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

72. $y' + xy = e^xy$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

PROYECTO DE TRABAJO

Pérdida de peso

El peso de una persona depende tanto del número de calorías consumidas como de la energía utilizada. Además, la cantidad de energía usada depende del peso de una persona; la cantidad media de energía usada por una persona es 17.5 calorías por libra por día. Así, entre mayor peso pierde una persona, es menor la energía que una persona usa (se supone que la persona mantiene un nivel de actividad constante). Para calcular el peso perdido se puede usar la siguiente ecuación

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) = \frac{C}{3\,500} - \frac{17.5}{3\,500}w$$

donde w es el peso de la persona (en libras), t es el tiempo en días, y C es el consumo diario de calorías, que es constante.

a) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

b) Considerar una persona que pesa 180 libras e inicia una dieta de 2 500 calorías por día. ¿Cuánto tiempo tardará la persona en perder 10 libras? ¿Cuánto tiempo le tomará a la persona en perder 35 libras?

c) Usar una herramienta de graficación para presentar la solución. ¿Cuál es el peso límite de la persona?

d) Repetir los incisos *b*) y *c*) para una persona que pesa 200 libras cuando inició la dieta.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para una mejor información sobre el modelo de pérdida de peso, ver el artículo “Un modelo lineal de dieta”, por Arthur C. Segal en *The College Mathematics Journal*.

6 Ejercicios de repaso

1. Determinar si la función $y = x^3$ es una solución de la ecuación diferencial $2xy' + 4y = 10x^3$.

2. Determinar si la función $y = 2 \text{ sen } 2x$ es una solución de la ecuación diferencial $y''' - 8y = 0$.

En los ejercicios 3 a 10, usar integración para encontrar una solución general de la ecuación diferencial.

3. $\dfrac{dy}{dx} = 4x^2 + 7$

4. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^3 - 8x$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \cos 2x$

6. $\dfrac{dy}{dx} = 2 \text{ sen } x$

7. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{x - 5}$

8. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{x - 7}$

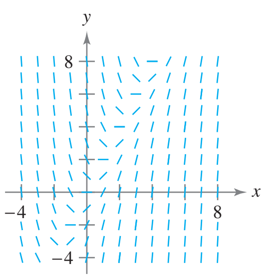
9. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2-x}$

10. $\dfrac{dy}{dx} = 3e^{-x/3}$

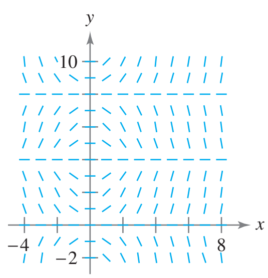
Campos de pendientes **En los ejercicios 11 y 12, una ecuación diferencial y su campo de pendientes son dados. Determinar las pendientes (si es posible) en el campo de pendientes en los puntos dados en la tabla.**

x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx						

11. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - y$



12. $\dfrac{dy}{dx} = x \text{ sen}\left(\dfrac{\pi y}{4}\right)$



Campos de pendientes **En los ejercicios 13 a 18, *a*) trazar la gráfica del campo de pendientes dado por la ecuación diferencial y *b*) usar el campo de pendientes para graficar la solución que pasa a través del punto dado. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.**

	Ecuación diferencial	*Punto*
13.	$y' = 3 - x$	$(2, 1)$
14.	$y' = 2x^2 - x$	$(0, 2)$
15.	$y' = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x$	$(0, 3)$
16.	$y' = y + 4x$	$(-1, 1)$
17.	$y' = \dfrac{xy}{x^2 + 4}$	$(0, 1)$
18.	$y' = \dfrac{y}{x^2 + 1}$	$(0, -2)$

En los ejercicios 19 a 24, resolver la ecuación diferencial.

19. $\dfrac{dy}{dx} = 8 - x$

20. $\dfrac{dy}{dx} = y + 8$

21. $\dfrac{dy}{dx} = (3 + y)^2$

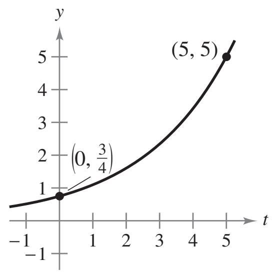
22. $\dfrac{dy}{dx} = 10\sqrt{y}$

23. $(2 + x)y' - xy = 0$

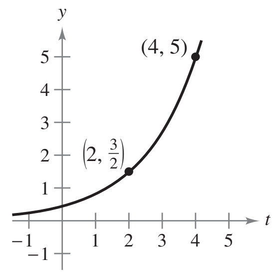
24. $xy' - (x + 1)y = 0$

En los ejercicios 25 a 28, encontrar la función exponencial $y = Ce^{kt}$ que pasa a través de los dos puntos.

25.



26.



27. $(0, 5), \left(5, \dfrac{1}{6}\right)$

28. $(1, 9), (6, 2)$

29. ***Presión del aire*** Bajo condiciones ideales, la presión del aire decrece continuamente en relación con la altura sobre el nivel del mar a una tasa proporcional a la presión a esa altura. El barómetro marca 30 pulgadas al nivel del mar y 15 pulgadas a 18 000 pies. Encontrar la presión barométrica a 35 000 pies.

30. ***Desintegración radiactiva*** El radio radiactivo tiene una vida media de aproximadamente 1 599 años. La cantidad inicial es 15 gramos. ¿Qué cantidad permanece después de 750 años?

31. ***Ventas*** Las ventas S (en miles de unidades) de un nuevo producto después de que ha estado en el mercado por t años está dada por

$$S = Ce^{k/t}.$$

a) Encontrar S como una función de t si se han vendido 5 000 unidades después de 1 año y el punto de saturación del mercado es 30 000 unidades (es decir, $\lim\limits_{t \to \infty} S = 30$).

b) ¿Cuántas unidades se han vendido después de 5 años?

c) Usar una herramienta de graficación para presentar esta función de ventas.

32. ***Ventas*** Las ventas S (en miles de unidades) de un nuevo producto después de que ha estado en el mercado durante t años están dadas por

$$S = 25(1 - e^{kt})$$

a) Encontrar S como función de t si se han vendido 4 000 unidades después de 1 año.

b) ¿Cuántas unidades saturarán este mercado?

c) ¿Cuántas unidades se habrán vendido después de 5 años?

d) Usar una herramienta de graficación para presentar esta función de ventas.

33. ***Crecimiento de población*** Una población crece continuamente a una tasa de 1.85%. ¿Cuánto tiempo tardará la población en duplicarse?

34. ***Ahorro de gasolina*** Un automóvil recorre 28 millas por galón de gasolina a velocidades superiores a 50 millas por hora. A más de 50 millas por hora, el número de millas por galones cae a una tasa de 12% por cada 10 millas por hora.

a) s es la velocidad y y es el número de millas por galón. Encontrar y como función de s mediante la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{ds} = -0.012y, \quad s > 50.$$

b) Usar la función del apartado *a*) para completar la tabla.

Velocidad	50	55	60	65	70
Millas por galón					

En los ejercicios 35 a 40, resolver la ecuación diferencial.

35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^5 + 7}{x}$ **36.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

37. $y' - 16xy = 0$ **38.** $y' - e^y \operatorname{sen} x = 0$

39. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ **40.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3(x + y)}{x}$

41. Verificar que la solución general $y = C_1x + C_2x^3$ satisface la ecuación diferencial $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$. Entonces, encontrar la solución particular que satisface la condición inicial $y = 0$ y $y' = 4$ cuando $x = 2$.

42. ***Movimiento vertical*** Un objeto que cae se encuentra con la resistencia al aire que es proporcional a su velocidad. La aceleración debida a la gravedad es -9.8 metros por segundo al cuadrado. El cambio neto en la velocidad es $dv/dt = kv - 9.8$.

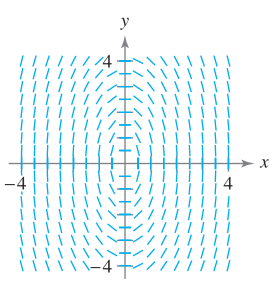
a) Encontrar la velocidad del objeto como función del tiempo si la velocidad inicial es v_0.

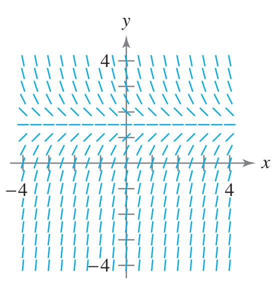
b) Usar el resultado del apartado *a*) para encontrar el límite de la velocidad cuando t se aproxima al infinito.

c) Integrar la función velocidad que se encontró en el inciso *a*) para encontrar la posición s.

Campos de pendientes **En los ejercicios 43 y 44, trazar la gráfica de algunas funciones de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes y encontrar la solución general de forma analítica.**

43. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{y}$ **44.** $\dfrac{dy}{dx} = 3 - 2y$





En los ejercicios 45 y 46, usar la ecuación logística para calcular el crecimiento de una población. Usar la ecuación para *a*) encontrar el valor de *k*, *b*) encontrar la capacidad límite o de soporte, *c*) calcular la población inicial, *d*) determinar cuándo la población alcanzará 50% de su capacidad límite o de soporte y *e*) escribir la ecuación diferencial logística que tiene la solución *P*(*t*).

45. $P(t) = \dfrac{5\,250}{1 + 34e^{-0.55t}}$ **46.** $P(t) = \dfrac{4\,800}{1 + 14e^{-0.15t}}$

En los ejercicios 47 y 48, encontrar la ecuación logística que satisfaga la condición inicial.

	Ecuación diferencial logística	*Condición inicial*
47.	$\dfrac{dy}{dt} = y\left(1 - \dfrac{y}{80}\right)$	(0, 8)
48.	$\dfrac{dy}{dt} = 1.76y\left(1 - \dfrac{y}{8}\right)$	(0, 3)

49. ***Medio ambiente*** Un departamento de conservación libera 1 200 truchas de río en un lago. Se estima que la capacidad límite o de soporte del lago para las especies es 20 400. Después del primer año, existen 2 000 truchas en el lago.

a) Escribir la ecuación logística que calcula el número de truchas en el lago.

b) Encontrar el número de truchas en el lago después de 8 años.

c) ¿Cuándo el número de truchas en el lago será de 10 000?

50. ***Medio ambiente*** Escribir la ecuación diferencial logística que calcula la tasa de crecimiento de la población de las truchas en el ejercicio 49. Entonces repetir el inciso *b*) mediante el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 1$. Comparar la aproximación con la respuesta exacta.

En los ejercicios 51 a 60, resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden.

51. $y^{1} - y = 10$ **52.** $e^x y' + 4e^x y = 1$

53. $4y' = e^{x/4} + y$ **54.** $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{5y}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$

55. $(x - 2)y' + y = 1$

56. $(x + 3)y' + 2y = 2(x + 3)^2$

57. $(3y + \operatorname{sen} 2x)\, dx - dy = 0$

58. $dy = (y \tan x + 2e^x)\, dx$

59. $y' + 5y = e^{5x}$

60. $xy' - ay = bx^4$

En los ejercicios 61 a 64, resolver la ecuación diferencial de Bernoulli.

61. $y' + y = xy^2$ $\quad$ [*Sugerencia:* $\int xe^{-x}\, dx = (-x - 1)e^{-x}$]

62. $y' + 2xy = xy^2$

63. $y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = \dfrac{y^3}{x^2}$

64. $xy' + y = xy^2$

En los ejercicios 65 a 68, escribir un ejemplo de la ecuación diferencial dada. A continuación resolver la ecuación.

65. Ecuación diferencial homogénea.

66. Ecuación diferencial logística.

67. Ecuación diferencial lineal de primer orden.

68. Ecuación diferencial de Bernoulli.