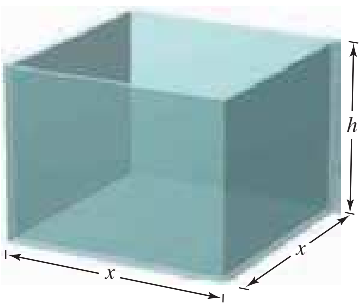
3.7 Problemas de optimización

- **Resolver problemas de máximos y mínimos aplicados.**

Problemas de aplicación de máximos y mínimos

Una de las aplicaciones más comunes del cálculo implica la determinación de los valores mínimo y máximo. Recordar cuántas veces hemos oído hablar de utilidad (beneficio) máxima(o), mínimo costo, tiempo mínimo, voltaje máximo, forma óptima, tamaño mínimo, máxima resistencia y máxima distancia. Antes de describir una estrategia general de solución para tales problemas, se considera un ejemplo.

EJEMPLO 1 Determinación del volumen máximo



Caja abierta con base cuadrada: $S = x^2 + 4xh = 108$
Figura 3.53

Un fabricante quiere diseñar una caja abierta que tenga una base cuadrada y un área superficial de 108 pulgadas cuadradas, como se muestra en la figura 3.53. ¿Qué dimensiones producirá una caja con un volumen máximo?

Solución Debido a que la caja tiene una base cuadrada, su volumen es

$$V = x^2h \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación primaria** porque proporciona una fórmula para la cantidad que se va a optimizar. El área de la superficie de la caja es

$$S = (\text{área de la base}) + (\text{área de los cuatro lados})$$
$$S = x^2 + 4xh = 108. \qquad \text{Ecuación secundaria.}$$

Como V se va a maximizar, escribir V como una función de una sola variable. Para hacerlo, es posible resolver la ecuación $x^2 + 4xh = 108$ para h en términos de x y obtener $h = (108 - x^2)/(4x)$. Sustituyendo en la ecuación primaria, se obtiene

$$\begin{aligned} V &= x^2h && \text{Función de dos variables.}\\ &= x^2\left(\frac{108 - x^2}{4x}\right) && \text{Sustituir para } h.\\ &= 27x - \frac{x^3}{4}. && \text{Función de una variable.} \end{aligned}$$

Antes de determinar qué valor de x producirá un valor máximo de V, se necesita determinar el *dominio admisible*. Esto es, ¿qué valores de x tienen sentido en este problema? Se sabe que $V \geq 0$. También que x debe ser no negativa y que el área de la base ($A = x^2$) es a lo sumo 108. De tal modo, el dominio admisible es

$$0 \leq x \leq \sqrt{108}. \qquad \text{Dominio admisible.}$$

Para maximizar V, determinar los puntos críticos de la función de volumen en el intervalo $\left(0, \sqrt{108}\right)$.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} = 27 - \frac{3x^2}{4} &= 0 && \text{Igualar la derivada a cero.}\\ 3x^2 &= 108 && \text{Simplificar.}\\ x &= \pm 6 && \text{Puntos críticos.} \end{aligned}$$

De tal modo, los puntos críticos son $x = \pm 6$. No se necesita considerar $x = -6$ porque está fuera del dominio. La evaluación V en el punto crítico $x = 6$ y en los puntos terminales del dominio produce $V(0) = 0$, $V(6) = 108$ y $V\left(\sqrt{108}\right) = 0$. De tal modo, V es máximo cuando $x = 6$ y las dimensiones de la caja son $6 \times 6 \times 3$ pulgadas.

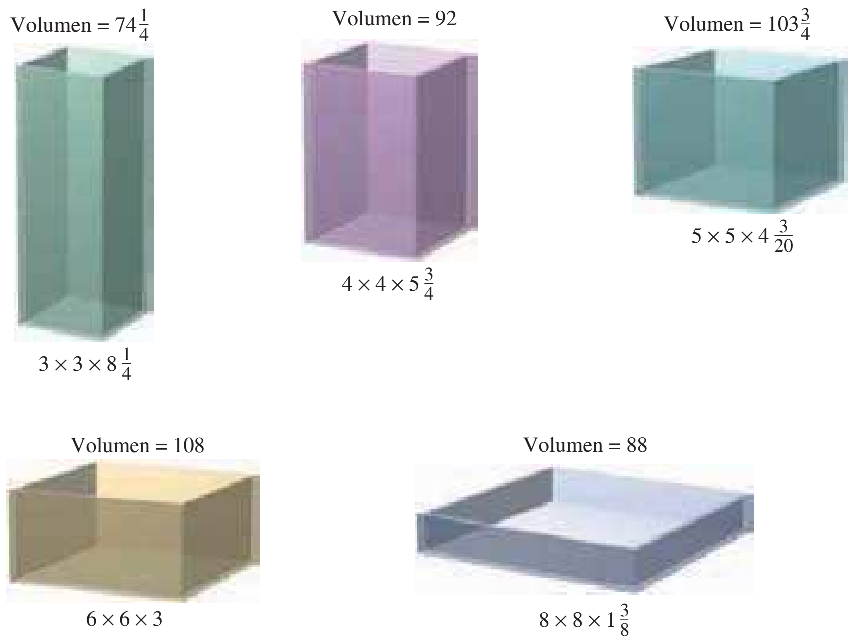
TECNOLOGÍA Se puede verificar la respuesta utilizando una herramienta de graficación para representar la función volumen

$$V = 27x - \frac{x^3}{4}.$$

Usar una ventana de observación en la que $0 \leq x \leq \sqrt{108} \approx 10.4$ y $0 \leq y \leq 120$, y la función *trace* para determinar el valor máximo de V.

En el ejemplo 1 se nota que hay un número infinito de cajas abiertas que tienen 108 pulgadas cuadradas de área superficial. Para empezar a resolver el problema es necesario preguntar qué forma básica parecería producir un volumen máximo. ¿La caja debe ser alta, muy baja o casi cúbica?

Incluso se puede tratar de calcular unos cuantos volúmenes, como se muestra en la figura 3.54, para ver si se obtiene una mejor idea de lo que deben ser las dimensiones óptimas. Recordar que no se puede resolver un problema hasta que no haya sido identificado con toda claridad.



¿Qué caja tiene el volumen mayor?
Figura 3.54

El ejemplo 1 ilustra las siguientes estrategias para resolver problemas aplicados de mínimos y máximos.

Estrategias para resolver problemas aplicados de mínimos y máximos

1. Identificar todas las cantidades *dadas* y las que *se van a determinar*. Si es posible, elaborar un dibujo.
2. Escribir una **ecuación primaria** para la cantidad que se va a maximizar o minimizar.
3. Reducir la ecuación primaria a una que tenga una *sola variable independiente*. Esto quizá implique el uso de **ecuaciones secundarias** que relacionan las variables independientes de la ecuación primaria.
4. Determinar el dominio admisible de la ecuación primaria. Esto es, determinar los valores para los cuales el problema planteado tiene sentido.
5. Determinar el valor máximo o mínimo deseado mediante las técnicas de cálculo estudiadas en las secciones 3.1 a 3.4.

NOTA Al efectuar el paso 5, recordar que para determinar el valor máximo o mínimo de una función continua f en un intervalo cerrado, hay que comparar los valores de f en sus puntos críticos con los valores de f en los puntos terminales del intervalo.

EJEMPLO 2 Determinación de la distancia mínima

¿Qué puntos sobre la gráfica de $y = 4 - x^2$ son más cercanos al punto $(0, 2)$?

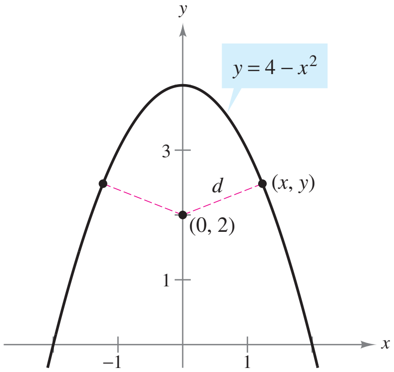
Solución

La figura 3.55 muestra que hay dos puntos a una distancia mínima del punto $(0, 2)$. La distancia entre el punto $(0, 2)$ y el punto (x, y) sobre la gráfica de $y = 4 - x^2$ está dada por

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2}. \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

Utilizando la ecuación secundaria $y = 4 - x^2$, se puede rescribir la ecuación primaria como

$$d = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}.$$



La cantidad por minimizar es la distancia: $d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2}$.
Figura 3.55

Como d es más pequeña cuando la expresión dentro de radicales es menor, sólo se necesitan determinar los puntos críticos de $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$. Advertir que el dominio de f es toda la recta de los números reales. De tal modo, no hay puntos terminales del dominio por considerar. Además, igualando $f'(x)$ a 0 se obtiene

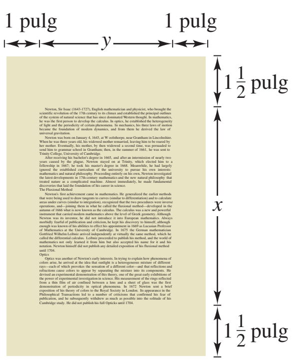
$$f'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3) = 0$$

$$x = 0, \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

El criterio de la primera derivada verifica que $x = 0$ produce un máximo relativo, mientras que $x = \sqrt{3/2}$ y $x = -\sqrt{3/2}$ producen una distancia mínima. De tal modo, los puntos más cercanos son $\left(\sqrt{3/2}, 5/2\right)$ y $\left(-\sqrt{3/2}, 5/2\right)$.

EJEMPLO 3 Determinación del área mínima

Una página rectangular ha de contener 24 pulgadas cuadradas de impresión. Los márgenes de la parte superior y de la parte inferior de la página van a ser de $1\frac{1}{2}$ pulgadas, y los márgenes de la izquierda y la derecha corresponderán a 1 pulgada (ver la figura 3.56). ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para que se use la menor cantidad de papel?



La cantidad que se va a minimizar es el área: $A = (x + 3)(y + 2)$
Figura 3.56

Solución Sea A el área que se va a minimizar

$$A = (x + 3)(y + 2) \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

El área impresa dentro del margen está dada por

$$24 = xy. \qquad \text{Ecuación secundaria.}$$

Despejando de esta ecuación para y produce $y = 24/x$. La sustitución en la ecuación primaria da lugar a

$$A = (x + 3)\left(\frac{24}{x} + 2\right) = 30 + 2x + \frac{72}{x}. \qquad \text{Función de una variable.}$$

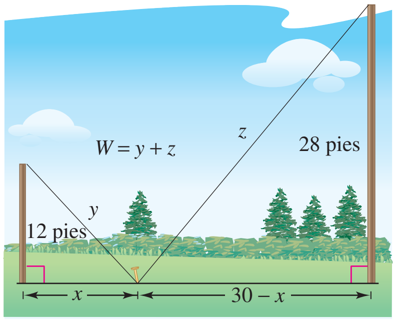
Debido a que x debe ser positiva, se está interesado sólo en los valores de A para $x > 0$. Para encontrar los puntos críticos, derivar con respecto a x.

$$\frac{dA}{dx} = 2 - \frac{72}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 36$$

De tal modo, los puntos críticos son $x = \pm 6$. No es necesario considerar $x = -6$ porque este punto está fuera del dominio. El criterio de la primera derivada confirma que A es un mínimo cuando $x = 6$. De tal modo, $y = \frac{24}{6} = 4$ y las dimensiones de la página deben ser $x + 3 = 9$ pulgadas por $y + 2 = 6$ pulgadas.

EJEMPLO 4 Hallar la longitud mínima

Dos postes, uno de 12 pies de altura y el otro de 28 pies, están a 30 pies de distancia. Se sostienen por dos cables, conectados a una sola estaca, desde el nivel del suelo hasta la parte superior de cada poste. ¿Dónde debe colocarse la estaca para que se use la menor cantidad de cable?



La cantidad que se va a minimizar es la longitud. De acuerdo con el diagrama, puede verse que x varía entre 0 y 30

Figura 3.57

Solución

Sea W la longitud del cable que se va a minimizar. Utilizando la figura 3.57, puede escribirse

$$W = y + z. \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

En este problema, más que resolver para y en términos de z (o viceversa), se deben despejar tanto para y como para z en términos de una tercera variable x, como se indica en la figura 3.57. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 + 12^2 &= y^2 \\ (30 - x)^2 + 28^2 &= z^2 \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 + 144} \\ z &= \sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}. \end{aligned}$$

De tal modo, W está dada por

$$\begin{aligned} W &= y + z \\ &= \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}, \qquad 0 \leq x \leq 30. \end{aligned}$$

La derivación de W con respecto a x produce

$$\frac{dW}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}}.$$

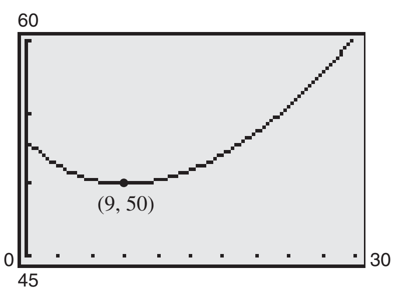
Haciendo $dW/dx = 0$, se obtendrá

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}} &= 0 \\ x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,684} &= (30 - x)\sqrt{x^2 + 144} \\ x^2(x^2 - 60x + 1\,684) &= (30 - x)^2(x^2 + 144) \\ x^4 - 60x^3 + 1\,684x^2 &= x^4 - 60x^3 + 1\,044x^2 - 8\,640x + 129\,600 \\ 640x^2 + 8\,640x - 129\,600 &= 0 \\ 320(x - 9)(2x + 45) &= 0 \\ x &= 9, -22.5. \end{aligned}$$

Como $x = -22.5$ no está en el dominio y

$$W(0) \approx 53.04, \qquad W(9) = 50 \qquad \text{y} \qquad W(30) \approx 60.31$$

se puede concluir que el alambre debe colocarse a 9 pies del poste de 12 pies.



Se puede confirmar el valor mínimo de W con una herramienta de graficación

Figura 3.58

TECNOLOGÍA De acuerdo con el ejemplo 4, puede verse que los problemas de optimización aplicada implican una gran cantidad de álgebra. Si se tiene acceso a una herramienta de graficación, confirmar que $x = 9$ produce un valor mínimo de W al trazar la gráfica

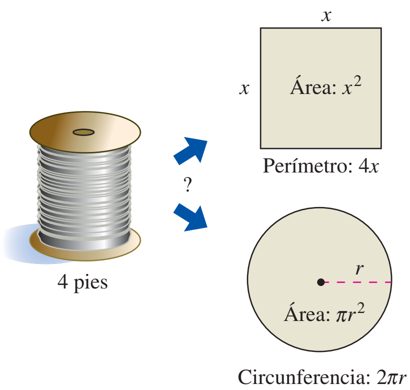
$$W = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}$$

como se muestra en la figura 3.58.

En cada uno de los primeros cuatro ejemplos, el valor extremo ocurriría en un punto crítico. Aunque esto sucede a menudo, recordar que un valor extremo también puede presentarse en un punto terminal de un intervalo, como se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Un máximo en un punto terminal

Se van a usar cuatro pies de alambre para formar un cuadrado y un círculo. ¿Qué cantidad de alambre debe usarse para el cuadrado y qué cantidad para el círculo a fin de abarcar la máxima área total?



La cantidad que se va a maximizar es el área: $A = x^2 + \pi r^2$
Figura 3.59

Solución

El área total (ver la figura 3.59) está dada por

$$A = (\text{área del cuadrado}) + (\text{área del círculo})$$
$$A = x^2 + \pi r^2. \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

Como la longitud total de alambre es 4 pies, se obtiene

$$4 = (\text{perímetro del cuadrado}) + (\text{circunferencia del círculo})$$
$$4 = 4x + 2\pi r.$$

De tal modo, $r = 2(1 - x)/\pi$, y sustituyendo en la ecuación primaria se obtiene

$$\begin{aligned} A &= x^2 + \pi\left[\frac{2(1-x)}{\pi}\right]^2 \\ &= x^2 + \frac{4(1-x)^2}{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}[(\pi + 4)x^2 - 8x + 4]. \end{aligned}$$

El dominio admisible es $0 \le x \le 1$ restringido por el perímetro cuadrado. Como

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2(\pi + 4)x - 8}{\pi}$$

el único punto crítico en $(0, 1)$ es $x = 4/(\pi + 4) \approx 0.56$. Así, utilizando

$$A(0) \approx 1.273, \quad A(0.56) \approx 0.56 \quad \text{y} \quad A(1) = 1$$

Puede concluirse que el área máxima ocurre cuando $x = 0$. Esto es, *todo* el alambre se usa para el círculo.

EXPLORACIÓN

¿Cuál sería la respuesta si en el ejemplo 5 se preguntaran las dimensiones necesarias para encerrar el área total *mínima*?

Revisar las ecuaciones primarias formuladas en los primeros cinco ejemplos. Como indican las aplicaciones, estos cinco ejemplos son bastante simples, no obstante las ecuaciones primarias resultantes son bastante complicadas.

$$V = 27x - \frac{x^3}{4} \qquad W = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}$$

$$d = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \qquad A = \frac{1}{\pi}[(\pi + 4)x^2 - 8x + 4]$$

$$A = 30 + 2x + \frac{72}{x}$$

Por lo común, debe esperarse que las aplicaciones de la vida real incluyan ecuaciones *al menos tan complicadas* como estas cinco. Recordar que una de las metas principales de este curso es aprender a utilizar el cálculo con el fin de analizar ecuaciones que en un principio parecen ser sumamente complejas.

3.7 Ejercicios

1. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Encontrar dos números positivos cuya suma es 110 y cuyo producto es un máximo posible.

a) Completar analíticamente seis renglones de una tabla tal como la siguiente. (Se muestran los primeros dos renglones.)

Primer número x	Segundo número	Producto P
10	$110 - 10$	$10(110 - 10) = 1\,000$
20	$110 - 20$	$20(110 - 20) = 1\,800$

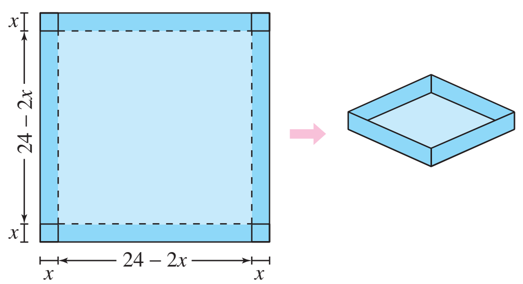
b) Utilizar una herramienta de graficación para generar renglones adicionales en la tabla. Emplear la tabla para estimar la solución. (*Sugerencia:* Utilizar la función *table* de la herramienta de graficación.)

c) Escribir el producto P como una función de x.

d) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función en el apartado *c*) y estimar la solución a partir de la gráfica.

e) Usar el cálculo para determinar el punto crítico de la función en el apartado *c*). Encontrar después los dos números.

2. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Una caja abierta de volumen máximo se va a construir a partir de una pieza cuadrada de material, de 24 pulgadas de lado, cortando cuadrados iguales a partir de las esquinas y doblando los bordes (ver la figura).



a) Completar analíticamente seis renglones de una tabla tal como la siguiente. (Se muestran los primeros dos renglones.) Usar la tabla para estimar el volumen máximo.

Altura x	Largo y ancho	Volumen V
1	$24 - 2(1)$	$1[24 - 2(1)]^2 = 484$
2	$24 - 2(2)$	$2[24 - 2(2)]^2 = 800$

b) Escribir el volumen V como una función de x.

c) Emplear cálculo para determinar el punto crítico de la función en el apartado *b*) y encontrar el valor máximo.

d) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función del apartado *b*) y verificar el volumen máximo a partir de la gráfica.

En los ejercicios 3 a 8, encontrar dos números positivos que satisfagan los requerimientos dados.

3. La suma es S y el producto es un máximo.

4. El producto es 185 y la suma es un mínimo.

5. El producto es 147 y la suma del primero más tres veces el segundo es un mínimo.

6. El segundo número es el recíproco del primero y la suma es un mínimo.

7. La suma del primero y el doble del segundo es 108 y el producto es un máximo.

8. La suma del primer número al cuadrado y el segundo es 54 y el producto es un máximo.

En los ejercicios 9 y 10, encontrar el largo y el ancho de un rectángulo que tiene el perímetro dado y un área máxima.

9. Perímetro: 80 metros **10.** Perímetro: P unidades

En los ejercicios 11 y 12, encontrar el largo y el ancho de un rectángulo que tiene el área dada y un perímetro mínimo.

11. Área: 32 pies cuadrados **12.** Área: A centímetros cuadrados

En los ejercicios 13 a 16, determinar el punto sobre la gráfica de la función que está más cerca al punto dado.

	Función	*Punto*		*Función*	*Punto*
13.	$f(x) = x^2$	$\left(2, \frac{1}{2}\right)$	**14.**	$f(x) = (x - 1)^2$	$(-5, 3)$
15.	$f(x) = \sqrt{x}$	$(4, 0)$	**16.**	$f(x) = \sqrt{x - 8}$	$(12, 0)$

17. ***Área*** Una página rectangular contendrá 30 pulgadas cuadradas de área impresa. Los márgenes de cada lado son de 1 pulgada. Encontrar las dimensiones de la página de manera tal que se use la menor cantidad de papel.

18. ***Área*** Una página rectangular contendrá 36 pulgadas cuadradas de área impresa. Los márgenes de cada lado serán de $1\frac{1}{2}$ pulgadas. Encontrar las dimensiones de la página de manera tal que se use la menor cantidad de papel.

19. ***Reacción química*** En una reacción química autocatalítica, el producto formado es un catalizador para la reacción. Si Q_0 es la cantidad de la sustancia original y x es la cantidad del catalizador formado, el ritmo o velocidad de la reacción química es

$$\frac{dQ}{dx} = kx(Q_0 - x).$$

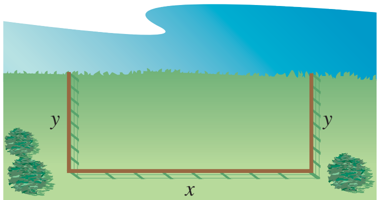
¿Para qué valor de x la velocidad de la reacción química será la mayor?

20. ***Control de tráfico*** En un día determinado, el ritmo o tasa de flujo F (vehículos por hora) en una autopista congestionada es

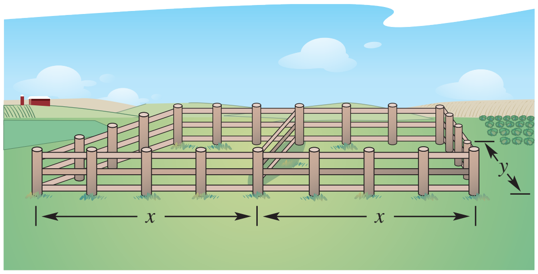
$$F = \frac{v}{22 + 0.02v^2}$$

donde v es la velocidad del tráfico en millas por hora. ¿Qué velocidad maximizará el ritmo o tasa de flujo en la autopista?

21. ***Área*** Un granjero planea cercar un pastizal rectangular adyacente a un río. El pastizal debe contener 245 000 m^2 para proporcionar suficiente pastura para el rebaño. ¿Qué dimensiones requeriría la cantidad mínima de cercado si no es necesario vallar a lo largo del río?



22. ***Área máxima*** Un ganadero tiene 400 pies de cercado con los cuales delimita dos corrales rectangulares adyacentes (ver la figura). ¿Qué dimensiones deben utilizarse de manera que el área delimitada será un máximo?

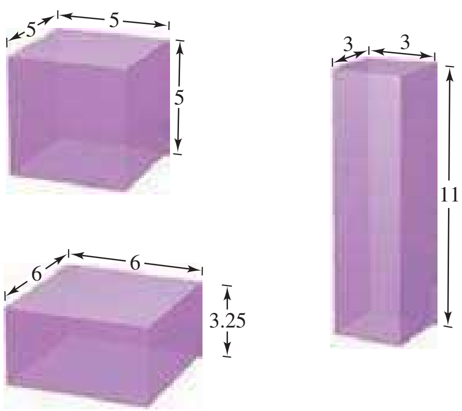


23. ***Volumen máximo***

a) Verificar que cada uno de los sólidos rectangulares que se muestran en la figura tenga un área superficial de 150 pulgadas cuadradas.

b) Encontrar el volumen de cada sólido.

c) Determinar las dimensiones de un sólido rectangular (con una base cuadrada) de volumen máximo si su área superficial es de 150 pulgadas cuadradas.



24. ***Volumen máximo*** Determinar las dimensiones de un sólido rectangular (con base cuadrada) de volumen máximo si su área rectangular es de 337.5 cm^2.

25. ***Área máxima*** Una ventana Norman se construye juntando un semicírculo a la parte superior de una ventana rectangular ordinaria (ver la figura). Encontrar las dimensiones de una ventana Norman de área máxima si el perímetro total es de 16 pies.

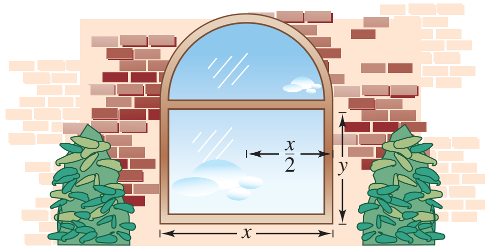


Figura para 25

26. ***Área máxima*** Un rectángulo está cortado por los ejes x y y y la gráfica de $y = (6 - x)/2$ (ver la figura). ¿Qué longitud y ancho debe tener el rectángulo de manera que su área sea un máximo?

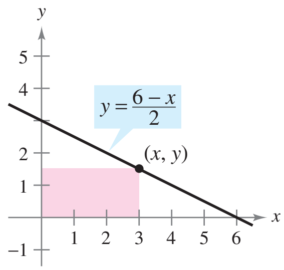


Figura para 26

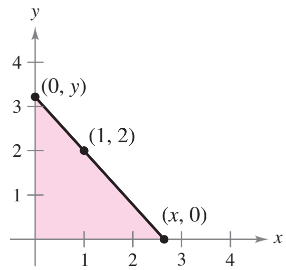


Figura para 27

27. ***Longitud mínima*** Un triángulo rectángulo se forma en el primer cuadrante mediante los ejes x y y y una recta que pasa por el punto (1, 2) (ver la figura).

a) Escribir la longitud L de la hipotenusa como una función de x.

b) Utilizar una herramienta de graficación para aproximar x de manera tal que la longitud de la hipotenusa sea un mínimo.

c) Determinar los vértices del triángulo de manera tal que su área sea un mínimo.

28. ***Área máxima*** Determinar el área del triángulo isósceles más grande que pueda inscribirse en un círculo de radio 6 (ver la figura).

a) Resolver escribiendo el área como una función de h.

b) Resolver escribiendo el área como una función de α.

c) Identificar el tipo de triángulo de área máxima.

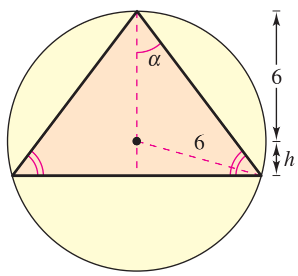


Figura para 28

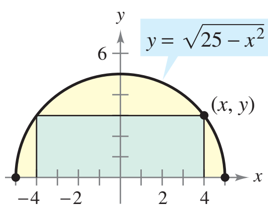


Figura para 29

29. ***Área máxima*** Un rectángulo está delimitado por el eje x y el semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$ (ver la figura). ¿Qué largo y ancho debe tener el rectángulo de manera que su área sea un máximo?

30. ***Área*** Encontrar las dimensiones del rectángulo más grande que puede inscribirse en un semicírculo de radio r (ver el ejercicio 29).

31. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Una sala de ejercicios tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo en cada extremo. Por la parte externa una pista de carreras de 200 metros delimita a la sala.

a) Dibujar una figura para representar el problema. Dejar que x y y representen el largo y el ancho del rectángulo.

b) De manera analítica completar seis renglones de una tabla tal como la siguiente. (Se muestran los dos primeros renglones.) Utilizar la tabla para estimar el área máxima de la región rectangular.

Largo x	Ancho y	Área xy
10	$\frac{2}{\pi}(100 - 10)$	$(10)\frac{2}{\pi}(100 - 10) \approx 573$
20	$\frac{2}{\pi}(100 - 20)$	$(20)\frac{2}{\pi}(100 - 20) \approx 1\,019$

c) Escribir el área A como una función de x.

d) Utilizar el cálculo para encontrar el punto crítico de la función del apartado *c*) y determinar el valor máximo.

e) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función en el apartado *c*) y verificar el área máxima a partir de la gráfica.

32. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Se va a diseñar un cilindro circular recto que pueda contener 22 pulgadas cúbicas de refresco (aproximadamente 12 onzas de fluido).

a) En forma analítica completar seis renglones de una tabla como la siguiente. (Se muestran los dos primeros renglones.)

Radio r	Altura	Área de la superficie S
0.2	$\frac{22}{\pi(0.2)^2}$	$2\pi(0.2)\left[0.2 + \frac{22}{\pi(0.2)^2}\right] \approx 220.3$
0.4	$\frac{22}{\pi(0.4)^2}$	$2\pi(0.4)\left[0.4 + \frac{22}{\pi(0.4)^2}\right] \approx 111.0$

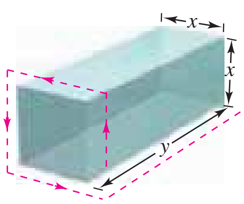
b) Recurrir a una herramienta de graficación para generar renglones adicionales de la tabla. Utilizar ésta para estimar el área superficial mínima. (*Sugerencia:* Utilizar la característica *table* de la herramienta de graficación.)

c) Escribir el área superficial S como una función de r.

d) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función del apartado *c*) y estimar el área superficial mínima a partir de la gráfica.

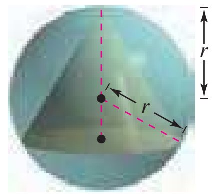
e) Recurrir al cálculo para encontrar el punto crítico de la función en el apartado *c*) y encontrar las dimensiones que producirán el área superficial mínima.

33. ***Volumen máximo*** Un paquete rectangular que se va a enviar por un servicio postal puede tener una longitud y un perímetro que tiene un máximo de 108 pulgadas (ver la figura). Determinar las dimensiones del paquete de volumen máximo que puede enviarse. (Suponer que la sección transversal es cuadrada.)



34. ***Volumen máximo*** Trabajar de nuevo el ejercicio 33 para un paquete cilíndrico. (La sección transversal es circular.)

35. ***Volumen máximo*** Encontrar el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio r.



36. ***Volumen máximo*** Determinar el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio r.

Desarrollo de conceptos

37. Una botella de shampú tiene la forma de un cilindro circular recto. Como el área superficial de la botella no cambia cuando ésta se comprime, ¿es cierto que el volumen permanece invariable? Explicar.

Para discusión

38. El perímetro de un rectángulo es de 20 pies. De todas las dimensiones posibles, el área máxima es de 25 pies cuadrados cuando su largo y ancho son ambos de 5 pies. ¿Hay dimensiones que producirán un área mínima? Explicar.

39. ***Área superficial mínima*** Un sólido se forma juntando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. El volumen total del sólido es de 14 cm^3. Encontrar el radio del cilindro que produce el área superficial mínima.

40. ***Costo mínimo*** Un tanque industrial de la forma que se describe en el ejercicio 39 debe tener un volumen de 4 000 pies cúbicos. Si el costo de fabricación de los hemisferios es, por pie cuadrado, doble que el del lateral, determinar las dimensiones que minimizarán el costo.

41. ***Área mínima*** La suma de los perímetros de un triángulo equilátero y un cuadrado es igual a 10. Encontrar las dimensiones del triángulo y el cuadrado que producen el área total mínima.

42. ***Área máxima*** Veinte pies de alambre se usarán para formar dos figuras. En cada uno de los siguientes casos, ¿qué cantidad de alambre debe utilizarse en cada figura de manera que el área total encerrada sea máxima?

a) Triángulo equilátero y cuadrado

b) Cuadrado y pentágono regular

c) Pentágono regular y hexágono regular

d) Hexágono regular y círculo

¿Qué se puede concluir a partir de este patrón? {*Sugerencia:* El área de un polígono rectangular con n lados de longitud x es $A = (n/4)[\cot(\pi/n)]x^2$.}

43. ***Resistencia de una viga*** Una viga de madera tiene una sección transversal rectangular de altura h y ancho w (ver la figura en la siguiente página). La resistencia S de la viga es directamente proporcional al ancho y al cuadrado de la altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la viga más fuerte que puede cortarse a partir de un leño redondo de 20 pulgadas de diámetro? (*Sugerencia:* $S = kh^2w$, donde k es la constante de proporcionalidad.)

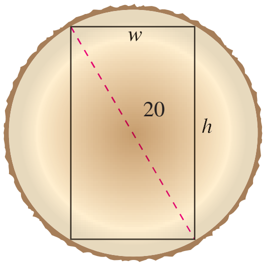


Figura para 43

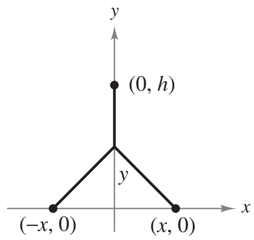


Figura para 44

44. ***Longitud mínima*** Dos fábricas se localizan en las coordenadas $(-x, 0)$ y $(x, 0)$ con su suministro eléctrico ubicado en $(0, h)$ (ver la figura). Determinar y de manera tal que la longitud total de la línea de transmisión eléctrica desde el suministro eléctrico hasta las fábricas sea un mínimo.

45. ***Alcance de proyectil*** El alcance R de un proyectil lanzado con una velocidad inicial v_0 a un ángulo θ con la horizontal es $R = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Determinar el ángulo θ tal que el alcance sea un máximo.

46. ***Conjetura*** Considerar las funciones $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ y $g(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ en el dominio $[0, 4]$.

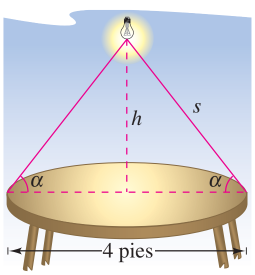
a) Utilizar una herramienta de graficación para representar las funciones en el dominio especificado.

b) Escribir la distancia vertical d entre las funciones como una función de x y recurrir al cálculo para determinar el valor de x respecto al cual d es un máximo.

c) Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de f y g en el punto crítico encontrado en el apartado *b*). Representar gráficamente las rectas tangentes. ¿Cuál es la relación entre las rectas?

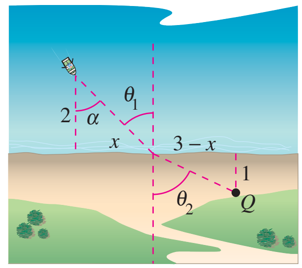
d) Enunciar una conjetura acerca de la relación entre las rectas tangentes a las gráficas de las dos funciones en el valor de x al cual la distancia vertical entre las funciones es más grande, y demostrar la conjetura.

47. ***Iluminación*** Una fuente luminosa se localiza sobre el centro de una mesa circular de 4 pies de diámetro (ver la figura). Encontrar la altura h de la fuente luminosa de modo tal que la iluminación I en el perímetro de la mesa sea máxima si $I = k(\operatorname{sen} \alpha)/s^2$, donde s es la altura oblicua, α es el ángulo al cual la luz incide sobre la mesa y k es una constante.



48. ***Iluminación*** La iluminación a partir de una fuente luminosa es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a partir de la fuente. Dos fuentes luminosas de intensidades I_1 e I_2 se encuentran separadas d unidades. ¿Qué punto del segmento de recta que une a las dos fuentes tiene una menor iluminación?

49. ***Tiempo mínimo*** Un hombre se encuentra en un bote a 2 millas del punto más cercano a la costa. Se dirige al punto Q, localizado a 3 millas por la costa y a una milla tierra adentro (ver la figura). El hombre puede remar a 2 millas por hora y caminar a 4 millas por hora. ¿Hacia qué punto sobre la costa debe remar para llegar al punto Q en el menor tiempo?



50. ***Tiempo mínimo*** Considerar en el ejercicio 49 si el punto Q está sobre la línea costera y no a una milla tierra adentro.

a) Escribir el tiempo de recorrido T como una función de α.

b) Utilizar el resultado del apartado *a*) para encontrar el tiempo mínimo para llegar a Q.

c) El hombre puede remar a v_1 millas por hora y caminar a v_2 millas por hora. Escribir el tiempo T como una función de α. Mostrar que el punto crítico T depende sólo de v_1 y v_2 y no de las distancias. Explicar cómo este resultado sería más favorable para el hombre que el resultado del ejercicio 49.

d) Describir cómo aplicar el resultado del apartado *c*) para minimizar el costo de construcción de un cable de transmisión eléctrica que cuesta c_1 dólares por milla bajo el agua y c_2 dólares por milla sobre tierra.

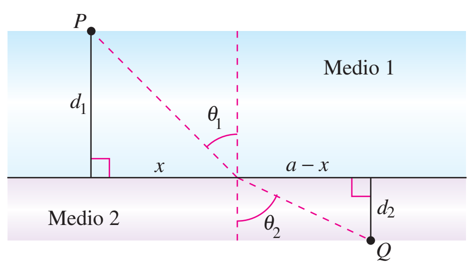
51. ***Tiempo mínimo*** Las condiciones son las mismas que en el ejercicio 49 salvo que el hombre puede remar a v_1 millas por hora y caminar a v_2 millas por hora. Si θ_1 y θ_2 son las magnitudes de los ángulos, mostrar que el hombre llegará al punto Q en el menor tiempo cuando

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{v_2}.$$

52. ***Tiempo mínimo*** Cuando las ondas luminosas, que viajan en un medio transparente, inciden sobre la superficie de un segundo medio transparente, cambian de dirección. Este cambio de dirección recibe el nombre de *refracción* y se define mediante la **ley de Snell de la refracción,**

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{v_2}$$

donde θ_1 y θ_2 son las magnitudes de los ángulos que se muestran en la figura y v_1 y v_2 son las velocidades de la luz en los dos medios. Demostrar que este problema es equivalente al del ejercicio 51, y que las ondas luminosas que viajan de P a Q siguen la trayectoria de tiempo mínimo.



53. Dibujar las gráficas de $f(x) = 2 - 2 \text{ sen } x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

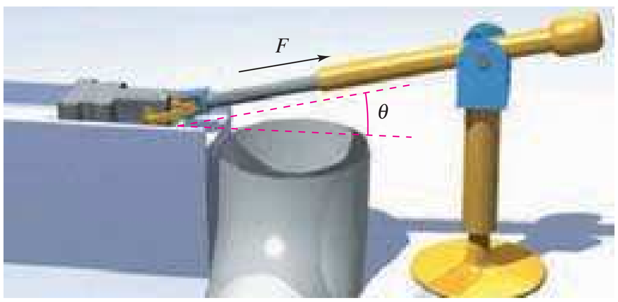
a) Determinar la distancia desde el origen a la intersección con el eje y y la distancia desde el origen a la intersección con el eje x.

b) Escribir la distancia d desde el origen hasta un punto sobre la gráfica de f como una función de x. Utilizar una herramienta de graficación para representar d y encontrar la distancia mínima.

c) Usar el cálculo y la función *zero* o *root* de una herramienta de graficación para encontrar el valor de x que minimiza la función d en el intervalo $[0, \pi/2]$. ¿Cuál es la distancia mínima? (*Proporcionado por Tim Chapell Penn Valley Community College, Kansas City, MO*)

54. ***Costo mínimo*** Un pozo petrolero marino se encuentra a 2 kilómetros de la costa. La refinería está a 4 kilómetros por la costa. La instalación de la tubería en el océano es dos veces más cara que sobre tierra. ¿Qué trayectoria debe seguir la tubería para minimizar el costo?

55. ***Fuerza mínima*** Se diseña un componente para deslizar un bloque de acero con peso W a través de una mesa y hacia una canaleta (ver la figura). Se opone al movimiento del bloque una fuerza de fricción proporcional a su peso aparente. (Sea k la constante de proporcionalidad.) Determinar la fuerza mínima F necesaria para deslizar el bloque y encontrar el valor correspondiente de θ. (*Sugerencia*: $F \cos \theta$ es la fuerza en la dirección del movimiento, y $F \text{ sen } \theta$ es la cantidad de fuerza que tiende a levantar el bloque. De tal modo, el peso aparente del bloque es $W - F \text{ sen } \theta$.)



56. ***Volumen máximo*** Un sector con ángulo central θ se corta de un círculo de 12 pulgadas de radio (ver la figura), y los bordes del sector se juntan para formar un cono. Determinar la magnitud de θ tal que el volumen del cono sea un máximo.

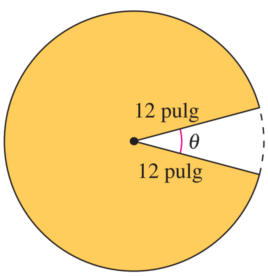


Figura para 56

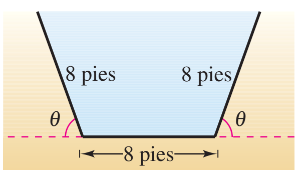


Figura para 57

57. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Las secciones transversales de un canal de irrigación son trapezoides isósceles de los cuales tres lados miden 8 pies de largo (ver la figura). Determinar el ángulo de elevación θ de los lados de manera tal que el área de la sección transversal sea un máximo, completando lo siguiente.

a) Completar analíticamente seis renglones de una tabla como la siguiente. (Se muestran los dos primeros renglones.)

Base 1	Base 2	Altura	Área
8	$8 + 16 \cos 10°$	$8 \text{ sen } 10°$	≈ 22.1
8	$8 + 16 \cos 20°$	$8 \text{ sen } 20°$	≈ 42.5

b) Emplear una herramienta de graficación para generar renglones adicionales de la tabla y estimar el área de sección transversal máxima. (*Sugerencia*: Utilizar la función *table* de la herramienta de graficación.)

c) Escribir el área de la sección transversal A como una función de θ.

d) Recurrir al cálculo para determinar el punto crítico de la función en el apartado *c*) y encontrar el ángulo que producirá la máxima área de sección transversal.

e) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función del apartado *c*) y verificar el área máxima de sección transversal.

58. ***Utilidad máxima (beneficio máximo)*** Suponer que la cantidad de dinero depositada en un banco es proporcional al cuadrado de la tasa de interés que paga el banco sobre este dinero. Además, el banco puede reinvertir esta suma a 12%. Determinar la tasa de interés que el banco debe pagar para maximizar la utilidad (el beneficio). (Utilizar la fórmula de interés simple.)

59. ***Costo mínimo*** El costo de pedido y transporte C de las componentes utilizadas en la fabricación de un producto es

$$C = 100\left(\frac{200}{x^2} + \frac{x}{x + 30}\right), \quad x \geq 1$$

donde C se mide en miles de dólares y x es el tamaño del pedido en cientos. Encontrar el tamaño del pedido que minimiza el costo. (*Sugerencia*: Utilizar la función *root* de una herramienta de graficación.)

60. ***Disminución de rendimientos*** La utilidad (el beneficio) P (en miles de dólares) para una compañía que gasta una cantidad s (en miles de dólares) en publicidad es

$$P = -\tfrac{1}{10}s^3 + 6s^2 + 400.$$

a) Hallar la cantidad de dinero que la compañía debe gastar en publicidad para producir una utilidad máxima (un rendimiento máximo).

b) El *punto de disminución de rendimientos* es el punto en el cual la tasa de crecimiento de la función de utilidad (de rendimiento) empieza a declinar. Determinar el punto de disminución de rendimientos.

Distancia mínima **En los ejercicios 61 a 63, considerar un centro de distribución de combustible localizado en el origen del sistema rectangular de coordenadas (unidades en millas; ver las figuras en la siguiente página). El centro suministra a tres fábricas con coordenadas (4, 1), (5, 6) y (10, 3). Los camiones de reparto siguen la línea $y = mx$, y líneas de alimentación a las tres fábricas. El objetivo es determinar m de forma que la suma de las longitudes de las líneas sea lo más pequeña posible.**

61. Minimizar la suma de los cuadrados de las longitudes de las líneas de alimentación dada por

$$S_1 = (4m - 1)^2 + (5m - 6)^2 + (10m - 3)^2.$$

Hallar la ecuación de la ruta recta de los camiones mediante este método y después determinar la suma de las longitudes de las líneas de alimentación.

62. Minimizar la suma de los valores absolutos de las longitudes de las líneas de alimentación dada por

$$S_2 = |4m - 1| + |5m - 6| + |10m - 3|.$$

Hallar la ecuación para la ruta recta de los camiones mediante este método y luego determinar la suma de las longitudes de las líneas de alimentación. (*Sugerencia*: Utilizar una herramienta de graficación para representar la función S_2 y aproximar el punto crítico requerido.)

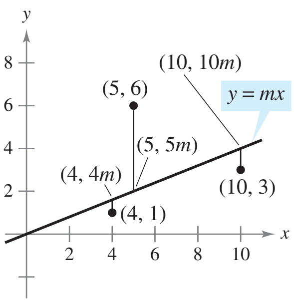


Figura para 61 y 62

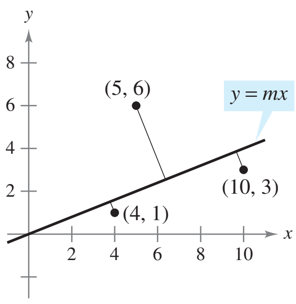


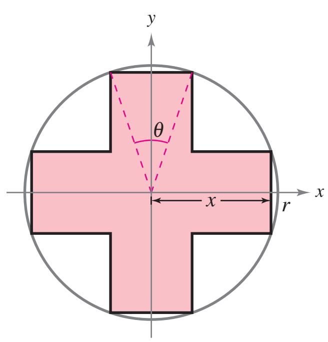
Figura para 63

63. Minimizar la suma de las distancias perpendiculares (ver los ejercicios 87 a 92 en la sección P.2) de la línea a las fábricas dada por

$$S_3 = \frac{|4m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{|5m - 6|}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{|10m - 3|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Hallar la ecuación para la línea mediante este método y a continuación determinar la suma de las longitudes de los desvíos. (*Sugerencia:* Utilizar una herramienta de graficación para representar la función S_3 y aproximar el punto crítico requerido.)

64. ***Área máxima*** Considerar una cruz simétrica inscrita en un círculo de radio r (ver la figura).



a) Escribir el área A de la cruz como una función de x y determinar el valor de x que maximiza el área.

b) Escribir el área A de la cruz como una función de θ y encontrar el valor de θ que maximiza el área.

c) Demostrar que los puntos críticos de los apartados *a*) y *b*) producen la misma área máxima. ¿Cuál es esta área?

Preparación del examen Putnam

65. Determinar el valor máximo de $f(x) = x^3 - 3x$ en un conjunto de números reales x que satisfacen $x^4 + 36 \leq 13x^2$. Explicar el razonamiento.

66. Encontrar el valor mínimo de

$$\frac{(x + 1/x)^6 - (x^6 + 1/x^6) - 2}{(x + 1/x)^3 + (x^3 + 1/x^3)}$$

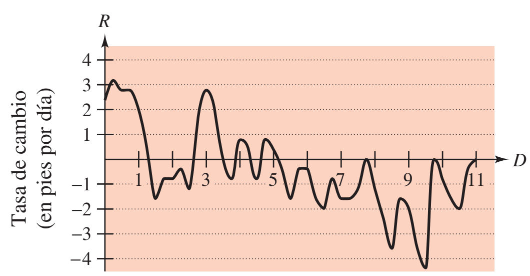
para $x > 0$.

PROYECTO DE TRABAJO

Río Connecticut

Cada vez que el río Connecticut alcanza un nivel de 105 pies sobre el nivel del mar, dos operadores de la estación de control de inundaciones en Northampton, Massachusetts, inician una vigilancia horaria del río. Cada 2 horas verifican la altura del mismo, utilizando una escala marcada en décimas de pie, y registran los datos en una bitácora. En la primavera de 1996, la vigilancia de la crecida se efectuó del 4 de abril, cuando el río alcanzó 105 pies y se elevaba a razón de 0.2 pies por hora, hasta el 25 de abril, cuando el nivel regresó de nuevo a 105 pies. Entre estas fechas, los registros muestran que el río creció y bajó varias veces, en un punto cercano a la marca de 115 pies. Si el río hubiera alcanzado 115 pies, la ciudad habría tenido que cerrar la autopista Mount Tom (Ruta 5, al sur de Northampton).

La gráfica siguiente muestra el ritmo o tasa de cambio del nivel del río durante una parte de la vigilancia de la crecida. Recurrir a la gráfica para responder cada pregunta.



Día (0 ↔ 12:01 a.m. abril 14)

a) ¿En qué fecha el río creció con mayor rapidez? ¿Cómo se puede saber?

b) ¿En qué fecha el río tuvo el descenso más rápido? ¿Cómo se puede saber?

c) Hubo dos fechas seguidas en las que el río creció, después bajó, después creció de nuevo durante el curso del día. ¿Qué día ocurrió lo anterior y cómo se puede determinar?

d) Un minuto después de la medianoche, el 14 de abril, el nivel del río se encontraba en 111.0 pies. Estimar la altura del mismo 24 horas después y 48 horas después. Explicar cómo se efectuaron las estimaciones.

e) El río alcanzó su valor más alto en 114.4 pies. ¿En qué fecha ocurrió lo anterior?

(Propuesto por Mary Murphy, Smith College, Northampton, MA)

3.8 Método de Newton

- **Aproximar un cero de una función utilizando el método de Newton.**

Método de Newton

En esta sección se estudiará una técnica para aproximar los ceros reales de una función. La técnica recibe el nombre de **método de Newton** y utiliza rectas tangentes para aproximar la gráfica de la función cerca de sus intersecciones con el eje x.

Para ver cómo funciona el método de Newton, considerar una función f que es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si $f(a)$ y $f(b)$ difieren en signo, entonces, por el teorema del valor intermedio, f debe tener al menos un cero en el intervalo (a, b). Suponer que se estima que este cero ocurre en

$$x = x_1 \qquad \text{Primera estimación.}$$

como se muestra en la figura 3.60*a*. El método de Newton se basa en la suposición de que la gráfica de f y la recta tangente en $(x_1, f(x_1))$ cruzan ambas por el eje x en *casi* el mismo punto. Debido a que es muy fácil calcular la intersección con el eje x de esta recta tangente, es posible utilizarla como una segunda estimación (y, usualmente, mejor) del cero de f. La recta tangente pasa por el punto $(x_1, f(x_1))$ con una pendiente de $f'(x_1)$. En la forma de punto-pendiente, la ecuación de la recta tangente es en consecuencia

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$
$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1).$$

Dejando $y = 0$ y despejando x, se obtiene

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

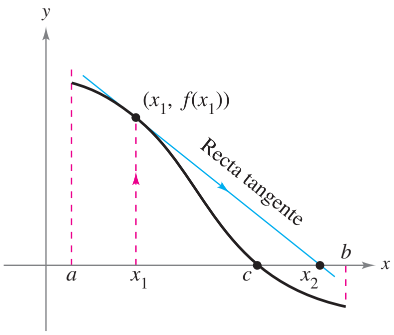
De tal modo, a partir de la estimación inicial x_1 se obtiene una nueva estimación

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \qquad \text{Segunda estimación (ver la figura 3.60}b\text{).}$$

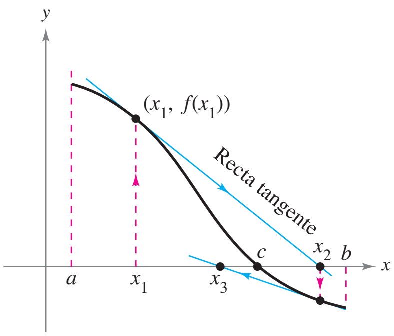
Es posible mejorar x_2 y calcular aun una tercera estimación

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \qquad \text{Tercera estimación.}$$

La aplicación repetida de este proceso se denomina método de Newton.



***a*)**



***b*)**

La intersección con el eje x de la recta tangente se aproxima a cero de f

Figura 3.60

MÉTODO DE NEWTON

Quizá Newton fue el primero que describió el método para aproximar los ceros reales de una función en su texto *Method of Fluxions*. Aunque el libro lo escribió en 1671, no se publicó hasta 1736. Entre tanto, en 1690, Joseph Raphson (1648-1715) publicó un artículo que describía un método para aproximar los ceros reales de una función que era muy similar al de Newton. Por esta razón, el método a veces recibe el nombre de método de Newton-Raphson.

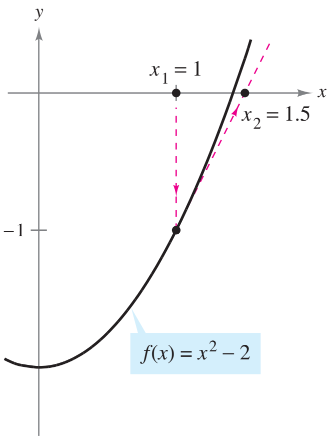
MÉTODO DE NEWTON PARA APROXIMAR LOS CEROS DE UNA FUNCIÓN

Sea $f(c) = 0$, donde f es derivable en un intervalo abierto que contiene a c. Entonces, para aproximar c, se siguen los siguientes pasos.

1. Se efectúa una estimación inicial x_1 que es cercana a c. (Una gráfica es útil.)
2. Se determina una nueva aproximación
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
3. Si $|x_n - x_{n+1}|$ está dentro de la precisión deseada, dejar que x_{n+1} sirva como la aproximación final. En otro caso, volver al paso dos y calcular una nueva aproximación.

Cada aplicación sucesiva de este procedimiento recibe el nombre de **iteración**.

NOTA Para muchas funciones, con unas pocas iteraciones del método de Newton, se conseguirán errores de aproximación muy pequeños como muestra el ejemplo 1.



La primera iteración del método de Newton
Figura 3.61

EJEMPLO 1 Aplicación del método de Newton

Calcular tres iteraciones del método de Newton para aproximar un cero de $f(x) = x^2 - 2$. Utilizar $x_1 = 1$ como la estimación inicial.

Solución Como $f(x) = x^2 - 2$, se tiene que $f'(x) = 2x$, y el proceso iterativo está dado por la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}.$$

Los cálculos para tres iteraciones se muestran en la tabla.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	1.000000	−1.000000	2.000000	−0.500000	1.500000
2	1.500000	0.250000	3.000000	0.083333	1.416667
3	1.416667	0.006945	2.833334	0.002451	1.414216
4	1.414216				

Desde luego, en este caso, se sabe que los dos ceros de la función son $\pm\sqrt{2}$. Hasta seis lugares decimales, $\sqrt{2} = 1.414214$. De tal modo, después de sólo tres iteraciones del método de Newton, se obtiene una aproximación que está dentro de 0.000002 de una raíz real. La primera iteración de este proceso se muestra en la figura 3.61.

EJEMPLO 2 Aplicación del método de Newton

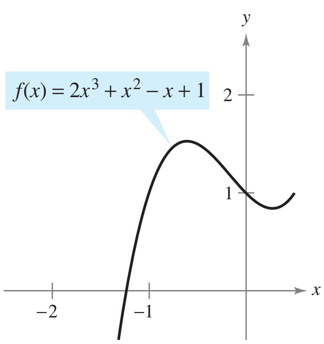
Utilizar el método de Newton para aproximar los ceros de

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1.$$

Continuar las iteraciones hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran por menos de 0.0001.

Solución Empezar dibujando una gráfica de f, como se muestra en la figura 3.62. A partir de la gráfica, se puede observar que la función tiene sólo un cero, el cual ocurre cerca de $x = -1.2$. A continuación, derivar f y construir la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^3 + x_n^2 - x_n + 1}{6x_n^2 + 2x_n - 1}.$$



Después de tres iteraciones del método de Newton, el cero de f se aproxima hasta la exactitud deseada
Figura 3.62

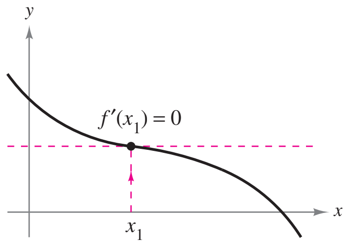
Los cálculos se muestran en la tabla.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	−1.20000	0.18400	5.24000	0.03511	−1.23511
2	−1.23511	−0.00771	5.68276	−0.00136	−1.23375
3	−1.23375	0.00001	5.66533	0.00000	−1.23375
4	−1.23375				

Como dos aproximaciones sucesivas difieren por menos del valor requerido de 0.0001, se puede estimar el cero de f como −1.23375.

Cuando, como en los ejemplos 1 y 2, las aproximaciones tienden a un límite, se dice que la sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ **converge**. Además, si el límite es c, puede demostrarse que c debe ser un cero de f.

El método de Newton no siempre produce una sucesión convergente. La figura 3.63 ilustra una situación así. Debido a que el método de Newton implica la división entre $f'(x_n)$, es claro que fallará si la derivada es cero para cualquier x_n en la sucesión. Cuando existe este problema, es fácil superarlo eligiendo un valor diferente para x_1. Otra forma en la que el método de Newton puede fallar se muestra en el siguiente ejemplo.



El método de Newton no converge si $f'(x)_n = 0$
Figura 3.63

EJEMPLO 3 Ejemplo en el que el método de Newton falla

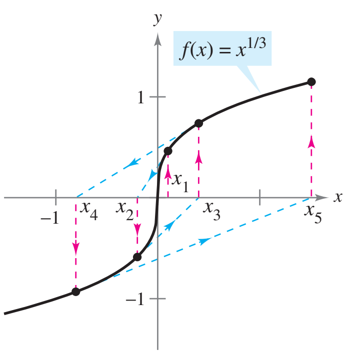
La función $f(x) = x^{1/3}$ no es derivable en $x = 0$. Demostrar que el método de Newton no converge al utilizar $x_1 = 0.1$.

Solución Como $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, la fórmula iterativa es

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x_n^{-2/3}} \\ &= x_n - 3x_n \\ &= -2x_n. \end{aligned}$$

Los cálculos se presentan en la tabla. Esta tabla y la figura 3.64 indican que x_n continúa creciendo en magnitud a medida que $n \to \infty$, y por ello el límite de la sucesión no existe.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	0.10000	0.46416	1.54720	0.30000	−0.20000
2	−0.20000	−0.58480	0.97467	−0.60000	0.40000
3	0.40000	0.73681	0.61401	1.20000	−0.80000
4	−0.80000	−0.92832	0.38680	−2.40000	1.60000



El método de Newton no converge para todo valor de x distinto del cero real de f
Figura 3.64

NOTA En el ejemplo 3, la estimación inicial $x_1 = 0.1$ no produce una sucesión convergente. Intentar demostrar que el método de Newton también falla para cualquier otra elección de x_1 (distinta del cero real).

Es posible demostrar que una condición suficiente para producir la convergencia del método de Newton a un cero de f es que

$$\left|\frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1$$

Condición para convergencia.

en un intervalo abierto que contenga al cero. Por ejemplo, en el ejemplo 1 en donde $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, se tendrá

$$\left|\frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| = \left|\frac{(x^2-2)(2)}{4x^2}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\right|.$$

Ejemplo 1.

En el intervalo (1, 3), esta cantidad es menor que 1 y, en consecuencia, se garantiza la convergencia del método de Newton. Por otro lado, en el ejemplo 3, se tiene $f(x) = x^{1/3}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ y

$$\left|\frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| = \left|\frac{x^{1/3}(-2/9)(x^{-5/3})}{(1/9)(x^{-4/3})}\right| = 2$$

Ejemplo 3.

que no es menor que 1 para ningún valor de x, por lo que el método de Newton no convergerá.

The Granger Collection

NIELS HENRIK ABEL (1802-1829)

The Granger Collection

EVARISTE GALOIS (1811-1832)

Aunque las vidas tanto de Abel como de Galois fueron breves, su trabajo en el campo del análisis y el álgebra abstracta tuvieron un gran alcance.

Soluciones algebraicas de ecuaciones polinomiales

Los ceros de algunas funciones, tales como

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

pueden determinarse mediante técnicas algebraicas simples, tales como la factorización. Los ceros de otras funciones, tales como

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

no pueden determinarse mediante métodos algebraicos *elementales*. Esta función particular sólo tiene un cero real, y utilizando técnicas algebraicas más avanzadas se puede determinar que el cero es

$$x = -\sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt{23/3}}{6}} - \sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt{23/3}}{6}}.$$

Como la solución *exacta* se escribe en términos de raíces cuadradas y raíces cúbicas, ésta se denomina una **solución por radicales**.

NOTA Intentar la aproximación del cero real de $f(x) = x^3 - x + 1$ y comparar el resultado con la solución exacta dada arriba. ■

La determinación de las soluciones radicales de una ecuación polinomial es uno de los problemas fundamentales del Álgebra. El primero de este tipo de resultados es la fórmula cuadrática, que data por lo menos de los tiempos de los babilónicos. La fórmula general para los ceros de una función cúbica se desarrolló mucho después. En el siglo XVI un matemático italiano, Girolamo Cardano, publicó el método para encontrar soluciones radicales a ecuaciones cúbicas y de cuarto grado. Después, durante 300 años, el problema de encontrar una fórmula general para el quinto grado permaneció sin resolver. Por último, en el siglo XIX, el problema fue resuelto de manera independiente por dos jóvenes matemáticos. Niels Henrik Abel, un matemático noruego y Evariste Galois, un matemático francés, demostraron que no es posible resolver una ecuación polinomial *general* de quinto grado (o mayor) por medio de radicales. Desde luego, se pueden resolver ecuaciones particulares de quinto grado tales como $x^5 - 1 = 0$, pero Abel y Galois fueron capaces de demostrar que no existe una solución general por *radicales*.

3.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, completar dos iteraciones del método de Newton para la función utilizando la estimación inicial indicada.

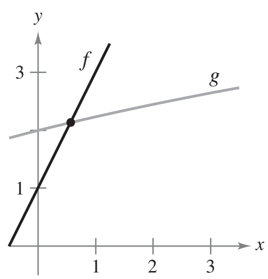
1. $f(x) = x^2 - 5, \quad x_1 = 2.2$
2. $f(x) = x^3 - 3, \quad x_1 = 1.4$
3. $f(x) = \cos x, \quad x_1 = 1.6$
4. $f(x) = \tan x, \quad x_1 = 0.1$

En los ejercicios 5 a 14, aproximar el (los) cero(s) de la función. Utilizar el método de Newton y continuar el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0.001. Después encontrar el (los) cero(s) utilizando una herramienta de graficación y comparar los resultados.

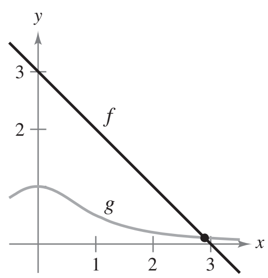
5. $f(x) = x^3 + 4$
6. $f(x) = 2 - x^3$
7. $f(x) = x^3 + x - 1$
8. $f(x) = x^5 + x - 1$
9. $f(x) = 5\sqrt{x - 1} - 2x$
10. $f(x) = x - 2\sqrt{x + 1}$
11. $f(x) = x^3 - 3.9x^2 + 4.79x - 1.881$
12. $f(x) = x^4 + x^3 - 1$
13. $f(x) = -x + \operatorname{sen} x$
14. $f(x) = x^3 - \cos x$

En los ejercicios 15 a 18, aplicar el método de Newton para aproximar el (los) valor(es) de x del (los) punto(s) indicado(s) de intersección de las dos gráficas. Continuar el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran por menos de 0.001. [*Sugerencia*: Sea $h(x) = f(x) - g(x)$.]

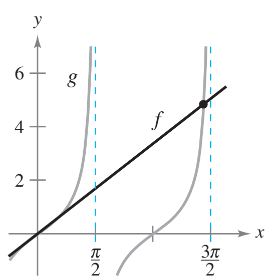
15. $f(x) = 2x + 1$
 $g(x) = \sqrt{x + 4}$



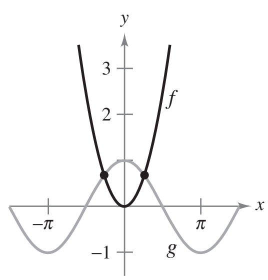
16. $f(x) = 3 - x$
 $g(x) = 1/(x^2 + 1)$



17. $f(x) = x$
 $g(x) = \tan x$



18. $f(x) = x^2$
 $g(x) = \cos x$



19. ***Regla de la mecánica*** La regla de la mecánica para aproximar $\sqrt{a}$, $a > 0$, es

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

donde x_1 es una aproximación de $\sqrt{a}$.

a) Utilizar el método de Newton y la función $f(x) = x^2 - a$ para derivar la regla de la mecánica.

b) Utilizar la regla de la mecánica para aproximar $\sqrt{5}$ y $\sqrt{7}$ hasta tres decimales.

20. *a*) Emplear el método de Newton y la función $f(x) = x^n - a$ para obtener una regla general relativa a la aproximación de $x = \sqrt[n]{a}$.

b) Utilizar la regla general que se encontró en el apartado *a*) para aproximar $\sqrt[4]{6}$ y $\sqrt[3]{15}$ hasta tres decimales.

En los ejercicios 21 a 24, aplicar el método de Newton utilizando la estimación inicial indicada y explicar por qué falla el método.

21. $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 1, \quad x_1 = 1$
22. $y = x^3 - 2x - 2, \quad x_1 = 0$

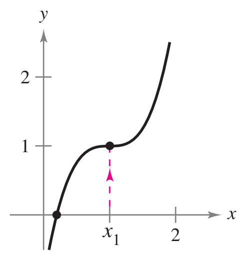


Figura para 21

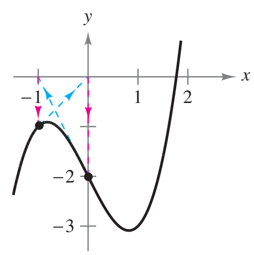


Figura para 22

23. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10x + 6, \quad x_1 = 2$
24. $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x, \quad x_1 = \frac{3\pi}{2}$

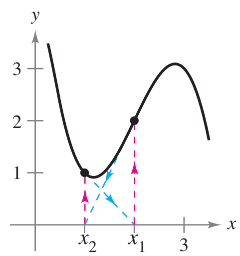


Figura para 23

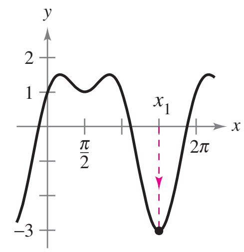


Figura para 24

Punto fijo **En los ejercicios 25 y 26, aproximar el punto fijo de la función hasta dos lugares decimales. [Un *punto fijo* x_0 de una función f es un valor de x tal que $f(x_0) = x_0$.]**

25. $f(x) = \cos x$
26. $f(x) = \cot x, \quad 0 < x < \pi$
27. Utilizar el método de Newton para que la ecuación $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$ pueda utilizarse para aproximar $1/a$ si x_1 es una estimación inicial del recíproco de a. Notar que este método de aproximación de recíprocos utiliza sólo las operaciones de resta y producto. [*Sugerencia:* Considerar $f(x) = (1/x) - a$.]
28. Utilizar el resultado del ejercicio anterior para aproximar *a*) $\frac{1}{3}$ y *b*) $\frac{1}{11}$ hasta tres decimales.

Desarrollo de conceptos

29. Considerar la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar f.

b) Utilizar el método de Newton con $x_1 = 1$ como estimación inicial.

c) Repetir el apartado *b*) utilizando $x_1 = \frac{1}{4}$ como estimación inicial y observar que el resultado es diferente.

d) Para comprender por qué los resultados de los apartados *b*) y *c*) son diferentes, dibujar las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos $(1, f(1))$ y $\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$. Determinar la intersección con el eje x de cada recta tangente y comparar las intersecciones con la primera iteración del método de Newton utilizando las estimaciones iniciales respectivas.

e) Escribir un breve párrafo en el que se resuma la forma en que funciona el método de Newton. Utilizar los resultados de este ejercicio para describir por qué es importante seleccionar con cuidado la estimación inicial.

30. Repetir los pasos en el ejercicio 29 para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ con estimaciones iniciales de $x_1 = 1.8$ y $x_1 = 3$.

31. En sus propias palabras y utilizando un dibujo, describir el método de Newton para aproximar los ceros de una función.

Para discusión

32. ¿Bajo cuáles condiciones fallará el método de Newton?

En los ejercicios 33 y 34, aproximar el punto crítico de f en el intervalo $(0, \pi)$. Dibujar la gráfica de f, marcando cualquier extremo.

33. $f(x) = x \cos x$

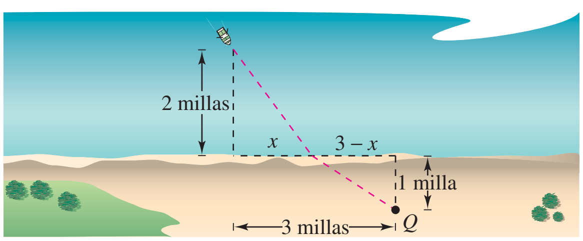
34. $f(x) = x \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 35 a 38, se incluyen algunos problemas típicos de las secciones previas de este capítulo. En cada caso, utilizar el método de Newton para aproximar la solución.

35. ***Distancia mínima*** Hallar sobre la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ el punto más cercano al punto $(1, 0)$.

36. ***Distancia mínima*** Encontrar sobre la gráfica de $f(x) = x^2$ el punto más cercano al punto $(4, -3)$.

37. ***Tiempo mínimo*** Se encuentra en un bote a 2 millas del punto más cercano sobre la costa (ver la figura) y se dirige al punto Q, que se ubica a 3 millas por la costa y a 1 milla tierra adentro. Tiene la posibilidad de remar a 3 millas por hora y de caminar a 4 millas por hora. ¿Hacia qué punto sobre la costa debe remar para llegar a Q en el tiempo mínimo?



38. ***Medicina*** La concentración C de un compuesto químico en el flujo sanguíneo t horas después de la inyección en el tejido muscular está dada por $C = (3t^2 + t)/(50 + t^3)$. ¿Cuándo es más grande la concentración?

39. ***Crimen*** El número total de arrestos T (en miles) para hombres de 14 a 27 años en 2006 está aproximado por el modelo

$$T = 0.602x^3 - 41.44x^2 + 922.8x - 6\,330, \quad 14 \le x \le 27$$

donde x es la edad en años (ver la figura). Aproximar las dos edades que completen un total de 225 arrestos. (*Fuente: U.S. Department of Justice*)

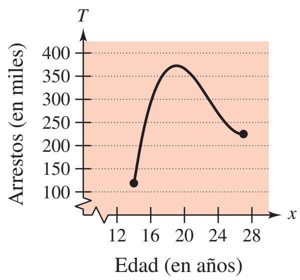


Figura para 39

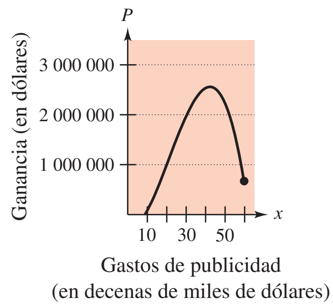


Figura para 40

40. ***Costos de publicidad*** Una compañía que produce reproductores de discos compactos portátiles estima que la ganancia por la venta de un modelo particular es

$$P = -76x^3 + 4\,830x^2 - 320\,000, \quad 0 \le x \le 60$$

donde P es la ganancia en dólares y x es el gasto de publicidad en 10 000 dólares (ver la figura). De acuerdo con este modelo, determinar la más pequeña de dos cantidades de publicidad que producirían una ganancia P de 2 500 000 dólares.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 41 a 44, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un contraejemplo.**

41. Los ceros de $f(x) = p(x)/q(x)$ coinciden con los ceros de $p(x)$.

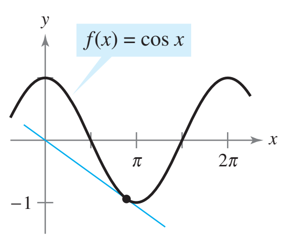
42. Si los coeficientes de una función polinomial son todos positivos, entonces el polinomio no tiene ceros positivos.

43. Si $f(x)$ es un polinomio cúbico tal que $f'(x)$ nunca es cero, entonces cualquier estimación inicial forzará a que el método de Newton converja al cero de f.

44. Las raíces de $\sqrt{f(x)} = 0$ coinciden con las raíces de $f(x) = 0$.

45. ***Rectas tangentes*** La gráfica de $f(x) = -\operatorname{sen} x$ tiene un número infinito de rectas tangentes que pasan por el origen. Utilizar el método de Newton para aproximar la pendiente de la recta tangente que tenga la pendiente más grande hasta tres lugares decimales.

46. ***Punto de tangencia*** En la figura se muestra la gráfica de $f(x) = \cos x$ y una línea tangente de f que pasa por el origen. Encontrar las coordenadas del punto de tangencia con una aproximación de tres decimales.



3.9 Diferenciales

- Entender el concepto de una aproximación por medio de una recta tangente.
- Comparar el valor de la diferencial, dy, con el cambio real en y, Δy.
- Estimar un error propagado utilizando una diferencial.
- Encontrar la diferencial de una función utilizando fórmulas de derivación.

EXPLORACIÓN

Aproximación mediante la recta tangente Usar una herramienta de graficación para representar

$$f(x) = x^2.$$

En la misma ventana de observación, representar la recta tangente a la gráfica de f en el punto (1, 1). Realizar un doble acercamiento en el punto de tangencia. ¿La herramienta de graficación distingue las dos gráficas? Utilizar la característica *trace* para comparar las dos gráficas. A medida que los valores de x se acercan más a 1, ¿qué se puede decir acerca de los valores de y?

Aproximaciones por recta tangente

El método de Newton (sección 3.8) es un ejemplo del uso de una recta tangente a una gráfica para aproximar la gráfica. En esta sección se estudiarán otras situaciones en las cuales la gráfica de la función puede aproximarse mediante una línea recta.

De inicio, considerar una función f que es derivable en c, la ecuación para la recta tangente en el punto $(c, f(c))$ está dada por

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

$$\boxed{y = f(c) + f'(c)(x - c)}$$

y es llamada **aproximación por medio de una recta tangente** (o **aproximación lineal**) **de f en c**. Como c es una constante, y es una función lineal de x. Además, restringiendo los valores de x de modo que sean suficientemente cercanos a c, los valores de y pueden utilizarse como aproximaciones (hasta cualquier precisión deseada) de los valores de la función f. En otras palabras, cuando $x \to c$, el límite de y es $f(c)$.

EJEMPLO 1 Utilización de la aproximación por medio de una recta tangente

Determinar la aproximación por medio de una recta tangente de

$$f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$$

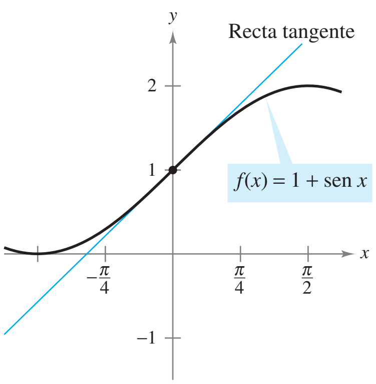
en el punto (0, 1). Utilizar después una tabla para comparar los valores y de la función lineal con los de $f(x)$ en un intervalo abierto que contenga a $x = 0$.

Solución La derivada de f es

$$f'(x) = \cos x. \qquad \text{Primera derivada.}$$

De tal modo, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (0, 1) es

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$
$$y - 1 = (1)(x - 0)$$
$$y = 1 + x. \qquad \text{Aproximación por la recta tangente.}$$



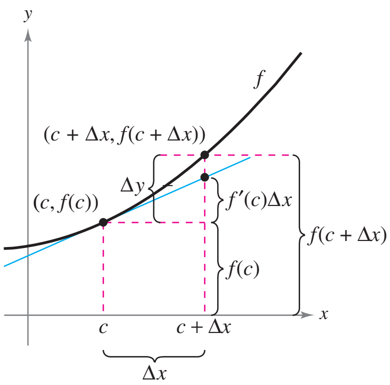
La aproximación de la recta tangente de f en el punto (0, 1)
Figura 3.65

La tabla compara los valores de y dados por esta aproximación lineal con los valores de $f(x)$ cerca de $x = 0$. Advertir que cuanto más cercana es x a 0, tanto mejor es la aproximación. Esta conclusión se refuerza por medio de la gráfica que se muestra en la figura 3.65.

x	-0.5	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.5
$f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$	0.521	0.9002	0.9900002	1	1.0099998	1.0998	1.479
$y = 1 + x$	0.5	0.9	0.99	1	1.01	1.1	1.5

NOTA Asegurarse de ver que esta aproximación lineal de $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$ depende del punto de tangencia. En un punto diferente sobre la gráfica de f, se obtendría una aproximación mediante la recta tangente diferente.

Diferenciales



Cuando Δx es pequeña, $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$ es aproximada por $f'(c)\,\Delta x$
Figura 3.66

Cuando la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$

$$y = f(c) + f'(c)(x - c) \qquad \text{Recta tangente en } (c, f(c)).$$

se usa como una aproximación de la gráfica de f, la cantidad $x - c$ recibe el nombre de cambio en x, y se denota mediante Δx, como se muestra en la figura 3.66. Cuando Δx es pequeña, el cambio en y (denotado por Δy) puede aproximarse como se muestra.

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(c + \Delta x) - f(c) && \text{Cambio real en } y. \\ &\approx f'(c)\Delta x && \text{Cambio aproximado en } y. \end{aligned}$$

Para una aproximación de este tipo, la cantidad Δx tradicionalmente se denota mediante dx, y recibe el nombre de la **diferencial de x**. La expresión $f'(x)\,dx$ se denota por dy, y se denomina la **diferencial de y**.

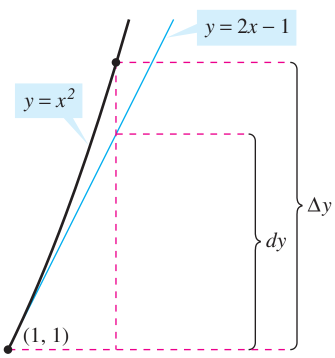
DEFINICIÓN DE DIFERENCIALES

Considerar que $y = f(x)$ representa una función que es derivable en un intervalo abierto que contiene a x. La **diferencial de x** (denotada por dx) es cualquier número real distinto de cero. La **diferencial de y** (denotada por dy) es

$$dy = f'(x)\,dx.$$

En muchos tipos de aplicaciones, la diferencial de y puede utilizarse como una aproximación del cambio en y. Esto es

$$\Delta y \approx dy \qquad \text{o} \qquad \Delta y \approx f'(x)dx.$$



El cambio en y, Δy, se aproxima por la diferencial de y, dy
Figura 3.67

EJEMPLO 2 Comparación de Δy y dy

Sea $y = x^2$, determinar dy cuando $x = 1$ y $dx = 0.01$. Comparar este valor con Δy para $x = 1$ y $\Delta x = 0.01$.

Solución Como $y = f(x) = x^2$, se tiene $f'(x) = 2x$, y la diferencial dy está dada por

$$dy = f'(x)\,dx = f'(1)(0.01) = 2(0.01) = 0.02. \qquad \text{Diferencial de } y.$$

Ahora, utilizando $\Delta x = 0.01$, el cambio en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(1.01) - f(1) = (1.01)^2 - 1^2 = 0.0201.$$

La figura 3.67 muestra la comparación geométrica de dy y Δy. Intente comparar otros valores de dy y Δy. Verá que los valores se aproximan cada vez más entre sí cuando dx (o Δx) tiende a cero.

En el ejemplo 2, la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $x = 1$ es

$$y = 2x - 1 \qquad \text{o} \qquad g(x) = 2x - 1. \qquad \text{Recta tangente a la gráfica de } f \text{ en } x = 1.$$

Para valores de x cercanos a 1, esta recta es cercana a la gráfica de f, como se muestra en la figura 3.67. Por ejemplo

$$f(1.01) = 1.01^2 = 1.0201 \qquad \text{y} \qquad g(1.01) = 2(1.01) - 1 = 1.02.$$

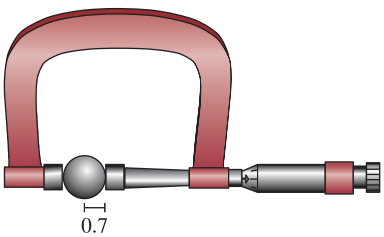
Propagación del error

Los físicos e ingenieros tienden a hacer un uso libre de las aproximaciones de Δy mediante dy. Así sucede en la práctica al estimar los errores propagados por los aparatos (dispositivos) de medida. Por ejemplo, si x denota el valor medido de una variable y $x + \Delta x$ representa el valor exacto, entonces Δx es el *error de medida (medición)*. Por último, si el valor medido x se usa para calcular otro valor $f(x)$, la diferencia entre $f(x + \Delta x)$ y $f(x)$ es el **error propagado**.

$$\underbrace{f(x + \overbrace{\Delta x}^{\text{Error de medición}})}_{\text{Valor exacto}} - \underbrace{f(x)}_{\text{Valor medido}} = \overbrace{\Delta y}^{\text{Error propagado}}$$

EJEMPLO 3 Estimación del error

Se mide el radio de una bola de un cojinete y se encuentra que es igual a 0.7 pulgadas, como se muestra en la figura 3.68. Si la medición no tiene un error mayor que 0.01 pulgadas, estimar el error propagado en el volumen V de la bola del cojinete.



Cojinete de bola con el radio medido que no tiene un error mayor de 0.01 pulgadas
Figura 3.68

Solución La fórmula para el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio de la esfera. De tal modo, es posible escribir

$$r = 0.7 \qquad \text{Radio medido.}$$

y

$$-0.01 \leq \Delta r \leq 0.01. \qquad \text{Error posible.}$$

Para aproximar el error propagado en el volumen, se diferencia V para obtener $dV/dr = 4\pi r^2$ y se escribe

$$\begin{aligned}
\Delta V &\approx dV && \text{Aproximar } \Delta V \text{ con } dV.\\
&= 4\pi r^2\,dr \\
&= 4\pi(0.7)^2(\pm 0.01) && \text{Sustituir } r \text{ y } dr.\\
&\approx \pm 0.06158 \text{ pulgadas cúbicas}
\end{aligned}$$

De este modo, el volumen ha propagado un error de casi 0.06 pulgadas cúbicas.

¿El error propagado en el ejemplo 3 es grande o pequeño? La respuesta se indica de mejor manera en términos *relativos* al comparar dV con V. La proporción

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{V} &= \frac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} && \text{Cociente de } dV \text{ y } V.\\
&= \frac{3\,dr}{r} && \text{Simplificar.}\\
&\approx \frac{3}{0.7}(\pm 0.01) && \text{Sustituir } dr \text{ y } r.\\
&\approx \pm 0.0429
\end{aligned}$$

recibe el nombre de **error relativo**. El correspondiente **error porcentual** es aproximadamente 4.29%.

Cálculo de diferenciales

Cada una de las reglas de derivación que se estudiaron en el capítulo 2 pueden escribirse en **forma diferencial**. Por ejemplo, suponer que u y v son funciones derivables de x. A partir de la definición de diferenciales, se tiene

$$du = u'\,dx \qquad \text{y} \qquad dv = v'\,dx.$$

De tal manera, se puede escribir la forma diferencial de la regla del producto como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} d[uv] &= \frac{d}{dx}[uv]\,dx && \text{Diferencial de } uv. \\ &= [uv' + vu']\,dx && \text{Regla del producto.} \\ &= uv'\,dx + vu'\,dx \\ &= u\,dv + v\,du \end{aligned}$$

FÓRMULAS DIFERENCIALES

Sean u y v funciones diferenciables de x.

Múltiplo constante: $d[cu] = c\,du$

Suma o diferencia: $d[u \pm v] = du \pm dv$

Producto: $d[uv] = u\,dv + v\,du$

Cociente: $d\left[\dfrac{u}{v}\right] = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

EJEMPLO 4 Determinación de diferenciales

	Función	*Derivada*	*Diferencial*
a)	$y = x^2$	$\dfrac{dy}{dx} = 2x$	$dy = 2x\,dx$
b)	$y = 2 \operatorname{sen} x$	$\dfrac{dy}{dx} = 2 \cos x$	$dy = 2 \cos x\,dx$
c)	$y = x \cos x$	$\dfrac{dy}{dx} = -x \operatorname{sen} x + \cos x$	$dy = (-x \operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$
d)	$y = \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$	$dy = -\dfrac{dx}{x^2}$

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

Tanto a Leibniz como a Newton se les acredita como creadores del cálculo. Sin embargo, fue Leibniz quien trató de ampliar el cálculo formulando reglas y la notación formal. A menudo pasaba días eligiendo una notación adecuada para un nuevo concepto.

La notación en el ejemplo 4 recibe el nombre de **notación de Leibniz** para derivadas y diferenciales, en honor del matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz. La belleza de esta notación se debe a que proporciona una forma fácil de recordar varias fórmulas de cálculo importantes al dar la apariencia de que las fórmulas se derivaron de manipulaciones algebraicas de diferenciales. Por ejemplo, en la notación de Leibniz, la *regla de la cadena*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

parecería ser verdadera debido a que las du se anulan. Aunque este razonamiento es *incorrecto*, la notación ayuda a recordar la regla de la cadena.

EJEMPLO 5 Diferencial de una función compuesta

$$y = f(x) = \text{sen } 3x \qquad \text{Función original.}$$
$$f'(x) = 3 \cos 3x \qquad \text{Aplicación de la regla de la cadena.}$$
$$dy = f'(x)\,dx = 3 \cos 3x\,dx \qquad \text{Forma diferencial.}$$

EJEMPLO 6 Diferencial de una función compuesta

$$y = f(x) = (x^2 + 1)^{1/2} \qquad \text{Función original.}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \text{Aplicación de la regla de la cadena.}$$
$$dy = f'(x)\,dx = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx \qquad \text{Forma diferencial.}$$

Las diferenciales pueden utilizarse para aproximar valores de funciones. Para realizar esto con respecto a la función dada por $y = f(x)$, utilizar la fórmula

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,dx$$

la cual se deriva de la aproximación $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$. La clave para utilizar esta fórmula es elegir un valor de x que facilite el cálculo, como se muestra en el ejemplo 7. (Esta fórmula es equivalente a la recta tangente de aproximación dada anteriormente en esta sección.)

EJEMPLO 7 Aproximación de los valores de una función

Utilizar diferenciales para aproximar $\sqrt{16.5}$.

Solución Utilizando $f(x) = \sqrt{x}$, se puede escribir

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,dx = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Ahora bien, eligiendo $x = 16$ y $dx = 0.5$, se obtiene la siguiente aproximación

$$f(x + \Delta x) = \sqrt{16.5} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}(0.5) = 4 + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 4.0625$$

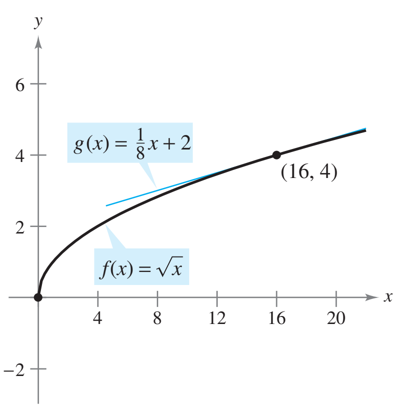


Figura 3.69

La aproximación por medio de la recta tangente a $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 16$ es la línea $g(x) = \frac{1}{8}x + 2$. Para valores de x cercanos a 16, las gráficas de f y g son muy próximas entre sí, como se muestra en la figura 3.69. Por ejemplo,

$$f(16.5) = \sqrt{16.5} \approx 4.0620 \quad \text{y} \quad g(16.5) = \frac{1}{8}(16.5) + 2 = 4.0625.$$

De hecho, si se usa una herramienta de graficación para realizar un acercamiento al punto de tangencia (16, 4), se verá que las dos gráficas parecen coincidir. Advertir también que a medida que se aleja del punto de tangencia, la aproximación lineal es menos exacta.

3.9 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, determinar la ecuación de la recta tangente *T* a la gráfica de *f* en un punto dado. Utilizar esta aproximación lineal para completar la tabla.

x	1.9	1.99	2	2.01	2.1
$f(x)$					
$T(x)$					

1. $f(x) = x^2, \quad (2, 4)$
2. $f(x) = \dfrac{6}{x^2}, \quad \left(2, \dfrac{3}{2}\right)$
3. $f(x) = x^5, \quad (2, 32)$
4. $f(x) = \sqrt{x}, \quad \left(2, \sqrt{2}\right)$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad (2, \operatorname{sen} 2)$
6. $f(x) = \csc x, \quad (2, \csc 2)$

En los ejercicios 7 a 10, utilizar la información para evaluar y comparar Δy y dy.

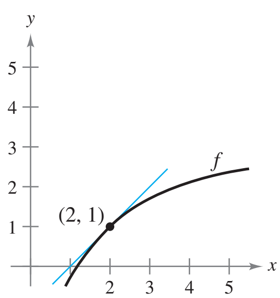
7. $y = x^3 \qquad x = 1 \qquad \Delta x = dx = 0.1$
8. $y = 1 - 2x^2 \qquad x = 0 \qquad \Delta x = dx = -0.1$
9. $y = x^4 + 1 \qquad x = -1 \qquad \Delta x = dx = 0.01$
10. $y = 2 - x^4 \qquad x = 2 \qquad \Delta x = dx = 0.01$

En los ejercicios 11 a 20, determinar la diferencial *dy* de la función indicada.

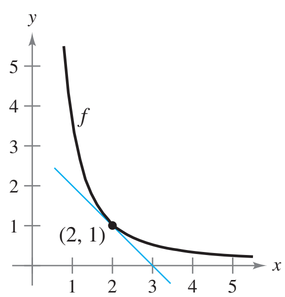
11. $y = 3x^2 - 4$
12. $y = 3x^{2/3}$
13. $y = \dfrac{x + 1}{2x - 1}$
14. $y = \sqrt{9 - x^2}$
15. $y = x\sqrt{1 - x^2}$
16. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
17. $y = 3x - \operatorname{sen}^2 x$
18. $y = x \cos x$
19. $y = \dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{6\pi x - 1}{2}\right)$
20. $y = \dfrac{\sec^2 x}{x^2 + 1}$

En los ejercicios 21 a 24, emplear diferenciales y la gráfica de *f* para aproximar *a*) *f*(1.9) y *b*) *f*(2.04).

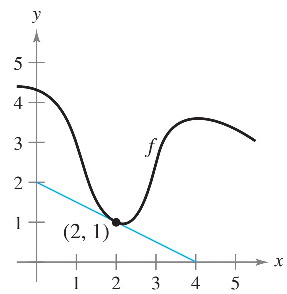
21.



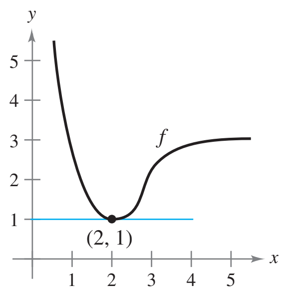
22.



23.

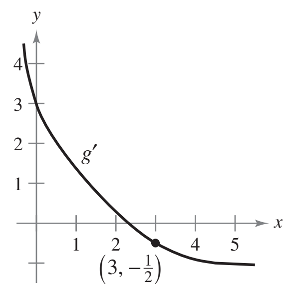


24.

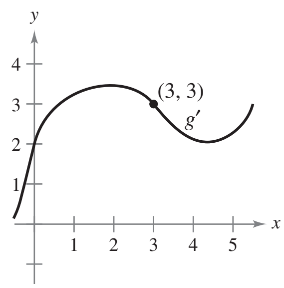


En los ejercicios 25 y 26, utilizar diferenciales y la gráfica de g' para aproximar *a*) $g(2.93)$ y *b*) $g(3.1)$ dado que $g(3) = 8$.

25.



26.



27. ***Área*** Se encuentra que la medición del lado de un cuadrado es igual a 10 pulgadas, con un posible error de $\frac{1}{32}$ de pulgada. Usar diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área del cuadrado.

28. ***Área*** Se encuentra que las mediciones de la base y la altura de un triángulo son iguales, respectivamente, a 36 y 50 cm. El posible error en cada medición es de 0.25 cm. Emplear diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área del triángulo.

29. ***Área*** Se mide el radio del extremo de un tronco y se encuentra que es igual a 16 pulgadas, con un posible error de $\frac{1}{4}$ de pulgada. Utilizar diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área del extremo del tronco.

30. ***Volumen y área superficial*** La medición del borde de un cubo indica un valor de 15 pulgadas, con un error posible de 0.03 pulgadas. Utilizar diferenciales para aproximar el máximo error de propagación posible en el cálculo de *a*) el volumen del cubo y *b*) el área superficial del cubo.

31. ***Área*** La medición del lado de un cuadrado produce un valor igual a 12 cm, con un posible error de 0.05 cm.
    a) Aproximar el error porcentual en el cálculo del área del cuadrado.
    b) Estimar el máximo error porcentual permisible en la medición del lado si el error en el cálculo del área no fue mayor que 2.5%.

32. ***Circunferencia*** La medición de la circunferencia de un círculo produce un valor de 64 centímetros, con un posible error de 0.9 centímetros.
    a) Aproximar el error porcentual en el cálculo del área del círculo.

b) Estimar el máximo error porcentual permisible en la medición de la circunferencia si el error en el cálculo del área no excede de 3%.

33. ***Volumen y área superficial*** Se mide el radio de una esfera y se encuentra un valor de 8 pulgadas, con un posible error de 0.02 pulgadas. Utilizar diferenciales para aproximar el máximo error posible en el cálculo de *a*) el volumen de la esfera, *b*) el área superficial de la esfera y *c*) los errores relativos en los apartados *a*) y *b*).

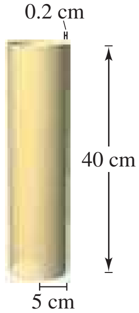
34. ***Distancia de frenado*** La distancia total T en la que se detiene un vehículo es

$$T = 2.5x + 0.5x^2$$

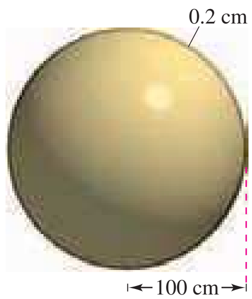
donde T está en pies y x es la velocidad en millas por hora. Aproximar el cambio y el porcentaje de cambio en la distancia total de frenado conforme la velocidad cambia de $x = 25$ a $x = 26$ millas por hora.

Volumen **En los ejercicios 35 y 36, el espesor de cada cubierta es de 0.2 cm. Utilizar diferenciales para aproximar el volumen de cada cubierta.**

35.



36.



37. ***Péndulo*** El periodo de un péndulo está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde L es la longitud del péndulo en pies, g es la aceleración debida a la gravedad y T es el tiempo en segundos. El péndulo se ha sometido a un aumento de temperatura tal que la longitud ha aumentado en $\frac{1}{2}\%$.

a) Encontrar el cambio porcentual aproximado en el periodo.
b) Utilizando el resultado del apartado *a*), encontrar el error aproximado en este reloj de péndulo en 1 día.

38. ***Ley de Ohm*** Una corriente de I amperes pasa por un resistor de R ohms. La **ley de Ohm** establece que el voltaje E aplicado al resistor es $E = IR$. Si el voltaje es constante, demostrar que la magnitud del error relativo en R provocado por el cambio en I es igual en magnitud al error relativo en I.

39. ***Mediciones de triángulos*** Se encuentra que la medición de un lado de un triángulo rectángulo es igual a 9.5 pulgadas y que el ángulo opuesto a ese lado es de $26°45'$ con un error posible de $15'$.

a) Aproximar el error porcentual en el cálculo de la longitud de la hipotenusa.
b) Estimar el máximo error porcentual permisible en la medición del ángulo si el error en el cálculo de la longitud de la hipotenusa no puede ser mayor que 2%.

40. ***Área*** Aproximar el error porcentual en el cálculo del área del triángulo del ejercicio 39.

41. ***Movimiento de proyectiles*** El alcance R de un proyectil es

$$R = \frac{v_0^2}{32}(\text{sen } 2\theta)$$

donde v_0 es la velocidad inicial en pies por segundo y θ es el ángulo de elevación. Si $v_0 = 2\,500$ pies por segundo y θ cambia de $10°$ a $11°$, utilizar diferenciales para aproximar el cambio en el alcance.

42. ***Agrimensura*** Un agrimensor que está a 50 pies de la base de un árbol mide el ángulo de elevación de la parte superior de este último y obtiene un valor de $71.5°$. ¿Con qué precisión debe medirse el ángulo si el error porcentual en la estimación de la altura de este mismo será menor que 6%?

En los ejercicios 43 a 46, utilizar diferenciales para aproximar el valor de la expresión. Comparar su respuesta con la que se obtiene usando una herramienta de graficación.

43. $\sqrt{99.4}$ **44.** $\sqrt[3]{26}$

45. $\sqrt[4]{624}$ **46.** $(2.99)^3$

En los ejercicios 47 y 48, verificar la aproximación por medio de la recta tangente de la función en el punto indicado. Después utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su aproximación en la misma ventana de observación.

	Función	*Aproximación*	*Punto*
47.	$f(x) = \sqrt{x + 4}$	$y = 2 + \frac{x}{4}$	$(0, 2)$
48.	$f(x) = \tan x$	$y = x$	$(0, 0)$

Desarrollo de conceptos

49. Describir la variación en precisión de dy como una aproximación para Δy cuando Δx está disminuyendo.

50. Cuando se usan diferenciales, ¿qué se entiende por los términos *error propagado*, *error relativo* y *error porcentual*?

51. Dar una breve explicación de por qué las siguientes aproximaciones son válidas.

a) $\sqrt{4.02} \approx 2 + \frac{1}{4}(0.02)$

b) $\tan 0.05 \approx 0 + 1(0.05)$

Para discusión

52. ¿Se puede utilizar $y = x$ para aproximar $f(x) = \text{sen } x$ cerca de $x = 0$? ¿Por qué sí o por qué no?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 53 a 56, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o brindar un ejemplo que lo demuestre.**

53. Si $y = x + c$, entonces $dy = dx$.

54. Si $y = ax + b$, entonces $\Delta y/\Delta x = dy/dx$.

55. Si y es derivable, entonces $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y - dy) = 0$.

56. Si $y = f(x)$, f es creciente y derivable, y $\Delta x > 0$, entonces $\Delta y \geq dy$.

3 Ejercicios de repaso

1. Proporcionar la definición de un punto crítico y representar gráficamente una función f que muestre los diferentes tipos de puntos críticos.
2. Considerar la función impar f que es continua y derivable y tiene los valores funcionales que se muestran en la tabla.

x	-5	-4	-1	0	2	3	6
$f(x)$	1	3	2	0	-1	-4	0

a) Determinar $f(4)$.
b) Determinar $f(-3)$.
c) Representar los puntos y realizar un dibujo posible de la gráfica de f en el intervalo $[-6, 6]$. ¿Cuál es el número más pequeño de puntos críticos en el intervalo? Explicar.
d) ¿Existe al menos un número real c en el intervalo $(-6, 6)$ donde $f'(c) = -1$? Explicar.
e) ¿Es posible que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no exista? Explicar la respuesta.
f) ¿Es necesario que $f'(x)$ exista en $x = 2$? Explicar la respuesta.

En los ejercicios 3 y 6, determinar los extremos absolutos de la función en el intervalo cerrado. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función sobre el intervalo dado para confirmar los resultados.

3. $f(x) = x^2 + 5x, \quad [-4, 0]$
4. $h(x) = 3\sqrt{x} - x, \quad [0, 9]$
5. $g(x) = 2x + 5\cos x, \quad [0, 2\pi]$
6. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad [0, 2]$

En los ejercicios 7 a 10, determinar si el teorema de Rolle puede aplicarse a f en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si el teorema de Rolle puede aplicarse, determinar todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b) en los que $f'(c) = 0$. Si el teorema de Rolle no puede ser aplicado, explicar por qué.

7. $f(x) = 2x^2 - 7, \quad [0, 4]$
8. $f(x) = (x-2)(x+3)^2, \quad [-3, 2]$
9. $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}, \quad [-2, 2]$
10. $f(x) = |x-2| - 2, \quad [0, 4]$
11. Considerar la función $f(x) = 3 - |x - 4|$.
    a) Representar gráficamente la función y verificar que $f(1) = f(7)$.
    b) Notar que $f'(x)$ no es igual a cero para ningún x en $[1, 7]$. Explicar por qué esto no contradice al teorema de Rolle.
12. ¿Puede aplicarse el teorema del valor medio a la función $f(x) = 1/x^2$ en el intervalo $[-2, 1]$? Explicar.

En los ejercicios 13 a 18, determinar si el teorema del valor medio puede o no ser aplicado a la función f sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Si se puede aplicar el teorema, encontrar todos los valores de c en el intervalo (a, b) tales que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Si el teorema no puede ser aplicado, explicar por qué.

13. $f(x) = x^{2/3}, \quad [1, 8]$
14. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad [1, 4]$
15. $f(x) = |5 - x|, \quad [2, 6]$
16. $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}, \quad [-1, 1]$
17. $f(x) = x - \cos x, \quad \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
18. $f(x) = \sqrt{x} - 2x, \quad [0, 4]$
19. Para la función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, determinar el valor de c garantizado por el teorema del valor medio en el intervalo $[x_1, x_2]$.
20. Demostrar el resultado del ejercicio 19 para $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ en el intervalo $[0, 4]$.

En los ejercicios 21 a 26, determinar los puntos críticos (si los hay) y los intervalos abiertos sobre los cuales la función es creciente o es decreciente.

21. $f(x) = x^2 + 3x - 12$
22. $h(x) = (x+2)^{1/3} + 8$
23. $f(x) = (x-1)^2(x-3)$
24. $g(x) = (x+1)^3$
25. $h(x) = \sqrt{x}(x-3), \quad x > 0$
26. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

En los ejercicios 27 a 30, utilizar el criterio de la primera derivada para encontrar cualesquiera extremos relativos de la función. Utilizar la herramienta de graficación para verificar los resultados.

27. $f(x) = 4x^3 - 5x$
28. $g(x) = \dfrac{x^3 - 8x}{4}$
29. $h(t) = \dfrac{1}{4}t^4 - 8t$
30. $g(x) = \dfrac{3}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2} - 1\right), \quad [0, 4]$
31. ***Movimiento armónico*** La altura de un objeto unido a un resorte está dada por la ecuación armónica

$$y = \tfrac{1}{3}\cos 12t - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 12t$$

donde y se mide en pulgadas y t en segundos.
    a) Calcular la altura y velocidad del objeto cuando $t = \pi/8$ segundos.
    b) Demostrar que el desplazamiento máximo del objeto es $\frac{5}{12}$ de pulgada.
    c) Encontrar el periodo P de y, así como determinar la frecuencia f (número de oscilaciones por segundo) si $f = 1/P$.
32. ***Comentario*** La ecuación general que da la altura de un objeto oscilante unido a un resorte es

$$y = A\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + B\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

donde k es la constante de resorte y m es la masa del objeto.
    a) Demostrar que el desplazamiento máximo del objeto es $\sqrt{A^2+B^2}$.
    b) Demostrar que el objeto oscila con una frecuencia de

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

En los ejercicios 33 a 36, determinar los puntos de inflexión y analizar la concavidad de la gráfica de la función.

33. $f(x) = x^3 - 9x^2$

34. $g(x) = x\sqrt{x+5}$

35. $f(x) = x + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

36. $f(x) = (x+2)^2(x-4)$

En los ejercicios 37 a 40, utilizar el criterio de la segunda derivada para encontrar todos los extremos relativos.

37. $f(x) = (x+9)^2$

38. $h(x) = x - 2\cos x, \quad [0, 4\pi]$

39. $g(x) = 2x^2(1 - x^2)$

40. $h(t) = t - 4\sqrt{t+1}$

Para pensar **En los ejercicios 41 y 42, dibujar la gráfica de una función *f* que tenga las características indicadas.**

41. $f(0) = f(6) = 0$
$f'(3) = f'(5) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x < 3$
$f'(x) > 0$ si $3 < x < 5$
$f'(x) < 0$ si $x > 5$
$f''(x) < 0$ si $x < 3$ o $x > 4$
$f''(x) > 0$ si $3 < x < 4$

42. $f(0) = 4, \ f(6) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x < 2$ o $x > 4$
$f'(2)$ no existe
$f'(4) = 0$
$f'(x) > 0$ si $2 < x < 4$
$f''(x) < 0$ si $x \neq 2$

43. ***Redacción*** El titular de un periódico señala que "La tasa (el ritmo) de crecimiento del déficit nacional está decreciendo". ¿Qué es lo que significa esto? ¿Qué implica este comentario en cuanto a la gráfica del déficit como una función del tiempo?

44. ***Costo de inventario*** El costo del inventario depende de los costos de pedidos y almacenamiento de acuerdo con el modelo de inventario.

$$C = \left(\frac{Q}{x}\right)s + \left(\frac{x}{2}\right)r.$$

Determinar el tamaño de pedido que minimizará el costo, suponiendo que las ventas ocurren a una tasa constante, Q es el número de unidades vendidas por año, r es el costo de almacenamiento de una unidad durante un año, s es el costo de colocar un pedido y x es el número de unidades por pedido.

45. ***Modelado matemático*** Los gastos para la defensa nacional D (en miles de millones de dólares) para años determinados de 1970 a 2005 se muestran en la tabla, donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiente a 1970. (*Fuente: U.S. Office of Management and Budget*)

t	0	5	10	15	20
D	81.7	86.5	134.0	252.7	299.3

t	25	30	35
D	272.1	294.5	495.3

a) Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para ajustar un modelo de la forma

$$D = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$$

a los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

c) Para el año que se muestra en la tabla, ¿cuándo indica el modelo que el gasto para la defensa nacional es un máximo? ¿Cuándo es un mínimo?

d) Para los años que se indican en la tabla, ¿cuándo indica el modelo que el gasto para la defensa nacional está creciendo a mayor velocidad?

46. ***Modelado matemático*** El gerente de un almacén registra las ventas anuales S (en miles de dólares) de un producto durante un periodo de 7 años, como se indica en la tabla, donde t es el tiempo en años, con $t = 1$ correspondiendo a 2001.

t	1	2	3	4	5	6	7
S	5.4	6.9	11.5	15.5	19.0	22.0	23.6

a) Utilizar las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para determinar un modelo de la forma $S = at^3 + bt^2 + ct + d$ correspondiente a los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

c) Utilizar el cálculo para determinar el tiempo t en el que las ventas estuvieron creciendo a la mayor velocidad.

d) ¿Piensa que el modelo sería exacto para predecir las ventas futuras? Explicar.

En los ejercicios 47 a 56, determinar el límite.

47. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(8 + \frac{1}{x}\right)$

48. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3 - x}{2x + 5}$

49. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2 + 5}$

50. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x^2 + 5}$

51. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x + 5}$

52. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2 + x}}{-2x}$

53. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5\cos x}{x}$

54. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

55. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{x + \cos x}$

56. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2\,\mathrm{sen}\,x}$

En los ejercicios 57 a 60, determinar cualesquiera asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la función. Recurrir a una herramienta de graficación para verificar los resultados.

57. $f(x) = \dfrac{3}{x} - 2$

58. $g(x) = \dfrac{5x^2}{x^2 + 2}$

59. $h(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4}$

60. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

En los ejercicios 61 a 64, utilizar una herramienta de graficación para representar la función. Emplear la gráfica para aproximar cualesquiera extremos relativos o asíntotas.

61. $f(x) = x^3 + \dfrac{243}{x}$

62. $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2x|$

63. $f(x) = \dfrac{x - 1}{1 + 3x^2}$

64. $g(x) = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x$

En los ejercicios 65 a 82, analizar y dibujar la gráfica de la función.

65. $f(x) = 4x - x^2$

66. $f(x) = 4x^3 - x^4$

67. $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$

68. $f(x) = (x^2 - 4)^2$

69. $f(x) = (x - 1)^3(x - 3)^2$

70. $f(x) = (x - 3)(x + 2)^3$

71. $f(x) = x^{1/3}(x + 3)^{2/3}$

72. $f(x) = (x - 2)^{1/3}(x + 1)^{2/3}$

73. $f(x) = \dfrac{5 - 3x}{x - 2}$

74. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

75. $f(x) = \dfrac{4}{1 + x^2}$

76. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^4}$

77. $f(x) = x^3 + x + \dfrac{4}{x}$

78. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

79. $f(x) = |x^2 - 9|$

80. $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$

81. $f(x) = x + \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

82. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}(2 \operatorname{sen} \pi x - \operatorname{sen} 2\pi x), \quad -1 \leq x \leq 1$

83. Determinar los puntos máximos y mínimos en la gráfica de

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$$

a) Sin utilizar cálculo.

b) Utilizando cálculo.

84. Considerar la función $f(x) = x^n$ para valores enteros positivos de n.

a) ¿Para qué valores de n la función tiene un mínimo relativo en el origen?

b) ¿Para qué valores de n la función tiene un punto de inflexión en el origen?

85. ***Distancia*** En la noche, el barco A se encuentra a 100 kilómetros en dirección este del barco B. El barco A navega hacia el oeste a 12 km/h, y el barco B lo hace hacia el sur a 10 km/h. ¿A qué hora se encontrarán a distancia mínima uno del otro? ¿Cuál es la distancia?

86. ***Área máxima*** Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima, con lados paralelos a los ejes de coordenadas, que puede inscribirse en la elipse dada por

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

87. ***Longitud mínima*** Un triángulo rectángulo en el primer cuadrante tiene los ejes de coordenadas como lados, y la hipotenusa pasa por el punto (1, 8). Encontrar los vértices del triángulo de modo tal que la longitud de la hipotenusa sea mínima.

88. ***Longitud mínima*** Hay que apuntalar la fachada de un edificio con una viga que debe pasar sobre una cerca (valla) paralela de 5 pies de altura y a 4 pies de distancia del edificio. Determinar la longitud de la viga más corta que puede usarse.

89. ***Área máxima*** Tres lados de un trapezoide tienen la misma longitud s. De todos los trapezoides posibles de estas características, mostrar que uno de área máxima tiene un cuarto lado de longitud $2s$.

90. ***Área máxima*** Demostrar que el área más grande de cualquier rectángulo inscrito en un triángulo es la correspondiente a la mitad de la del triángulo.

91. ***Distancia*** Calcular (sin el uso de la trigonometría) la longitud de la tubería más larga que se puede transportar sin inclinarla por dos pasillos, de anchuras 4 y 6 pies, que forman esquina en el ángulo recto.

92. ***Distancia*** Repetir el ejercicio 91, considerando que los corredores (pasillos) tienen anchos iguales a a y b metros.

93. ***Distancia*** Un pasadizo con 6 pies de ancho se junta con otro de 9 pies de ancho formando un ángulo recto. Encontrar la longitud del tubo más largo que puede transportarse sin inclinarse alrededor de esta esquina. [*Sugerencia*: Si L es la longitud de la tubería, demostrar que

$$L = 6 \csc \theta + 9 \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

donde θ es el ángulo entre el tubo y la pared del pasadizo más estrecho.]

94. ***Longitud*** Repetir el ejercicio 93, dado que uno de los pasadizos es de a metros de ancho y el otro de b metros de ancho. Demostrar que el resultado es el mismo que en el ejercicio 92.

Costo mínimo **En los ejercicios 95 y 96, determinar la velocidad v, en millas por hora, que minimizará los costos en un viaje de entrega de 110 millas. El costo por hora del combustible es C dólares, y al conductor se le pagarán W dólares por hora. (Suponer que no hay otros costos aparte de los salarios y el combustible.)**

95. Costo del comb.: $C = \dfrac{v^2}{600}$

Conductor: $W = \$5$

96. Costo del comb.: $C = \dfrac{v^2}{500}$

Conductor: $W = \$7.50$

En los ejercicios 97 y 98, utilizar el método de Newton para aproximar cualesquiera ceros reales de la función con una precisión de hasta tres decimales. Utilizar la característica *cero* o *root* de una herramienta de graficación para verificar los resultados.

97. $f(x) = x^3 - 3x - 1$

98. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

En los ejercicios 99 y 100, utilizar el método de Newton para aproximar, hasta tres lugares decimales, el (los) valor(es) x del (los) punto(s) de intersección de las ecuaciones. Utilizar una herramienta de graficación para verificar los resultados.

99. $y = x^4$
$y = x + 3$

100. $y = \operatorname{sen} \pi x$
$y = 1 - x$

En los ejercicios 101 y 102, encontrar la diferencial dy.

101. $y = x(1 - \cos x)$

102. $y = \sqrt{36 - x^2}$

103. ***Área superficial y volumen*** El diámetro de una esfera se mide y se obtiene un valor de 18 centímetros, con un error máximo posible de 0.05 centímetros. Utilizar diferenciales para aproximar los posibles error propagado y error porcentual al calcular el área de la superficie y el volumen de la esfera.

104. ***Función de demanda*** Una compañía descubre que la demanda de uno de sus productos es

$$p = 75 - \frac{1}{4}x.$$

Si x cambia de 7 a 8, encontrar y comparar los valores de Δp y dp.

SP Solución de problemas

1. Representar el polinomio de cuarto grado $p(x) = x^4 + ax^2 + 1$ para diversos valores de la constante a.

a) Determinar el valor de a para el cual p tiene exactamente un mínimo relativo.

b) Determinar los valores de a para los cuales p tiene exactamente un máximo relativo.

c) Determinar los valores de a para los cuales p tiene exactamente dos mínimos relativos.

d) Mostrar que la gráfica de p no puede tener exactamente dos extremos relativos.

2. *a*) Representar el polinomio de cuarto grado $p(x) = ax^4 - 6x^2$ para $a = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3. ¿Para qué valores de la constante a para p tiene un mínimo o máximo relativo?

b) Demostrar que p tiene un máximo relativo para todos los valores de la constante a.

c) Determinar analíticamente los valores de a para los cuales p tiene un mínimo relativo.

d) Sea $(x, y) = (x, p(x))$ un extremo relativo de p. Demostrar que (x, y) se encuentra en la gráfica de $y = -3x^2$. Verificar gráficamente este resultado representando $y = -3x^2$ junto con las siete curvas del apartado *a*).

3. Sea $f(x) = \dfrac{c}{x} + x^2$. Determinar todos los valores de la constante c tales que f tiene un mínimo relativo, pero no un máximo relativo.

4. *a*) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, un polinomio cuadrático. ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la gráfica de f?

b) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, un polinomio cúbico. ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la gráfica de f?

c) Suponer que la función $y = f(x)$ satisface la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = ky\left(1 - \dfrac{y}{L}\right)$, donde k y L son constantes positivas. Demostrar que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en el punto donde $y = \dfrac{L}{2}$. (Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación diferencial logística**.)

5. Demostrar el teorema de Darboux: sea f derivable en el intervalo cerrado $[a, b]$ de modo tal que $f'(a) = y_1$ y $f'(b) = y_2$. Si d se encuentra entre y_1 y y_2, entonces existe c en (a, b) tal que $f'(c) = d$.

6. Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Demostrar que si $f(a) = g(a)$ y $g'(x) > f'(x)$ para todo x en (a, b), entonces $g(b) > f(b)$.

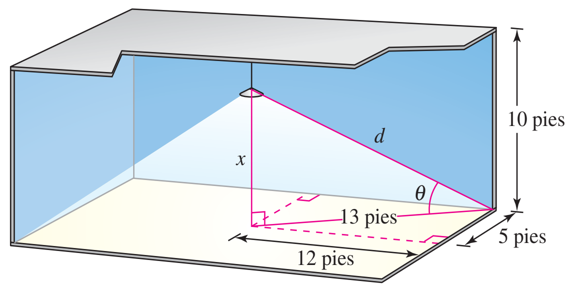
7. Demostrar el siguiente **teorema del valor medio extendido**. Si f y f' son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si f'' existe en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{1}{2}f''(c)(b - a)^2.$$

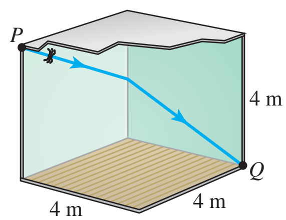
8. *a*) Sea $V = x^3$. Determinar dV y ΔV. Demostrar que para valores pequeños de x, la diferencia $\Delta V - dV$ es muy pequeña en el sentido de que existe ε tal que $\Delta V - dV = \varepsilon\Delta x$, donde $\varepsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

b) Generalizar este resultado demostrando que si $y = f(x)$ es una función derivable, entonces $\Delta y - dy = \varepsilon\Delta x$, donde $\varepsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

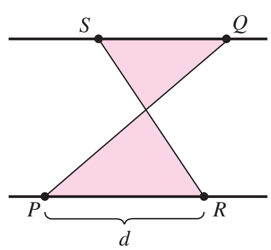
9. La cantidad de iluminación de una superficie es proporcional a la intensidad de la fuente luminosa, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la fuente luminosa, y proporcional a sen θ, donde θ es el ángulo al cual la luz incide sobre la superficie. Un cuarto rectangular mide 10 por 24 pies, con un techo de 10 pies. Determinar la altura a la cual la luz debe ubicarse para permitir que las esquinas del piso reciban la mayor cantidad posible de luz.



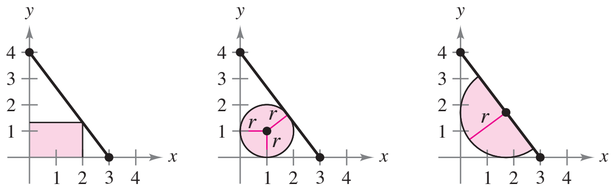
10. Considerar un cuarto en la forma de un cubo, de 4 metros de lado. Un insecto en el punto P desea desplazarse hasta el punto Q en la esquina opuesta, como se indica en la figura. Emplear el cálculo para determinar la trayectoria más corta. ¿Se puede resolver el problema sin el cálculo?



11. La recta que une P y Q cruza las dos rectas paralelas, como se muestra en la figura. El punto R está a d unidades de P. ¿A qué distancia de Q debe situarse el punto S de manera que la suma de las áreas de los dos triángulos sombreados sea un mínimo? ¿De qué modo para que la suma sea un máximo?



12. Las figuras muestran un rectángulo, un círculo y un semicírculo inscritos en un triángulo delimitado por los ejes de coordenadas y la porción del primer cuadrante de la recta con intersecciones (3, 0) y (0, 4). Encontrar las dimensiones de cada figura inscrita de manera tal que su área sea máxima. Establecer qué tipo de cálculo fue útil para determinar las dimensiones requeridas. Explicar el razonamiento.

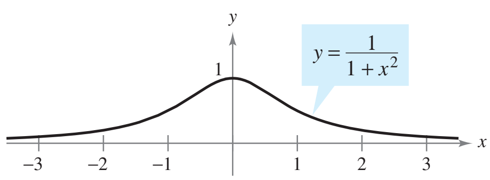


13. *a*) Demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

b) Probar que $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$.

c) Sea L un número real. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{y\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{y}\right) = L$.

14. Encontrar el punto sobre la gráfica de $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ (ver la figura) donde la recta tangente tiene la pendiente más grande, y el punto donde la recta tangente tiene la pendiente menor.



15. *a*) Sea x un número positivo. Utilizar la función *table* de una herramienta de graficación para verificar que $\sqrt{1 + x} < \frac{1}{2}x + 1$.

b) Recurrir al teorema del valor medio para demostrar que $\sqrt{1 + x} < \frac{1}{2}x + 1$ para todos los números reales positivos x.

16. *a*) Sea x un número positivo. Utilizar la función *table* de una herramienta de graficación para verificar que sen $x < x$.

b) Utilizar el teorema del valor medio para demostrar que $x < x$ para todo número real positivo x.

17. El departamento de policía debe determinar el límite de velocidad sobre un puente de manera tal que la tasa de flujo de automóviles sea máxima por unidad de tiempo. Cuanto mayor es el límite de velocidad, tanto más separados deben estar los automóviles para mantener una distancia de frenado segura. Los datos experimentales respecto a la distancia de frenado d (en metros) para diversas velocidades v (en kilómetros por hora) se indican en la tabla.

v	20	40	60	80	100
d	5.1	13.7	27.2	44.2	66.4

a) Convertir las velocidades v en la tabla a velocidades s en metros por segundo. Utilizar las capacidades de regresión de la calculadora para determinar un modelo de la forma $d(s) = as^2 + bs + c$ para los datos.

b) Considerar dos vehículos consecutivos de longitud promedio igual a 5.5 metros, que viajan a una velocidad segura sobre el puente. Sea T la diferencia entre los tiempos (en segundos) cuando los parachoques frontales de los vehículos pasan por un punto dado sobre el puente. Verificar que esta diferencia de tiempos está dada por

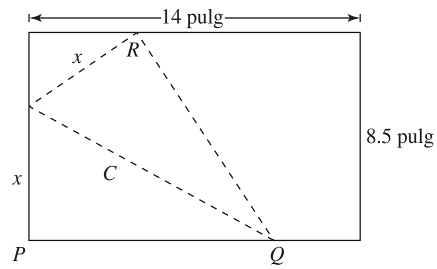
$$T = \frac{d(s)}{s} + \frac{5.5}{s}.$$

c) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función T y estimar la velocidad s que minimiza el tiempo entre vehículos.

d) Recurrir al cálculo para determinar la velocidad que minimiza T. ¿Cuál es el valor mínimo de T? Convertir la velocidad requerida a kilómetros por hora.

e) Determinar la distancia óptima entre vehículos para el límite de velocidad máxima determinado en el apartado *d*).

18. Una hoja de papel de tamaño cuartilla (8.5 × 14 pulgadas) se dobla de manera que la esquina P toca el borde opuesto de 14 pulgadas en R (ver la figura). (*Nota*: $PQ = \sqrt{C^2 - x^2}$.)



a) Demostrar que $C^2 = \dfrac{2x^3}{2x - 8.5}$.

b) ¿Cuál es el dominio de C?

c) Determinar el valor de x que minimiza a C.

d) Determinar la longitud mínima C.

19. El polinomio $P(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2$ es la aproximación cuadrática de la función f en $(a, f(a))$ si $P(a) = f(a)$, $P'(a) = f'(a)$ y $P''(a) = f''(a)$.

a) Encontrar la aproximación cuadrática de

$$f(x) = \frac{x}{x + 1}$$

en (0, 0).

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar $P(x)$ y $f(x)$ en la misma ventana de observación.

20. Sean $x > 0$ y $n > 1$ dos números reales. Demostrar que

$(1 + x)^n > 1 + nx$.

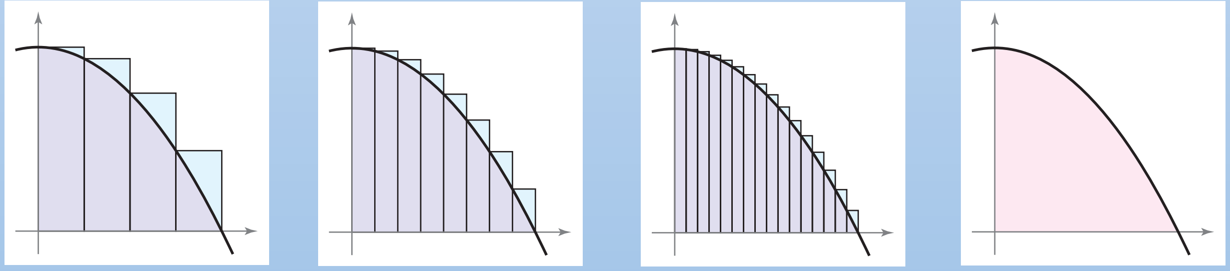
4 Integración

En este capítulo, se estudiará un importante proceso de cálculo que está estrechamente relacionado con la diferenciación-*integración*. El lector aprenderá nuevos métodos y reglas para resolver integrales definidas e indefinidas, incluido el teorema fundamental del cálculo. Posteriormente se aplicarán esas reglas para encontrar algunos términos como la función posición para un objeto y el valor promedio de una función.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo evaluar integrales indefinidas usando reglas de integración básicas. (**4.1**)
- Cómo evaluar una suma y aproximar el área de una región del plano. (**4.2**)
- Cómo evaluar una integral definida usando un límite. (**4.3**)
- Cómo evaluar una integral definida usando el teorema fundamental del cálculo. (**4.4**)
- Cómo evaluar diferentes tipos de integrales definidas e indefinidas con una variedad de métodos. (**4.5**)
- Cómo evaluar una integral definida con la regla trapezoidal y la regla de Simpson. (**4.6**)

Aunque su sobrenombre oficial sea Ciudad Esmeralda, Seattle se conoce a veces como la Ciudad Lluviosa debido a su clima. No obstante, existen varias ciudades, incluidas Nueva York y Boston, que típicamente tienen más precipitación anual. ¿Cómo se podría usar la integración para calcular la precipitación normal anual para el área de Seattle? (Vea la sección 4.5, ejercicio 117.)



El área de una región parabólica puede aproximarse como la suma de las áreas de rectángulos. Conforme se incrementa el número de rectángulos, la aproximación tiende a ser cada vez más exacta. En la sección 4.2, el lector aprenderá cómo se puede usar el proceso de límite para encontrar áreas de una variedad de ancho de regiones.

4.1 Antiderivadas o primitivas e integración indefinida

- **Escribir la solución general de una ecuación diferencial.**
- **Usar la notación de la integral indefinida para las antiderivadas o primitivas.**
- **Utilizar las reglas de la integración básicas para encontrar antiderivadas.**
- **Encontrar una solución particular de una ecuación diferencial.**

EXPLORACIÓN

Determinación de antiderivadas o primitivas Para cada derivada, describir la función original F.

a) $F'(x) = 2x$

b) $F'(x) = x$

c) $F'(x) = x^2$

d) $F'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

e) $F'(x) = \dfrac{1}{x^3}$

f) $F'(x) = \cos x$

¿Qué estrategia se usó para determinar F?

Antiderivadas o primitivas

Suponer que se decide encontrar una función F cuya derivada es $f(x) = 3x^2$. Por lo que se sabe de derivadas, es posible afirmar que

$$F(x) = x^3 \text{ porque } \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2.$$

La función F es una *antiderivada* de f.

DEFINICIÓN DE UNA ANTIDERIVADA O PRIMITIVA

Se dice que una función F es una **antiderivada o primitiva** de f, en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Nótese que F es *una* antiderivada de f, en vez de *la* antiderivada de f. Para entender por qué, observar que

$$F_1(x) = x^3, \quad F_2(x) = x^3 - 5 \quad \text{y} \quad F_3(x) = x^3 + 97$$

son todas antiderivadas de $f(x) = 3x^2$. De hecho, para cualquier constante C, la función dada por $F(x) = x^3 + C$ es una antiderivada de f.

TEOREMA 4.1 REPRESENTACIÓN DE ANTIDERIVADAS O PRIMITIVAS

Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es una antiderivada de f en el intervalo I si y sólo si G es de la forma $G(x) = F(x) + C$, para todo x en I, donde C es una constante.

DEMOSTRACIÓN La prueba del teorema 4.1 en un sentido es directa. Esto es, si $G(x) = F(x) + C$, $F'(x) = f(x)$, y C es constante, entonces

$$G'(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C] = F'(x) + 0 = f(x).$$

Para probar este teorema en otro sentido, se supone que G es una antiderivada de f. Se define una función H tal que

$$H(x) = G(x) - F(x).$$

Para cualesquiera dos puntos a y b ($a < b$) en el intervalo, H es continua dentro de $[a, b]$ y diferenciable dentro de (a, b). Mediante el teorema del valor medio,

$$H'(c) = \frac{H(b) - H(a)}{b - a}.$$

para algún c en (a, b). Sin embargo, $H'(c) = 0$, por consiguiente $H(a) = H(b)$. Dado que a y b son puntos arbitrarios en el intervalo, se sabe que H es una función constante C. Así, $G(x) - F(x) = C$ y esto conlleva a que $G(x) = F(x) + C$.

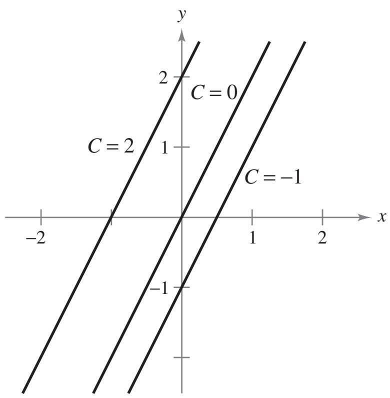
Si utiliza el teorema 4.1, puede representarse la familia completa de antiderivadas de una función agregando una constante a una antiderivada *conocida*. Por ejemplo, sabiendo que $D_x[x^2] = 2x$, es posible representar la familia de *todas* las antiderivadas de $f(x) = 2x$ por

$$G(x) = x^2 + C$$ Familia de todas las antiderivadas de $f(x) = 2x$.

donde C es constante. La constante C recibe el nombre de **constante de integración**. La familia de funciones representadas por G es la **antiderivada general** de f, y $G(x) = x^2 + C$ es la **solución general** de la *ecuación diferencial*.

$$G'(x) = 2x.$$ Ecuación diferencial.

Una **ecuación diferencial** en x y y es una ecuación que incluye a x, y y *a* las derivadas de y. Por ejemplo, $y' = 3x$ y $y' = x^2 + 1$ son ejemplos de ecuaciones diferenciales.



Funciones de la forma $y = 2x + C$
Figura 4.1

EJEMPLO 1 Resolución de una ecuación diferencial

Determinar la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2$.

Solución Para empezar, determinar una función cuya derivada es 2. Una función de esta característica es

$$y = 2x.$$ $2x$ es *una* antiderivada de 2.

Ahora bien, utilizar el teorema 4.1 para concluir que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = 2x + C.$$ Solución general.

Las gráficas de varias funciones de la forma $y = 2x + C$ se muestran en la figura 4.1.

Notación para antiderivadas o primitivas

Cuando se resuelve una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

es conveniente escribirla en la forma diferencial equivalente

$$dy = f(x)\, dx.$$

La operación para determinar todas las soluciones de esta ecuación se denomina **antiderivación** (o **integración indefinida**) y se denota mediante un signo integral $\int$. La solución general se denota mediante

Variable de integración — Constante de integración

$$y = \int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Integrando — Una antiderivada de $f(x)$

NOTA En este texto, la notación $\int f(x)dx = F(x) + C$ significa que F es una antiderivada o primitiva de f *en un intervalo*.

La expresión $\int f(x)dx$ se lee como la *antiderivada o primitiva de f con respecto a x*. De tal manera, la diferencial de dx sirve para identificar a x como la variable de integración. El término **integral indefinida** es sinónimo de antiderivada.

Reglas básicas de integración

La naturaleza inversa de la integración y la derivación puede verificarse sustituyendo $F'(x)$ por $f(x)$ en la definición de integración indefinida para obtener

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

La integración es la "inversa" de la derivación.

Además, si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x).$$

La derivación es la "inversa" de la integración.

Estas dos ecuaciones permiten obtener directamente fórmulas de integración a partir de fórmulas de derivación, como se muestra en el siguiente resumen.

Reglas básicas de integración

Fórmula de derivación	*Fórmula de integración*	
$\frac{d}{dx}[C] = 0$	$\int 0\,dx = C$	
$\frac{d}{dx}[kx] = k$	$\int k\,dx = kx + C$	
$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$	$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$	
$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$	
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \quad - \quad 1$	Regla de la potencia.
$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$	

NOTA La regla de la potencia para la integración tiene la restricción $n \neq -1$. El cálculo de $\int 1/x\,dx$ debe esperar hasta el análisis de la función logaritmo natural en el capítulo 5. ■

EJEMPLO 2 Aplicación de las reglas básicas de integración

Describir las antiderivadas o primitivas de $3x$.

Solución

$$\int 3x\,dx = 3\int x\,dx \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= 3\int x^1\,dx \qquad \text{Reescribir } x \text{ como } x^1.$$

$$= 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + C \qquad \text{Regla de potencia } (n = 1).$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + C \qquad \text{Simplificar.}$$

De tal manera, las antiderivadas o primitivas de $3x$ son de la forma $\frac{3}{2}x^2 + C$, donde C es cualquier constante.

Cuando se evalúan integrales indefinidas, una aplicación estricta de las reglas básicas de integración tiende a producir complicadas constantes de integración. En el caso del ejemplo 2, se podría haber escrito

$$\int 3x\,dx = 3\int x\,dx = 3\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = \frac{3}{2}x^2 + 3C.$$

Sin embargo, como C representa *cualquier* constante, es tanto problemático como innecesario escribir $3C$ como la constante de integración. De tal modo, $\frac{3}{2}x^2 + 3C$ se escribe en la forma más simple, $\frac{3}{2}x^2 + C$.

En el ejemplo 2, advertir que el patrón general de integración es similar al de la derivación.

Integral original ⇨ Reescribir ⇨ Integrar ⇨ Simplificar

EJEMPLO 3 Reescribir antes de integrar

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
a)	$\int \frac{1}{x^3}\,dx$	$\int x^{-3}\,dx$	$\frac{x^{-2}}{-2} + C$	$-\frac{1}{2x^2} + C$
b)	$\int \sqrt{x}\,dx$	$\int x^{1/2}\,dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
c)	$\int 2\,\operatorname{sen} x\,dx$	$2\int \operatorname{sen} x\,dx$	$2(-\cos x) + C$	$-2\cos x + C$

TECNOLOGÍA Algunos programas de software tales como *Maple, Mathematica* y el *TI-89*, son capaces de efectuar simbólicamente la integración. Si se tiene acceso a estas herramientas de integración simbólica, utilizarlas para calcular las integrales indefinidas del ejemplo 3.

Recordar que, por simple derivación, puede comprobarse si una primitiva es correcta. Así, en el ejemplo 3*b*, para saber si la primitiva $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$ es correcta, basta con derivarla para obtener

$$D_x\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + C\right] = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{1/2} = \sqrt{x}. \qquad \text{Usar la derivación para verificar la antiderivada.}$$

Las reglas básicas de integración listadas antes en esta sección permiten integrar cualquier función polinomial, como se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Integración de funciones polinomiales

a) $\int dx = \int 1\, dx$ — Se entiende que el integrando es uno.

$= x + C$ — Integrar.

b) $\int (x+2)\, dx = \int x\, dx + \int 2\, dx$

$= \dfrac{x^2}{2} + C_1 + 2x + C_2$ — Integrar.

$= \dfrac{x^2}{2} + 2x + C$ — $C = C_1 + C_2$.

La segunda línea en la solución suele omitirse.

c) $\int (3x^4 - 5x^2 + x)\, dx = 3\left(\dfrac{x^5}{5}\right) - 5\left(\dfrac{x^3}{3}\right) + \dfrac{x^2}{2} + C$ — Integrar.

$= \dfrac{3}{5}x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$ — Simplificar.

EJEMPLO 5 Reescribir antes de integrar

$\int \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(\dfrac{x}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ — Reescribir como dos fracciones.

$= \int (x^{1/2} + x^{-1/2})\, dx$ — Reescribir con exponentes fraccionarios.

$= \dfrac{x^{3/2}}{3/2} + \dfrac{x^{1/2}}{1/2} + C$ — Integrar.

$= \dfrac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$ — Simplificar.

$= \dfrac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + C$

AYUDA DE ESTUDIO Recordar que la respuesta puede verificarse por derivación.

NOTA Cuando se integren los cocientes, no debe integrarse numerador y denominador por separado. Esto es incorrecto tanto en la integración como en la derivación. Al respecto, obsérvese el ejemplo 5.

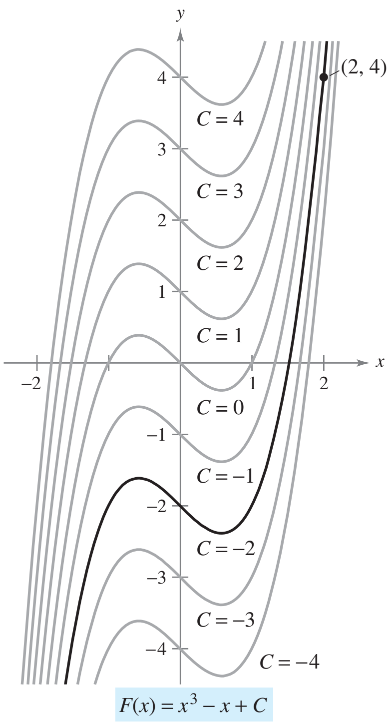
$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + C \quad \text{no es lo mismo que} \quad \frac{\int (x+1)\, dx}{\int \sqrt{x}\, dx} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + C_1}{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C_2}.$$

EJEMPLO 6 Reescribir antes de integrar

$\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) dx$ — Reescribir como un producto.

$= \int \sec x \tan x\, dx$ — Reescribir utilizando identidades trigonométricas.

$= \sec x + C$ — Integrar.



La solución particular que satisface la condición inicial $F(2) = 4$ es $F(x) = x^3 - x - 2$
Figura 4.2

Condiciones iniciales y soluciones particulares

Se ha visto que la ecuación $y = \int f(x)\,dx$ tiene muchas soluciones (cada una difiriendo de las otras en una constante). Eso significa que las gráficas de cualesquiera dos antiderivadas o primitivas de f son traslaciones verticales una de otra. Por ejemplo, la figura 4.2 muestra las gráficas de varias de las antiderivadas o primitivas de la forma

$$y = \int (3x^2 - 1)\,dx = x^3 - x + C \qquad \text{Solución general.}$$

para diversos valores enteros de C. Cada una de estas antiderivadas o primitivas es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1.$$

En muchas aplicaciones de la integración, se da suficiente información para determinar una **solución particular**. Para hacer esto, sólo se necesita conocer el valor de $y = F(x)$ para un valor de x. Esta información recibe el nombre de **condición inicial**. Por ejemplo, en la figura 4.2, sólo una de las curvas pasa por el punto (2, 4). Para encontrar esta curva, se utiliza la siguiente información.

$$F(x) = x^3 - x + C \qquad \text{Solución general.}$$
$$F(2) = 4 \qquad \text{Condición inicial.}$$

Utilizando la condición inicial en la solución general, es posible determinar que $F(2) = 8 - 2 + C = 4$, lo que implica que $C = -2$. De tal modo, se obtiene

$$F(x) = x^3 - x - 2. \qquad \text{Solución particular.}$$

EJEMPLO 7 Determinación de una solución particular

Encontrar la solución general de

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$$

y determinar la solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 0$.

Solución Para encontrar la solución general, se integra para obtener

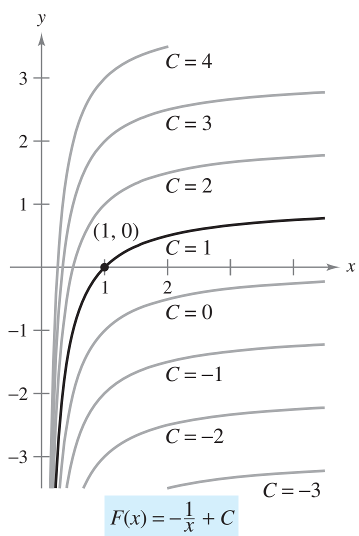
$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{x^2}\,dx && F(x) = \textstyle\int F'(x)dx. \\ &= \int x^{-2}\,dx && \text{Reescribir como una potencia.} \\ &= \frac{x^{-1}}{-1} + C && \text{Integrar.} \\ &= -\frac{1}{x} + C, \quad x > 0. && \text{Solución general.} \end{aligned}$$

Utilizando la condición inicial $F(1) = 0$, resolver para C de la manera siguiente.

$$F(1) = -\frac{1}{1} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

De tal modo, la solución particular, como se muestra en la figura 4.3, es

$$F(x) = -\frac{1}{x} + 1, \quad x > 0. \qquad \text{Solución particular.}$$



La solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 0$ es $F(x) = -(1/x) + 1, x > 0$
Figura 4.3

Hasta ahora, en esta sección se ha utilizado x como variable de integración. En las aplicaciones, es a menudo conveniente utilizar una variable distinta. Así, en el siguiente ejemplo, la variable de integración es el *tiempo* t.

EJEMPLO 8 Solución de un problema de movimiento vertical

Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies por segundo a partir de una altura inicial de 80 pies.

a) Encontrar la función posición que expresa la altura s en una función del tiempo t.
b) ¿Cuándo llegará la pelota al suelo?

Solución

a) Considerar que $t = 0$ representa el tiempo inicial. Las dos condiciones iniciales indicadas pueden escribirse de la siguiente manera.

$$s(0) = 80 \qquad \text{La altura inicial es 80 pies.}$$
$$s'(0) = 64 \qquad \text{La velocidad inicial es de 64 pies por segundo.}$$

Utilizando -32 pies/s² como la aceleración de la gravedad, se tiene

$$s''(t) = -32$$
$$s'(t) = \int s''(t)\,dt = \int -32\,dt = -32t + C_1.$$

Empleando la velocidad inicial, se obtiene $s'(0) = 64 = -32(0) + C_1$, lo cual implica que $C_1 = 64$. Después, integrando $s'(t)$, se obtiene

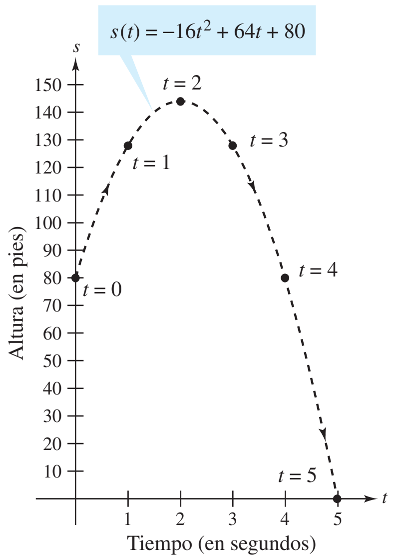
$$s(t) = \int s'(t)\,dt = \int (-32t + 64)\,dt = -16t^2 + 64t + C_2.$$

Al utilizar la altura inicial, se encuentra que

$$s(0) = 80 = -16(0^2) + 64(0) + C_2$$

lo que implica que $C_2 = 80$. De ese modo, la función posición es

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80. \qquad \text{Ver la figura 4.4.}$$



Altura de una pelota en el tiempo t
Figura 4.4

b) Utilizando la función posición que se encontró en el apartado *a*), es posible determinar el tiempo en que la pelota pega en el suelo al resolver la ecuación $s(t) = 0$.

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80 = 0$$
$$-16(t + 1)(t - 5) = 0$$
$$t = -1, 5$$

Como t debe ser positivo, se puede concluir que la pelota golpea el suelo 5 segundos después de haber sido lanzada.

NOTA En el ejemplo 8, obsérvese que la función posición tiene la forma

$$s(t) = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

donde $g = -32$, v_0 es la velocidad inicial y s_0 es la altura inicial, como se presentó en la sección 2.2.

El ejemplo 8 muestra cómo utilizar el cálculo para analizar problemas de movimiento vertical en los que la aceleración es determinada por una fuerza gravitacional. Se puede utilizar una estrategia similar para analizar otros problemas de movimiento rectilíneo (vertical u horizontal) en los que la aceleración (o desaceleración) es el resultado de alguna otra fuerza, como se verá en los ejercicios 81 a 89.

Antes de hacer los ejercicios, se debe reconocer que uno de los pasos más importantes en la integración es *reescribir el integrando* en una forma que corresponda con las reglas básicas de integración. Para ilustrar este punto, a continuación se presentan algunos ejemplos adicionales.

Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
$\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$	$2\int x^{-1/2}\,dx$	$2\left(\frac{x^{1/2}}{1/2}\right) + C$	$4x^{1/2} + C$
$\int (t^2 + 1)^2\,dt$	$\int (t^4 + 2t^2 + 1)\,dt$	$\frac{t^5}{5} + 2\left(\frac{t^3}{3}\right) + t + C$	$\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + C$
$\int \frac{x^3 + 3}{x^2}\,dx$	$\int (x + 3x^{-2})\,dx$	$\frac{x^2}{2} + 3\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C$	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} + C$
$\int \sqrt[3]{x}(x - 4)\,dx$	$\int (x^{4/3} - 4x^{1/3})\,dx$	$\frac{x^{7/3}}{7/3} - 4\left(\frac{x^{4/3}}{4/3}\right) + C$	$\frac{3}{7}x^{7/3} - 3x^{4/3}$

4.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, verificar el enunciado demostrando que la derivada del lado derecho es igual al integrando del lado izquierdo.

1. $\displaystyle\int \left(-\frac{6}{x^4}\right) dx = \frac{2}{x^3} + C$
2. $\displaystyle\int \left(8x^3 + \frac{1}{2x^2}\right) dx = 2x^4 - \frac{1}{2x} + C$
3. $\displaystyle\int (x - 4)(x + 4)\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 16x + C$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^{3/2}}\,dx = \frac{2(x^2 + 3)}{3\sqrt{x}} + C$

En los ejercicios 5 a 8, encontrar la solución general de la ecuación diferencial y verificar el resultado mediante derivación.

5. $\dfrac{dy}{dt} = 9t^2$
6. $\dfrac{dr}{d\theta} = \pi$
7. $\dfrac{dy}{dx} = x^{3/2}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = 2x^{-3}$

En los ejercicios 9 a 14, completar la tabla.

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
9.	$\int \sqrt[3]{x}\,dx$			
10.	$\int \frac{1}{4x^2}\,dx$			
11.	$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$			
12.	$\int x(x^3 + 1)\,dx$			
13.	$\int \frac{1}{2x^3}\,dx$			
14.	$\int \frac{1}{(3x)^2}\,dx$			

En los ejercicios 15 a 34, encontrar la integral indefinida y verificar el resultado mediante derivación.

15. $\int (x + 7)\,dx$
16. $\int (13 - x)\,dx$
17. $\int (2x - 3x^2)\,dx$
18. $\int (8x^3 - 9x^2 + 4)\,dx$
19. $\int (x^5 + 1)\,dx$
20. $\int (x^3 - 10x - 3)\,dx$
21. $\int (x^{3/2} + 2x + 1)\,dx$
22. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$
23. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$
24. $\int \left(\sqrt[4]{x^3} + 1\right) dx$
25. $\displaystyle\int \frac{1}{x^5}\,dx$
26. $\displaystyle\int \frac{1}{x^6}\,dx$
27. $\displaystyle\int \frac{x + 6}{\sqrt{x}}\,dx$
28. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x^4}\,dx$
29. $\int (x + 1)(3x - 2)\,dx$
30. $\int (2t^2 - 1)^2\,dt$
31. $\int y^2\sqrt{y}\,dy$
32. $\int (1 + 3t)t^2\,dt$
33. $\int dx$
34. $\int 14\,dt$

En los ejercicios 35 a 44, hallar la integral indefinida y verificar el resultado mediante derivación.

35. $\int (5\cos x + 4\,\mathrm{sen}\,x)\,dx$
36. $\int (t^2 - \cos t)\,dt$
37. $\int (1 - \csc t \cot t)\,dt$
38. $\int (\theta^2 + \sec^2\theta)\,d\theta$
39. $\int (\sec^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta$
40. $\int \sec y(\tan y - \sec y)\,dy$

41. $\int (\tan^2 y + 1)\, dy$

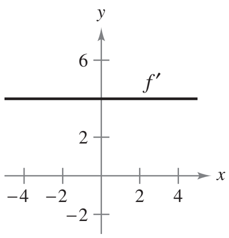
42. $\int (4x - \csc^2 x)\, dx$

43. $\int \dfrac{\cos x}{1 - \cos^2 x}\, dx$

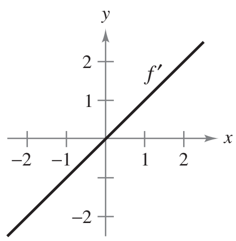
44. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

En los ejercicios 45 a 48, se presenta la gráfica de la derivada de una función. Dibujar las gráficas de *dos* funciones que tengan la derivada señalada. (Hay más de una respuesta correcta.)

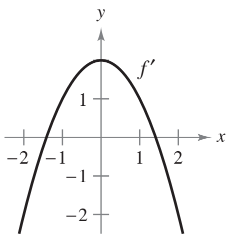
45.



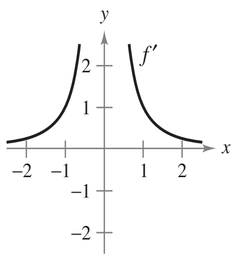
46.



47.

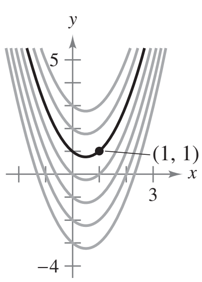


48.

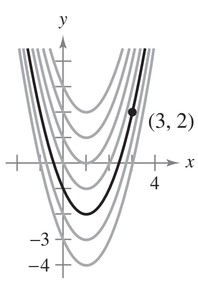


En los ejercicios 49 y 50, determinar la ecuación para *y*, dada la derivada y el punto indicado sobre la curva.

49. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 1$

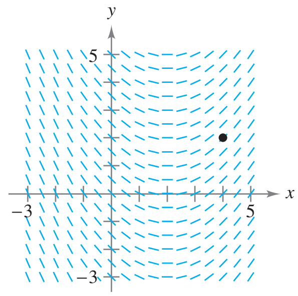


50. $\dfrac{dy}{dx} = 2(x - 1)$

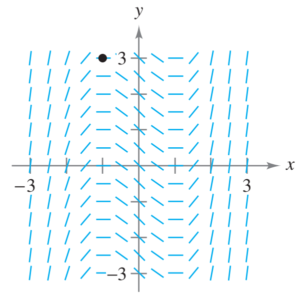


Campos de pendientes **En los ejercicios 51 a 54, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. Un *campo de pendientes* (*o campo de direcciones*) está compuesto por segmentos de recta con pendientes dadas por la ecuación diferencial. Estos segmentos de recta proporcionan una perspectiva visual de las pendientes de las soluciones de la ecuación diferencial. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pasa por el punto indicado. *b*) Utilizar la integración para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representar la solución. Comparar el resultado con los dibujos del apartado *a*).**

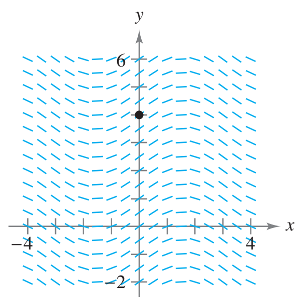
51. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x - 1, \quad (4, 2)$



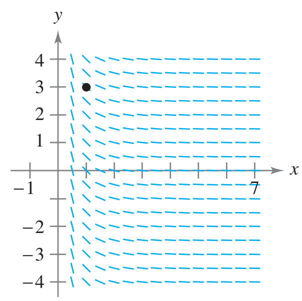
52. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 1, \quad (-1, 3)$



53. $\dfrac{dy}{dx} = \cos x, (0, 4)$



54. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}, x > 0, (1, 3)$



Campos de pendientes **En los ejercicios 55 y 56, *a*) utilizar una herramienta de graficación para representar un campo de pendientes para la ecuación diferencial, *b*) utilizar la integración y el punto indicado para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y *c*) hacer la gráfica de la solución y el campo de pendientes.**

55. $\dfrac{dy}{dx} = 2x, (-2, -2)$

56. $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{x}, (4, 12)$

En los ejercicios 57 a 64, resolver la ecuación diferencial.

57. $f'(x) = 6x, f(0) = 8$

58. $g'(x) = 6x^2, g(0) = -1$

59. $h'(t) = 8t^3 + 5, h(1) = -4$

60. $f'(s) = 10s - 12s^3, f(3) = 2$

61. $f''(x) = 2,\ f'(2) = 5,\ f(2) = 10$

62. $f''(x) = x^2,\ f'(0) = 8,\ f(0) = 4$

63. $f''(x) = x^{-3/2},\ f'(4) = 2,\ f(0) = 0$

64. $f''(x) = \operatorname{sen} x,\ f'(0) = 1,\ f(0) = 6$

65. ***Crecimiento de árboles*** Un vivero de plantas verdes suele vender cierto arbusto después de 6 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 6 años es, aproximadamente, $dh/dt = 1.5t + 5$, donde t es el tiempo en años y h es la altura en centímetros. Las plantas de semillero miden 12 centímetros de altura cuando se plantan ($t = 0$).

a) Determinar la altura después de t años.

b) ¿Qué altura tienen los arbustos cuando se venden?

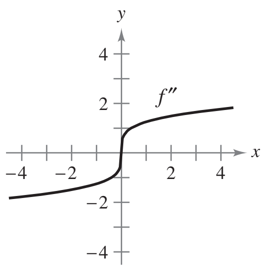
66. ***Crecimiento de población*** La tasa de crecimiento dP/dt de una población de bacterias es proporcional a la raíz cuadrada de t, donde P es el tamaño de la población y t es el tiempo en días ($0 \le t \le 10$). Esto es, $dP/dt = k\sqrt{t}$. El tamaño inicial de la población es igual a 500. Después de un día la población ha crecido hasta 600. Estimar el tamaño de la población después de 7 días.

Desarrollo de conceptos

67. ¿Cuál es la diferencia, si existe, entre encontrar la antiderivada de $f(x)$ y evaluar la integral $\int f(x)\,dx$?

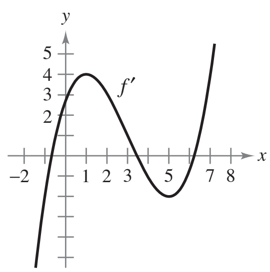
68. Considerar $f(x) = \tan^2 x$ y $g(x) = \sec^2 x$. ¿Qué se nota acerca de las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$? ¿Qué se puede concluir acerca de la relación entre $f(x)$ y $g(x)$?

69. Las gráficas de f y f' pasan a través del origen. Usar la gráfica de f'' mostrada en la figura para bosquejar la gráfica de f y f'.



Para discusión

70. Usar la gráfica de f' que se muestra en la figura para responder lo siguiente, dado que $f(0) = -4$.



a) Aproximar la pendiente de f en $x = 4$. Explicar.

b) ¿Es posible que $f(2) = -1$? Explicar.

c) ¿Es $f(5) - f(4) > 0$? Explicar.

d) Aproximar el valor de x donde f es máxima. Explicar.

e) Aproximar cualquier intervalo en el que la gráfica de f es cóncava hacia arriba y cualquier intervalo en el cual es cóncava hacia abajo. Aproximar la coordenada x a cualquier punto de inflexión.

f) Aproximar la coordenada x del mínimo de $f''(x)$.

g) Dibujar una gráfica aproximada de f.

Movimiento vertical **En los ejercicios 71 a 74, utilizar $a(t) = -32$ pies/s² como la aceleración debida a la gravedad. (Ignorar la resistencia al aire.)**

71. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde una altura de 6 pies con una velocidad inicial de 60 pies por segundo. ¿Qué altura alcanzará la pelota?

72. Mostrar que la altura a la que llega un objeto lanzado hacia arriba desde un punto s_0 pies a una velocidad inicial de v_0 por segundo está dada por la función

$$f(t) = -16t^2 + v_0 t + s_0.$$

73. ¿Con qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde el nivel del suelo) para alcanzar la parte superior del monumento a Washington (cerca de 550 pies)?

74. Un globo aerostático, que asciende verticalmente con una velocidad de 16 pies por segundo, deja caer una bolsa de arena en el instante en el que está a 64 pies sobre el suelo.

a) ¿En cuántos segundos llegará la bolsa al suelo?

b) ¿A qué velocidad hará contacto con el suelo?

Movimiento vertical **En los ejercicios 75 a 78, emplear $a(t) = -9.8$ m/s² como aceleración de la gravedad. (Ignorar la resistencia al aire.)**

75. Mostrar que la altura sobre el suelo de un objeto que se lanza hacia arriba desde un punto s_0 metros sobre el suelo a una velocidad inicial de v_0 metros por segundo está dada por la función

$$f(t) = -4.9t^2 + v_0 t + s_0.$$

76. El Gran Cañón tiene una profundidad de 1 800 metros en su punto más profundo. Se deja caer una roca desde el borde sobre ese punto. Escribir la altura de la roca como una función del tiempo t en segundos. ¿Cuánto tardará la roca en llegar al suelo del cañón?

77. Una pelota de beisbol es lanzada hacia arriba desde una altura de 2 metros con una velocidad inicial de 10 metros por segundo. Determinar su altura máxima.

78. ¿A qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde una altura de 2 metros) para que alcance una altura máxima de 200 metros?

79. ***Gravedad lunar*** Sobre la Luna, la aceleración de la gravedad es de -1.6 m/s². En la Luna se deja caer una piedra desde un peñasco y golpea la superficie de esta misma 20 segundos después. ¿Desde qué altura cayó? ¿Cuál era su velocidad en el momento del impacto?

80. ***Velocidad de escape*** La velocidad mínima que se requiere para que un objeto escape de su atracción gravitatoria se obtiene a partir de la solución de la ecuación

$$\int v\,dv = -GM\int \frac{1}{y^2}\,dy$$

donde v es la velocidad del objeto lanzado desde la Tierra, y es la distancia desde el centro terrestre, G es la constante de la gravitación y M es la masa de la Tierra. Demostrar que v y y están relacionados por la ecuación

$$v^2 = v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)$$

donde v_0 es la velocidad inicial del objeto y R es el radio terrestre.

Movimiento rectilíneo **En los ejercicios 81 a 84, considerar una partícula que se mueve a lo largo del eje x, donde $x(t)$ es la posición de la partícula en el tiempo t, $x'(t)$ su velocidad y $x''(t)$ su aceleración.**

81. $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 2, \quad 0 \leq t \leq 5$

a) Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula.

b) Encontrar los intervalos abiertos de t en los cuales la partícula se mueve hacia la derecha.

c) Encontrar la velocidad de la partícula cuando la aceleración es 0.

82. Repetir el ejercicio 81 para la función posición

$x(t) = (t - 1)(t - 3)^2, \quad 0 \leq t \leq 5$

83. Una partícula se mueve a lo largo del eje x a una velocidad de $v(t) = 1/\sqrt{t}$, $t > 0$. En el tiempo $t = 1$, su posición es $x = 4$. Encontrar las funciones posición y la aceleración de la partícula.

84. Una partícula, inicialmente en reposo, se mueve a lo largo del eje x de manera que su aceleración en el tiempo $t > 0$ está dada por $a(t) = \cos t$. En el tiempo $t = 0$, su posición es $x = 3$.

a) Determinar las funciones velocidad y la posición de la partícula.

b) Encontrar los valores de t para los cuales la partícula está en reposo.

85. ***Aceleración*** El fabricante de un automóvil indica en su publicidad que el vehículo tarda 13 segundos en acelerar desde 25 kilómetros por hora hasta 80 kilómetros por hora. Suponiendo aceleración constante, calcular lo siguiente.

a) La aceleración en m/s^2.

b) La distancia que recorre el automóvil durante los 13 segundos.

86. ***Desaceleración*** Un automóvil que viaja a 45 millas por hora recorre 132 pies, a desaceleración constante, luego de que se aplican los frenos para detenerlo.

a) ¿Qué distancia recorre el automóvil cuando su velocidad se reduce a 30 millas por hora?

b) ¿Qué distancia recorre el automóvil cuando su velocidad se reduce a 15 millas por hora?

c) Dibujar la recta de números reales desde 0 hasta 132 y hacer la gráfica de los puntos que se encontraron en los apartados *a*) y *b*). ¿Qué se puede concluir?

87. ***Aceleración*** En el instante en que la luz de un semáforo se pone en verde, un automóvil que ha estado esperando en un crucero empieza a moverse con una aceleración constante de 6 pies/s^2. En el mismo instante, un camión que viaja a una velocidad constante de 30 pies por segundo rebasa al automóvil.

a) ¿A qué distancia del punto de inicio el automóvil rebasará al camión?

b) ¿A qué velocidad circulará el automóvil cuando rebase al camión?

88. ***Aceleración*** Suponer que un avión totalmente cargado que parte desde el reposo tiene una aceleración constante mientras se mueve por la pista. El avión requiere 0.7 millas de pista y una velocidad de 160 millas por hora para despegar. ¿Cuál es la aceleración del avión?

89. ***Separación de aviones*** Dos aviones están en un patrón de aterrizaje de línea recta y, de acuerdo con las regulaciones de la FAA, debe mantener por lo menos una separación de 3 millas. El avión A está a 10 millas de su descenso y gradualmente reduce su velocidad desde 150 millas por hora hasta la velocidad de aterrizaje de 100 millas por hora. El avión B se encuentra a 17 millas del descenso y reduce su velocidad de manera gradual desde 250 millas por hora hasta una velocidad de aterrizaje de 115 millas por hora.

a) Asumiendo que la desaceleración de cada avión es constante, determinar las condiciones de la posición s_A y s_B para el avión A y el avión B. Dejar que $t = 0$ represente los tiempos en los que los aviones están a 10 y 17 millas del aeropuerto.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar las funciones de la posición.

c) Encontrar una fórmula para la magnitud de la distancia d entre los dos aviones como una función de t. Utilizar una herramienta de graficación para representar d. ¿Es $d < 3$ durante algún momento previo al aterrizaje del avión A? Si es así, determinar ese tiempo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 90 a 95, determinar si el enunciado es falso o verdadero. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

90. Cada antiderivada o primitiva de una función polinomial de n grados es una función polinomial de grado $(n + 1)$.

91. Si $p(x)$ es una función polinomial, entonces p tiene exactamente una antiderivada o primitiva cuya gráfica contiene al origen.

92. Si $F(x)$ y $G(x)$ son antiderivadas o primitivas de $f(x)$, entonces $F(x) = G(x) + C$.

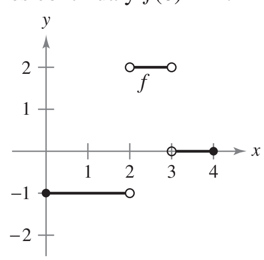
93. Si $f'(x) = g(x)$ entonces $\int g(x)\,dx = f(x) + C$.

94. $\int f(x)g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \int g(x)\,dx$.

95. La antiderivada o primitiva de $f(x)$ es única.

96. Encontrar una función f tal que la gráfica de ésta tenga una tangente horizontal en $(2, 0)$ y $f''(x) = 2x$.

97. Se muestra la gráfica de f'. Dibujar la gráfica de f dado que f es continua y $f(0) = 1$.



98. Si $f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 2 \\ 3x, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$, f es continua y $f(1) = 3$, determinar f. ¿Es f diferenciable en $x = 2$?

99. Sean $s(x)$ y $c(x)$ dos funciones que satisfacen $s'(x) = c(x)$ y $c'(x) = -s(x)$ para todo x. Si $s(0) = 0$ y $c(0) = 1$, demostrar que $[s(x)]^2 + [c(x)]^2 = 1$.

Preparación del examen Putnam

100. Suponer que f y g son funciones no constantes, derivables y de valores reales en R. Además, suponer que para cada par de números reales x y y, $f(x + y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$ y $g(x + y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$. Si $f'(0) = 0$, probar que $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ para todo x.

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.

4.2 Área

- **Emplear la notación sigma para escribir y calcular una suma.**
- **Entender el concepto de área.**
- **Aproximar el área de una región plana.**
- **Determinar el área de una región plana usando límites.**

Notación sigma

En la sección anterior, se estudió la antiderivación. En ésta se considerará en forma adicional un problema que se presentó en la sección 1.1: el de encontrar el área de una región en el plano. A primera vista, estas dos ideas parecen no relacionarse, aunque se descubrirá en la sección 4.4 que se relacionan de manera estrecha por medio de un teorema muy importante conocido como el teorema fundamental del cálculo.

Esta sección se inicia introduciendo una notación concisa para sumas. Esta notación recibe el nombre de **notación sigma** debido a que utiliza la letra griega mayúscula sigma, Σ.

NOTACIÓN SIGMA

La suma de n términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se escribe como

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

donde i es el **índice de suma**, a_i es el ***i*-ésimo término** de la suma y los **límites superior e inferior de la suma** son n y 1.

NOTA Los límites superior e inferior de la suma han de ser constantes respecto al índice de suma. Sin embargo, el límite inferior no tiene por qué ser 1. Cualquier entero menor o igual al límite superior es legítimo.

EJEMPLO 1 Ejemplos con la notación sigma

a) $\sum_{i=1}^{6} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

b) $\sum_{i=0}^{5} (i + 1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

c) $\sum_{j=3}^{7} j^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$

d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(k^2 + 1) = \frac{1}{n}(1^2 + 1) + \frac{1}{n}(2^2 + 1) + \cdots + \frac{1}{n}(n^2 + 1)$

e) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$

En los apartados *a*) y *b*), obsérvese que la misma suma puede representarse de maneras diferentes utilizando la notación sigma.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para una interpretación geométrica de las fórmulas de suma, ver el artículo "Looking at $\sum_{k=1}^{n} k$ y $\sum_{k=1}^{n} k^2$ Geometrically" de Eric Hegblom en *Mathematics Teacher*.

Aunque puede utilizarse cualquier variable como índice de suma, suele preferirse i, j y k. Nótese en el ejemplo 1 que el índice de suma no aparece en los términos de la suma desarrollada.

LA SUMA DE LOS PRIMEROS CIEN ENTEROS

El maestro de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) pidió a sus alumnos que sumaran todos los enteros desde 1 hasta 100. Cuando Gauss regresó con la respuesta correcta muy poco tiempo después, el maestro no pudo evitar mirarle atónito. Lo siguiente fue lo que hizo Gauss:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 \end{array}$$

$$\frac{100 \times 101}{2} = 5\,050$$

Esto se generaliza por medio del teorema 4.2, donde

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100(101)}{2} = 5\,050.$$

Las siguientes propiedades de la suma empleando la notación sigma se deducen de las propiedades asociativa y conmutativa de la suma y de la propiedad distributiva de la adición sobre la multiplicación. (En la primera propiedad, k es una constante.)

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

El siguiente teorema lista algunas fórmulas útiles para la suma de potencias. Una demostración de este teorema se incluye en el apéndice A.

TEOREMA 4.2 FÓRMULAS DE SUMA EMPLEANDO LA NOTACIÓN SIGMA

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = cn$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

EJEMPLO 2 Evaluación de una suma

Hallar $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2}$ para $n = 10$, 100, 1 000 y 10 000.

Solución Al aplicar el teorema 4.2, es posible escribir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i+1) && \text{Factor constante } 1/n^2 \text{ fuera de la suma.} \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) && \text{Escribir como dos sumas.} \\ &= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + n\right] && \text{Aplicar el teorema 4.2.} \\ &= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n^2+3n}{2}\right] && \text{Simplificar.} \\ &= \frac{n+3}{2n}. && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

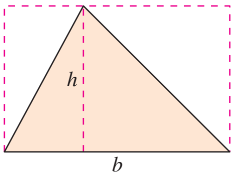
n	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} = \frac{n+3}{2n}$
10	0.65000
100	0.51500
1 000	0.50150
10 000	0.50015

Después de esto se puede encontrar la suma sustituyendo los valores apropiados de n, como se muestra en la tabla de la izquierda.

En la tabla, las sumas parecen tender a un límite conforme n aumenta. Aunque la discusión de límites en el infinito en la sección 3.5 se aplica a una variable de x, donde x puede ser cualquier número real, muchos de los resultados siguen siendo válidos cuando una variable n se restringe a valores enteros positivos. Así, para encontrar el límite de $(n+3)/2n$ cuando n tiende a infinito, se puede escribir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n} + \frac{3}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2n}\right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

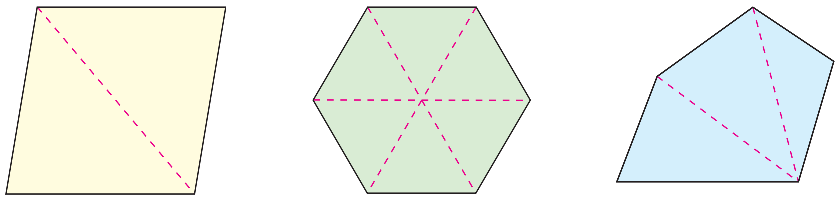
Área



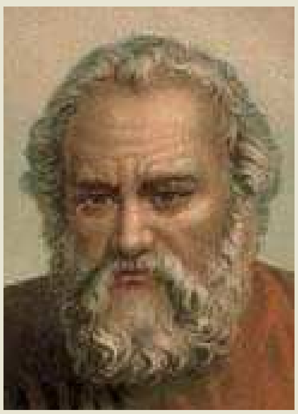
Triángulo: $A = \frac{1}{2}bh$
Figura 4.5

En la geometría euclideana, el tipo más simple de región plana es un rectángulo. Aunque la gente a menudo afirma que la *fórmula* para el área de un rectángulo es $A = bh$, resulta más apropiado decir que ésta es la *definición* del **área de un rectángulo**.

De esta definición, se pueden deducir fórmulas para áreas de muchas otras regiones planas. Por ejemplo, para determinar el área de un triángulo, se puede formar un rectángulo cuya área es dos veces la del triángulo, como se indica en la figura 4.5. Una vez que se sabe cómo encontrar el área de un triángulo, se puede determinar el área de cualquier polígono subdividiéndolo en regiones triangulares, como se ilustra en la figura 4.6.



Paralelogramo Hexágono Polígono
Figura 4.6



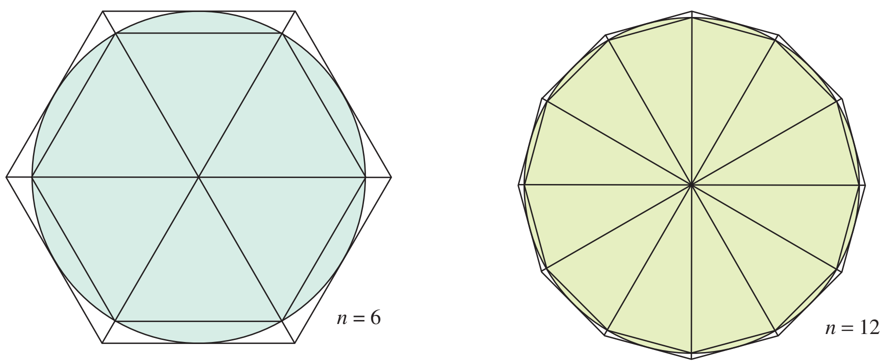
Mary Evans Picture Library

ARQUÍMEDES (287-212 A.C.)

Arquímedes utilizó el método de exhaución para deducir fórmulas para las áreas de elipses, segmentos parabólicos y sectores de una espiral. Se le considera como el más grande matemático aplicado de la antigüedad.

Hallar las áreas de regiones diferentes a las de los polígonos es más difícil. Los antiguos griegos fueron capaces de determinar fórmulas para las áreas de algunas regiones generales (principalmente aquellas delimitadas por cónicas) mediante el método de *exhaución*. La descripción más clara de este método la hizo Arquímedes. En esencia, el método es un proceso de límite en el que el área se encierra entre dos polígonos (uno inscrito en la región y otro circunscrito alrededor de la región).

Por ejemplo, en la figura 4.7 el área de una región circular se aproxima mediante un polígono inscrito de n lados y un polígono circunscrito de n lados. Para cada valor de n el área del polígono inscrito es menor que el área del círculo, y el área del polígono circunscrito es mayor que el área del círculo. Además, a medida que n aumenta, las áreas de ambos polígonos van siendo cada vez mejores aproximaciones al área del círculo.



El método de exhaución para determinar el área de una región circular
Figura 4.7

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para un desarrollo alternativo de la fórmula para el área de un círculo, ver el artículo “Proof Whitout Words: Area of a Disk is πR^2” de Russell Jay Hendel en *Mathematics Magazine*.

Un proceso similar al que usó Arquímedes para determinar el área de una región plana se usa en los ejemplos restantes en esta sección.

El área de una región plana

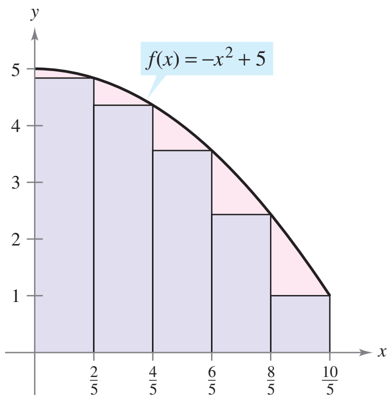
Recordar de la sección 1.1 que los orígenes del cálculo están relacionados con dos problemas clásicos: el problema de la recta tangente y el problema del área. En el ejemplo 3 se inicia la investigación del problema del área.

EJEMPLO 3 Aproximación del área de una región plana

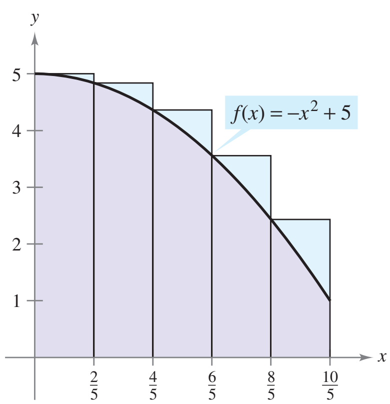
Emplear los cinco rectángulos de la figura 4.8*a*) y *b*) para determinar *dos* aproximaciones del área de la región que se encuentra entre la gráfica de

$$f(x) = -x^2 + 5$$

y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.



***a*)** El área de una región parabólica es mayor que el área de los rectángulos



***b*)** El área de la región parabólica es menor que el área de los rectángulos

Figura 4.8

Solución

***a*)** Los puntos terminales de la derecha de los cinco intervalos son $\frac{2}{5}i$, donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. El ancho de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$, y la altura de cada rectángulo se puede obtener al hallar f en el punto terminal derecho de cada intervalo.

$$\left[0, \frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right], \left[\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right], \left[\frac{8}{5}, \frac{10}{5}\right]$$

Evaluar f en los puntos terminales de la derecha de estos intervalos.

La suma de las áreas de los cinco rectángulos es

$$\sum_{i=1}^{5} \overbrace{f\left(\frac{2i}{5}\right)}^{\text{Altura}} \overbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}^{\text{Ancho}} = \sum_{i=1}^{5} \left[-\left(\frac{2i}{5}\right)^2 + 5\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{162}{25} = 6.48.$$

Como cada uno de los cinco rectángulos se encuentra dentro de la región parabólica, se concluye que el área de la región parabólica es mayor que 6.48.

***b*)** Los puntos terminales izquierdos de los cinco intervalos son $\frac{2}{5}(i - 1)$, donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. La anchura de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$ y la altura de cada uno puede obtenerse evaluando f en el punto terminal izquierdo de cada intervalo. Por tanto, la suma es

$$\sum_{i=1}^{5} \overbrace{f\left(\frac{2i-2}{5}\right)}^{\text{Altura}} \overbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}^{\text{Ancho}} = \sum_{i=1}^{5} \left[-\left(\frac{2i-2}{5}\right)^2 + 5\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{202}{25} = 8.08.$$

Debido a que la región parabólica se encuentra contenida en la unión de las cinco regiones rectangulares, es posible concluir que el área de la región parabólica es menor que 8.08.

Combinando los resultados de los apartados *a*) y *b*), es posible concluir que

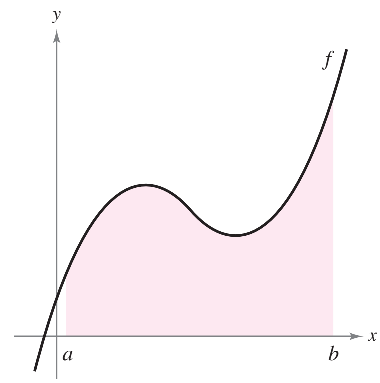
$$6.48 < (\text{Área de la región}) < 8.08.$$

NOTA Al incrementar el número de rectángulos utilizados en el ejemplo 3, se pueden obtener aproximaciones más y más cercanas al área de la región. Por ejemplo, al utilizar 25 rectángulos, cada uno de ancho $\frac{2}{25}$, puede concluirse que

$$7.17 < (\text{Área de la región}) < 7.49.$$

Sumas superior e inferior

El procedimiento utilizado en el ejemplo 3 puede generalizarse de la manera siguiente. Considerar una región plana limitada en su parte superior por la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, como se muestra en la figura 4.9. La región está limitada en su parte inferior por el eje x y las fronteras izquierda y derecha por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.



La región bajo una curva
Figura 4.9

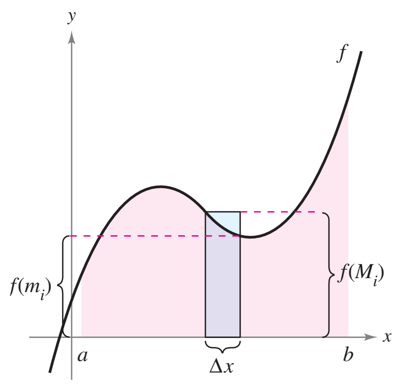
Para aproximar el área de la región, se empieza subdividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = (b - a)/n$ como se muestra en la figura 4.10. Los puntos terminales de los intervalos son los siguientes.

$$\overbrace{a + 0(\Delta x)}^{a = x_0} < \overbrace{a + 1(\Delta x)}^{x_1} < \overbrace{a + 2(\Delta x)}^{x_2} < \cdot \cdot \cdot < \overbrace{a + n(\Delta x)}^{x_n = b}$$

Como f es continua, el teorema del valor extremo garantiza la existencia de un valor mínimo y uno máximo de $f(x)$ en *cada* subintervalo.

$f(m_i)$ = valor mínimo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo

$f(M_i)$ = valor máximo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo



El intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos de ancho $\Delta x = \dfrac{b - a}{n}$
Figura 4.10

A continuación, se define un **rectángulo inscrito** que se encuentra *dentro* de la i-ésima subregión y un **rectángulo circunscrito** que se extiende *fuera* de la i-ésima región. La altura del i-ésimo rectángulo inscrito es $f(m_i)$ y la altura del i-ésimo rectángulo circunscrito es $f(M_i)$. Para *cada* i, el área del rectángulo inscrito es menor que o igual que el área del rectángulo circunscrito.

$$\begin{pmatrix}\text{Área del rectángulo}\\ \text{inscrito}\end{pmatrix} = f(m_i)\,\Delta x \le f(M_i)\,\Delta x = \begin{pmatrix}\text{Área del rectángulo}\\ \text{circunscrito}\end{pmatrix}$$

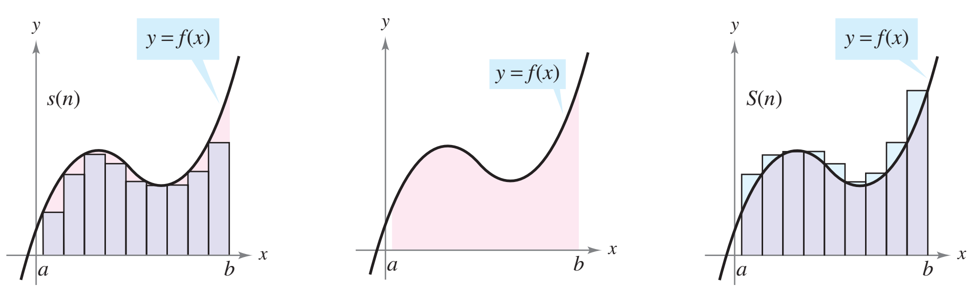
La suma de las áreas de los rectángulos inscritos recibe el nombre de **suma inferior**, y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos se conoce como **suma superior**.

$$\text{Suma inferior} = s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x \qquad \text{Área de rectángulos inscritos.}$$

$$\text{Suma superior} = S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x \qquad \text{Área de rectángulos circunscritos.}$$

En la figura 4.11, se puede observar que la suma inferior $s(n)$ es menor o igual que la suma superior $S(n)$. Además, el área real de la región se encuentra entre estas dos sumas.

$$s(n) \le (\text{Área de región}) \le S(n)$$



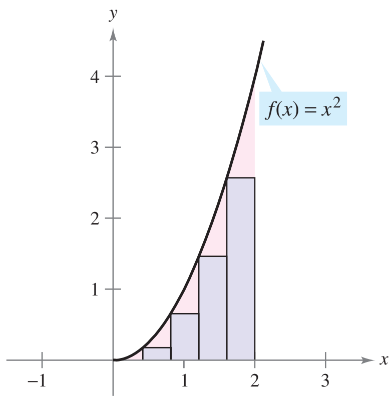
El área de los rectángulos inscritos es menor que el área de la región

Área de la región

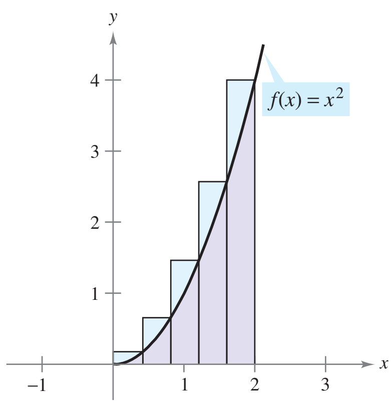
El área de los rectángulos circunscritos es mayor que el área de la región

Figura 4.11

EJEMPLO 4 Hallar las sumas superior e inferior de una región



Rectángulos inscritos



Rectángulos circunscritos
Figura 4.12

Determinar la suma superior e inferior de la región delimitada por la gráfica de $f(x) = x^2$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.

Solución Para empezar, se divide el intervalo [0, 2] en n subintervalos, cada uno de ancho

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}.$$

La figura 4.12 muestra los puntos terminales de los subintervalos y varios de los rectángulos inscritos y circunscritos. Como f es creciente en el intervalo [0, 2], el valor mínimo en cada subintervalo ocurre en el punto terminal izquierdo, y el valor máximo ocurre en el punto terminal derecho.

Puntos terminales izquierdos	*Puntos terminales derechos*
$m_i = 0 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2(i-1)}{n}$	$M_i = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n}$

Utilizando los puntos terminales izquierdos, la suma inferior es

$$\begin{aligned}
s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} f\left[\frac{2(i-1)}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{2(i-1)}{n}\right]^2\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8}{n^3}\right)(i^2 - 2i + 1) \\
&= \frac{8}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{8}{n^3}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n\right\} \\
&= \frac{4}{3n^3}(2n^3 - 3n^2 + n) \\
&= \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}. \qquad \text{Suma inferior.}
\end{aligned}$$

Empleando los puntos terminales derechos, la suma superior es

$$\begin{aligned}
S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8}{n^3}\right) i^2 \\
&= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\
&= \frac{4}{3n^3}(2n^3 + 3n^2 + n) \\
&= \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}. \qquad \text{Suma superior.}
\end{aligned}$$

EXPLORACIÓN

Para la región dada en el ejemplo 4, calcular la suma inferior

$$s(n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

y la suma superior

$$S(n) = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

para $n = 10$ 100 y 1 000. Utilizar los resultados para determinar el área de la región.

El ejemplo 4 ilustra algunos aspectos importantes acerca de las sumas inferior y superior. Primero, advertir que para cualquier valor de n, la suma inferior es menor (o igual) que la suma superior.

$$s(n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} < \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} = S(n)$$

Segundo, la diferencia entre estas dos sumas disminuye cuando n aumenta. De hecho, si se toman los límites cuando $n \to \infty$, tanto en la suma superior como en la suma inferior se aproximan a $\frac{8}{3}$.

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$ Límite de la suma inferior.

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$ Límite de la suma superior.

El siguiente teorema muestra que la equivalencia de los límites (cuando $n \to \infty$) de las sumas superior e inferior no es una mera coincidencia. Este teorema es válido para toda función continua no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$. La demostración de este teorema es más adecuada para un curso de cálculo avanzado.

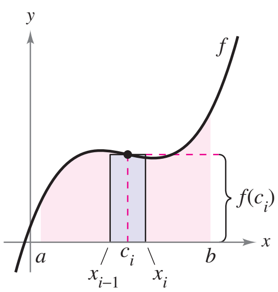
TEOREMA 4.3 LÍMITES DE LAS SUMAS SUPERIOR E INFERIOR

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. Los límites cuando $n \to \infty$ de las sumas inferior y superior existen y son iguales entre sí. Esto es

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s(n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} S(n)\end{aligned}$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $f(m_i)$ y $f(M_i)$ son los valores mínimo y máximo de f en el subintervalo.

Debido a que se alcanza el mismo límite tanto con el valor mínimo $f(m_i)$ como con el valor máximo $f(M_i)$, se sigue a partir del teorema del encaje o del emparedado (teorema 1.8) que la elección de x en el i-ésimo intervalo no afecta al límite. Esto significa que se está en libertad de elegir cualquier valor de *x arbitrario* en el i-ésimo subintervalo, como en la siguiente *definición del área de una región en el plano*.



El ancho del i-ésimo subintervalo es $\Delta x = x_i - x_{i-1}$

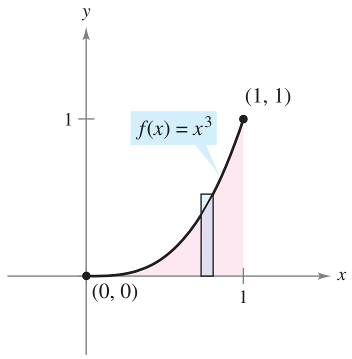
Figura 4.13

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL PLANO

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ (ver la figura 4.13).



El área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = 0$ y $x = 1$ es $\frac{1}{4}$
Figura 4.14

EJEMPLO 5 Hallar el área mediante la definición de límite

Encontrar el área de la región limitada por la gráfica $f(x) = x^3$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$, como se muestra en la figura 4.14.

Solución Se empieza notando que f es continua y no negativa en el intervalo $[0, 1]$. Después, se divide el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = 1/n$. De acuerdo con la definición de área, elegir cualquier valor de x en el i-ésimo subintervalo. En este ejemplo, los puntos terminales derechos $c_i = i/n$ resultan adecuados.

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{Puntos terminales derechos: } c_i = \frac{i}{n}.$$

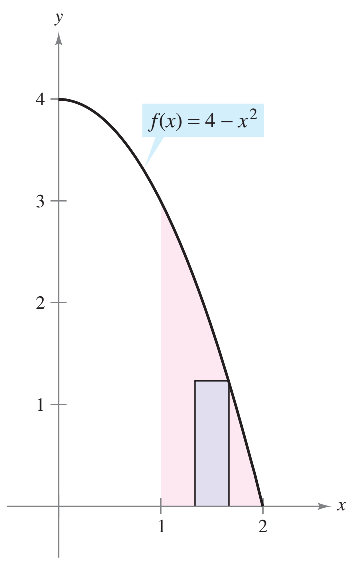
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

El área de la región es $\frac{1}{4}$.



El área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = 1$ y $x = 2$ es $\frac{5}{3}$
Figura 4.15

EJEMPLO 6 Hallar el área mediante la definición de límite

Determinar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$, el eje x y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$, como se indica en la figura 4.15.

Solución La función f es continua y no negativa en el intervalo $[1, 2]$, y de tal modo se empieza dividiendo el intervalo en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = 1/n$. Eligiendo el punto terminal derecho

$$c_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{i}{n} \qquad \text{Puntos terminales derechos.}$$

de cada subintervalo, se obtiene

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[4 - \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{2i}{n} - \frac{i^2}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 3 - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[3 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$

$$= 3 - 1 - \frac{1}{3}$$

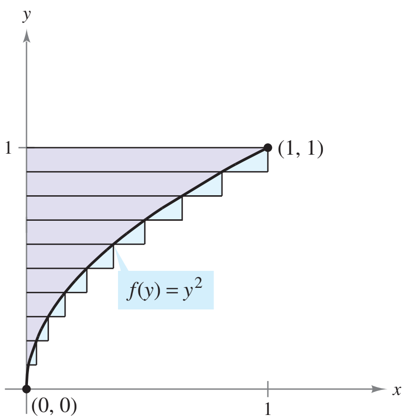
$$= \frac{5}{3}.$$

El área de la región es $\frac{5}{3}$.

El último ejemplo en esta sección considera una región limitada por el eje y (en vez del eje x).

EJEMPLO 7 Una región limitada por el eje y

Encontrar el área de la región limitada por la gráfica de $f(y) = y^2$ y el eje y para $0 \le y \le 1$, como se muestra en la figura 4.16.



El área de la región acotada por la gráfica de f, el eje y para $0 \le y \le 1$ es $\frac{1}{3}$
Figura 4.16

Solución Cuando f es una función continua y no negativa de y, puede seguirse utilizando el mismo procedimiento básico que se ilustró en los ejemplos 5 y 6. Se empieza dividiendo el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta y = 1/n$. Después utilizando los puntos terminales superiores $c_i = i/n$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta y &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{Puntos terminales superiores: } c_i = \frac{i}{n}.\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

El área de la región es $\frac{1}{3}$.

4.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, encontrar la suma. Usar la función de suma de la herramienta de graficación para verificar el resultado.

1. $\sum_{i=1}^{6} (3i + 2)$
2. $\sum_{k=5}^{8} k(k - 4)$
3. $\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k^2 + 1}$
4. $\sum_{j=4}^{7} \frac{2}{j}$
5. $\sum_{k=1}^{4} c$
6. $\sum_{i=1}^{4} [(i - 1)^2 + (i + 1)^3]$

En los ejercicios 7 a 14, utilizar la notación sigma para escribir la suma.

7. $\frac{1}{5(1)} + \frac{1}{5(2)} + \frac{1}{5(3)} + \cdots + \frac{1}{5(11)}$
8. $\frac{9}{1+1} + \frac{9}{1+2} + \frac{9}{1+3} + \cdots + \frac{9}{1+14}$
9. $\left[7\left(\frac{1}{6}\right) + 5\right] + \left[7\left(\frac{2}{6}\right) + 5\right] + \cdots + \left[7\left(\frac{6}{6}\right) + 5\right]$
10. $\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] + \left[1 - \left(\frac{2}{4}\right)^2\right] + \cdots + \left[1 - \left(\frac{4}{4}\right)^2\right]$
11. $\left[\left(\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{2}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left[\left(\frac{2n}{n}\right)^3 - \frac{2n}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right)$
12. $\left[1 - \left(\frac{2}{n} - 1\right)^2\right]\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left[1 - \left(\frac{2n}{n} - 1\right)^2\right]\left(\frac{2}{n}\right)$
13. $\left[2\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + \left[2\left(1 + \frac{3n}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right)$
14. $\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{0}{n}\right)^2} + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$

En los ejercicios 15 a 22, utilizar las propiedades de la notación sigma y el teorema 4.2 para calcular la suma. Utilizar la función de suma de la herramienta de graficación para verificar el resultado.

15. $\sum_{i=1}^{12} 7$
16. $\sum_{i=1}^{30} -18$
17. $\sum_{i=1}^{24} 4i$
18. $\sum_{i=1}^{16} (5i - 4)$
19. $\sum_{i=1}^{20} (i - 1)^2$
20. $\sum_{i=1}^{10} (i^2 - 1)$
21. $\sum_{i=1}^{15} i(i - 1)^2$
22. $\sum_{i=1}^{10} i(i^2 + 1)$

En los ejercicios 23 y 24, usar la función de suma de una herramienta de graficación para evaluar la suma. Después emplear las propiedades de la notación sigma y el teorema 4.2 para verificar la suma.

23. $\sum_{i=1}^{20} (i^2 + 3)$
24. $\sum_{i=1}^{15} (i^3 - 2i)$

25. Considerar la función $f(x) = 3x + 2$.

a) Estimar el área entre la gráfica de f y el eje x entre $x = 0$ y $x = 3$ usando seis rectángulos y puntos terminales derechos. Dibujar la gráfica y los rectángulos.

b) Repetir el apartado *a*) usando puntos terminales izquierdos.

26. Considerar la función $g(x) = x^2 + x - 4$.

a) Estimar el área entre la gráfica de g y el eje x entre $x = 2$ y $x = 4$, usando rectángulos y puntos terminales derechos. Bosquejar la gráfica y los rectángulos.

b) Repetir el apartado *a*) usando puntos terminales izquierdos.

En los ejercicios 27 a 32, usar los puntos terminales izquierdo y derecho y el número de rectángulos dado para encontrar dos aproximaciones del área de la región entre la gráfica de la función y el eje x sobre el intervalo dado.

27. $f(x) = 2x + 5,\ [0, 2]$, 4 rectángulos

28. $f(x) = 9 - x,\ [2, 4]$, 6 rectángulos

29. $g(x) = 2x^2 - x - 1,\ [2, 5]$, 6 rectángulos

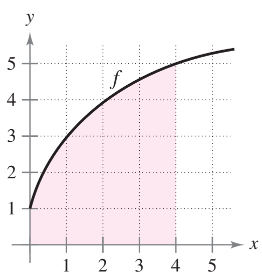
30. $g(x) = x^2 + 1,\ [1, 3]$, 8 rectángulos

31. $f(x) = \cos x,\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 4 rectángulos

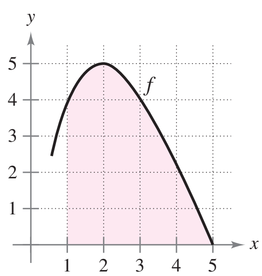
32. $g(x) = \operatorname{sen} x,\ [0, \pi]$, 6 rectángulos

En los ejercicios 33 a 36, delimitar el área de la región sombreada aproximando las sumas superior e inferior. Emplear rectángulos de ancho 1.

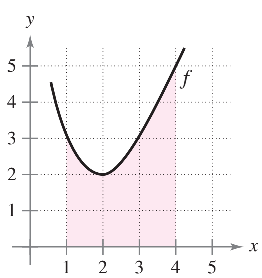
33.



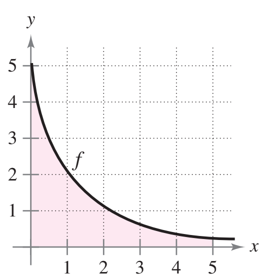
34.



35.



36.



En los ejercicios 37 a 40, encontrar el límite de $s(n)$ cuando $n \to \infty$.

37. $s(n) = \dfrac{81}{n^4}\left[\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

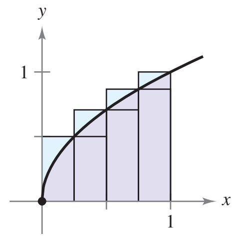
38. $s(n) = \dfrac{64}{n^3}\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

39. $s(n) = \dfrac{18}{n^2}\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

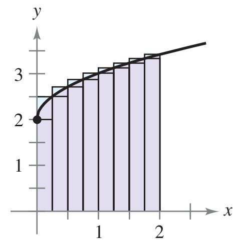
40. $s(n) = \dfrac{1}{n^2}\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

En los ejercicios 41 a 44, utilizar sumas superiores e inferiores para aproximar el área de la región empleando el número dado de subintervalos (de igual ancho).

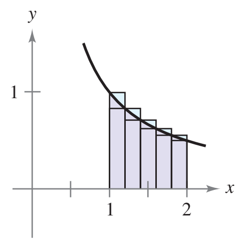
41. $y = \sqrt{x}$



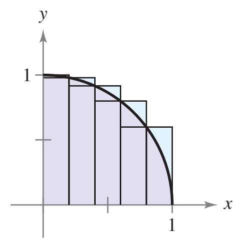
42. $y = \sqrt{x} + 2$



43. $y = \dfrac{1}{x}$



44. $y = \sqrt{1 - x^2}$



En los ejercicios 45 a 48, utilizar las fórmulas de suma con notación sigma para reescribir la expresión sin la notación sigma. Emplear el resultado para determinar la suma correspondiente a $n = 10$, 100, 1 000 y 10 000.

45. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{n^2}$

46. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{4j+3}{n^2}$

47. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6k(k-1)}{n^3}$

48. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2(i-1)}{n^4}$

En los ejercicios 49 a 54, encontrar una fórmula para la suma de los n términos. Emplear la fórmula para determinar el límite cuando $n \to \infty$.

49. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{24i}{n^2}$

50. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$

51. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3}(i-1)^2$

52. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$

53. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$

54. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}\right)$

55. ***Razonamiento numérico*** Considerar un triángulo de área 2 delimitado por las gráficas de $y = x$, $y = 0$ y $x = 2$.

a) Dibujar la región.

b) Dividir el intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos de igual ancho y demostrar que los puntos terminales son

$$0 < 1\left(\frac{2}{n}\right) < \cdots < (n-1)\left(\frac{2}{n}\right) < n\left(\frac{2}{n}\right).$$

c) Demostrar que $s(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[(i-1)\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$.

d) Demostrar que $S(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[i\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$.

e) Completar la tabla.

n	5	10	50	100
$s(n)$				
$S(n)$				

f) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} s(n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(n) = 2.$

56. ***Razonamiento numérico*** Considerar un trapezoide de área 4 delimitado por las gráficas de $y = x$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 3$.

a) Dibujar la región.

b) Dividir el intervalo $[1, 3]$ en n subintervalos de igual ancho y demostrar que los puntos terminales son

$$1 < 1 + 1\left(\frac{2}{n}\right) < \cdot \cdot \cdot < 1 + (n-1)\left(\frac{2}{n}\right) < 1 + n\left(\frac{2}{n}\right).$$

c) Demostrar que $s(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[1 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right).$

d) Demostrar que $S(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[1 + i\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right).$

e) Completar la tabla.

n	5	10	50	100
$s(n)$				
$S(n)$				

f) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} s(n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(n) = 4.$

En los ejercicios 57 a 66, utilizar el proceso de límite para encontrar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo indicado. Dibujar la región.

57. $y = -4x + 5, \quad [0, 1]$

58. $y = 3x - 2, \quad [2, 5]$

59. $y = x^2 + 2, \quad [0, 1]$

60. $y = x^2 + 1, \quad [0, 3]$

61. $y = 25 - x^2, \quad [1, 4]$

62. $y = 4 - x^2, \quad [-2, 2]$

63. $y = 27 - x^3, \quad [1, 3]$

64. $y = 2x - x^3, \quad [0, 1]$

65. $y = x^2 - x^3, \quad [-1, 1]$

66. $y = x^2 - x^3, \quad [-1, 0]$

En los ejercicios 67 a 72, emplear el proceso de límite para determinar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje *y* sobre el intervalo *y* indicado. Dibujar la región.

67. $f(y) = 4y, 0 \le y \le 2$

68. $g(y) = \frac{1}{2}y, 2 \le y \le 4$

69. $f(y) = y^2, 0 \le y \le 5$

70. $f(y) = 4y - y^2, 1 \le y \le 2$

71. $g(y) = 4y^2 - y^3, 1 \le y \le 3$

72. $h(y) = y^3 + 1, 1 \le y \le 2$

En los ejercicios 73 a 76, utilizar la *regla del punto medio*

$$\text{Área} \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x$$

con $n = 4$ para aproximar el área de la región limitada por la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo dado.

73. $f(x) = x^2 + 3, \quad [0, 2]$

74. $f(x) = x^2 + 4x, \quad [0, 4]$

75. $f(x) = \tan x, \quad \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

76. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Programación **Escribir un programa para una herramienta de graficación con el fin de aproximar áreas utilizando la regla del punto medio. Suponer que la función es positiva sobre el intervalo dado y que los subintervalos son de igual ancho. En los ejercicios 77 a 80, emplear el programa para aproximar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo indicado, y completar la tabla.**

n	4	8	12	16	20
Área aproximada					

77. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$

78. $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 1}, \quad [2, 6]$

79. $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi x}{8}\right), \quad [1, 3]$

80. $f(x) = \cos\sqrt{x}, \quad [0, 2]$

Desarrollo de conceptos

Aproximación **En los ejercicios 81 y 82, determinar cuál es el mejor valor que aproxima el área de la región entre el eje *x* y la gráfica de la función sobre el intervalo indicado. (Realizar la elección con base en un dibujo de la región y no efectuando cálculos.)**

81. $f(x) = 4 - x^2, \quad [0, 2]$

a) -2 *b*) 6 *c*) 10 *d*) 3 *e*) 8

82. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{4}, \quad [0, 4]$

a) 3 *b*) 1 *c*) -2 *d*) 8 *e*) 6

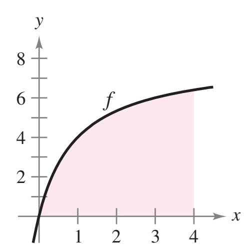
83. Con sus propias palabras y utilizando las figuras adecuadas, describa los métodos de las sumas superior e inferior en la aproximación del área de una región.

84. Proporcionar la definición del área de una región en el plano.

85. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la región delimitada por la gráfica de $f(x) = \dfrac{8x}{x+1}$, $x = 0$, $x = 4$ y $y = 0$, como se muestra en la figura.

a) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos que representan a la suma inferior cuando $n = 4$. Encontrar esta suma inferior.

b) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos que representan la suma superior cuando $n = 4$. Determinar esta suma superior.



c) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos cuyas alturas se determinan mediante los valores funcionales en el punto medio de cada subintervalo cuando $n = 4$. Determinar esta suma utilizando la regla del punto medio.

d) Verificar las siguientes fórmulas al aproximar el área de la región utilizando n subintervalos de igual ancho.

Suma inferior: $s(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left[(i-1)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$

Suma superior: $S(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left[(i)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$

Regla del punto medio: $M(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$

e) Utilizar una herramienta de graficación y las fórmulas del apartado *d*) para completar la tabla.

n	4	8	20	100	200
$s(n)$					
$S(n)$					
$M(n)$					

f) Explicar por qué $s(n)$ aumenta y $S(n)$ disminuye para valores recientes de n, como se muestra en la tabla en el apartado *e*).

Para discusión

86. Considerar una función $f(x)$ que se incrementa en el intervalo [1, 4]. El intervalo [1, 4] está dividido en 12 subintervalos.

a) ¿Cuáles son los puntos terminales izquierdos del primer y último subintervalos?

b) ¿Cuáles son los puntos terminales derechos de los primeros dos subintervalos?

c) ¿Cuándo se usan los puntos terminales derechos, se trazan los rectángulos arriba o abajo de las gráficas de $f(x)$? Usar una gráfica para explicar su respuesta.

d) ¿Qué se puede concluir acerca de las alturas de los rectángulos si una función es constante en el intervalo dado?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 87 y 88, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

87. La suma de los primeros n enteros positivos es $n(n+1)/2$.

88. Si f es continua y no negativa en $[a, b]$, entonces los límites cuando $n \to \infty$ de su suma inferior $s(n)$ y de su suma superior $S(n)$ existen ambos y son iguales.

89. ***Comentario*** Utilizar la figura para escribir un pequeño párrafo donde se explique por qué la fórmula $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ es válida para todos los enteros positivos n.

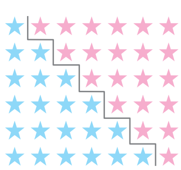


Figura para 89

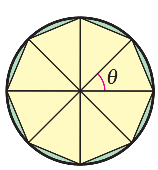


Figura para 90

90. ***Razonamiento gráfico*** Considerar un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio r. Unir los vértices del polígono al centro del círculo, formando n triángulos congruentes (ver la figura).

a) Determinar el ángulo central θ en términos de n.

b) Demostrar que el área de cada triángulo es $\frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen} \theta$.

c) Sea A_n la suma de las áreas de los n triángulos. Hallar $\lim_{n\to\infty} A_n$.

91. ***Modelado matemático*** La tabla lista las mediciones de un terreno delimitado por un río y dos caminos rectos que se unen en ángulo recto, donde x y y se miden en pies (ver la figura).

x	0	50	100	150	200	250	300
y	450	362	305	268	245	156	0

a) Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

b) Emplear una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

c) Recurrir al modelo del apartado *a*) para estimar el área del terreno.

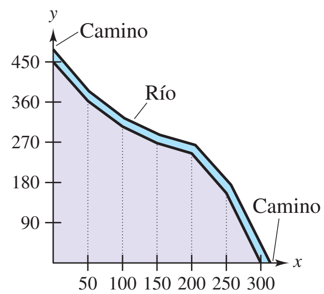


Figura para 91

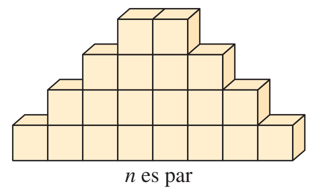


Figura para 92

92. ***Bloques de construcción*** Un niño coloca n bloques cúbicos de construcción en una hilera para formar la base de un diseño triangular (ver la figura). Cada hilera sucesiva contiene dos bloques menos que la hilera precedente. Encontrar una fórmula para el número de bloques utilizados en el diseño. (*Sugerencia:* El número de bloques constitutivos en el diseño depende de si n es par o impar.)

93. Demostrar cada fórmula mediante inducción matemática. (Quizá se necesite revisar el método de prueba por inducción en un texto de precálculo.)

a) $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$ *b*) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Preparación del examen Putnam

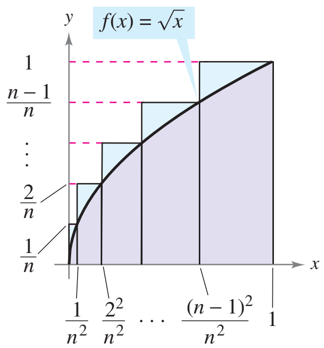
94. Un dardo, lanzado al azar, incide sobre un blanco cuadrado. Suponiendo que cualesquiera de las dos partes del blanco de igual área son igualmente probables de ser golpeadas por el dardo, encontrar la probabilidad de que el punto de incidencia sea más cercano al centro que a cualquier borde. Escribir la respuesta en la forma $(a\sqrt{b} + c)/d$, donde a, b, c y d son enteros positivos.

4.3 Sumas de Riemann e integrales definidas

- **Entender la definición de una suma de Riemann.**
- **Hallar una integral definida utilizando límites.**
- **Calcular una integral definida utilizando las propiedades de las integrales definidas.**

Sumas de Riemann

En la definición de área dada en la sección 4.2, las particiones tenían subintervalos de *igual ancho*. Esto se hizo sólo por conveniencia de cálculo. El siguiente ejemplo muestra que no es necesario tener subintervalos de igual ancho.



Los subintervalos no tienen anchos iguales
Figura 4.17

EJEMPLO 1 Una partición con subintervalos de anchos desiguales

Considerar la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ y el eje x para $0 \le x \le 1$, como se muestra en la figura 4.17. Hallar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

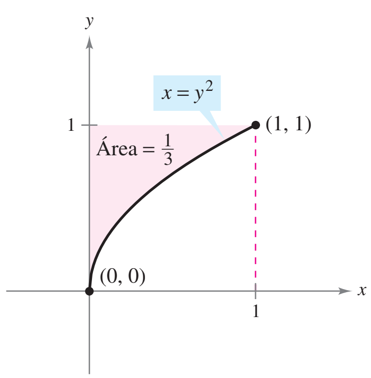
donde c_i es el punto terminal derecho de la partición dada por $c_i = i^2/n^2$ y Δx_i es el ancho del i-ésimo intervalo.

Solución El ancho del i-ésimo intervalo está dado por

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= \frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2}\\ &= \frac{i^2 - i^2 + 2i - 1}{n^2}\\ &= \frac{2i-1}{n^2}.\end{aligned}$$

De tal modo, el límite es

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i^2}{n^2}}\left(\frac{2i-1}{n^2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (2i^2 - i)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left[2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{n(n+1)}{2}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6n^3}\\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$



El área de la región acotada por la gráfica de $x = y^2$ y el eje y para $0 \le y \le 1$ es $\frac{1}{3}$
Figura 4.18

De acuerdo con el ejemplo 7 de la sección 4.2, se sabe que la región mostrada en la figura 4.18 tiene un área de $\frac{1}{3}$. Debido a que el cuadrado acotado por $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le 1$ tiene un área de 1, puede concluirse que el área de la región que se muestra en la figura 4.17 tiene un área de $\frac{2}{3}$. Esto concuerda con el límite que se encontró en el ejemplo 1, aun cuando en ese ejemplo se utilizó una partición con subintervalos de anchos desiguales. La razón por la que esta partición particular da el área apropiada es que cuando n crece, el *ancho del subintervalo más grande tiende a cero*. Ésta es la característica clave del desarrollo de las integrales definidas.

The Granger Collection

GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866)

Riemann, matemático alemán, realizó su trabajo más notable en las áreas de geometría no euclidiana, ecuaciones diferenciales y la teoría de los números. Fueron los resultados de Riemann en física y matemáticas los que conformaron la estructura en la que se basa la teoría de la relatividad general de Einstein.

En la sección precedente, el límite de una suma se utilizó para definir el área de una región en el plano. La determinación del área por este medio es sólo una de las *muchas* aplicaciones que involucran el límite de una suma. Un enfoque similar puede utilizarse para determinar cantidades tan diversas como longitudes de arco, valores medios, centroides, volúmenes, trabajo y áreas de superficies. La siguiente definición honra el nombre de Georg Friedrich Bernhard Riemann. Aunque la integral definida se había utilizado ya con anterioridad, fue Riemann quien generalizó el concepto para cubrir una categoría más amplia de funciones.

En la definición siguiente de una suma de Riemann, notar que la función f no tiene otra restricción que haber sido definida en el intervalo $[a, b]$. (En la sección precedente, la función f se supuso continua y no negativa debido a que se trabajó con un área bajo una curva.)

DEFINICIÓN DE UNA SUMA DE RIEMANN

Sea f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea Δ una partición de $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_{n-1} < x_n = b$$

donde Δx_i es el ancho del i-ésimo subintervalo. Si c_i es *cualquier* punto en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

se denomina una **suma de Riemann** de f para la partición Δ.

NOTA Las sumas vistas en la sección 4.2 son ejemplos de las sumas de Riemann, pero hay sumas de Riemann más grandes que las que se mostraron ahí. ■

El ancho del subintervalo más grande de la partición Δ es la **norma** de la partición y se denota por medio de $\|\Delta\|$. Si todos los intervalos tienen la misma anchura, la partición es **regular** y la norma se denota mediante

$$\|\Delta\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}. \qquad \text{Partición ordinaria.}$$

En una partición general, la norma se relaciona con el número de subintervalos en $[a, b]$ de la siguiente manera.

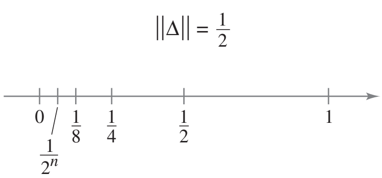
$$\frac{b-a}{\|\Delta\|} \le n \qquad \text{Partición general.}$$

De tal modo, el número de subintervalos en una partición tiende a infinito cuando la norma de la partición tiende a cero. Esto es $\|\Delta\| \to 0$ implica que $n \to \infty$.

La afirmación recíproca de este enunciado no es cierta. Por ejemplo, sea Δ_n la partición del intervalo $[0, 1]$ dado por

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}} < \cdot \cdot \cdot < \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1.$$

Como se muestra en la figura 4.19, para cualquier valor positivo de n, la norma de la partición Δ_n es $\frac{1}{2}$. De tal modo, como al dejar que n tienda a infinito no obliga a que $\|\Delta\|$ se aproxime a 0. En una partición regular, sin embargo, los enunciados $\|\Delta\| \to 0$ y $n \to \infty$ son equivalentes.



$n \to \infty$ no implica que $\|\Delta\| \to 0$

Figura 4.19

Integrales definidas

Para definir la integral definida, considerar el siguiente límite.

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = L$$

Afirmar que este límite existe, significa que hay un número real L, tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para toda partición de $\|\Delta\| < \delta$ se sigue que

$$\left| L - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \right| < \varepsilon$$

a pesar de cualquier elección de c_i en el i-ésimo subintervalo de cada partición de Δ.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para obtener más información acerca de la historia de la integral definida, ver el artículo "The Evolution of Integration", de A. Shenitzer y J. Steprāns en *The American Mathematical Monthly*.

DEFINICIÓN DE UNA INTEGRAL DEFINIDA

Si f se define en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el límite de las sumas de Riemann sobre las particiones Δ

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

existe (como se describió antes), entonces f es **integrable** en $[a, b]$ y el límite se denota por

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

El límite recibe el nombre de **integral definida** de f de a a b. El número a es el **límite inferior** de integración, y el número b es el **límite superior** de integración.

No es coincidencia que la notación para las integrales definidas sea similar a la que se utilizó para las integrales indefinidas. Se verá la razón en la siguiente sección cuando se introduzca el teorema fundamental del cálculo. Por ahora es importante observar que las integrales definidas y las integrales indefinidas son identidades diferentes. Una integral definida es un *número*, en tanto que una integral indefinida es una *familia de funciones*.

A pesar de que las sumas de Riemann estaban definidas por funciones con muy pocas restricciones, una condición suficiente para que una función f sea integrable en $[a, b]$ es que sea continua en $[a, b]$. Una demostración de este teorema está más allá del objetivo de este texto.

AYUDA DE ESTUDIO Posteriormente en este capítulo, el lector aprenderá métodos convenientes para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ para funciones continuas. Por ahora, se debe usar la definición de límite.

TEOREMA 4.4 LA CONTINUIDAD IMPLICA INTEGRABILIDAD

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. Es decir, $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

EXPLORACIÓN

Converso del teorema 4.4 ¿Es verdadero el converso del teorema 4.4 ? Esto es, si una función es integrable, ¿tiene que ser continua? Explicar el razonamiento y proporcionar ejemplos.

Describir las relaciones entre continuidad, derivabilidad e integrabilidad. ¿Cuál es la condición más fuerte? ¿Cuál es la más débil? ¿Qué condiciones implican otras condiciones?

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral definida como límite

Hallar la integral definida $\int_{-2}^{1} 2x\,dx$.

Solución La función $f(x) = 2x$ es integrable en el intervalo $[-2, 1]$ porque es continua en $[-2, 1]$. Además, la definición de integrabilidad implica que cualquier partición cuya norma tienda a 0 puede utilizarse para determinar el límite. Por conveniencia computacional, definir Δ, subdividiendo $[-2, 1]$ en n subintervalos de la misma anchura.

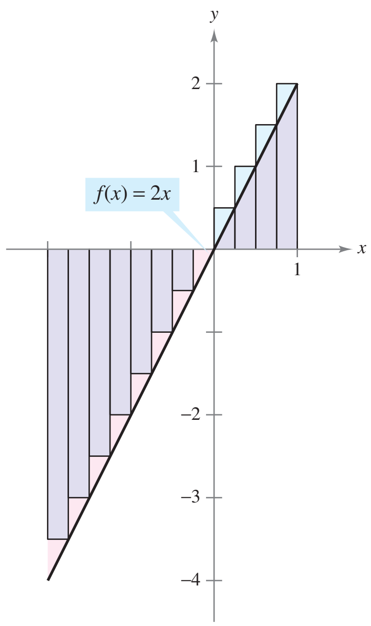
$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}.$$

Eligiendo c_i como el punto terminal derecho de cada subintervalo, se obtiene

$$c_i = a + i(\Delta x) = -2 + \frac{3i}{n}.$$

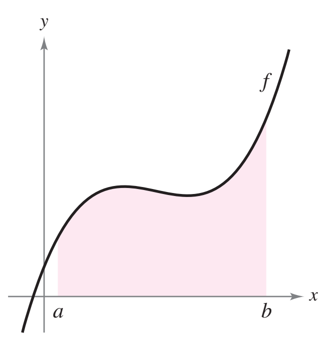
De este modo, la integral definida está dada por

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} 2x\,dx &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(-2 + \frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(-2 + \frac{3i}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} \left\{-2n + \frac{3}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(-12 + 9 + \frac{9}{n}\right) \\
&= -3.
\end{aligned}$$



Como la integral definida es negativa, no representa el área de la región
Figura 4.20

Debido a que la integral definida en el ejemplo 2 es negativa, ésta *no* representa el área de la región que se muestra en la figura 4.20. Las integrales definidas pueden ser positivas, negativas o cero. Para que una integral definida sea interpretada como un área (como se definió en la sección 4.2), la función f debe ser continua y no negativa en $[a, b]$, como se establece en el siguiente teorema. La demostración de este teorema es directa: utilizar simplemente la definición de área dada en la sección 4.2, porque es una suma de Riemann.



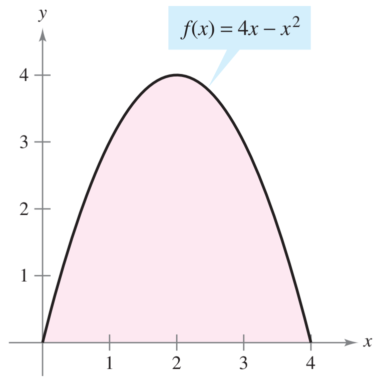
Se puede usar una integral definida para determinar el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = a$ y $x = b$
Figura 4.21

TEOREMA 4.5 LA INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA DE UNA REGIÓN

Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de f, del eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(Ver la figura 4.21.)



Área $= \int_0^4 (4x - x^2)\,dx$

Figura 4.22

Como un ejemplo del teorema 4.5, considerar la región delimitada por la gráfica de

$$f(x) = 4x - x^2$$

y el eje x, como se muestra en la figura 4.22. Debido a que f es continua y no negativa en el intervalo cerrado [0, 4], el área de la región es

$$\text{Área} = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx$$

Una técnica directa para hallar una integral definida como ésta se analizará en la sección 4.4. Por ahora se puede calcular una integral definida de dos maneras: usando la definición en términos de límites o verificando si la integral definida representa el área de una región geométrica común, tal como un rectángulo, triángulo o semicírculo.

EJEMPLO 3 Áreas de figuras geométricas comunes

Dibujar la región correspondiente a cada integral definida. Evaluar después cada integral utilizando una fórmula geométrica.

a) $\displaystyle\int_1^3 4\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^3 (x + 2)\,dx$ ***c)*** $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$

Solución Un dibujo de cada región se muestra en la figura 4.23.

a) Esta región es un rectángulo de 4 de alto por 2 de ancho.

$$\int_1^3 4\,dx = (\text{Área del rectángulo}) = 4(2) = 8$$

b) Esta región es un trapezoide con una altura de 3 y bases paralelas de longitudes 2 y 5. La fórmula para el área de un trapezoide es $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

$$\int_0^3 (x + 2)\,dx = (\text{Área del trapezoide}) = \frac{1}{2}(3)(2 + 5) = \frac{21}{2}$$

c) Esta región es un semicírculo de radio 2. La fórmula para el área de un semicírculo es $\frac{1}{2}\pi r^2$.

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx = (\text{Área del semicírculo}) = \frac{1}{2}\pi(2^2) = 2\pi$$

NOTA La variable de integración en una integral definida algunas veces se denomina como *variable muda* porque puede ser sustituida por cualquier otra variable sin cambiar el valor de la integral. Por ejemplo, las integrales definidas

$$\int_0^3 (x + 2)\,dx$$

y

$$\int_0^3 (t + 2)\,dt$$

tienen el mismo valor.

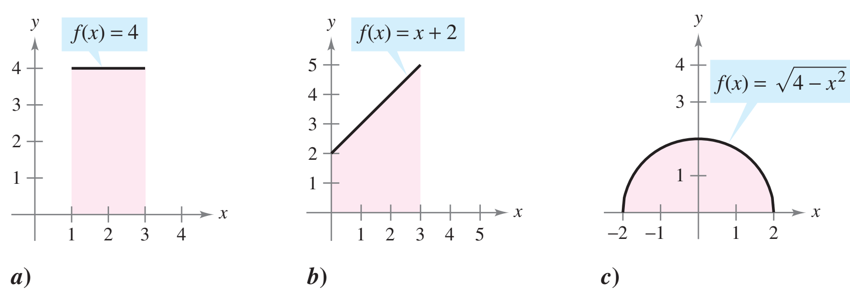


Figura 4.23

Propiedades de las integrales definidas

La definición de la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ especifica que $a < b$. Ahora, es conveniente, sin embargo, extender la definición para cubrir casos en los cuales $a = b$ o $a > b$. Geométricamente, las siguientes dos definiciones parecen razonables. Por ejemplo, tiene sentido definir el área de una región de ancho cero y altura finita igual a 0.

DEFINICIONES DE DOS INTEGRALES DEFINIDAS ESPECIALES

1. Si f está definida en $x = a$, entonces se define $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces se define $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

EJEMPLO 4 Cálculo de integrales definidas

a) Debido a que la función seno se define en $x = \pi$, y los límites superior e inferior de integración son iguales, puede decirse que

$$\int_\pi^\pi \operatorname{sen} x\,dx = 0.$$

b) La integral $\int_3^0 (x + 2)\,dx$ es la misma que la dada en el ejemplo 3*b* excepto por el hecho de que los límites superior e inferior se intercambian. Debido a que la integral en el ejemplo 3*b* tiene un valor de $\frac{21}{2}$, puede escribirse

$$\int_3^0 (x + 2)\,dx = -\int_0^3 (x + 2)\,dx = -\frac{21}{2}.$$

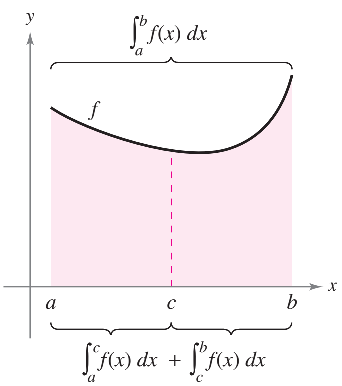


Figura 4.24

En la figura 4.24, la región más grande puede dividirse en $x = c$ en dos subregiones cuya intersección es un segmento de recta. Como el segmento de recta tiene área cero, se concluye que el área de la región más grande es igual a la suma de las áreas de las dos regiones más pequeñas.

TEOREMA 4.6 PROPIEDAD ADITIVA DE INTERVALOS

Si f es integrable en los tres intervalos cerrados determinados por a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

EJEMPLO 5 Empleo de la propiedad aditiva de intervalos

$$\int_{-1}^1 |x|\,dx = \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^1 x\,dx \quad \text{Teorema 4.6.}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{Área del triángulo.}$$
$$= 1$$

Debido a que la integral definida se describe como el límite de una suma, hereda las propiedades de la suma dadas en la parte superior de la página 260.

TEOREMA 4.7 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y k es una constante, entonces las funciones kf y $f \pm g$ son integrables en $[a, b]$, y

1. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

Observar que la propiedad 2 del teorema 4.7 puede extenderse a cualquier número finito de funciones. Por ejemplo,

$$\int_a^b [f(x) + g(x) + h(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx.$$

EJEMPLO 6 Evaluación de una integral definida

Evaluar $\displaystyle\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx$ utilizando los siguientes valores.

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3}, \qquad \int_1^3 x\,dx = 4, \qquad \int_1^3 dx = 2$$

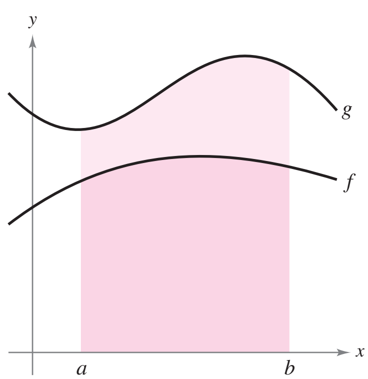
Solución

$$\begin{aligned}\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx &= \int_1^3 (-x^2)\,dx + \int_1^3 4x\,dx + \int_1^3 (-3)\,dx \\ &= -\int_1^3 x^2\,dx + 4\int_1^3 x\,dx - 3\int_1^3 dx \\ &= -\left(\frac{26}{3}\right) + 4(4) - 3(2) \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Si f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

para $a \le x \le b$, las siguientes propiedades son ciertas. Primero, el área de la región acotada por la gráfica de f y el eje x (entre a y b) debe ser no negativa. Segundo, esta área debe ser menor o igual que el área de la región delimitada por la gráfica de g y el eje x (entre a y b), como se muestra en la figura 4.25. Estos dos resultados se generalizan en el teorema 4.8. (Una demostración de este teorema se presenta en el apéndice A.)



$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

Figura 4.25

TEOREMA 4.8 CONSERVACIÓN DE DESIGUALDADES

1. Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Si f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

4.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, utilizar el ejemplo 1 como modelo para evaluar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

sobre la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones.

1. $f(x) = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3$
   (*Sugerencia:* Sea $c_i = 3i^2/n^2$.)
2. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$
   (*Sugerencia:* Sea $c_i = i^3/n^3$.)

En los ejercicios 3 a 8, evaluar la integral definida mediante la definición de límite.

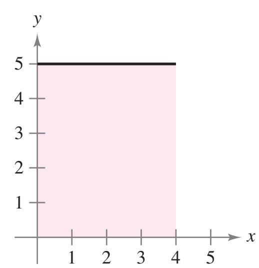
3. $\displaystyle\int_2^6 8\,dx$
4. $\displaystyle\int_{-2}^3 x\,dx$
5. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3\,dx$
6. $\displaystyle\int_1^4 4x^2\,dx$
7. $\displaystyle\int_1^2 (x^2 + 1)\,dx$
8. $\displaystyle\int_{-2}^1 (2x^2 + 3)\,dx$

En los ejercicios 9 a 12, escribir el límite como una integral definida en el intervalo $[a, b]$, donde c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo.

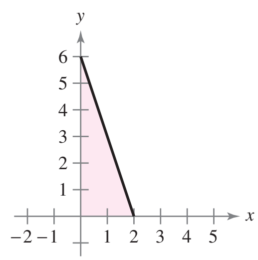
	Límite	*Intervalo*
9.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (3c_i + 10)\,\Delta x_i$	$[-1, 5]$
10.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 6c_i(4 - c_i)^2\,\Delta x_i$	$[0, 4]$
11.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_i^2 + 4}\,\Delta x_i$	$[0, 3]$
12.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{c_i^2}\right)\Delta x_i$	$[1, 3]$

En los ejercicios 13 a 22, formular una integral definida que produce el área de la región. (No evaluar la integral.)

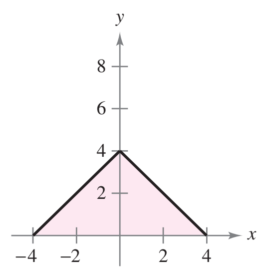
13. $f(x) = 5$



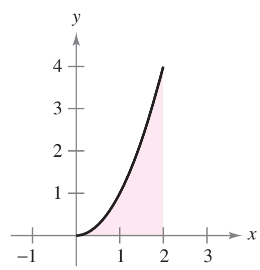
14. $f(x) = 6 - 3x$



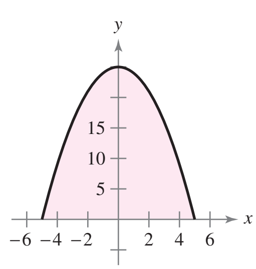
15. $f(x) = 4 - |x|$



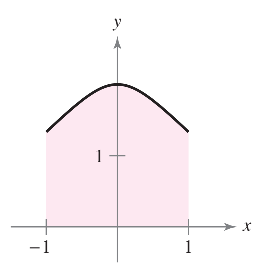
16. $f(x) = x^2$



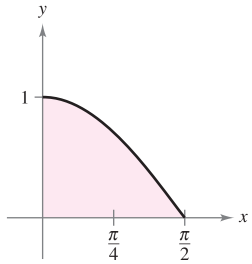
17. $f(x) = 25 - x^2$



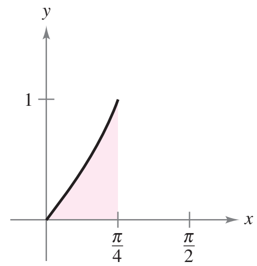
18. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 2}$



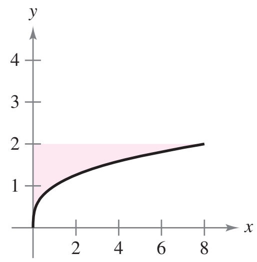
19. $f(x) = \cos x$



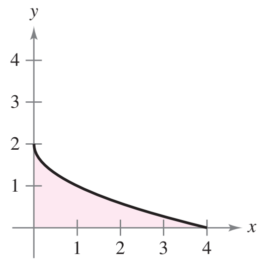
20. $f(x) = \tan x$



21. $g(y) = y^3$



22. $f(y) = (y - 2)^2$



En los ejercicios 23 a 32, dibujar la región cuya área está dada por la integral definida. Luego, usar una fórmula geométrica para evaluar la integral ($a > 0, r > 0$).

23. $\int_0^3 4\,dx$ **24.** $\int_{-a}^{a} 4\,dx$

25. $\int_0^4 x\,dx$ **26.** $\int_0^4 \frac{x}{2}\,dx$

27. $\int_0^2 (3x + 4)\,dx$ **28.** $\int_0^6 (6 - x)\,dx$

29. $\int_{-1}^{1} (1 - |x|)\,dx$ **30.** $\int_{-a}^{a} (a - |x|)\,dx$

31. $\int_{-7}^{7} \sqrt{49 - x^2}\,dx$ **32.** $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

En los ejercicios 33 a 40, evaluar la integral utilizando los siguientes valores.

$$\int_2^4 x^3\,dx = 60, \qquad \int_2^4 x\,dx = 6, \qquad \int_2^4 dx = 2$$

33. $\int_4^2 x\,dx$ **34.** $\int_2^2 x^3\,dx$

35. $\int_2^4 8x\,dx$ **36.** $\int_2^4 25\,dx$

37. $\int_2^4 (x - 9)\,dx$ **38.** $\int_2^4 (x^3 + 4)\,dx$

39. $\int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x + 2\right)dx$ **40.** $\int_2^4 (10 + 4x - 3x^3)\,dx$

41. Dadas $\int_0^5 f(x)\,dx = 10$ y $\int_5^7 f(x)\,dx = 3$, hallar

a) $\int_0^7 f(x)\,dx.$ *b)* $\int_5^0 f(x)\,dx.$

c) $\int_5^5 f(x)\,dx.$ *d)* $\int_0^5 3f(x)\,dx.$

42. Dadas $\int_0^3 f(x)\,dx = 4$ y $\int_3^6 f(x)\,dx = -1$, hallar

a) $\int_0^6 f(x)\,dx.$ *b)* $\int_6^3 f(x)\,dx.$

c) $\int_3^3 f(x)\,dx.$ *d)* $\int_3^6 -5f(x)\,dx.$

43. Dadas $\int_2^6 f(x)\,dx = 10$ y $\int_2^6 g(x)\,dx = -2$, hallar

a) $\int_2^6 [f(x) + g(x)]\,dx.$ *b)* $\int_2^6 [g(x) - f(x)]\,dx.$

c) $\int_2^6 2g(x)\,dx.$ *d)* $\int_2^6 3f(x)\,dx.$

44. Dadas $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ y $\int_0^1 f(x)\,dx = 5$, hallar

a) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx.$ *b)* $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_{-1}^{0} f(x)\,dx.$

c) $\int_{-1}^{1} 3f(x)\,dx.$ *d)* $\int_0^1 3f(x)\,dx.$

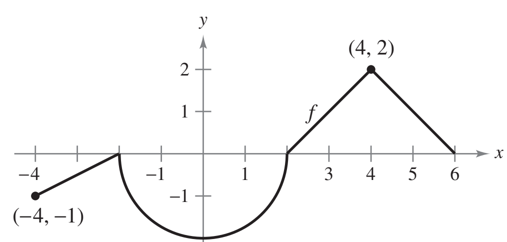
45. Utilizar la tabla de valores para determinar las estimaciones inferiores y superiores de $\int_0^{10} f(x)\,dx$. Suponer que f es una función decreciente.

x	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	32	24	12	-4	-20	-36

46. Utilizar la tabla de valores para estimar $\int_0^6 f(x)\,dx$. Utilizar tres subintervalos iguales y *a)* los puntos terminales izquierdos, *b)* los puntos terminales derechos y *c)* los puntos medios. Si f es una función creciente, ¿cómo se compara cada estimación con el valor real? Explicar el razonamiento.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-6	0	8	18	30	50	80

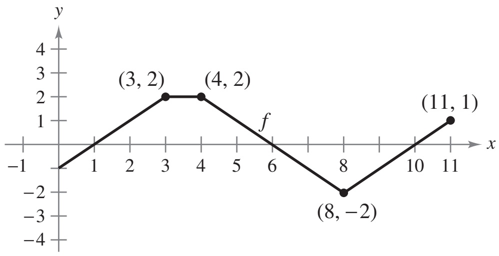
47. ***Para pensar*** La gráfica de f está compuesta por segmentos de recta y un semicírculo, como se muestra en la figura. Evaluar cada integral definida utilizando fórmulas geométricas.



a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ *b)* $\int_2^6 f(x)\,dx$ *c)* $\int_{-4}^{2} f(x)\,dx$

d) $\int_{-4}^{6} f(x)\,dx$ *e)* $\int_{-4}^{6} |f(x)|\,dx$ *f)* $\int_{-4}^{6} [f(x) + 2]\,dx$

48. ***Para pensar*** La gráfica de f consta de segmentos de recta, como se muestra en la figura. Evaluar cada integral definida utilizando fórmulas geométricas.



a) $\int_0^1 -f(x)\,dx$ *b)* $\int_3^4 3f(x)\,dx$

c) $\int_0^7 f(x)\,dx$ *d)* $\int_5^{11} f(x)\,dx$

e) $\int_0^{11} f(x)\,dx$ *f)* $\int_4^{10} f(x)\,dx$

49. ***Para pensar*** Considerar la función f que es continua en el intervalo $[-5, 5]$ y para la cual

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 4.$$

Evaluar cada integral.

a) $\int_0^5 [f(x) + 2]\,dx$ *b)* $\int_{-2}^3 f(x+2)\,dx$

c) $\int_{-5}^5 f(x)\,dx$ (f es par) *d)* $\int_{-5}^5 f(x)\,dx$ (f es impar)

50. ***Para pensar*** Una función f se define como se indica a continuación. Usar fórmulas geométricas para encontrar $\int_0^8 f(x)\,dx$.

$$f(x) = \begin{cases} 4, & x < 4 \\ x, & x \geq 4 \end{cases}$$

51. ***Para pensar*** Abajo se define una función f. Usar fórmulas geométricas para encontrar $\int_0^{12} f(x)\,dx$.

$$f(x) = \begin{cases} 6, & x > 6 \\ -\frac{1}{2}x + 9, & x \leq 6 \end{cases}$$

Para discusión

52. Encontrar posibles valores de a y b que hagan el enunciado correcto. Si es posible, usar una gráfica para sustentar su respuesta. (Aquí puede haber más de una respuesta correcta.)

a) $\int_{-2}^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

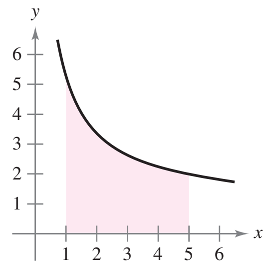
b) $\int_{-3}^3 f(x)\,dx + \int_3^6 f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^6 f(x)\,dx$

c) $\int_a^b \operatorname{sen} x\,dx < 0$

d) $\int_a^b \cos x\,dx = 0$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 53 y 54, utilizar la figura para llenar los espacios con el símbolo <, > o =.



53. El intervalo $[1, 5]$ se divide en n subintervalos de igual ancho Δx, y x_i es el punto terminal izquierdo del i-ésimo subintervalo.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \quad \square \quad \int_1^5 f(x)\,dx$$

54. El intervalo $[1, 5]$ se divide en n subintervalos de igual ancho Δx, y x_i es el punto terminal derecho del i-ésimo subintervalo.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \quad \square \quad \int_1^5 f(x)\,dx$$

55. Determinar si la función $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$ es integrable en el intervalo $[3, 5]$. Explicar.

56. Proporcionar un ejemplo de una función que sea integrable en el intervalo $[-1, 1]$, pero no continua en $[-1, 1]$.

En los ejercicios 57 a 60, determinar cuáles valores se aproximan mejor a la integral definida. Realizar la selección con base en un dibujo.

57. $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

a) 5 *b)* −3 *c)* 10 *d)* 2 *e)* 8

58. $\int_0^{1/2} 4\cos \pi x\,dx$

a) 4 *b)* $\frac{4}{3}$ *c)* 16 *d)* 2π *e)* −6

59. $\int_0^1 2\operatorname{sen} \pi x\,dx$

a) 6 *b)* $\frac{1}{2}$ *c)* 4 *d)* $\frac{5}{4}$

60. $\int_0^9 (1 + \sqrt{x})\,dx$

a) −3 *b)* 9 *c)* 27 *d)* 3

Programación **Escribir un programa en la herramienta de graficación con el fin de aproximar una integral definida utilizando la suma de Riemann**

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

donde los subintervalos sean de igual ancho. La salida debe proporcionar tres aproximaciones de la integral donde c_i es el punto terminal del lado izquierdo $I(n)$, el punto medio $M(n)$ y el punto terminal del lado derecho $D(n)$ de cada subintervalo. En los ejercicios 61 a 64, usar el programa para aproximar la integral definida y completar la tabla.

n	4	8	12	16	20
$I(n)$					
$M(n)$					
$D(n)$					

61. $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{3-x}\,dx$

62. $\displaystyle\int_0^3 \frac{5}{x^2+1}\,dx$

63. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$

64. $\displaystyle\int_0^3 x \operatorname{sen} x\,dx$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 65 a 70, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

65. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

66. $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\left[\int_a^b g(x)\,dx\right]$

67. Si la norma de una partición tiende a cero, entonces el número de subintervalos tiende a infinito.

68. Si f es creciente en $[a, b]$, entonces el valor mínimo de $f(x)$ en $[a, b]$ es $f(a)$.

69. El valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ debe ser positivo.

70. El valor de $\int_2^2 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ es cero.

71. Encontrar la suma de Riemann para $f(x) = x^2 + 3x$ en el intervalo $[0, 8]$, donde $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 7$ y $x_4 = 8$, y donde $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 5$ y $c_4 = 8$.

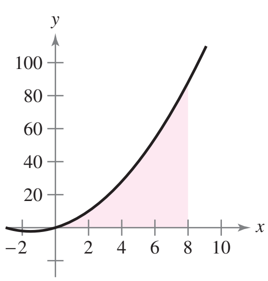


Figura para 71

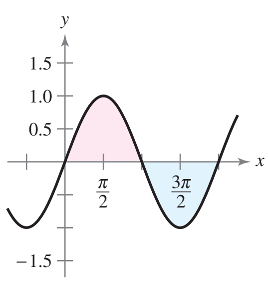


Figura para 72

72. Determinar la suma de Riemann para $f(x) = \operatorname{sen} x$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$, donde $x_0 = 0, x_1 = \pi/4, x_2 = \pi/3, x_3 = \pi$ y $x_4 = 2\pi$, y donde $c_1 = \pi/6, c_2 = \pi/3, c_3 = 2\pi/3$ y $c_4 = 3\pi/2$.

73. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

74. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$.

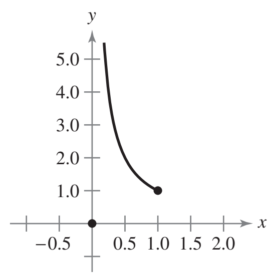
75. ***Para pensar*** Determinar si la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ es racional} \\ 0, & x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es integrable en el intervalo $[0, 1]$. Explicar.

75. Suponer que la función f se define en $[0, 1]$, como se muestra en la figura.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$



Demostrar que $\int_0^1 f(x)\,dx$ no existe. ¿Por qué lo anterior no contradice al teorema 4.4?

77. Encontrar las constantes a y b que maximizan el valor de

$$\int_a^b (1-x^2)\,dx.$$

Explicar el razonamiento.

78. Evaluar, si es posible, la integral $\displaystyle\int_0^2 [\![x]\!]\,dx$.

79. Determinar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right]$$

utilizando una suma de Riemann apropiada.

Preparación del examen Putnam

80. Para cada función continua $f\colon [0, 1] \to R$, sean $I(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx$ y $J(x) = \int_0^1 x(f(x))^2\,dx$. Encontrar el valor máximo de $I(f) - J(f)$ sobre todas las funciones f.

4.4 El teorema fundamental del cálculo

- **Evaluar una integral definida utilizando el teorema fundamental del cálculo.**
- **Entender y utilizar el teorema del valor medio para integrales.**
- **Encontrar el valor medio de una función sobre un intervalo cerrado.**
- **Entender y utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo.**
- **Entender y utilizar el teorema del cambio neto.**

El teorema fundamental del cálculo

Se han visto ya dos de las principales ramas del cálculo: el cálculo diferencial (presentado con el problema de la recta tangente) y el cálculo integral (presentado con el problema del área). En este punto, podría parecer que estos dos problemas no se relacionan, aunque tienen una conexión muy estrecha. La conexión fue descubierta independientemente por Isaac Newton y Gottfried Leibniz y está enunciada en un teorema que recibe el nombre de **teorema fundamental del cálculo**.

De manera informal, el teorema establece que la derivación y la integración (definida) son operaciones inversas, en el mismo sentido que lo son la división y la multiplicación. Para saber cómo Newton y Leibniz habrían pronosticado esta relación, considerar las aproximaciones que se muestran en la figura 4.26. La pendiente de la recta tangente se definió utilizando el *cociente* $\Delta y/\Delta x$ (la pendiente de la recta secante). De manera similar, el área de la región bajo una curva se definió utilizando el *producto* $\Delta y \Delta x$ (el área de un rectángulo). De tal modo, al menos en una etapa de aproximación primitiva, las operaciones de derivación y de integración definida parecen tener una relación inversa en el mismo sentido en el que son operaciones inversas la división y la multiplicación. El teorema fundamental del cálculo establece que los procesos de límite (utilizados para definir la derivada y la integral definida) preservan esta relación inversa.

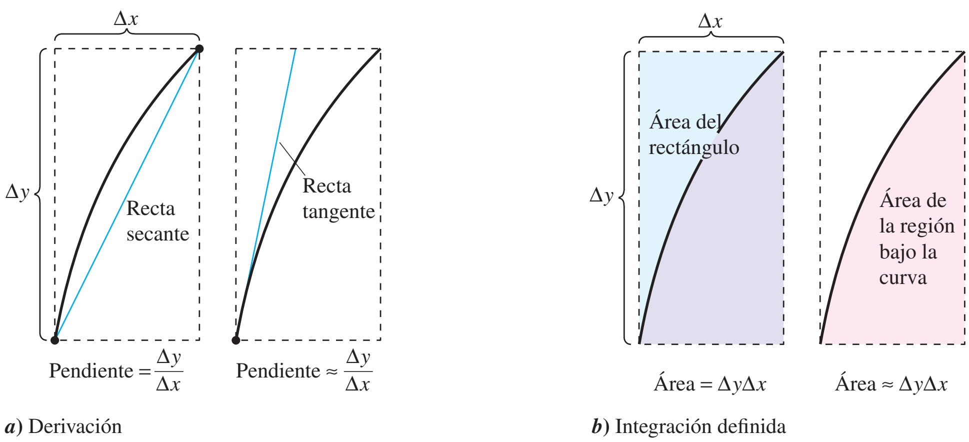
EXPLORACIÓN

Integración y antiderivación
A lo largo de este capítulo, se ha estado utilizando el signo de integral para denotar una antiderivada o primitiva (una familia de funciones) y una integral definida (un número).

Antiderivación: $\int f(x)\,dx$

Integración definida: $\int_a^b f(x)\,dx$

El uso de este mismo símbolo para ambas operaciones hace parecer que estarán relacionadas. En los primeros trabajos con cálculo, sin embargo, no se sabía que las dos operaciones estaban relacionadas. ¿A qué se aplicó primero el símbolo $\int$: a la antiderivación o a la integración definida? Explicar el razonamiento. (*Sugerencia:* El símbolo fue utilizado primero por Leibniz y proviene de la letra *S*.)



La derivación y la integración definida tienen una relación "inversa"
Figura 4.26

TEOREMA 4.9 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

DEMOSTRACIÓN La clave para la demostración consiste en escribir la diferencia $F(b) - F(a)$ en una forma conveniente. Sea Δ la siguiente partición de $[a, b]$.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_{n-1} < x_n = b$$

Mediante la resta y suma de términos análogos, se obtiene

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdot \cdot \cdot - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema del valor medio, se sabe que existe un número c_i en el i-ésimo subintervalo tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Como $F'(c_i) = f(c_i)$, puede dejarse que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y obtenerse

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

Esta importante ecuación dice que al aplicar repetidamente el teorema del valor medio, se puede siempre encontrar una colección de c_i tal que la *constante* $F(b) - F(a)$ es una suma de Riemann de f en $[a, b]$ para cualquier partición. El teorema 4.4 garantiza que el límite de sumas de Riemann sobre las particiones con $\|\Delta\| \to 0$ existe. Así, al tomar el límite (cuando $\|\Delta\| \to 0$) produce

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La siguiente guía puede ayudar a comprender el uso del teorema fundamental del cálculo.

Estrategia para utilizar el teorema fundamental del cálculo

1. *Suponiendo que se conozca* una antiderivada o primitiva f, se dispone de una forma de calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma.
2. Cuando se aplica el teorema fundamental del cálculo, la siguiente notación resulta conveniente.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= F(x)\Big]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Por ejemplo, para calcular $\int_1^3 x^3\,dx$, es posible escribir

$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

3. No es necesario incluir una constante de integración C en la antiderivada o primitiva ya que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \Big[F(x) + C\Big]_a^b \\ &= [F(b) + C] - [F(a) + C] \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Cálculo de una integral definida

Evaluar cada integral definida.

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - 3)\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$

Solución

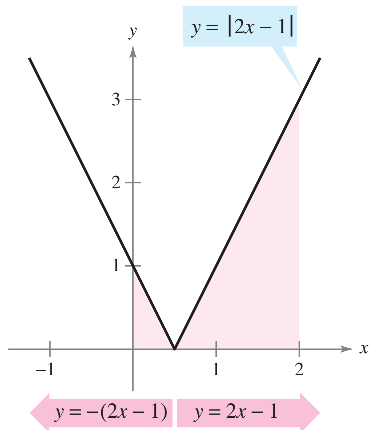
a) $$\int_1^2 (x^2 - 3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6\right) - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{3}$$

b) $$\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx = 3\int_1^4 x^{1/2}\,dx = 3\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = 2(4)^{3/2} - 2(1)^{3/2} = 14$$

c) $$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$$

EJEMPLO 2 Integral definida de un valor absoluto

Calcular $\displaystyle\int_0^2 |2x - 1|\,dx.$



La integral definida de y en $[0, 2]$ es $\frac{5}{2}$
Figura 4.27

Solución Utilizando la figura 4.27 y la definición de valor absoluto, se puede reescribir el integrando como se indica.

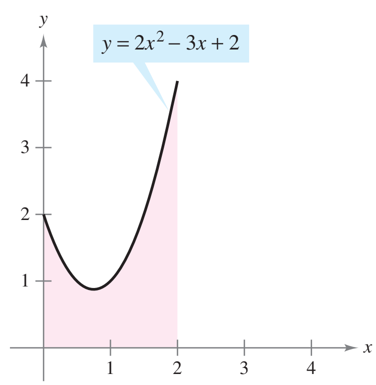
$$|2x - 1| = \begin{cases} -(2x - 1), & x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

A partir de esto, es posible reescribir la integral en dos partes.

$$\begin{aligned}\int_0^2 |2x - 1|\,dx &= \int_0^{1/2} -(2x - 1)\,dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1)\,dx \\ &= \Big[-x^2 + x\Big]_0^{1/2} + \Big[x^2 - x\Big]_{1/2}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - (0 + 0) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Empleo del teorema fundamental para encontrar un área

Encontrar el área de la región delimitada por la gráfica de $y = 2x^2 - 3x + 2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, como se muestra en la figura 4.28.



El área de la región acotada por la gráfica de y, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$ es $\frac{10}{3}$
Figura 4.28

Solución Notar que $y > 0$ en el intervalo $[0, 2]$.

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)\,dx \qquad \text{Integrar entre } x = 0 \text{ y } x = 2.$$

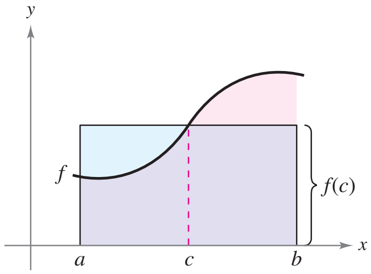
$$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^2 \qquad \text{Encontrar la antiderivada.}$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 6 + 4\right) - (0 - 0 + 0) \qquad \text{Aplicar el teorema fundamental del cálculo.}$$

$$= \frac{10}{3} \qquad \text{Simplificar.}$$

El teorema del valor medio para integrales

En la sección 4.2, se vio que el área de una región bajo una curva es mayor que el área de un rectángulo inscrito y menor que el área de un rectángulo circunscrito. El teorema del valor medio para integrales establece que en alguna parte "entre" los rectángulos inscrito y circunscrito hay un rectángulo cuya área es precisamente igual al área de la región bajo la curva, como se ilustra en la figura 4.29.



Rectángulo de valor medio:

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Figura 4.29

TEOREMA 4.10 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

DEMOSTRACIÓN

Caso 1: Si f es constante en el intervalo $[a, b]$, el teorema es claramente válido debido a que c puede ser cualquier punto en $[a, b]$.

Caso 2: Si f no es constante en $[a, b]$, entonces, por el teorema del valor extremo, pueden elegirse $f(m)$ y $f(M)$ como valores mínimo y máximo de f en $[a, b]$. Como $f(m) \le f(x) \le f(M)$ para todo x en $[a, b]$, se puede aplicar el teorema 4.8 para escribir

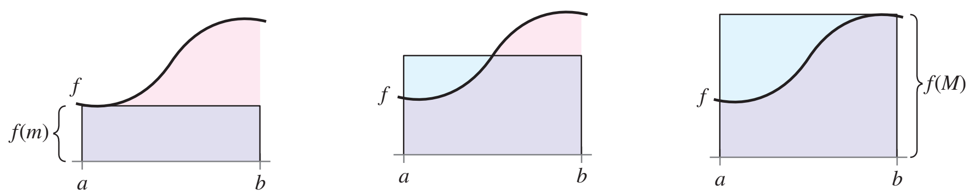
$$\int_a^b f(m)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f(M)\,dx \qquad \text{Ver la figura 4.30.}$$

$$f(m)(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le f(M)(b-a)$$

$$f(m) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le f(M)$$

De acuerdo con la tercera desigualdad, puede aplicarse el teorema del valor medio para concluir que existe alguna c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{o} \quad f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$



Rectángulo inscrito (menor que el área real)

$$\int_a^b f(m)\,dx = f(m)(b-a)$$

Rectángulo del valor medio (igual al área real)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Rectángulo circunscrito (mayor que el área real)

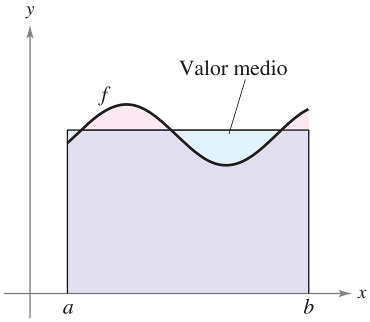
$$\int_a^b f(M)\,dx = f(M)(b-a)$$

Figura 4.30

NOTA Adviértase que el teorema 4.10 no especifica cómo determinar c. Sólo garantiza la existencia de al menos un número c en el intervalo.

Valor medio de una función

El valor de $f(c)$ dado en el teorema del valor medio para integrales recibe el nombre de **valor medio** de f en el intervalo $[a, b]$.



Valor medio $= \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Figura 4.31

DEFINICIÓN DEL VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

Si f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el **valor medio** de f en el intervalo es

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

NOTA Obsérvese en la figura 4.31 que el área de la región bajo la gráfica f es igual al área del rectángulo cuya altura es el valor medio.

Para saber por qué el promedio de f se define de esta manera, supóngase que se divide $[a, b]$ en n subintervalos de igual anchura $\Delta x = (b - a)/n$. Si c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo, la media aritmética de los valores de la función en los c_i está dada por

$$a_n = \frac{1}{n}[f(c_1) + f(c_2) + \cdot\cdot\cdot + f(c_n)].$$ Porcentaje de $f(c_1), \ldots, f(c_n)$.

Al multiplicar y dividir entre $(b - a)$, puede escribirse la media como

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{b-a}\right) = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x. \end{aligned}$$

Por último, al tomar el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene el valor medio de f en el intervalo $[a, b]$, como se indicó en la definición anterior.

Este desarrollo del valor medio de una función en un intervalo es sólo uno de los muchos usos prácticos de las integrales definidas para representar procesos de suma. En el capítulo 7, se estudiarán otras aplicaciones, tales como volumen, longitud de arco, centros de masa y trabajo.

EJEMPLO 4 Determinación del valor medio de una función

Determinar el valor medio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1, 4]$.

Solución El valor medio está dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{4-1}\int_1^4 (3x^2 - 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\Big[x^3 - x^2\Big]_1^4 \\ &= \frac{1}{3}[64 - 16 - (1 - 1)] = \frac{48}{3} = 16. \end{aligned}$$

(Ver la figura 4.32.)

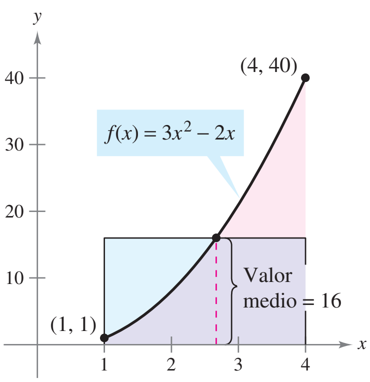
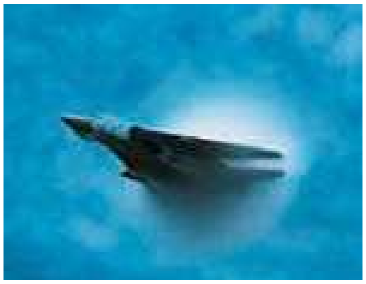


Figura 4.32



George Hall/Corbis

La primera persona en volar a una velocidad mayor que la del sonido fue Charles Yeager. El 14 de octubre de 1947, a una altura de 12.2 kilómetros, Yeager alcanzó 295.9 metros por segundo. Si Yeager hubiera volado a una altura menor que 11.275 kilómetros, su velocidad de 295.9 metros por segundo no hubiera "roto la barrera del sonido". La foto muestra un *Tomcat* F-14, un avión bimotor supersónico. Normalmente, el *Tomcat* puede alcanzar alturas de 15.24 km y velocidades que superan en más del doble la velocidad del sonido (707.78 m/s).

EJEMPLO 5 La velocidad del sonido

A diferentes alturas en la atmósfera de la Tierra, el sonido viaja a distintas velocidades. La velocidad del sonido $s(x)$ (en metros por segundo) puede modelarse mediante

$$s(x) = \begin{cases} -4x + 341, & 0 \le x < 11.5 \\ 295, & 11.5 \le x < 22 \\ \frac{3}{4}x + 278.5, & 22 \le x < 32 \\ \frac{3}{2}x + 254.5, & 32 \le x < 50 \\ -\frac{3}{2}x + 404.5, & 50 \le x \le 80 \end{cases}$$

donde x es la altura en kilómetros (ver la figura 4.33). ¿Cuál es la velocidad media del sonido sobre el intervalo [0, 80]?

Solución Se empieza con la integración $s(x)$ en el intervalo [0, 80]. Para hacer esto, se puede dividir la integral en cinco partes.

$$\int_0^{11.5} s(x)\,dx = \int_0^{11.5} (-4x + 341)\,dx = \Big[-2x^2 + 341x\Big]_0^{11.5} = 3\,657$$

$$\int_{11.5}^{22} s(x)\,dx = \int_{11.5}^{22} (295)\,dx = \Big[295x\Big]_{11.5}^{22} = 3\,097.5$$

$$\int_{22}^{32} s(x)\,dx = \int_{22}^{32} \left(\tfrac{3}{4}x + 278.5\right)dx = \Big[\tfrac{3}{8}x^2 + 278.5x\Big]_{22}^{32} = 2\,987.5$$

$$\int_{32}^{50} s(x)\,dx = \int_{32}^{50} \left(\tfrac{3}{2}x + 254.5\right)dx = \Big[\tfrac{3}{4}x^2 + 254.5x\Big]_{32}^{50} = 5\,688$$

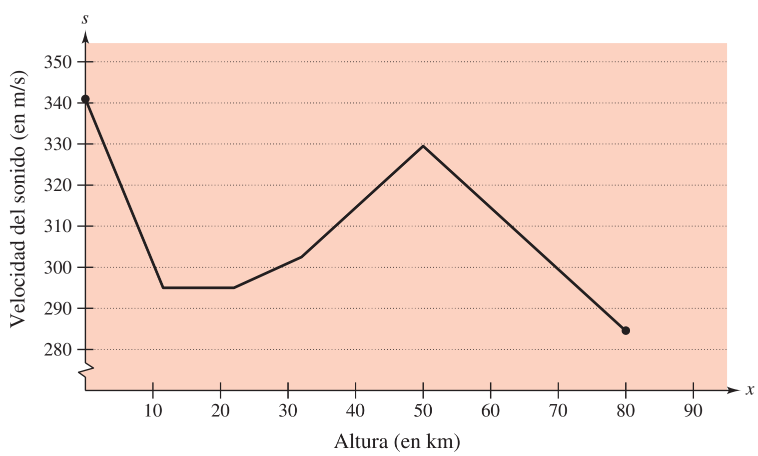
$$\int_{50}^{80} s(x)\,dx = \int_{50}^{80} \left(-\tfrac{3}{2}x + 404.5\right)dx = \Big[-\tfrac{3}{4}x^2 + 404.5x\Big]_{50}^{80} = 9\,210$$

Al sumar los valores de las cinco integrales, se obtiene

$$\int_0^{80} s(x)\,dx = 24\,640.$$

De tal modo, la velocidad media del sonido entre los 0 y los 80 km de altitud es

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{1}{80}\int_0^{80} s(x)\,dx = \frac{24\,640}{80} = 308 \text{ metros por segundo}$$



La velocidad del sonido depende de la altura
Figura 4.33

El segundo teorema fundamental del cálculo

Al introducir la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ se ha tomado como fijo el límite superior de integración b y x como la variable de integración. Sin embargo, es posible que surja una situación un poco diferente en la que la variable x se use como el límite superior de integración. Para evitar la confusión de utilizar x de dos maneras diferentes, se usa temporalmente t como la variable de integración. (Recordar que la integral definida *no* es una función de su variable de integración.)

La integral definida como un número

Constante

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Constante

f es una función de x

La integral definida como una función de x

F es una función de x

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Constante

f es una función de t

> **EXPLORACIÓN**
>
> Emplear una herramienta de graficación para representar la función
>
> $$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$$
>
> para $0 \le x \le \pi$. ¿Reconoce esta gráfica? Explicar.

EJEMPLO 6 La integral definida como función

Calcular la función

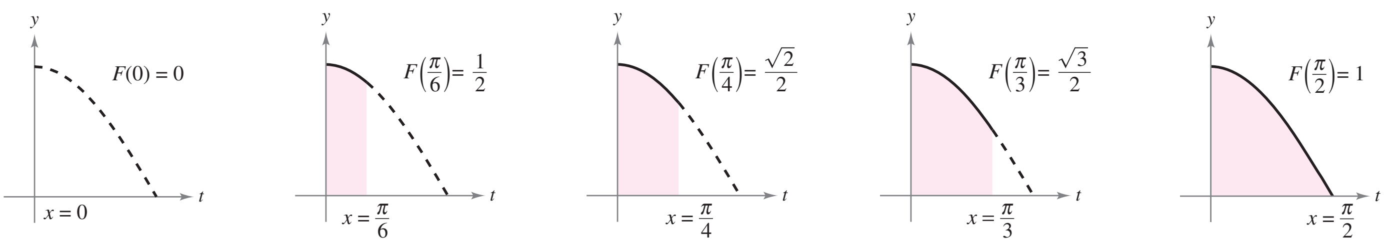
$$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$$

en $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ y $\pi/2$.

Solución Se podrían calcular cinco integrales definidas diferentes, una para cada uno de los límites superiores dados. Sin embargo, es mucho más simple fijar x (como una constante) por el momento para obtener

$$\int_0^x \cos t\,dt = \operatorname{sen} t\Big]_0^x = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} x.$$

Después de esto, utilizando $F(x) = \operatorname{sen} x$, es posible obtener los resultados que se muestran en la figura 4.34.



$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$ es el área bajo la curva $f(t) = \cos t$ desde 0 hasta x

Figura 4.34

Podría considerarse la función $F(x)$ como la *acumulación* del área bajo la curva $f(t) = \cos t$ desde $t = 0$ hasta $t = x$. Para $x = 0$, el área es 0 y $F(0) = 0$. Para $x = \pi/2$, $F(\pi/2) = 1$ produce el área acumulada bajo la curva coseno del intervalo completo $[0, \pi/2]$. Esta interpretación de una integral como una **función acumulación** se usa a menudo en aplicaciones de la integración.

En el ejemplo 6, advertir que la derivada de F es el integrando original (sólo que con la variable cambiada). Esto es,

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \cos t \, dt\right] = \cos x.$$

Este resultado se generaliza en el siguiente teorema, denominado el **segundo teorema fundamental del cálculo**.

TEOREMA 4.11 EL SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es continua en un intervalo abierto I que contiene a, entonces, para todo x en el intervalo,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\, dt\right] = f(x).$$

DEMOSTRACIÓN Empezar definiendo F como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

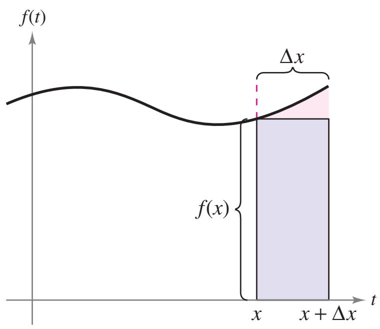
Luego, de acuerdo con la definición de la derivada, es posible escribir

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt + \int_x^a f(t)\, dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt\right]. \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio para integrales (suponiendo que $\Delta x > 0$), se sabe que existe un número c en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ tal que la integral en la expresión anterior es igual a $f(c)\,\Delta x$. Además, como $x \leq c \leq x + \Delta x$ se sigue que $c \to x$ cuando $\Delta x \to 0$. De tal modo, se obtiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\Delta x} f(c)\, \Delta x\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Es posible plantear un argumento similar para $\Delta x < 0$.



$$f(x)\,\Delta x \approx \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$$

Figura 4.35

NOTA Utilizando el modelo del área para integrales definidas, considerar la aproximación

$$f(x)\,\Delta x \approx \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$$

se dice que el área del rectángulo de altura $f(x)$ y anchura Δx es aproximadamente igual al área de la región que se encuentra entre la gráfica de f y el eje x en el intervalo $[x, x + \Delta x]$, como se muestra en la figura 4.35.

Nótese que el segundo teorema del cálculo indica que toda f continua admite una antiderivada o primitiva. Sin embargo, ésta no necesita ser una función elemental. (Recordar la discusión de las funciones elementales en la sección P.3.)

EJEMPLO 7 Empleo del segundo teorema fundamental del cálculo

Calcular $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right]$.

Solución Advertir que $f(t) = \sqrt{t^2+1}$ es continua en toda la recta real. De tal modo, empleando el segundo teorema fundamental del cálculo, es posible escribir

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right] = \sqrt{x^2+1}.$$

La derivación que se muestra en el ejemplo 7 es una aplicación directa del segundo teorema fundamental del cálculo. El siguiente ejemplo muestra cómo puede combinarse este teorema con la regla de la cadena para encontrar la derivada de una función.

EJEMPLO 8 Empleo del segundo teorema fundamental del cálculo

Encontrar la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt$.

Solución Haciendo $u = x^3$, es factible aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo junto con la regla de la cadena como se ilustra.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} && \text{Regla de la cadena.}\\
&= \frac{d}{du}[F(x)]\frac{du}{dx} && \text{Definición de } \frac{dF}{du}.\\
&= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{x^3}\cos t\,dt\right]\frac{du}{dx} && \text{Sustituir } \int_{\pi/2}^{x^3}\cos t\,dt \text{ por } F(x).\\
&= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{u}\cos t\,dt\right]\frac{du}{dx} && \text{Sustituir } u \text{ por } x^3.\\
&= (\cos u)(3x^2) && \text{Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo.}\\
&= (\cos x^3)(3x^2) && \text{Reescribir como función de } x.
\end{aligned}$$

Debido a que la integral del ejemplo 8 se integra con facilidad, se puede verificar la derivada del modo siguiente.

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{x^3}\cos t\,dt = \operatorname{sen} t\Big]_{\pi/2}^{x^3} = \operatorname{sen} x^3 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = (\operatorname{sen} x^3) - 1$$

En esta forma, se tiene la posibilidad de aplicar la regla de las potencias para verificar que la derivada es la misma que la que se obtuvo en el ejemplo 8.

$$F'(x) = (\cos x^3)(3x^2)$$

Teorema del cambio neto

El teorema fundamental del cálculo (teorema 4.9) establece que si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Pero dado que $F'(x) = f(x)$, este enunciado se puede reescribir como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde la cantidad $F(b) - F(a)$ representa el *cambio neto de F* sobre el intervalo $[a, b]$.

TEOREMA 4.12 EL TEOREMA DEL CAMBIO NETO

La integral definida de la razón de cambio de una cantidad $F'(x)$ proporciona el cambio total, o **cambio neto**, en esa cantidad sobre el intervalo $[a, b]$.

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{Cambio neto de F.}$$

EJEMPLO 9 Uso del teorema del cambio neto

Una sustancia química fluye en un tanque de almacenamiento a una razón de $180 + 3t$ litros por minuto, donde $0 \leq t \leq 60$. Encontrar la cantidad de la sustancia química que fluye en el tanque durante los primeros 20 minutos.

Solución Sea $c(t)$ la cantidad de la sustancia química en el tanque en el tiempo t. Entonces $c'(t)$ representa la razón a la cual la sustancia química fluye dentro del tanque en el tiempo t. Durante los primeros 20 minutos, la cantidad que fluye dentro del tanque es

$$\begin{aligned}\int_0^{20} c'(t)\,dt &= \int_0^{20} (180 + 3t)\,dt \\ &= \left[180t + \frac{3}{2}t^2\right]_0^{20} \\ &= 3\,600 + 600 = 4\,200.\end{aligned}$$

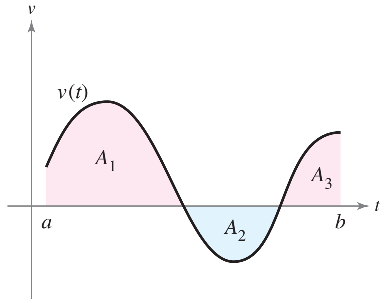
Así, la cantidad que fluye dentro del tanque durante los primeros 20 minutos es de 4 200 litros.

Otra forma de ilustrar el teorema del cambio neto es examinar la velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, donde $s(t)$ es la posición en el tiempo t. Entonces, su velocidad es $v(t) = s'(t)$ y

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a).$$

Esta integral definida representa el cambio neto en posición, o **desplazamiento**, de la partícula.

Cuando se calcula la distancia *total* recorrida por la partícula, se deben considerar los intervalos donde $v(t) \leq 0$ y los intervalos donde $v(t) \geq 0$. Cuando $v(t) \leq 0$, la partícula se mueve a la izquierda, y cuando $v(t) \geq 0$, la partícula se mueve hacia la derecha. Para calcular la distancia total recorrida, se integra el valor absoluto de la velocidad $|v(t)|$. Así, el



A_1, A_2 y A_3 son las áreas de las regiones sombreadas
Figura 4.36

desplazamiento de una partícula y la distancia total recorrida por una partícula sobre $[a, b]$, se puede escribir como

$$\textbf{Desplazamiento sobre } [a, b] = \int_a^b v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\textbf{Distancia total recorrida sobre } [a, b] = \int_a^b |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$$

(ver la figura 4.36).

EJEMPLO 10 Solución de un problema de movimiento de partícula

Una partícula está moviéndose a lo largo de una línea, así, su velocidad es $v(t) = t^3 - 10t^2 + 29t - 20$ pies por segundo en el tiempo t.

a) ¿Cuál es el desplazamiento de la partícula en el tiempo $1 \le t \le 5$?

b) ¿Cuál es la distancia total recorrida por la partícula en el tiempo $1 \le t \le 5$?

Solución

a) Por definición, se sabe que el desplazamiento es

$$\begin{aligned}\int_1^5 v(t)\,dt &= \int_1^5 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\,dt\\ &= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t\right]_1^5\\ &= \frac{25}{12} - \left(-\frac{103}{12}\right)\\ &= \frac{128}{12}\\ &= \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

Así, la partícula se mueve $\frac{32}{3}$ pies hacia la derecha.

b) Para encontrar la distancia total recorrida, calcular $\int_1^5 |v(t)|\,dt$. Usando la figura 4.37 y el hecho de que $v(t)$ pueda factorizarse como $(t - 1)(t - 4)(t - 5)$, se puede determinar que $v(t) \ge 0$ en $[1, 4]$ y $v(t) \le 0$ en $[4, 5]$. Así, la distancia total recorrida es

$$\begin{aligned}\int_1^5 |v(t)|\,dt &= \int_1^4 v(t)\,dt - \int_4^5 v(t)\,dt\\ &= \int_1^4 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\,dt - \int_4^5 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\,dt\\ &= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t\right]_1^4 - \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t\right]_4^5\\ &= \frac{45}{4} - \left(-\frac{7}{12}\right)\\ &= \frac{71}{6}\text{ pies.}\end{aligned}$$

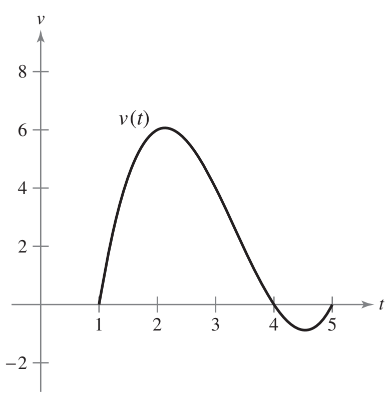


Figura 4.37

4.4 Ejercicios

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 1 a 4, utilizar una herramienta de graficación para representar el integrando. Emplear la gráfica para determinar si la integral definida es positiva, negativa o cero.**

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{4}{x^2+1}\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

3. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$

4. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\sqrt{2-x}\,dx$

En los ejercicios 5 a 26, hallar la integral definida de la función algebraica. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

5. $\displaystyle\int_0^{2} 6x\,dx$

6. $\displaystyle\int_4^{9} 5\,dv$

7. $\displaystyle\int_{-1}^{0} (2x-1)\,dx$

8. $\displaystyle\int_2^{5} (-3v+4)\,dv$

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2-2)\,dt$

10. $\displaystyle\int_1^{7} (6x^2+2x-3)\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^{1} (2t-1)^2\,dt$

12. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3-9t)\,dt$

13. $\displaystyle\int_1^{2} \left(\frac{3}{x^2}-1\right)dx$

14. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(u-\frac{1}{u^2}\right)du$

15. $\displaystyle\int_1^{4} \frac{u-2}{\sqrt{u}}\,du$

16. $\displaystyle\int_{-3}^{3} v^{1/3}\,dv$

17. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\sqrt[3]{t}-2\right)dt$

18. $\displaystyle\int_1^{8} \sqrt{\frac{2}{x}}\,dx$

19. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x-\sqrt{x}}{3}\,dx$

20. $\displaystyle\int_0^{2} (2-t)\sqrt{t}\,dt$

21. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left(t^{1/3}-t^{2/3}\right)dt$

22. $\displaystyle\int_{-8}^{-1} \frac{x-x^2}{2\sqrt[3]{x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int_0^{5} |2x-5|\,dx$

24. $\displaystyle\int_1^{4} (3-|x-3|)\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^{3} |x^2-9|\,dx$

26. $\displaystyle\int_0^{4} |x^2-4x+3|\,dx$

En los ejercicios 27 a 34, hallar la integral definida de la función trigonométrica. Emplear una herramienta de graficación para verificar el resultado.

27. $\displaystyle\int_0^{\pi} (1+\operatorname{sen} x)\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^{\pi} (2+\cos x)\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\,d\theta$

31. $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sec^2 x\,dx$

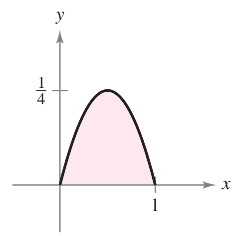
32. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} (2-\csc^2 x)\,dx$

33. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

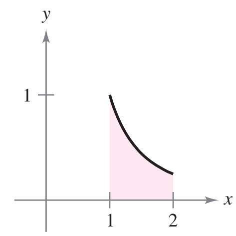
34. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2t+\cos t)\,dt$

En los ejercicios 35 a 38, determinar el área de la región indicada.

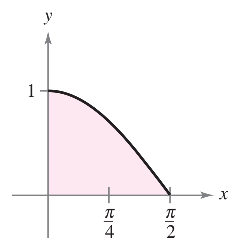
35. $y = x - x^2$



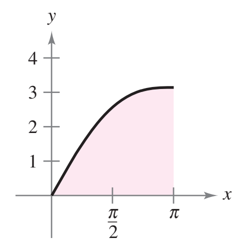
36. $y = \dfrac{1}{x^2}$



37. $y = \cos x$



38. $y = x + \operatorname{sen} x$



En los ejercicios 39 a 44, encontrar el área de la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones.

39. $y = 5x^2 + 2,\quad x = 0,\quad x = 2,\quad y = 0$

40. $y = x^3 + x,\quad x = 2,\quad y = 0$

41. $y = 1 + \sqrt[3]{x},\quad x = 0,\quad x = 8,\quad y = 0$

42. $y = (3 - x)\sqrt{x},\quad y = 0$

43. $y = -x^2 + 4x,\quad y = 0$

44. $y = 1 - x^4,\quad y = 0$

En los ejercicios 45 a 50, determinar el (los) valor(es) de *c* cuya existencia es garantizada por el teorema del valor medio para integrales de la función en el intervalo indicado.

45. $f(x) = x^3,\quad [0, 3]$

46. $f(x) = \dfrac{9}{x^3},\quad [1, 3]$

47. $f(x) = \sqrt{x},\quad [4, 9]$

48. $f(x) = x - 2\sqrt{x},\quad [0, 2]$

49. $f(x) = 2\sec^2 x,\quad [-\pi/4, \pi/4]$

50. $f(x) = \cos x,\quad [-\pi/3, \pi/3]$

En los ejercicios 51 a 56, encontrar el valor medio de la función sobre el intervalo dado y todos los valores de *x* en el intervalo para los cuales la función sea igual a su valor promedio.

51. $f(x) = 9 - x^2,\quad [-3, 3]$

52. $f(x) = \dfrac{4(x^2+1)}{x^2},\quad [1, 3]$

53. $f(x) = x^3,\quad [0, 1]$

54. $f(x) = 4x^3 - 3x^2,\quad [-1, 2]$

55. $f(x) = \operatorname{sen} x,\quad [0, \pi]$

56. $f(x) = \cos x,\quad [0, \pi/2]$

57. ***Velocidad*** La gráfica muestra la velocidad, en pies por segundo, de un automóvil que acelera desde el reposo. Emplear la gráfica para estimar la distancia que el automóvil recorre en 8 segundos.

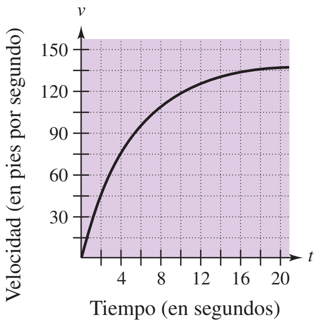


Figura para 57

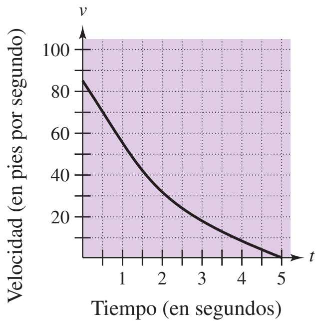
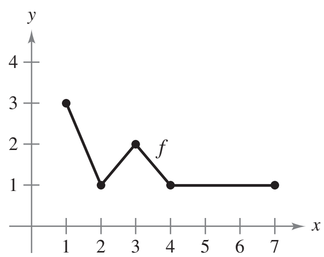


Figura para 58

58. ***Velocidad*** La gráfica muestra la velocidad de un automóvil tan pronto como el conductor aplica los frenos. Emplear la gráfica para estimar qué distancia recorre el auto antes de detenerse.

Desarrollo de conceptos

59. La gráfica de f se muestra en la figura.



a) Calcular $\int_1^7 f(x)\,dx$.

b) Determinar el valor medio de f en el intervalo $[1, 7]$.

c) Determinar las respuestas a los apartados *a*) y *b*) si la gráfica se desplaza dos unidades hacia arriba.

60. Si $r'(t)$ representa la razón de crecimiento de un perro en libras por año, ¿qué representa $r(t)$? ¿Qué representa $\int_2^6 r'(t)\,dt$ en el perro?

61. ***Fuerza*** La fuerza F (en newtons) de un cilindro hidráulico en una prensa es proporcional al cuadrado de $\sec x$, donde x es la distancia (en metros) que el cilindro se desplaza en su ciclo. El dominio de F es $[0, \pi/3]$ y $F(0) = 500$.

a) Encontrar F como una función de x.

b) Determinar la fuerza media ejercida por la prensa sobre el intervalo $[0, \pi/3]$.

62. ***Flujo sanguíneo*** La velocidad v del flujo de sangre a una distancia r del eje central de cualquier arteria de radio R es

$$v = k(R^2 - r^2)$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Determinar el flujo medio de sangre a lo largo de un radio de la arteria. (Usar 0 y R como los límites de integración.)

63. ***Ciclo respiratorio*** El volumen V en litros de aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de cinco segundos se aproxima mediante el modelo $V = 0.1729t + 0.1522t^2 - 0.0374t^3$ donde t es el tiempo en segundos. Aproximar el volumen medio de aire en los pulmones durante un ciclo.

64. ***Promedio de ventas*** Una compañía ajusta un modelo a los datos de ventas mensuales de un producto de temporada. El modelo es

$$S(t) = \frac{t}{4} + 1.8 + 0.5\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right), \qquad 0 \le t \le 24$$

donde S son las ventas (en miles) y t es el tiempo en meses.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar $f(t) = 0.5\,\text{sen}(\pi t/6)$ para $0 \le t \le 24$. Emplear la gráfica para explicar por qué el valor medio de $f(t)$ es cero sobre el intervalo.

b) Recurrir a una herramienta de graficación para representar $S(t)$ y la recta $g(t) = t/4 + 1.8$ en la misma ventana de observación. Utilizar la gráfica y el resultado del apartado *a*) para explicar por qué g recibe el nombre *recta de tendencia*.

65. ***Modelado matemático*** Se prueba un vehículo experimental en una pista recta. Parte del reposo y su velocidad v (metros por segundo) se registra en la tabla cada 10 segundos durante un minuto.

t	0	10	20	30	40	50	60
v	0	5	21	40	62	78	83

a) Emplear una herramienta de graficación para determinar un modelo de la forma $v = at^3 + bt^2 + ct + d$ para los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para dibujar los datos y hacer la gráfica del modelo.

c) Emplear el teorema fundamental del cálculo para aproximar la distancia recorrida por el vehículo durante la prueba.

Para discusión

66. La gráfica de f se muestra en la figura. La región sombreada A tiene un área de 1.5, y $\int_0^6 f(x)\,dx = 3.5$. Usar esta información para completar los espacios en blanco.

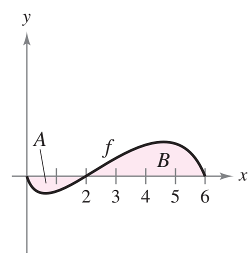
a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \square$

b) $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,dx = \square$

c) $\displaystyle\int_0^6 |f(x)|\,dx = \square$

d) $\displaystyle\int_0^2 -2f(x)\,dx = \square$

e) $\displaystyle\int_0^6 [2 + f(x)]\,dx = \square$



f) El valor promedio de f sobre el intervalo $[0, 6]$ es $\square$.

En los ejercicios 67 a 72, encontrar F como una función de x y evaluar en $x = 2$, $x = 5$ y $x = 8$.

67. $F(x) = \displaystyle\int_0^x (4t - 7)\,dt$

68. $F(x) = \displaystyle\int_2^x (t^3 + 2t - 2)\,dt$

69. $F(x) = \int_1^x \frac{20}{v^2}\, dv$ **70.** $F(x) = \int_2^x -\frac{2}{t^3}\, dt$

71. $F(x) = \int_1^x \cos\theta\, d\theta$ **72.** $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

73. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra en la figura.

a) Estimar $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$ y $g(8)$.
b) Determinar el intervalo abierto más grande en el cual g está creciendo. Encontrar el intervalo abierto más grande en el que g decrezca.
c) Identificar cualesquiera extremos de g.
d) Dibujar una gráfica sencilla de g.

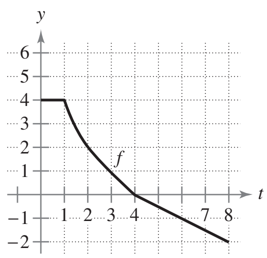


Figura para 73

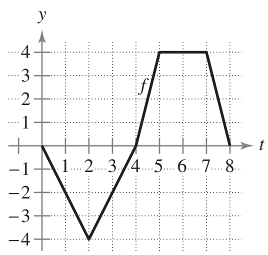


Figura para 74

74. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es una función cuya gráfica se muestra en la figura.

a) Estimar $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$ y $g(8)$.
b) Encontrar el intervalo abierto más grande en el cual g esté creciendo. Determinar el intervalo abierto más grande en el que g decrezca.
c) Identificar cualesquiera extremos de g.
d) Dibujar una gráfica sencilla de g.

En los ejercicios 75 a 80, *a*) integrar para determinar *F* como una función de *x* y *b*) demostrar el segundo teorema fundamental del cálculo derivando el resultado del apartado *a*).

75. $F(x) = \int_0^x (t + 2)\, dt$ **76.** $F(x) = \int_0^x t(t^2 + 1)\, dt$

77. $F(x) = \int_8^x \sqrt[3]{t}\, dt$ **78.** $F(x) = \int_4^x \sqrt{t}\, dt$

79. $F(x) = \int_{\pi/4}^x \sec^2 t\, dt$ **80.** $F(x) = \int_{\pi/3}^x \sec t \tan t\, dt$

En los ejercicios 81 a 86, utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo para encontrar $F'(x)$.

81. $F(x) = \int_{-2}^x (t^2 - 2t)\, dt$ **82.** $F(x) = \int_1^x \frac{t^2}{t^2 + 1}\, dt$

83. $F(x) = \int_{-1}^x \sqrt{t^4 + 1}\, dt$ **84.** $F(x) = \int_1^x \sqrt[4]{t}\, dt$

85. $F(x) = \int_0^x t\cos t\, dt$ **86.** $F(x) = \int_0^x \sec^3 t\, dt$

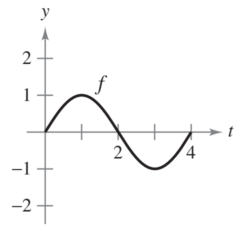
En los ejercicios 87 a 92, encontrar $F'(x)$.

87. $F(x) = \int_x^{x+2} (4t + 1)\, dt$ **88.** $F(x) = \int_{-x}^x t^3\, dt$

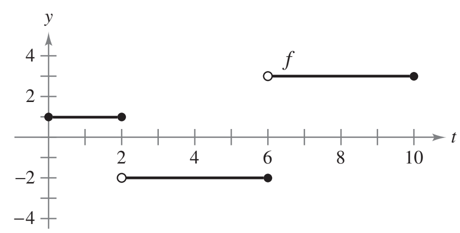
89. $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{t}\, dt$ **90.** $F(x) = \int_2^{x^2} \frac{1}{t^3}\, dt$

91. $F(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen} t^2\, dt$ **92.** $F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}\theta^2\, d\theta$

93. ***Análisis gráfico*** Aproximar la gráfica de g en el intervalo $0 \le x \le 4$, donde $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Identificar la coordenada x de un extremo de g.



94. Utilizar la gráfica de la función f que se muestra en la figura y la función g definida por $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.



a) Completar la tabla.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(x)$										

b) Dibujar los puntos de la tabla en el apartado *a*) y graficar g.
c) ¿Dónde tiene g un mínimo? Explicar.
d) ¿Dónde tiene g un máximo? Explicar.
e) ¿En qué intervalo g crece a la mayor velocidad? Explicar.
f) Identificar los ceros de g.

95. ***Costo*** El costo total C (en dólares) de compra y mantenimiento de una pieza de equipo durante x años es

$$C(x) = 5\,000\left(25 + 3\int_0^x t^{1/4}\, dt\right).$$

a) Efectuar la integración para escribir C como una función de x.
b) Encontrar $C(1)$, $C(5)$ y $C(10)$.

96. ***Área*** El área A entre la gráfica de la función $g(t) = 4 - 4/t^2$ y el eje t sobre el intervalo $[1, x]$ es

$$A(x) = \int_1^x \left(4 - \frac{4}{t^2}\right) dt.$$

a) Determinar la asíntota horizontal de la gráfica de g.
b) Integrar para encontrar A como una función de x. ¿La gráfica de A tiene una asíntota horizontal? Explicar.

En los ejercicios 97 a 102, la función velocidad, en pies por segundo, está dada para una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta. Encontrar *a*) el desplazamiento y *b*) la distancia total que la partícula recorre en el intervalo dado.

97. $v(t) = 5t - 7, \quad 0 \le t \le 3$

98. $v(t) = t^2 - t - 12, \quad 1 \le t \le 5$

99. $v(t) = t^3 - 10t^2 + 27t - 18, \quad 1 \le t \le 7$

100. $v(t) = t^3 - 8t^2 + 15t, \quad 0 \le t \le 5$

101. $v(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}, \quad 1 \le t \le 4$ **102.** $v(t) = \cos t, \quad 0 \le t \le 3\pi$

103. Una partícula se mueve a lo largo del eje x. La posición de la partícula en el tiempo t está dada por $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 2$, $0 \le t \le 5$. Encontrar el desplazamiento total que la partícula recorre en 5 unidades de tiempo.

104. Repetir el ejercicio 103 para la función posición dada por $x(t) = (t - 1)(t - 3)^2$, $0 \le t \le 5$.

105. ***Flujo de agua*** Fluye agua a través de un tanque de almacenamiento a una razón de $500 - 5t$ litros por minuto. Encontrar la cantidad de agua que fluye hacia afuera del tanque durante los primeros 18 minutos.

106. ***Filtración de aceite*** A la 1:00 p.m., empieza a filtrarse aceite desde un tanque a razón de $4 + 0.75t$ galones por hora.

a) ¿Cuánto aceite se pierde desde la 1:00 p.m. hasta las 4:00 p.m.?

b) ¿Cuánto aceite se pierde desde las 4:00 p.m. hasta las 7:00 p.m.?

c) Comparar los resultados de los apartados *a*) y *b*). ¿Qué se observa?

En los ejercicios 107 a 110, describir por qué el enunciado es incorrecto.

107. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$

108. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{2}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_{-2}^{1} = -\frac{3}{4}$

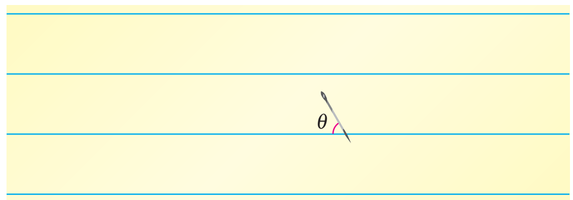
109. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sec^2 x\,dx = \left[\tan x\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = -2$

110. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \csc x \cot x\,dx = \left[-\csc x\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = 2$

111. ***Experimento de la aguja de Buffon*** Sobre un plano horizontal se trazan rectas paralelas separadas por una distancia de 2 pulgadas. Una aguja de 2 pulgadas se lanza aleatoriamente sobre el plano. La probabilidad de que la aguja toque una recta es

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

donde θ es el ángulo agudo entre la aguja y cualquiera de las rectas paralelas. Determinar esta probabilidad.



112. Demostrar que $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right] = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 113 y 114, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

113. Si $F'(x) = G'(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

114. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

115. Demostrar que la función

$$f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2 + 1}\,dt + \int_0^{x} \frac{1}{t^2 + 1}\,dt$$

es constante para $x > 0$.

116. Encontrar la función $f(x)$ y todos los valores de c, tal que

$$\int_c^x f(t)\,dt = x^2 + x - 2.$$

117. Sea $G(x) = \displaystyle\int_0^x \left[s\int_0^s f(t)dt\right] ds$, donde f es continua para todo t real. Determinar *a*) $G(0)$, *b*) $G'(0)$, *c*) $G''(x)$ y *d*) $G''(0)$.

PROYECTO DE TRABAJO

Demostración del teorema fundamental

Utilizar una herramienta de graficación para representar la función $y_1 = \operatorname{sen}^2 t$ en el intervalo $0 \le t \le \pi$. Sea $F(x)$ la siguiente función de x.

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}^2 t\, dt$$

a) Completar la tabla. Explicar por qué los valores de f están creciendo.

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
$F(x)$							

b) Utilizar las funciones de integración de una herramienta de graficación para representar F.

c) Emplear las funciones de derivación de una herramienta de graficación para hacer la gráfica de $F'(x)$. ¿Cómo se relaciona esta gráfica con la gráfica de la parte *b*)?

d) Verificar que la derivada de $y = (1/2)t - (\operatorname{sen} 2t)/4$ es $\operatorname{sen}^2 t$. Graficar y y escribir un pequeño párrafo acerca de cómo esta gráfica se relaciona con las de los apartados *b*) y *c*).

4.5 Integración por sustitución

- **Utilizar el reconocimiento de patrones para encontrar una integral indefinida.**
- **Emplear un cambio de variable para determinar una integral indefinida.**
- **Utilizar la regla general de las potencias para la integración con el fin de determinar una integral indefinida.**
- **Utilizar un cambio de variable para calcular una integral definida.**
- **Calcular una integral definida que incluya una función par o impar.**

Reconocimiento de patrones

En esta sección se estudiarán técnicas para integrar funciones compuestas. La discusión se divide en dos partes: *reconocimiento de patrones* y *cambio de variables*. Ambas técnicas implican una ***u*-sustitución**. Con el reconocimiento de patrones se efectúa la sustitución mentalmente, y con el cambio de variable se escriben los pasos de la sustitución.

El papel de la sustitución en la integración es comparable al de la regla de la cadena en la derivación. Recordar que para funciones derivables dadas por $y = F(u)$ y $u = g(x)$, la regla de la cadena establece que

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x).$$

De acuerdo con la definición de una antiderivada o primitiva, se sigue

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Estos resultados se resumen en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.13 ANTIDERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Sea g una función cuyo recorrido o rango es un intervalo I, y sea f una función continua en I. Si g es derivable en su dominio y F es una antiderivada o primitiva de f en I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$ y

$$\int f(u)\,du = F(u) + C.$$

NOTA El enunciado del teorema 4.13 no dice cómo distinguir entre $f(g(x))$ y $g'(x)$ en el integrando. A medida que se tenga más experiencia en la integración, la habilidad para efectuar esta operación aumentará. Desde luego, parte de la clave es la familiaridad con las derivadas.

Los ejemplos 1 y 2 muestran cómo aplicar *directamente* el teorema 4.13, reconociendo la presencia de $f(g(x))$ y $g'(x)$. Notar que la función compuesta en el integrando tiene una *función exterior* f y una *función interior* g. Además, la derivada $g'(x)$ está presente como un factor del integrando.

Función exterior

$$\int f(g(x))\underbrace{g'(x)}_{\text{Derivada de la función interior}}\,dx = F(g(x)) + C$$

Función interior

EJEMPLO 1 Reconocimiento del patrón de $f(g(x))g'(x)$

Determinar $\int (x^2 + 1)^2(2x)\,dx$.

Solución Tomando $g(x) = x^2 + 1$, se obtiene

$$g'(x) = 2x$$

y

$$f(g(x)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2.$$

A partir de esto, se puede reconocer que el integrando sigue el patrón $f(g(x))g'(x)$. Utilizando la regla de la potencia para la integración y el teorema 4.13, es posible escribir

$$\int \overbrace{(x^2 + 1)^2}^{f(g(x))}\overbrace{(2x)}^{g'(x)}\,dx = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C.$$

Es fácil comprobar, mediante la regla de la cadena, que la derivada de $\frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C$ es, en efecto, el integrando de la integral original.

EJEMPLO 2 Reconocimiento del patrón $f(g(x))g'(x)$

Determinar $\int 5 \cos 5x\,dx$.

Solución Tomando $g(x) = 5x$, se obtiene

$$g'(x) = 5$$

y

$$f(g(x)) = f(5x) = \cos 5x.$$

A partir de esto, se puede reconocer que el integrando sigue el patrón $f(g(x))g'(x)$. Utilizando la regla del coseno para la integración y el teorema 4.13, puede escribirse

$$\int \overbrace{(\cos(5x))}^{f(g(x))}\overbrace{(5)}^{g'(x)}\,dx = \text{sen } 5x + C.$$

Lo anterior se verifica derivando $\text{sen } 5x + C$ para obtener el integrando original.

TECNOLOGÍA Usar un sistema algebraico computarizado, tal como *Maple, Mathematica* o *TI-89*, para resolver las integrales dadas en los ejemplos 1 y 2. ¿Se obtienen las mismas antiderivadas o primitivas que las que se citan en los ejemplos?

EXPLORACIÓN

Reconocimiento de patrones El integrando en cada una de las siguientes integrales corresponde al patrón $f(g(x))g'(x)$. Identificar el patrón y utilizar el resultado para calcular la integral.

a) $\int 2x(x^2 + 1)^4\,dx$ ***b)*** $\int 3x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx$ ***c)*** $\int \sec^2 x(\tan x + 3)\,dx$

Las siguientes tres integrales son similares a las primeras tres. Mostrar cómo se puede multiplicar y dividir por una constante para calcular estas integrales.

d) $\int x(x^2 + 1)^4\,dx$ ***e)*** $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx$ ***f)*** $\int 2\sec^2 x(\tan x + 3)\,dx$

Los integrandos en los ejemplos 1 y 2 corresponden exactamente al patrón $f(g(x))$ $g'(x)$ (sólo se tiene que reconocer el patrón). Es posible extender esta técnica de manera considerable utilizando la regla del múltiplo constante.

$$\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx.$$

Muchos integrandos contienen la parte esencial (la parte variable) de $g'(x)$, aunque está faltando un múltiplo constante. En tales casos, es posible multiplicar y dividir por el múltiplo constante necesario, como se muestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Multiplicar y dividir por una constante

Determinar $\displaystyle\int x(x^2 + 1)^2\, dx.$

Solución Esto es similar a la integral dada en el ejemplo 1, salvo porque al integrando le falta un factor 2. Al reconocer que $2x$ es la derivada de $x^2 + 1$, se toma $g(x) = x^2 + 1$ y se incluye el término $2x$ de la manera siguiente.

$$\begin{aligned}
\int x(x^2 + 1)^2\, dx &= \int (x^2 + 1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)(2x)\, dx && \text{Multiplicar y dividir entre 2.}\\
&= \frac{1}{2}\int \overbrace{(x^2 + 1)^2}^{f(g(x))}\, \overbrace{(2x)}^{g'(x)}\, dx && \text{Regla del múltiplo constante.}\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2 + 1)^3}{3}\right] + C && \text{Integrar.}\\
&= \frac{1}{6}(x^2 + 1)^3 + C && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

En la práctica, la mayoría de la gente no escribiría tantos pasos como los que se muestran en el ejemplo 3. Por ejemplo, podría calcularse la integral escribiendo simplemente

$$\begin{aligned}
\int x(x^2 + 1)^2\, dx &= \frac{1}{2}\int (x^2 + 1)^2\, 2x\, dx\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2 + 1)^3}{3}\right] + C\\
&= \frac{1}{6}(x^2 + 1)^3 + C.
\end{aligned}$$

NOTA Asegurarse de ver que la regla del múltiplo constante se aplica sólo a *constantes*. No se puede multiplicar y dividir por una variable y después mover la variable fuera del signo integral. Por ejemplo,

$$\int (x^2 + 1)^2\, dx \neq \frac{1}{2x}\int (x^2 + 1)^2 (2x)\, dx.$$

Después de todo, si fuera legítimo mover cantidades variables fuera del signo de la integral, se podría sacar el integrando completo y simplificar el proceso completo. Sin embargo, el resultado sería incorrecto. ■

Cambio de variables

Con un **cambio de variables** formal se puede reescribir por completo la integral en términos de u y du (o cualquier otra variable conveniente). Aunque este procedimiento puede implicar más pasos escritos que el reconocimiento de patrones ilustrado en los ejemplos 1 a 3, resulta útil para integrandos complicados. La técnica del cambio de variable utiliza la notación de Leibniz para la diferencial. Esto es, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$, y la integral en el teorema 4.13 toma la forma

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C.$$

EJEMPLO 4 Cambio de variable

Encontrar $\int \sqrt{2x-1}\,dx.$

Solución Primero, sea u la función interior, $u = 2x - 1$. Calcular después la diferencial du de manera que $du = 2\,dx$. Ahora, utilizando $\sqrt{2x-1} = \sqrt{u}$ y $dx = du/2$, sustituir para obtener

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2x-1}\,dx &= \int \sqrt{u}\left(\frac{du}{2}\right) && \text{Integrar en términos de } u.\\
&= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du && \text{Regla del múltiplo constante.}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C && \text{Antiderivada en términos de } u.\\
&= \frac{1}{3}u^{3/2} + C && \text{Simplificar.}\\
&= \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C. && \text{Antiderivada en términos de } x.
\end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO Como la integración suele ser más difícil que la derivación, verificar la respuesta en un problema de integración mediante la derivación. Así, en el ejemplo 4 debe derivarse $\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C$ para verificar que se obtiene el integrando original.

EJEMPLO 5 Cambio de variables

Encontrar $\int x\sqrt{2x-1}\,dx.$

Solución Como en el ejemplo previo, considerar que $u = 2x - 1$ para obtener $dx = du/2$. Como el integrando contiene un factor de x, se tiene que despejar x en términos de u, como se muestra.

$$u = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad x = (u+1)/2 \qquad \text{Resolver para } x \text{ en términos de } u.$$

Después de esto, utilizando la sustitución, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{2x-1}\,dx &= \int \left(\frac{u+1}{2}\right)u^{1/2}\left(\frac{du}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\int (u^{3/2} + u^{1/2})\,du\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C\\
&= \frac{1}{10}(2x-1)^{5/2} + \frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

Para completar el cambio de variable en el ejemplo 5, debe resolverse para x en términos de u. Algunas veces esto es muy difícil. Por fortuna no siempre es necesario, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Cambio de variables

Determinar $\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x \, dx$.

Solución Debido a que $\operatorname{sen}^2 3x = (\operatorname{sen} 3x)^2$, podemos tomar $u = \operatorname{sen} 3x$. Entonces

$$du = (\cos 3x)(3)\, dx.$$

Luego, debido a que $\cos 3x\, dx$ es parte de la integral original, puede escribirse

$$\frac{du}{3} = \cos 3x\, dx.$$

Sustituyendo u y $du/3$ en la integral original, se obtiene

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\, dx &= \int u^2 \frac{du}{3}\\ &= \frac{1}{3}\int u^2\, du\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{u^3}{3}\right) + C\\ &= \frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x + C.\end{aligned}$$

Es posible verificar lo anterior derivando.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x\right] &= \left(\frac{1}{9}\right)(3)(\operatorname{sen} 3x)^2(\cos 3x)(3)\\ &= \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\end{aligned}$$

Como la derivación produce el integrando original, se ha obtenido la antiderivada o primitiva correcta.

AYUDA DE ESTUDIO Cuando se realiza un cambio de variable, cerciorarse de que la respuesta se escriba utilizando las mismas variables que en el integrando original. Así, en el ejemplo 6, no debe dejarse la respuesta como

$$\tfrac{1}{9}u^3 + C$$

sino más bien, reemplazar u por $\operatorname{sen} 3x$.

Los pasos que se utilizan para la integración por sustitución se resumen en la siguiente guía.

Estrategia para realizar un cambio de variable

1. Elegir una sustitución $u = g(x)$. Usualmente, es mejor elegir la parte *interna* de una función compuesta, tal como una cantidad elevada a una potencia.
2. Calcular $du = g'(x)dx$.
3. Reescribir la integral en términos de la variable u.
4. Encontrar la integral resultante en términos de u.
5. Reemplazar u por $g(x)$ para obtener una antiderivada o primitiva en términos de x.
6. Verificar la respuesta por derivación.

La regla general de la potencia para integrales

Una de las sustituciones de u más comunes incluye cantidades en el integrando que se elevan a una potencia. Debido a la importancia de este tipo de sustitución, se le da un nombre especial: la **regla general de la potencia para integrales**. Una prueba de esta regla sigue directamente de la regla (simple) de la potencia para la integración, junto con el teorema 4.13.

TEOREMA 4.14 LA REGLA GENERAL DE LA POTENCIA PARA INTEGRALES

Si g es una función derivable de x, entonces

$$\int [g(x)]^n g'(x)\, dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

De manera equivalente, si $u = g(x)$, entonces

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

EJEMPLO 7 Sustitución y regla general de la potencia

a) $$\int 3(3x-1)^4\, dx = \int \overbrace{(3x-1)^4}^{u^4}\overbrace{(3)\, dx}^{du} = \overbrace{\frac{(3x-1)^5}{5}}^{u^5/5} + C$$

b) $$\int (2x+1)(x^2+x)\, dx = \int \overbrace{(x^2+x)^1}^{u^1}\overbrace{(2x+1)\, dx}^{du} = \overbrace{\frac{(x^2+x)^2}{2}}^{u^2/2} + C$$

c) $$\int 3x^2\sqrt{x^3-2}\, dx = \int \overbrace{(x^3-2)^{1/2}}^{u^{1/2}}\overbrace{(3x^2)\, dx}^{du} = \overbrace{\frac{(x^3-2)^{3/2}}{3/2}}^{u^{3/2}/(3/2)} + C = \frac{2}{3}(x^3-2)^{3/2} + C$$

d) $$\int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2}\, dx = \int \overbrace{(1-2x^2)^{-2}}^{u^{-2}}\overbrace{(-4x)\, dx}^{du} = \overbrace{\frac{(1-2x^2)^{-1}}{-1}}^{u^{-1}/(-1)} + C = -\frac{1}{1-2x^2} + C$$

e) $$\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx = -\int \overbrace{(\cos x)^2}^{u^2}\overbrace{(-\operatorname{sen} x)\, dx}^{du} = -\overbrace{\frac{(\cos x)^3}{3}}^{u^3/3} + C$$

Algunas integrales cuyos integrandos incluyen cantidades elevadas a potencias no pueden determinarse mediante la regla general de la potencia. Considerar las dos integrales

$$\int x(x^2+1)^2\, dx \quad \text{y} \quad \int (x^2+1)^2\, dx.$$

La sustitución $u = x^2 + 1$ funciona en la primera integral pero no en la segunda. En la segunda, la sustitución falla porque al integrando le falta el factor x necesario para formar du. Por fortuna, *esta integral particular* puede hacerse desarrollando el integrando como $(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$ y utilizando la regla (simple) de la potencia para integrar cada término.

EXPLORACIÓN

Suponer que se pide encontrar una de las siguientes integrales. ¿Cuál elegiría? Explicar la respuesta.

a) $\int \sqrt{x^3+1}\, dx$ o

$\int x^2\sqrt{x^3+1}\, dx$

b) $\int \tan(3x)\sec^2(3x)\, dx$ o

$\int \tan(3x)\, dx$

Cambio de variable para integrales definidas

Cuando se usa la sustitución de u en una integral definida, muchas veces es conveniente determinar los límites de integración para la variable u en vez de convertir la antiderivada o primitiva de nuevo a la variable x y calcularla en los límites originales. Este cambio de variable se establece explícitamente en el siguiente teorema. La demostración sigue del teorema 4.13 en combinación con el teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA 4.15 CAMBIO DE VARIABLE PARA INTEGRALES DEFINIDAS

Si la función $u = g(x)$ tiene una derivada continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y f es continua en el recorrido o rango de g, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

EJEMPLO 8 Cambio de variables

Calcular $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx.$

Solución Para calcular esta integral, sea $u = x^2 + 1$. Después,

$$u = x^2 + 1 \implies du = 2x\,dx.$$

Antes de sustituir, determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = 0$, $u = 0^2 + 1 = 1$.	Cuando $x = 1$, $u = 1^2 + 1 = 2$.

Ahora, es posible sustituir para obtener

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^3(2x)\,dx$$

Límites de integración para x.

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\,du$$

Límites de integración para u.

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{15}{8}.$$

Intentar reescribir la antiderivada o primitiva $\frac{1}{2}(u^4/4)$ en términos de la variable x y calcular la integral definida en los límites originales de integración, como se muestra.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

Notar que se obtiene el mismo resultado.

EJEMPLO 9 Cambio de variables

Calcular $A = \displaystyle\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx.$

Solución Para calcular esta integral, considerar que $u = \sqrt{2x-1}$. Después, obtener

$$\begin{aligned} u^2 &= 2x - 1 \\ u^2 + 1 &= 2x \\ \frac{u^2+1}{2} &= x \\ u\,du &= dx. \end{aligned}$$

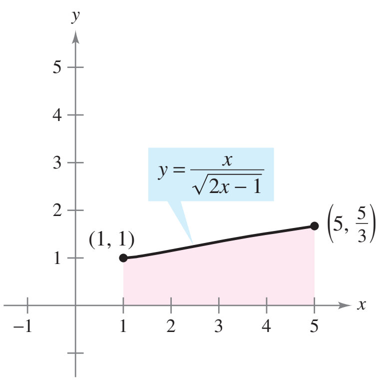
Diferenciar cada lado.

Antes de sustituir, determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = 1,\; u = \sqrt{2-1} = 1.$	Cuando $x = 5,\; u = \sqrt{10-1} = 3.$

Ahora, sustituir para obtener

$$\begin{aligned} \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx &= \int_1^3 \frac{1}{u}\left(\frac{u^2+1}{2}\right) u\,du \\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 (u^2+1)\,du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3} + u\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2}\left(9 + 3 - \frac{1}{3} - 1\right) \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$



La región antes de la sustitución tiene un área de $\frac{16}{3}$
Figura 4.38

Geométricamente, es posible interpretar la ecuación

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \int_1^3 \frac{u^2+1}{2}\,du$$

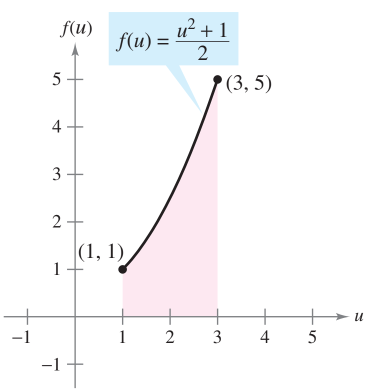
en el sentido de que las dos regiones *diferentes* que se ilustran en las figuras 4.38 y 4.39 tienen la *misma* área.

Al calcular integrales definidas por cambio de variable (sustitución), es posible que el límite superior de integración correspondiente a la nueva variable u sea más pequeño que el límite inferior. Si esto ocurre, no hay que reordenar los límites. Simplemente se calcula la integral de la manera usual. Por ejemplo, después de sustituir $u = \sqrt{1-x}$ en la integral

$$\int_0^1 x^2(1-x)^{1/2}\,dx$$

se obtiene $u = \sqrt{1-1} = 0$ cuando $x = 1$, y $u = \sqrt{1-0} = 1$ cuando $x = 0$. De tal modo, la forma correcta de esta integral en la variable u es

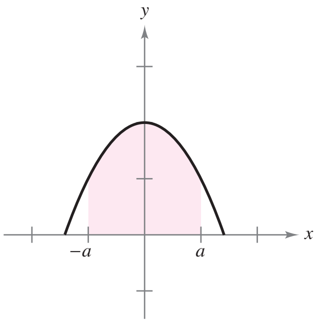
$$-2\int_1^0 (1-u^2)^2u^2\,du.$$



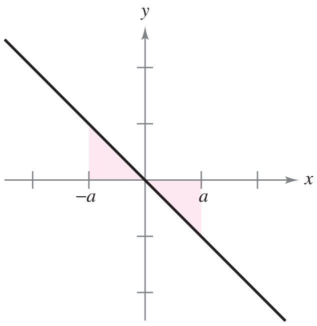
La región después de la sustitución tiene un área de $\frac{16}{3}$
Figura 4.39

Integración de funciones pares e impares

Incluso con un cambio de variable, la integración puede ser difícil. En ocasiones se puede simplificar el cálculo de una integral definida (en un intervalo que es simétrico respecto al eje y o respecto al origen) reconociendo que el integrando es una función par o impar (ver la figura 4.40).



Función par



Función impar
Figura 4.40

TEOREMA 4.16 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES PARES E IMPARES

Sea f integrable en el intervalo cerrado $[-a, a]$.

1. Si f es una función *par*, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

2. Si f es una función *impar*, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

DEMOSTRACIÓN Como f es par, se sabe que $f(x) = f(-x)$. Utilizando el teorema 4.13 con la sustitución $u = -x$, se obtiene

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = -\int_{a}^{0} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Por último, utilizando el teorema 4.6, se llega a

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Esto demuestra la primera propiedad. La demostración de la segunda propiedad se deja al lector (ver el ejercicio 137).

EJEMPLO 10 Integración de una función impar

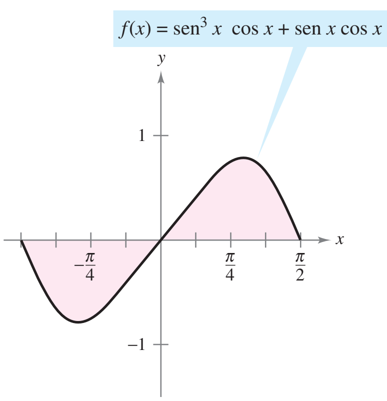
Calcular $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x)\,dx.$

Solución Haciendo $f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x$ se obtiene

$$\begin{aligned} f(-x) &= \operatorname{sen}^3(-x)\cos(-x) + \operatorname{sen}(-x)\cos(-x)\\ &= -\operatorname{sen}^3 x \cos x - \operatorname{sen} x \cos x = -f(x).\end{aligned}$$

De tal modo, f es una función impar, y debido a que f es simétrica respecto al origen en $[-\pi/2, \pi/2]$, es posible aplicar el teorema 4.16 para concluir que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x)\,dx = 0.$$



Como f es una función impar,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx = 0$$

Figura 4.41

NOTA De acuerdo con la figura 4.41 puede verse que las dos regiones a cualquier lado del eje tienen la misma área. Sin embargo, como una se encuentra por debajo del eje x y otra está por encima del mismo, la integración produce un efecto de cancelación. (Se verá más al respecto en la sección 7.1.)

4.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, completar la tabla identificando *u* y *du* para la integral.

	$\int f(g(x))g'(x)\,dx$	$u = g(x)$	$du = g'(x)\,dx$
1.	$\int (8x^2+1)^2(16x)\,dx$		
2.	$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$		
3.	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$		
4.	$\int \sec 2x \tan 2x\,dx$		
5.	$\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx$		
6.	$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$		

En los ejercicios 7 a 10, determinar qué se necesita para usar sustitución para calcular la integral. (No calcular la integral.)

7. $\int \sqrt{x}(6-x)\,dx$ **8.** $\int x\sqrt{x+4}\,dx$

9. $\int x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$ **10.** $\int x\cos x^2\,dx$

En los ejercicios 11 a 38, encontrar la integral indefinida y verificar el resultado por derivación.

11. $\int (1+6x)^4(6)\,dx$ **12.** $\int (x^2-9)^3(2x)\,dx$

13. $\int \sqrt{25-x^2}\,(-2x)\,dx$ **14.** $\int \sqrt[3]{3-4x^2}(-8x)\,dx$

15. $\int x^3(x^4+3)^2\,dx$ **16.** $\int x^2(x^3+5)^4\,dx$

17. $\int x^2(x^3-1)^4\,dx$ **18.** $\int x(5x^2+4)^3\,dx$

19. $\int t\sqrt{t^2+2}\,dt$ **20.** $\int t^3\sqrt{t^4+5}\,dt$

21. $\int 5x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ **22.** $\int u^2\sqrt{u^3+2}\,du$

23. $\int \frac{x}{(1-x^2)^3}\,dx$ **24.** $\int \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,dx$

25. $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$ **26.** $\int \frac{x^2}{(16-x^3)^2}\,dx$

27. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **28.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$

29. $\int \left(1+\frac{1}{t}\right)^3\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$ **30** $\int \left[x^2+\frac{1}{(3x)^2}\right]dx$

31. $\int \frac{1}{\sqrt{2x}}\,dx$ **32.** $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

33. $\int \frac{x^2+5x-8}{\sqrt{x}}\,dx$ **34.** $\int \frac{t-9t^2}{\sqrt{t}}\,dt$

35. $\int t^2\left(t-\frac{8}{t}\right)dt$ **36.** $\int \left(\frac{t^3}{3}+\frac{1}{4t^2}\right)dt$

37. $\int (9-y)\sqrt{y}\,dy$ **38.** $\int 4\pi y(6+y^{3/2})\,dy$

En los ejercicios 39 a 42, resolver la ecuación diferencial.

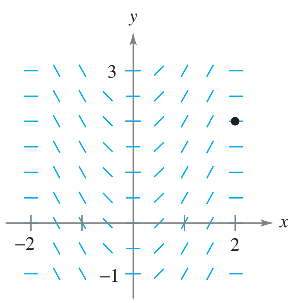
39. $\frac{dy}{dx} = 4x + \frac{4x}{\sqrt{16-x^2}}$ **40.** $\frac{dy}{dx} = \frac{10x^2}{\sqrt{1+x^3}}$

41. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}$ **42.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+1}}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 43 a 46, se indican una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. Un *campo de pendientes* consiste en segmentos de recta con pendientes dadas por la ecuación diferencial. Estos segmentos de recta proporcionan una perspectiva visual de las direcciones de las soluciones de la ecuación diferencial. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto dado. *b*) Utilizar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representar la solución. Comparar el resultado con los dibujos del apartado *a*).**

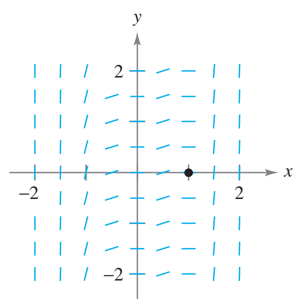
43. $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{4-x^2}$

$(2, 2)$



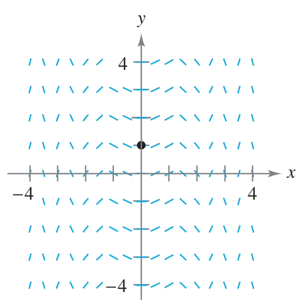
44. $\frac{dy}{dx} = x^2(x^3-1)^2$

$(1, 0)$



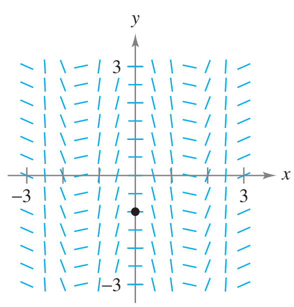
45. $\frac{dy}{dx} = x\cos x^2$

$(0, 1)$



46. $\frac{dy}{dx} = -2\sec(2x)\tan(2x)$

$(0, -1)$



En los ejercicios 47 a 60, encontrar la integral indefinida.

47. $\int \pi \operatorname{sen} \pi x \, dx$

48. $\int 4x^3 \operatorname{sen} x^4 \, dx$

49. $\int \operatorname{sen} 4x \, dx$

50. $\int \cos 8x \, dx$

51. $\int \frac{1}{\theta^2} \cos \frac{1}{\theta} \, d\theta$

52. $\int x \operatorname{sen} x^2 \, dx$

53. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x \, dx$

54. $\int \sec(1 - x) \tan(1 - x) \, dx$

55. $\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$

56. $\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x \, dx$

57. $\int \frac{\csc^2 x}{\cot^3 x} \, dx$

58. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \, dx$

59. $\int \cot^2 x \, dx$

60. $\int \csc^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

En los ejercicios 61 a 66, encontrar una ecuación para la función *f* que tiene la derivada dada y cuya gráfica pasa por el punto indicado.

	Derivada	*Punto*
61.	$f'(x) = -\operatorname{sen} \frac{x}{2}$	$(0, 6)$
62.	$f'(x) = \pi \sec \pi x \tan \pi x$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
63.	$f'(x) = 2 \operatorname{sen} 4x$	$\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right)$
64.	$f'(x) = \sec^2(2x)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$
65.	$f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2$	$(2, 10)$
66.	$f'(x) = -2x\sqrt{8 - x^2}$	$(2, 7)$

En los ejercicios 67 a 74, encontrar la integral indefinida mediante el método que se muestra en el ejemplo 5.

67. $\int x\sqrt{x + 6} \, dx$

68. $\int x\sqrt{4x + 1} \, dx$

69. $\int x^2\sqrt{1 - x} \, dx$

70. $\int (x + 1)\sqrt{2 - x} \, dx$

71. $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2x - 1}} \, dx$

72. $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 4}} \, dx$

73. $\int \frac{-x}{(x + 1) - \sqrt{x + 1}} \, dx$

74. $\int t \sqrt[3]{t + 10} \, dt$

En los ejercicios 75 a 86, calcular la integral definida. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

75. $\int_{-1}^{1} x(x^2 + 1)^3 \, dx$

76. $\int_{-2}^{4} x^2(x^3 + 8)^2 \, dx$

77. $\int_{1}^{2} 2x^2\sqrt{x^3 + 1} \, dx$

78. $\int_{0}^{1} x\sqrt{1 - x^2} \, dx$

79. $\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} \, dx$

80. $\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{1 + 2x^2}} \, dx$

81. $\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}\left(1 + \sqrt{x}\right)^2} \, dx$

82. $\int_{0}^{2} x \sqrt[3]{4 + x^2} \, dx$

83. $\int_{1}^{2} (x - 1)\sqrt{2 - x} \, dx$

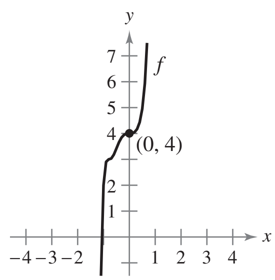
84. $\int_{1}^{5} \frac{x}{\sqrt{2x - 1}} \, dx$

85. $\int_{0}^{\pi/2} \cos\left(\frac{2x}{3}\right) dx$

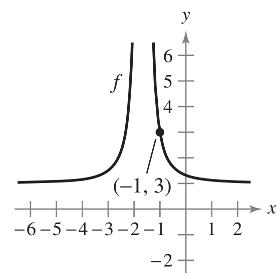
86. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} (x + \cos x) \, dx$

Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 87 a 90, se muestra la gráfica de una función *f*. Emplear la ecuación diferencial y el punto dado para determinar una ecuación de la función.**

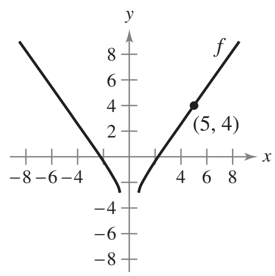
87. $\frac{dy}{dx} = 18x^2(2x^3 + 1)^2$



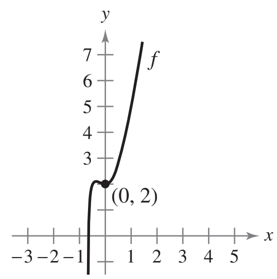
88. $\frac{dy}{dx} = \frac{-48}{(3x + 5)^3}$



89. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - 1}}$

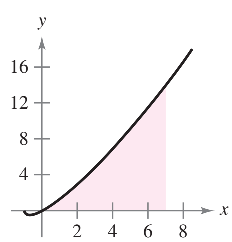


90. $\frac{dy}{dx} = 4x + \frac{9x^2}{(3x^3 + 1)^{(3/2)}}$

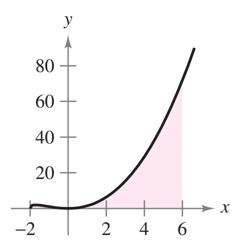


En los ejercicios 91 a 96, encontrar el área de la región. Emplear una herramienta de graficación para verificar el resultado.

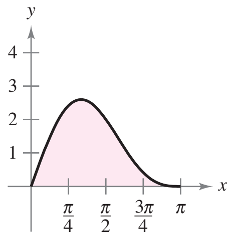
91. $\int_{0}^{7} x \sqrt[3]{x + 1} \, dx$



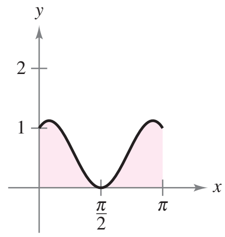
92. $\int_{-2}^{6} x^2 \sqrt[3]{x + 2} \, dx$



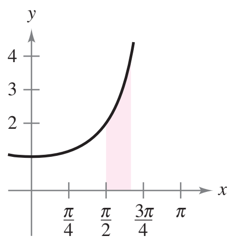
93. $y = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$



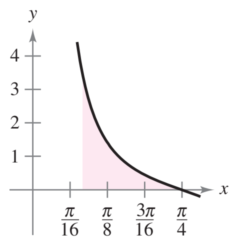
94. $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$



95. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$



96. $\displaystyle\int_{\pi/12}^{\pi/4} \csc 2x \cot 2x\, dx$



En los ejercicios 97 a 102, utilizar una herramienta de graficación para evaluar la integral. Hacer la gráfica de la región cuya área está dada por la integral definida.

97. $\displaystyle\int_0^6 \frac{x}{\sqrt{4x+1}}\, dx$ **98.** $\displaystyle\int_0^2 x^3\sqrt{2x+3}\, dx$

99. $\displaystyle\int_3^7 x\sqrt{x-3}\, dx$ **100.** $\displaystyle\int_1^5 x^2\sqrt{x-1}\, dx$

101. $\displaystyle\int_1^4 \left(\theta + \operatorname{sen}\frac{\theta}{4}\right) d\theta$ **102.** $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos 3x\, dx$

En los ejercicios 103 a 106, calcular la integral utilizando las propiedades de las funciones pares e impares como una ayuda.

103. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2(x^2+1)\, dx$ **104.** $\displaystyle\int_{-2}^{2} x(x^2+1)^3\, dx$

105. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$ **106.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

107. Usar $\int_0^4 x^2\, dx = \frac{64}{3}$ para calcular cada integral indefinida sin usar el teorema fundamental del cálculo.

a) $\displaystyle\int_{-4}^{0} x^2\, dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-4}^{4} x^2\, dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{4} -x^2\, dx$ *d)* $\displaystyle\int_{-4}^{0} 3x^2\, dx$

108. Emplear la simetría de las gráficas de las funciones seno y coseno como ayuda para el cálculo de cada integral definida.

a) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{sen} x\, dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx$ *d)* $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

En los ejercicios 109 y 110, escribir la integral como la suma de la integral de una función impar y la integral de una función par. Utilizar esta simplificación para calcular la integral.

109. $\displaystyle\int_{-3}^{3} (x^3 + 4x^2 - 3x - 6)\, dx$ **110.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen} 4x + \cos 4x)\, dx$

Desarrollo de conceptos

111. Describir por qué

$$\int x(5-x^2)^3\, dx \neq \int u^3\, du$$

donde $u = 5 - x^2$.

112. Sin integrar, explicar por qué

$$\int_{-2}^{2} x(x^2+1)^2\, dx = 0.$$

113. Si f es continua y $\displaystyle\int_0^8 f(x)\, dx = 32$, encontrar $\displaystyle\int_0^4 f(2x)\, dx$.

Para discusión

114. ***Escribir*** Encontrar la integral indefinida en dos formas. Explicar alguna diferencia en las formas de la respuesta.

a) $\displaystyle\int (2x-1)^2\, dx$ *b)* $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

c) $\displaystyle\int \tan x \sec^2 x\, dx$

115. ***Flujo de efectivo*** La tasa de desembolso de dQ/dt de una donación federal de 2 millones de dólares es proporcional al cuadrado de $100 - t$. El tiempo t se mide en días ($0 \le t \le 100$) y Q es la cantidad que queda para ser desembolsada. Determinar la cantidad que queda para desembolsarse después de 50 días. Suponer que todo el dinero se gastará en 100 días.

116. ***Depreciación*** La tasa de depreciación dV/dt de una máquina es inversamente proporcional al cuadrado de $t + 1$, donde V es el valor de la máquina t años después de que se compró. El valor inicial de la máquina fue de 500 000 dólares, y su valor decreció 100 000 dólares en el primer año. Estimar su valor después de 4 años.

117. ***Precipitación*** La precipitación mensual normal en el aeropuerto de Seattle-Tacoma puede aproximarse mediante el modelo

$R = 2.876 + 2.202 \operatorname{sen}(0.576t + 0.847)$

donde R se mide en pulgadas y t es el tiempo en meses, con $t = 0$ correspondiente al 1 de enero. (*Fuente: U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration*)

a) Determinar los extremos de la función en el periodo de un año.

b) Emplear integración para aproximar la precipitación anual normal. (*Sugerencia:* Integrar sobre el intervalo [0, 12].)

c) Aproximar el promedio de la precipitación mensual durante los meses de octubre, noviembre y diciembre.

118. ***Ventas*** Las ventas S (en miles de unidades) de un producto de temporada están dadas por el modelo

$$S = 74.50 + 43.75 \text{ sen } \frac{\pi t}{6}$$

donde t es el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiente a enero. Determinar las ventas medias para cada periodo.

a) El primer trimestre $(0 \leq t \leq 3)$
b) El segundo trimestre $(3 \leq t \leq 6)$
c) El año completo $(0 \leq t \leq 12)$

119. ***Suministro de agua*** Un modelo para la tasa de flujo de agua en una estación de bombeo en un día determinado es

$$R(t) = 53 + 7 \text{ sen}\left(\frac{\pi t}{6} + 3.6\right) + 9 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + 8.9\right)$$

donde $0 \leq t \leq 24$. R es la tasa de flujo en miles de galones por hora y t es el tiempo en horas.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función de la tasa de flujo y aproximar la tasa de flujo máximo en la estación de bombeo.
b) Aproximar el volumen total del agua bombeada en un día.

120. ***Electricidad*** La intensidad de corriente alterna en un circuito eléctrico es

$$I = 2 \text{ sen}(60\pi t) + \cos(120\pi t)$$

donde I se mide en amperes y t se mide en segundos. Determinar la intensidad media para cada intervalo de tiempo.

a) $0 \leq t \leq \frac{1}{60}$
b) $0 \leq t \leq \frac{1}{240}$
c) $0 \leq t \leq \frac{1}{30}$

Probabilidad **En los ejercicios 121 y 122, la función**

$$f(x) = kx^n(1 - x)^m, \quad 0 \leq x \leq 1$$

donde $n > 0$, $m > 0$ y k es una constante, puede utilizarse para representar diversas distribuciones de probabilidad. Si k se elige de manera tal que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1$$

la probabilidad de que x caerá entre a y b $(0 \leq a \leq b \leq 1)$ es

$$P_{a,b} = \int_a^b f(x)\, dx.$$

121. La probabilidad de que una persona recuerde entre $100a\%$ y $100b\%$ del material aprendido en un experimento es

$$P_{a,b} = \int_a^b \frac{15}{4} x\sqrt{1 - x}\, dx$$

donde x representa el porcentaje recordado. (Ver la figura.)

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo elegido al azar recuerde entre 50 y 75% del material?
b) ¿Cuál es el porcentaje medio de lo que se recuerda? Esto es, ¿para qué valor de b es cierto que la probabilidad de recordar de 0 a b es 0.5?

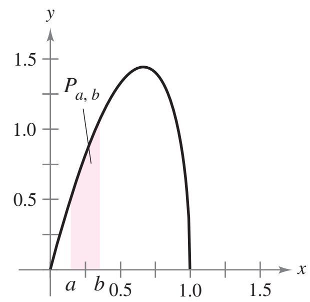


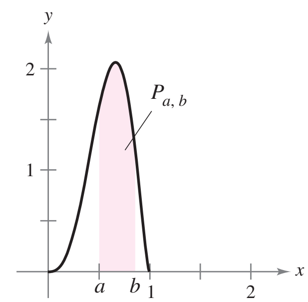
Figura para 121

122. La probabilidad de que se tomen muestras de un mineral de una región que contiene entre $100a\%$ y $100b\%$ de hierro es

$$P_{a,b} = \int_a^b \frac{1\,155}{32} x^3(1 - x)^{3/2}\, dx$$

donde x representa el porcentaje de hierro. (Ver la figura.) ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contendrá entre

a) 0 y 25% de hierro?
b) 50 y 100% de hierro?



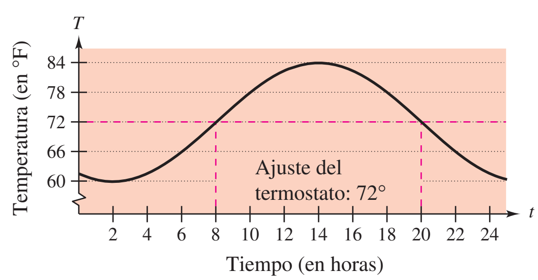
123. ***Temperatura*** La temperatura en grados Fahrenheit en una casa es

$$T = 72 + 12 \text{ sen}\left[\frac{\pi(t - 8)}{12}\right]$$

donde t es el tiempo en horas, con $t = 0$ representando la media noche. El costo horario de refrigeración de una casa es de 0.10 dólares por grado.

a) Encontrar el costo C de refrigeración de la casa si el termostato se ajusta en 72°F calculando la integral

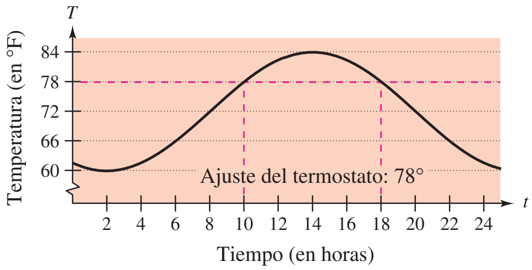
$$C = 0.1\int_8^{20} \left[72 + 12 \text{ sen } \frac{\pi(t - 8)}{12} - 72\right] dt. \text{ (Ver la figura.)}$$



b) Encontrar el ahorro al reajustar el termostato en 78 °F calculando la integral

$$C = 0.1\int_{10}^{18}\left[72 + 12 \operatorname{sen}\frac{\pi(t-8)}{12} - 78\right] dt.$$

(Ver la figura.)



124. ***Manufactura*** Un fabricante de fertilizantes encuentra que las ventas nacionales de fertilizantes siguen el patrón estacional

$$F = 100\,000\left[1 + \operatorname{sen}\frac{2\pi(t-60)}{365}\right]$$

donde F se mide en libras y t representa el tiempo en días, con $t = 1$ correspondiente al 1 de enero. El fabricante desea establecer un programa para producir una cantidad uniforme de fertilizante cada día. ¿Cuál debe ser esta cantidad?

125. ***Análisis gráfico*** Considerar las funciones f y g, donde

$$f(x) = 6 \operatorname{sen} x \cos^2 x \quad \text{y} \quad g(t) = \int_0^t f(x)\, dx.$$

a) Emplear una herramienta de graficación para representar f y g en la misma ventana de observación.

b) Explicar por qué g es no negativa.

c) Identificar los puntos sobre la gráfica de g que corresponden a los extremos de f.

d) ¿Cada uno de los ceros de f corresponden a un extremo de g? Explicar.

e) Considerar la función

$$h(t) = \int_{\pi/2}^{t} f(x)\, dx.$$

Utilizar una herramienta de graficación para representar h. ¿Cuál es la relación entre g y h? Verificar la suposición.

126. Determinar $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}(i\pi/n)}{n}$ evaluando una integral definida apropiada sobre el intervalo [0, 1].

127. *a*) Demostrar que $\int_0^1 x^2(1-x)^5\, dx = \int_0^1 x^5(1-x)^2\, dx.$

b) Demostrar que $\int_0^1 x^a(1-x)^b\, dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\, dx.$

128. *a*) Demostrar que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx.$

b) Demostrar que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$, donde n es un entero positivo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 129 a 134, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

129. $\int (2x+1)^2\, dx = \frac{1}{3}(2x+1)^3 + C$

130. $\int x(x^2+1)\, dx = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right) + C$

131. $\int_{-10}^{10} (ax^3 + bx^2 + cx + d)\, dx = 2\int_0^{10} (bx^2 + d)\, dx$

132. $\int_a^b \operatorname{sen} x\, dx = \int_a^{b+2\pi} \operatorname{sen} x\, dx$

133. $4\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = -\cos 2x + C$

134. $\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\, dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2x + C$

135. Suponer que f es continua en todos lados y que c es una constante. Demostrar que

$$\int_{ca}^{cb} f(x)\, dx = c\int_a^b f(cx)\, dx.$$

136. *a*) Verificar que $\operatorname{sen} u - u\cos u + C = \int u \operatorname{sen} u\, du.$

b) Utilizar el apartado *a*) para demostrar que $\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}\sqrt{x}\, dx = 2\pi.$

137. Completar la prueba del teorema 4.16.

138. Demostrar que si f es continua en la recta numérica real completa, entonces

$$\int_a^b f(x+h)\, dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x)\, dx.$$

Preparación del examen Putnam

139. Si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales que satisfacen

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

demostrar que la ecuación $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ tiene al menos un cero real.

140. Encontrar todas las funciones continuas positivas $f(x)$, para $0 \le x \le 1$, tales que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1$$

$$\int_0^1 f(x)x\, dx = \alpha$$

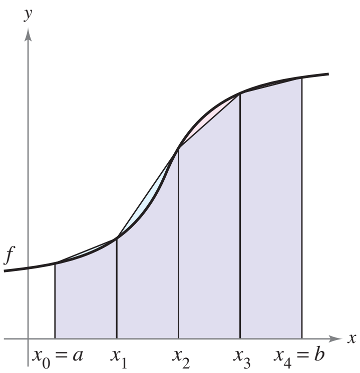
$$\int_0^1 f(x)x^2\, dx = \alpha^2$$

donde α es un número real.

4.6 Integración numérica

- **Aproximar una integral definida utilizando la regla de los trapecios.**
- **Aproximar una integral definida utilizando la regla de Simpson.**
- **Analizar los errores de aproximación en la regla de los trapecios y en la regla de Simpson.**

La regla de los trapecios



El área de la región puede aproximarse utilizando cuatro trapecios
Figura 4.42

Algunas funciones elementales simplemente no tienen antiderivadas o primitivas que sean funciones elementales. Por ejemplo, no hay función elemental que tenga alguna de las siguientes funciones como su derivada.

$$\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}, \qquad \sqrt{x}\cos x, \qquad \frac{\cos x}{x}, \qquad \sqrt{1-x^3}, \qquad \operatorname{sen} x^2$$

Si se ha de calcular una integral definida cuyo integrando no admite primitiva (antiderivada), el teorema fundamental del cálculo no es de utilidad y hay que recurrir a una técnica de aproximación. Dos de estas técnicas se describen en esta sección.

Una forma de aproximar una integral definida consiste en utilizar n trapecios, como se muestra en la figura 4.42. En la formulación de este método, se supone que f es continua y positiva en el intervalo $[a, b]$. De tal modo, la integral definida

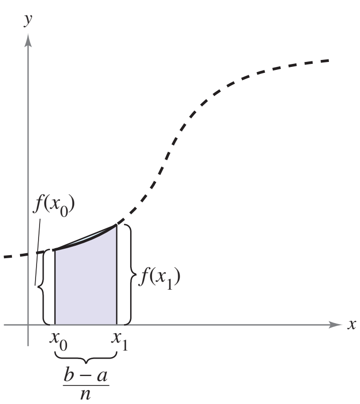
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

representa el área de la región delimitada por la gráfica de f y el eje x, desde $x = a$ hasta $x = b$. Primero, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = (b - a)/n$, de modo tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_n = b.$$

Luego se forma un trapecio para cada subintervalo (ver la figura 4.43). El área del i-ésimo trapecio es

$$\text{Área del } i\text{-ésimo trapecio} = \left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right).$$



El área del primer trapecio es

$$\left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Figura 4.43

Esto implica que la suma de las áreas de los n trapecios es

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\right] \\
&= \left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \cdot \cdot \cdot + f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\
&= \left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdot \cdot \cdot + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].
\end{aligned}$$

Haciendo $\Delta x = (b - a)/n$, puede tomarse el límite cuando $n \to \infty$ para obtener

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdot \cdot \cdot + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{[f(a) - f(b)]\,\Delta x}{2} + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{[f(a) - f(b)](b-a)}{2n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\
&\quad = 0 + \int_a^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

El resultado se resume en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.17 LA REGLA DE LOS TRAPECIOS

Sea f continua en $[a, b]$. La regla de los trapecios para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ está dada por

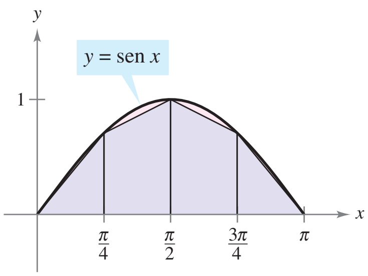
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Además, como $n \to \infty$, el lado derecho se aproxima a $\int_a^b f(x)\,dx$.

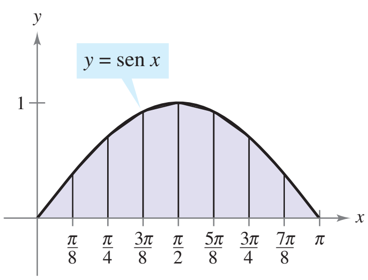
NOTA Observar que los coeficientes en la regla de los trapecios siguen el siguiente patrón.

$$1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad . \; . \; . \quad 2 \quad 2 \quad 1$$

EJEMPLO 1 Aproximación con la regla de los trapecios



Cuatro subintervalos



Ocho subintervalos

Aproximaciones trapezoidales
Figura 4.44

Utilizar la regla de los trapecios para aproximar

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx.$$

Comparar los resultados para $n = 4$ y $n = 8$, como se muestra en la figura 4.44.

Solución Cuando $n = 4$, $\Delta x = \pi/4$, y se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx &\approx \frac{\pi}{8}\left(\operatorname{sen} 0 + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\pi\right)\\ &= \frac{\pi}{8}\left(0 + \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 0\right) = \frac{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)}{4} \approx 1.896.\end{aligned}$$

Cuando $n = 8$, $\Delta x = \pi/8$, y se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\pi}{16}\Big(&\operatorname{sen} 0 + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\\ &+ 2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{7\pi}{8} + \operatorname{sen}\pi\Big)\\ = \frac{\pi}{16}\Big(&2 + 2\sqrt{2} + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + 4\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}\Big) \approx 1.974.\end{aligned}$$

Para esta integral particular, se podría haber encontrado una antiderivada y determinado que el área exacta de la región es 2.

TECNOLOGÍA La mayoría de las herramientas de graficación y de los sistemas algebraicos computarizados cuenta con programas incorporados que es posible utilizar para aproximar el valor de una integral definida. Utilizar un programa de este tipo para aproximar la integral del ejemplo 1. ¿Qué tan precisa es su aproximación?

Cuando se usa uno de estos programas, debe tenerse cuidado con sus limitaciones. Muchas veces, no se le da una indicación del grado de exactitud de la aproximación. Otras, se le puede dar una aproximación por completo equivocada. Por ejemplo, utilizar un programa de integración numérica incorporada para calcular

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\,dx.$$

La herramienta de graficación producirá un mensaje de error, ¿no es así?

Es interesante comparar la regla de los trapecios con la regla del punto medio que se dio en la sección 4.2 (ejercicios 73 a 76). En la regla de los trapecios, se promedian los valores de la función en los puntos extremos de los subintervalos, pero la regla del punto medio toma los valores de la función de los puntos medios de los subintervalos.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x \qquad \text{Regla del punto medio.}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}\right)\Delta x \qquad \text{Regla de los trapecios.}$$

NOTA Hay dos puntos importantes que deben señalarse respecto a la regla de los trapecios (o a la regla del punto medio). Primero, la aproximación tiende a volverse más exacta a medida que n aumenta. Así, en el ejemplo 1, si $n = 16$, la regla de los trapecios produce una aproximación de 1.994. Segundo, aunque podría utilizarse el teorema fundamental para calcular la integral en el ejemplo 1, este teorema no puede utilizarse para calcular una integral tan simple como $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x^2 dx$ debido a que $\operatorname{sen} x^2$ no tiene una antiderivada elemental. Sin embargo, es posible aplicar con facilidad la regla de los trapecios a esta integral. ■

Regla de Simpson

Una manera de ver la aproximación que permite la regla de trapecios de una integral definida consiste en decir que en cada subintervalo se aproxima f por medio de un polinomio de *primer* grado. En la regla de Simpson, que recibe ese nombre en honor del matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761), se lleva este procedimiento un paso adelante y aproxima f mediante polinomios de *segundo* grado.

Antes de presentar la regla de Simpson, enunciamos un teorema sobre las integrales de polinomios de grado 2 (o menor).

TEOREMA 4.18 INTEGRAL DE $p(x) = Ax^2 + Bx + C$

Si $p(x) = Ax^2 + Bx + C$, entonces

$$\int_a^b p(x)\,dx = \left(\frac{b-a}{6}\right)\left[p(a) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) + p(b)\right].$$

DEMOSTRACIÓN

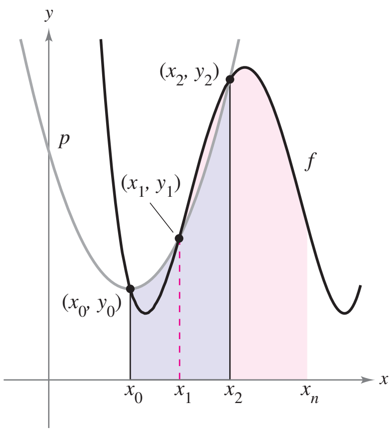
$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)\,dx &= \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx\\ &= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_a^b\\ &= \frac{A(b^3 - a^3)}{3} + \frac{B(b^2 - a^2)}{2} + C(b-a)\\ &= \left(\frac{b-a}{6}\right)[2A(a^2 + ab + b^2) + 3B(b+a) + 6C]\end{aligned}$$

Mediante la expansión y la agrupación de términos, la expresión dentro de los corchetes se convierte en

$$\underbrace{(Aa^2 + Ba + C)}_{p(a)} + \underbrace{4\left[A\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + B\left(\frac{b+a}{2}\right) + C\right]}_{4p\left(\frac{a+b}{2}\right)} + \underbrace{(Ab^2 + Bb + C)}_{p(b)}$$

y puede escribirse

$$\int_a^b p(x)\,dx = \left(\frac{b-a}{6}\right)\left[p(a) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) + p(b)\right].$$



$$\int_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx$$

Figura 4.45

Para formular la regla de Simpson con el fin de aproximar una integral definida, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Esta vez, sin embargo, se requiere que n sea par, y los subintervalos se agrupan en pares tales que

$$a = \underbrace{x_0 < x_1 < x_2}_{[x_0,\, x_2]} < \underbrace{x_3 < x_4}_{[x_2,\, x_4]} < \cdot\cdot\cdot < \underbrace{x_{n-2} < x_{n-1} < x_n}_{[x_{n-2},\, x_n]} = b.$$

En cada subintervalo (doble) $[x_{i-2}, x_i]$ puede aproximarse f por medio de un polinomio p de grado menor que o igual a 2. (Ver el ejercicio 56.) Por ejemplo, en el subintervalo $[x_0, x_2]$, elegir el polinomio de menor grado que pasa a través de los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) como se muestra en la figura 4.45. Ahora, utilizando p como una aproximación de f en este subintervalo, se tiene, por el teorema 4.18,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx &= \frac{x_2 - x_0}{6}\left[p(x_0) + 4p\left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right) + p(x_2)\right]\\ &= \frac{2[(b-a)/n]}{6}\left[p(x_0) + 4p(x_1) + p(x_2)\right]\\ &= \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right].\end{aligned}$$

Repitiendo este procedimiento en el intervalo completo $[a, b]$ se produce el siguiente teorema.

TEOREMA 4.19 LA REGLA DE SIMPSON

Sea f continua en $[a, b]$ y sea n un entero par. La regla de Simpson para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ es

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdot\cdot\cdot + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

Además, cuando $n \to \infty$, el lado derecho tiende a $\int_a^b f(x)\,dx$.

NOTA Observar que los coeficientes en la regla de Simpson tienen el siguiente patrón.

1 4 2 4 2 4 . . . 4 2 4 1

En el ejemplo 1, la regla de los trapecios se utilizó para estimar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$. En el siguiente ejemplo, se aplica la regla de Simpson a la misma integral.

EJEMPLO 2 Aproximación con la regla de Simpson

Emplear la regla de Simpson para aproximar

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx.$$

Comparar los resultados para $n = 4$ y $n = 8$.

Solución Cuando $n = 4$, se tiene

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\pi}{12}\left(\operatorname{sen} 0 + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\pi\right) \approx 2.005.$$

Cuando $n = 8$, se tiene $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx 2.0003.$

NOTA En el ejemplo 1, la regla de los trapecios con $n = 8$ aproxima $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ como 1.974. En el ejemplo 2, la regla de Simpson con $n = 8$ produjo una aproximación de 2.0003. La antiderivada o primitiva produciría el valor verdadero de 2.

Análisis de errores

Al usar una técnica de aproximación, es importante conocer la precisión del resultado. El siguiente teorema, que se enuncia sin demostración, proporciona las fórmulas para estimar los errores que implican en el uso de la regla de Simpson y de la regla de los trapecios. En general, cuando se realiza una aproximación se piensa en el error E como la diferencia entre $\int_a^b f(x)\,dx$ y la aproximación.

TEOREMA 4.20 ERRORES EN LA REGLA DE LOS TRAPECIOS Y EN LA DE SIMPSON

Si f tiene una segunda derivada continua en $[a, b]$, entonces el error E al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ por medio de la regla de los trapecios es

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}[\text{máx}\,|f''(x)|], \quad a \leq x \leq b. \quad \text{Regla de los trapecios.}$$

Además, si tiene cuarta derivada continua en $[a, b]$, entonces el error E al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la regla de Simpson es

$$|E| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4}[\text{máx}\,|f^{(4)}(x)|], \quad a \leq x \leq b. \quad \text{Regla de Simpson.}$$

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un sistema algebraico por computadora, utilizarlo para calcular la integral definida del ejemplo 3. Obtener un valor de

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] \approx 1.14779.$$

("ln" representa la función logarítmica natural, la cual se estudiará en la sección 5.1.)

El teorema 4.20 establece que los errores generados por la regla de los trapecios y la regla de Simpson tienen cotas superiores dependientes de los valores extremos de $f''(x)$ y $f^{(4)}(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Además, estos errores pueden hacerse arbitrariamente pequeños *incrementando* n, siempre que f'' y $f^{(4)}$ sean continuas y, en consecuencia, acotadas en $[a, b]$.

EJEMPLO 3 El error aproximado en la regla de los trapecios

Determinar un valor de n tal que la regla de los trapecios se aproximará al valor de $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ con un error menor que 0.01.

Solución Primero se hace $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ y se halla la segunda derivada de f.

$$f'(x) = x(1+x^2)^{-1/2} \quad \text{y} \quad f''(x) = (1+x^2)^{-3/2}$$

El valor máximo de $|f''(x)|$ en el intervalo $[0, 1]$ es $|f''(0)| = 1$. De tal modo, por el teorema 4.20, puede escribirse

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(0)| = \frac{1}{12n^2}(1) = \frac{1}{12n^2}.$$

Para obtener un error E menor que 0.01, debe elegirse n tal que $1/(12n^2) \leq 1/100$.

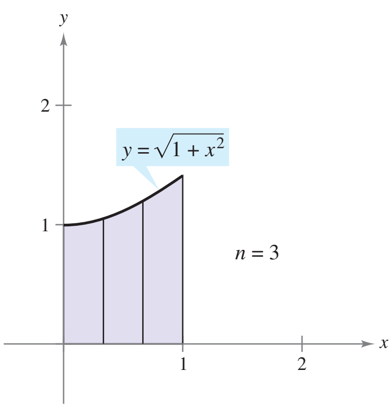
$$100 \leq 12n^2 \quad \Longrightarrow \quad n \geq \sqrt{\frac{100}{12}} \approx 2.89$$

Así, basta tomar $n = 3$ (debido a que n debe ser mayor o igual a 2.89) y aplicar la regla de los trapecios, como se ilustra en la figura 4.46, para obtener

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{6}\left[\sqrt{1+0^2} + 2\sqrt{1+\left(\tfrac{1}{3}\right)^2} + 2\sqrt{1+\left(\tfrac{2}{3}\right)^2} + \sqrt{1+1^2}\right]$$
$$\approx 1.154.$$

De tal modo que, al sumar y restar el error de esta estimación se sabe que

$$1.144 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq 1.164.$$



$$1.144 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq 1.164$$

Figura 4.46

4.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, usar la regla de los trapecios y la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral definida para un valor dado de n. Redondear la respuesta hasta cuatro decimales y comparar los resultados con el valor exacto de la integral definida.

1. $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx,\quad n=4$ **2.** $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^2}{4}+1\right)dx,\quad n=4$

3. $\displaystyle\int_0^2 x^3\,dx,\quad n=4$ **4.** $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{x^2}\,dx,\quad n=4$

5. $\displaystyle\int_1^3 x^3\,dx,\quad n=6$ **6.** $\displaystyle\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx,\quad n=8$

7. $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}\,dx,\quad n=8$ **8.** $\displaystyle\int_1^4 (4-x^2)\,dx,\quad n=6$

9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,dx,\quad n=4$ **10.** $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx,\quad n=4$

En los ejercicios 11 a 20, aproximar la integral definida utilizando la regla de los trapecios y la regla de Simpson con $n = 4$. Comparar estos resultados con la aproximación de la integral utilizando una herramienta de graficación.

11. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$ **12.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

13. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\sqrt{1-x}\,dx$ **14.** $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{x}\,\operatorname{sen} x\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \operatorname{sen} x^2\,dx$ **16.** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \tan x^2\,dx$

17. $\displaystyle\int_3^{3.1} \cos x^2\,dx$ **18.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

19. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\tan x\,dx$

20. $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx,\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$

Desarrollo de conceptos

21. La regla de los trapecios y la regla de Simpson producen aproximaciones de una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ basadas en aproximaciones polinomiales de f. ¿Qué grado de polinomio se usa para cada una?

22. Describir la dimensión del error cuando la regla de los trapecios se utiliza para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando $f(x)$ es una función lineal. Explicar el resultado con una gráfica.

En los ejercicios 23 a 28, utilizar las fórmulas de error del teorema 4.20 para estimar el error en la aproximación de la integral, con $n = 4$, utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.

23. $\displaystyle\int_1^3 2x^3\,dx$ **24.** $\displaystyle\int_3^5 (5x+2)\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx$ **28.** $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)\,dx$

En los ejercicios 29 a 34, utilizar las fórmulas del error en el teorema 4.20 con el fin de encontrar n tal que el error en la aproximación de la integral definida sea menor que 0.00001 utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.

29. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x+2}\,dx$ **32.** $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^1 \cos(\pi x)\,dx$ **34.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

CAS **En los ejercicios 35 a 38, emplear un sistema algebraico por computadora y las fórmulas del error para determinar n de manera tal que el error en la aproximación de la integral definida sea menor que 0.00001 utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.**

35. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int_0^2 (x+1)^{2/3}\,dx$

37. $\displaystyle\int_0^1 \tan x^2\,dx$ **38.** $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$

39. Aproximar el área de la región sombreada utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson con $n = 4$.

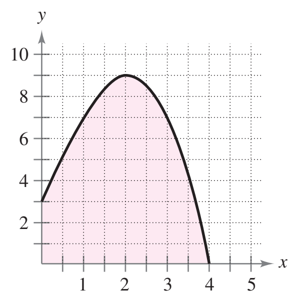


Figura para 39

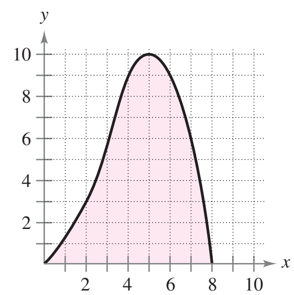


Figura para 40

40. Aproximar el área de la región sombreada utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson con $n = 8$.

41. ***Programación*** Escribir un programa para una herramienta de graficación con el fin de aproximar una integral definida utilizando la regla de los trapecios y la regla de Simpson. Empezar con el programa escrito en la sección 4.3, ejercicios 61 a 64, y advertir que la regla de los trapecios puede escribirse como $T(n) = \frac{1}{2}[I(n) + D(n)]$ y la regla de Simpson, como

$$S(n) = \tfrac{1}{3}[T(n/2) + 2M(n/2)].$$

[Recordar que $I(n)$, $M(n)$ y $D(n)$ representan las sumas de Riemann utilizando los puntos terminales del lado izquierdo, los puntos medios y los puntos terminales del lado derecho de subintervalos con igual ancho.]

Programación **En los ejercicios 42 a 44, emplear el programa en el ejercicio 41 para aproximar la integral definida y completar la tabla.**

n	$I(n)$	$M(n)$	$D(n)$	$T(n)$	$S(n)$
4					
8					
10					
12					
16					
20					

42. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2 + 3x^2}\, dx$ **43.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ **44.** $\displaystyle\int_0^4 \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx$

45. ***Área*** Emplear la regla de Simpson con $n = 14$ para aproximar el área de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x} \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi/2$.

Para discusión

46. Considerar una función $f(x)$ que es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $[0, 2]$ y la función $g(x)$ que es cóncava hacia abajo sobre $[0, 2]$.

a) Usando la regla trapezoidal, ¿qué integral sería sobreestimada? ¿Qué integral sería subestimada? Suponer $n = 4$. Usar gráficas para explicar su respuesta.

b) ¿Qué regla se usaría para mayor aproximación precisa de $\int_0^2 f(x)\, dx$ y $\int_0^2 g(x)\, dx$, la regla trapezoidal o la regla de Simpson? Explicar su razón.

47. ***Circunferencia*** La **integral elíptica**

$$8\sqrt{3} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \tfrac{2}{3} \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta$$

proporciona la circunferencia de una elipse. Emplear la regla de Simpson con $n = 8$ para aproximar la circunferencia.

48. ***Trabajo*** Para determinar el tamaño del motor requerido en la operación de una prensa, una compañía debe conocer la cantidad de trabajo realizado cuando la prensa mueve un objeto linealmente 5 pies. La fuerza variable para desplazar el objeto es $F(x) = 100x\sqrt{125 - x^3}$, donde F está dada en libras y x produce la posición de la unidad en pies. Emplear la regla de Simpson con $n = 12$ para aproximar el trabajo W (en pies-libras) realizado a través de un ciclo si $W = \int_0^5 F(x)\, dx$.

49. La tabla presenta varias mediciones recopiladas en un experimento para aproximar una función continua desconocida $y = f(x)$.

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y	4.32	4.36	4.58	5.79	6.14

x	1.25	1.50	1.75	2.00
y	7.25	7.64	8.08	8.14

a) Aproximar la integral $\int_0^2 f(x)\, dx$ utilizando la regla de los trapecios y la regla de Simpson.

b) Utilizar una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para los datos. Integrar el polinomio resultante en $[0, 2]$ y comparar el resultado con el apartado *a*).

Aproximación de Pi **En los ejercicios 50 y 51, utilizar la regla de Simpson con $n = 6$ para aproximar π utilizando la ecuación dada. (En la sección 5.7, se podrán calcular las integrales utilizando funciones trigonométricas inversas.)**

50. $\displaystyle\pi = \int_0^{1/2} \frac{6}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ **51.** $\displaystyle\pi = \int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}\, dx$

Área **En los ejercicios 52 y 53, utilizar la regla de los trapecios para estimar el número de metros cuadrados de tierra en un lote donde x y y se miden en metros, como se muestra en las figuras. La tierra es acotada por un río y dos caminos rectos que se juntan en ángulos rectos.**

52.

x	0	100	200	300	400	500
y	125	125	120	112	90	90

x	600	700	800	900	1 000
y	95	88	75	35	0

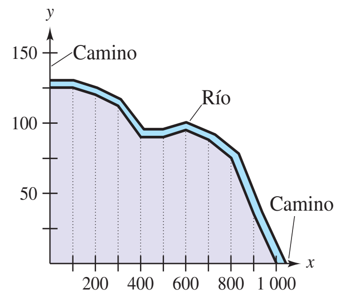


Figura para 52

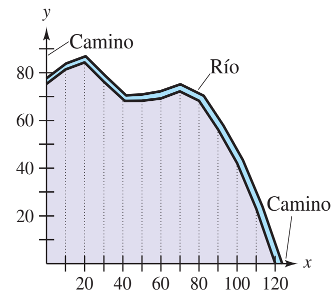


Figura para 53

53.

x	0	10	20	30	40	50	60
y	75	81	84	76	67	68	69

x	70	80	90	100	110	120
y	72	68	56	42	23	0

54. Demostrar que la regla de Simpson es exacta cuando aproxima la integral de una función polinomial cúbica, y demostrar el resultado para $\int_0^1 x^3\, dx$, $n = 2$.

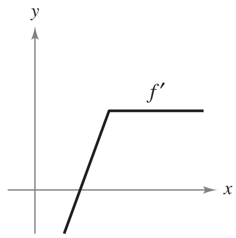
CAS **55.** Usar la regla de Simpson con $n = 10$ y un sistema algebraico por computadora para aproximar t en la ecuación integral

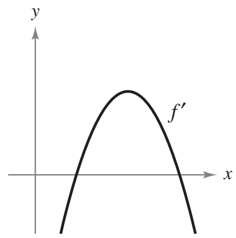
$$\int_0^t \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx = 2.$$

56. Demostrar que se puede encontrar un polinomio $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ que pasa por cualesquiera tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), donde las x_i son distintas.

4 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica de f' para dibujar una gráfica de f.

1.


2.


En los ejercicios 3 a 8, encontrar la integral indefinida.

3. $\int (4x^2 + x + 3)\, dx$

4. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{3x}}\, dx$

5. $\int \frac{x^4 + 8}{x^3}\, dx$

6. $\int \frac{x^4 - 4x^2 + 1}{x^2}\, dx$

7. $\int (2x - 9 \operatorname{sen} x)\, dx$

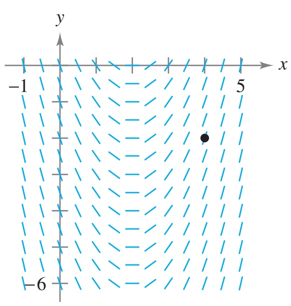
8. $\int (5 \cos x - 2 \sec^2 x)\, dx$

9. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial $f'(x) = -6x$ cuya gráfica pasa por el punto $(1, -2)$.

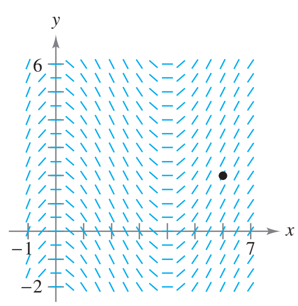
10. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial $f''(x) = 6(x - 1)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2, 1)$ y es tangente a la recta $3x - y - 5 = 0$ en ese punto.

Campos de pendientes **En los ejercicios 11 y 12 se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendiente, una de las cuales pase a través del punto indicado. *b*) Utilizar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y utilizar una herramienta de graficación para representar la solución.**

11. $\frac{dy}{dx} = 2x - 4, \quad (4, -2)$



12. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 - 2x, \quad (6, 2)$



13. ***Velocidad y aceleración*** Un avión que está despegando de una pista recorre 3 600 pies antes de elevarse. El avión parte desde el reposo, se desplaza con aceleración constante y efectúa el recorrido en 30 segundos. ¿A qué velocidad despega?

14. ***Velocidad y aceleración*** La velocidad de un automóvil que viaja en línea recta se reduce de 45 a 30 millas por hora en una distancia de 264 pies. Encontrar la distancia en la cual el automóvil puede llegar al reposo a partir de una velocidad de 30 millas por hora, suponiendo la misma desaceleración constante.

15. ***Velocidad y aceleración*** Se lanza una pelota hacia arriba verticalmente desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 96 pies por segundo.
    a) ¿Cuánto tardará la pelota en alcanzar su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?
    b) ¿Cuándo la velocidad de la pelota es la mitad de la velocidad inicial?
    c) ¿A qué altura está la pelota cuando su velocidad es la mitad de la velocidad inicial?

16. ***Modelado matemático*** La tabla muestra las velocidades (en millas por hora) de dos carros sobre una rampa de acceso a una carretera interestatal. El tiempo t está en segundos.

t	0	5	10	15	20	25	30
v_1	0	2.5	7	16	29	45	65
v_2	0	21	38	51	60	64	65

    a) Reescribir las velocidades en pies por segundo.
    b) Usar las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para encontrar los modelos cuadráticos para los datos en el apartado *a*).
    c) Aproximar la distancia recorrida por cada carro durante los 30 segundos. Explicar la diferencia en las distancias.

En los ejercicios 17 y 18, utilizar la notación sigma para escribir la suma.

17. $\frac{1}{3(1)} + \frac{1}{3(2)} + \frac{1}{3(3)} + \cdots + \frac{1}{3(10)}$

18. $\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{1+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{2+1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$

En los ejercicios 19 a 22, utilizar las propiedades de las sumas y el teorema 4.2 para calcular las sumas.

19. $\sum_{i=1}^{20} 2i$

20. $\sum_{i=1}^{20} (4i - 1)$

21. $\sum_{i=1}^{20} (i + 1)^2$

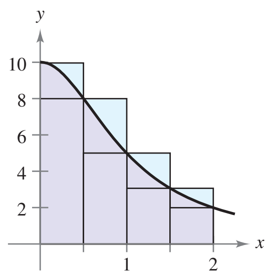
22. $\sum_{i=1}^{12} i(i^2 - 1)$

23. Escribir en notación sigma *a*) la suma de los primeros diez enteros impares positivos, *b*) la suma de los cubos de los primeros n enteros positivos y *c*) $6 + 10 + 14 + 18 + \cdots + 42$.

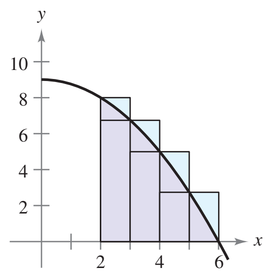
24. Calcular cada suma para $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 3$ y $x_5 = 7$.
    a) $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i$
    b) $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i}$
    c) $\sum_{i=1}^{5} (2x_i - x_i^2)$
    d) $\sum_{i=2}^{5} (x_i - x_{i-1})$

En los ejercicios 25 y 26, utilizar sumas superiores e inferiores para aproximar el área de la región utilizando el número indicado de subintervalos de igual ancho.

25. $y = \dfrac{10}{x^2 + 1}$



26. $y = 9 - \frac{1}{4}x^2$



En los ejercicios 27 a 30, recurrir al proceso de límite para determinar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo dado. Dibujar la región.

27. $y = 8 - 2x, \quad [0, 3]$

28. $y = x^2 + 3, \quad [0, 2]$

29. $y = 5 - x^2, \quad [-2, 1]$

30. $y = \frac{1}{4}x^3, \quad [2, 4]$

31. Emplear el proceso de límite para encontrar el área de la región acotada por $x = 5y - y^2$, $x = 0$, $y = 2$ y $y = 5$.

32. Considerar la región acotada por $y = mx$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$.

a) Determinar la suma superior e inferior para aproximar el área de la región cuando $\Delta x = b/4$.

b) Determinar la suma superior e inferior para aproximar el área de la región cuando $\Delta x = b/n$.

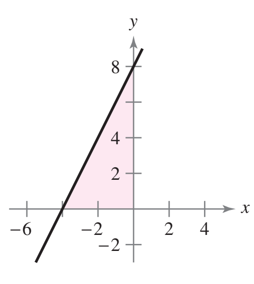
c) Encontrar el área de la región dejando que n tienda a infinito en ambas sumas en el apartado *b*). Demostrar que en cada caso se obtiene la fórmula para el área de un triángulo.

En los ejercicios 33 y 34, escribir el límite común integral definido en el intervalo [*a*, *b*], donde c_i es cualquier punto en el *i*-ésimo subintervalo.

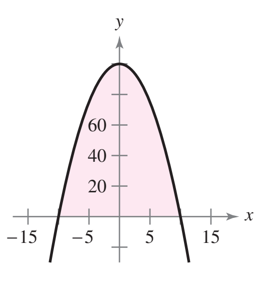
	Límite	*Intervalo*
33.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (2c_i - 3)\,\Delta x_i$	$[4, 6]$
34.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 3c_i(9 - c_i^2)\,\Delta x_i$	$[1, 3]$

En los ejercicios 35 y 36, formular una integral definida que produzca el área de la región. (No calcular la integral.)

35. $f(x) = 2x + 8$



36. $f(x) = 100 - x^2$



En los ejercicios 37 y 38, dibujar la región cuya área está dada por la integral definida. Utilizar después una fórmula geométrica para calcular la integral.

37. $\displaystyle\int_0^5 (5 - |x - 5|)\,dx$

38. $\displaystyle\int_{-6}^{6} \sqrt{36 - x^2}\,dx$

39. Dadas $\displaystyle\int_4^8 f(x)\,dx = 12$ y $\displaystyle\int_4^8 g(x)\,dx = 5$, evaluar

a) $\displaystyle\int_4^8 [f(x) + g(x)]\,dx.$

b) $\displaystyle\int_4^8 [f(x) - g(x)]\,dx.$

c) $\displaystyle\int_4^8 [2f(x) - 3g(x)]\,dx.$

d) $\displaystyle\int_4^8 7f(x)\,dx.$

40. Dadas $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = 4$ y $\displaystyle\int_3^6 f(x)\,dx = -1$, calcular

a) $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx.$

b) $\displaystyle\int_6^3 f(x)\,dx.$

c) $\displaystyle\int_4^4 f(x)\,dx.$

d) $\displaystyle\int_3^6 -10f(x)\,dx.$

En los ejercicios 41 a 48, emplear el teorema fundamental del cálculo para calcular la integral definida.

41. $\displaystyle\int_0^8 (3 + x)\,dx$

42. $\displaystyle\int_{-3}^{3} (t^2 + 1)\,dt$

43. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (4t^3 - 2t)\,dt$

44. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} (x^4 + 3x^2 - 4)\,dx$

45. $\displaystyle\int_4^9 x\sqrt{x}\,dx$

46. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx$

47. $\displaystyle\int_0^{3\pi/4} \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

48. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 t\,dt$

En los ejercicios 49 a 54, dibujar la gráfica de la región cuya área está dada por la integral, y encontrar el área.

49. $\displaystyle\int_2^4 (3x - 4)\,dx$

50. $\displaystyle\int_0^6 (8 - x)\,dx$

51. $\displaystyle\int_3^4 (x^2 - 9)\,dx$

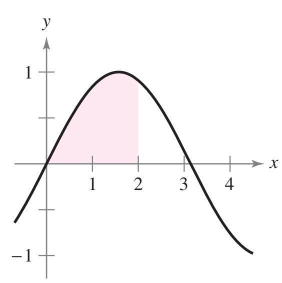
52. $\displaystyle\int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 (x - x^3)\,dx$

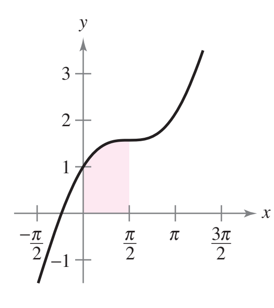
54. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,(1 - x)\,dx$

En los ejercicios 55 y 56, determinar el área de la región dada.

55. $y = \operatorname{sen} x$



56. $y = x + \cos x$



En los ejercicios 57 y 58, dibujar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y determinar su área.

57. $y = \dfrac{4}{\sqrt{x}}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 9$

58. $y = \sec^2 x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{3}$

En los ejercicios 59 y 60, encontrar el valor medio de la función sobre el intervalo indicado. Determinar los valores de x a los cuales la función toma su valor medio, y graficar la función.

59. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad [4, 9]$

60. $f(x) = x^3, \quad [0, 2]$

En los ejercicios 61 a 64, emplear el segundo teorema fundamental del cálculo para encontrar $F'(x)$.

61. $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\sqrt{1 + t^3}\, dt$

62. $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt$

63. $F(x) = \displaystyle\int_{-3}^x (t^2 + 3t + 2)\, dt$

64. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \csc^2 t\, dt$

En los ejercicios 65 a 76, encontrar la integral definida.

65. $\displaystyle\int (3 - x^2)^3\, dx$

66. $\displaystyle\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

67. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 3}}\, dx$

68. $\displaystyle\int 3x^2\sqrt{2x^3 - 5}\, dx$

69. $\displaystyle\int x(1 - 3x^2)^4\, dx$

70. $\displaystyle\int \frac{x + 4}{(x^2 + 8x - 7)^2}\, dx$

71. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$

72. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} 3x^2\, dx$

73. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}\theta}}\, d\theta$

74. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$

75. $\displaystyle\int (1 + \sec \pi x)^2 \sec \pi x \tan \pi x\, dx$

76. $\displaystyle\int \sec 2x \tan 2x\, dx$

En los ejercicios 77 a 84, calcular la integral definida. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

77. $\displaystyle\int_{-2}^{1} x(x^2 - 6)\, dx$

78. $\displaystyle\int_0^1 x^2(x^3 - 2)^3\, dx$

79. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1 + x}}\, dx$

80. $\displaystyle\int_3^6 \frac{x}{3\sqrt{x^2 - 8}}\, dx$

81. $\displaystyle 2\pi\int_0^1 (y + 1)\sqrt{1 - y}\, dy$

82. $\displaystyle 2\pi\int_{-1}^0 x^2\sqrt{x + 1}\, dx$

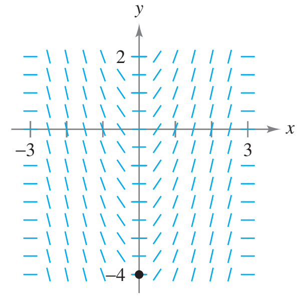
83. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\, dx$

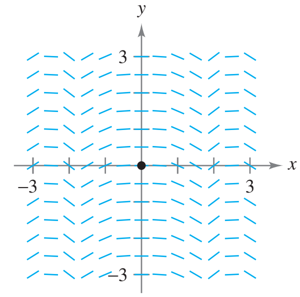
84. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{sen} 2x\, dx$

Campos de pendientes **En los ejercicios 85 y 86, se dan una ecuación diferencial y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Utilizar la integración para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y emplear una herramienta de graficación para representar la solución.**

85. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{9 - x^2}, \quad (0, -4)$

86. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}x \operatorname{sen}(x^2), \quad (0, 0)$

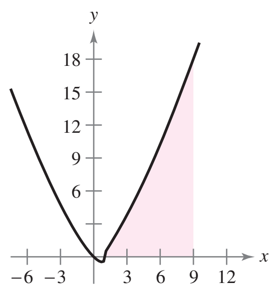


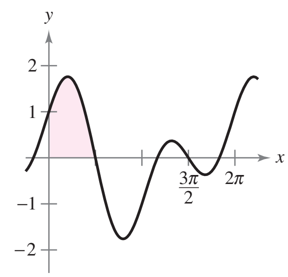


En los ejercicios 87 y 88, encontrar el área de la región. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

87. $\displaystyle\int_1^9 x\sqrt[3]{x - 1}\, dx$

88. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} [\cos x + \operatorname{sen}(2x)]\, dx$





89. ***Precipitación*** La precipitación normal mensual en Portland, Oregón, puede aproximarse mediante el modelo

$$R = 2.880 + 2.125 \operatorname{sen}(0.578t + 0.745)$$

donde R está medida en pulgadas y t es el tiempo en meses, con $t = 0$ correspondiendo al 1 de enero. (*Fuente:* U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration)

a) Escribir una integral y aproximar la precipitación normal anual.

b) Aproximar la precipitación promedio mensual durante los meses de septiembre y octubre.

90. ***Ciclo respiratorio*** Después de ejercitarse durante unos minutos, una persona tiene un ciclo respiratorio para el cual la tasa de admisión de aire es

$$v = 1.75 \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}.$$

Determinar el volumen, en litros, del aire inhalado durante un ciclo, integrando la función sobre el intervalo $[0, 2]$.

En los ejercicios 91 a 94, emplear la regla de los trapecios y la regla de Simpson con $n = 4$, y utilizar las capacidades de integración de una herramienta de graficación, para aproximar la integral definida. Comparar los resultados.

91. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{1 + x^2}\, dx$

92. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{3 - x^2}\, dx$

93. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{x}\cos x\, dx$

94. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

SP Solución de problemas

1. Sea$(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,\ x > 0.$

a) Encontrar $L(1)$.
b) Encontrar $L'(x)$ y $L'(1)$.
c) Utilizar una herramienta de graficación para aproximar el valor de x (hasta tres lugares decimales) para el cual $L(x) = 1$.
d) Demostrar que $L(x_1\ x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ para todos los valores positivos de x_1 y x_2.

2. Sea '$(x) = \int_2^x \operatorname{sen} t^2\,dt.$

a) Utilizar una herramienta de graficación para completar la tabla.

x	0	1.0	1.5	1.9	2.0
$F(x)$					

x	2.1	2.5	3.0	4.0	5.0
$F(x)$					

b) Sea $G(x) = \frac{1}{x-2}F(x) = \frac{1}{x-2}\int_2^x \operatorname{sen} t^2\,dt$. Utilizar una herramienta de graficacón para completar la tabla y estimar $\lim_{x\to 2} G(x)$.

x	1.9	1.95	1.99	2.01	2.1
$G(x)$					

c) Utilizar la definición de la derivada para encontrar el valor exacto del límite $\lim_{x\to 2} G(x)$.

En los ejercicios 3 y 4, *a*) escribir el área bajo la gráfica de la función dada definida sobre el intervalo indicado como un límite. Después *b*) calcular la suma del apartado *a*) y *c*) calcular el límite utilizando el resultado del apartado *b*).

3. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2, \quad [0, 2]$

$\left(\textit{Sugerencia: } \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\right)$

4. $y = \frac{1}{2}x^5 + 2x^3, \quad [0, 2]$

$\left(\textit{Sugerencia: } \sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}\right)$

5. La **función de Fresnel *S*** se define mediante la integral

$$x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$$

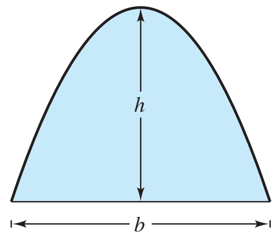
a) Hacer la gráfica de la función $= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dt$ sobre el intervalo $[0, 3]$.
b) Utilizar la gráfica del apartado *a*) para dibujar la gráfica de S en el intervalo $[0, 3]$.
c) Ubicar todos los extremos relativos de S en el intervalo $(0, 3)$.
d) Localizar todos los puntos de inflexión de S en el intervalo $(0, 3)$.

6. La **aproximación gaussiana de dos puntos** para f es

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

a) Utilizar esta fórmula para aproximar $\int_{-1}^{1} \cos x\,dx$. Encontrar el error de la aproximación.
b) Utilizar esta fórmula para aproximar $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.
c) Probar que la aproximación gaussiana de dos puntos es exacta para todos los polinomios de grado 3 o menor.

7. Arquímedes demostró que el área de un arco parabólico es igual a $\frac{2}{3}$ del producto de la base y la altura (ver la figura).



a) Graficar el arco parabólico delimitado por $y = 9 - x^2$ y el eje x. Utilizar una integral apropiada para encontrar el área A.
b) Encontrar la base y la altura del arco y verificar la fórmula de Arquímedes.
c) Demostrar la fórmula de Arquímedes para una parábola general.

8. Galileo Galilei (1564-1642) enunció la siguiente proposición relativa a los objetos en caída libre:

> *El tiempo en cualquier espacio que se recorre por un cuerpo acelerado uniformemente es igual al tiempo en el cual ese mismo espacio se recorrería por el mismo cuerpo moviéndose a una velocidad uniforme cuyo valor es la media de la velocidad más alta del cuerpo acelerado y la velocidad justo antes de que empiece la aceleración.*

Utilizar las técnicas de este capítulo para verificar esta proposición.

9. La gráfica de una función f consta de tres segmentos de recta que unen a los puntos $(0, 0)$, $(2, -2)$, $(6, 2)$ y $(8, 3)$. La función F se define por medio de la integral.

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

a) Dibujar la gráfica de f.
b) Completar la tabla.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x)$									

c) Encontrar los extremos de F en el intervalo $[0, 8]$.
d) Determinar todos los puntos de inflexión de F en el intervalo $(0, 8)$.

10. Un automóvil se desplaza en línea recta durante una hora. Su velocidad v en millas por hora en intervalos de seis minutos se muestra en la tabla.

t (horas)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
v (mi/h)	0	10	20	40	60	50

t (horas)	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
v (mi/h)	40	35	40	50	65

a) Elaborar una gráfica razonable de la función de velocidad v graficando estos puntos y conectándolos con una curva uniforme.

b) Encontrar los intervalos abiertos sobre los cuales la aceleración a es positiva.

c) Encontrar la aceleración media del automóvil (en millas por hora cuadrada) sobre el intervalo [0, 0.4].

d) ¿Qué significa la integral $\int_0^1 v(t)\,dt$? Aproximar esta integral utilizando la regla de los trapecios con cinco subintervalos.

e) Aproximar la aceleración en $t = 0.8$.

11. Demostrar que $\displaystyle\int_0^x f(t)(x-t)\,dt = \int_0^x\left(\int_0^t f(v)\,dv\right)dt.$

12. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = \tfrac{1}{2}([f(b)]^2 - [f(a)]^2).$

13. Utilizar una suma de Riemann apropiada para calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdot\cdot\cdot+\sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$

14. Utilizar una suma de Riemann apropiada para calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+3^5+\cdot\cdot\cdot+n^5}{n^6}.$$

15. Suponer que f es integrable en $[a, b]$ y $0 < m \le f(x) \le M$ para todo x en el intervalo $[a, b]$. Demostrar que

$$m(a-b) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Utilizar este resultado para estimar $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx.$

16. Sea f continua en el intervalo $[0, b]$ donde $f(x) + f(b-x) \neq 0$ en $[0, b]$.

a) Demostrar que $\displaystyle\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}\,dx = \frac{b}{2}.$

b) Utilizar el resultado del apartado *a*) para calcular

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(1-x)+\operatorname{sen} x}\,dx.$$

c) Utilizar el resultado del apartado *a*) para calcular

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}\,dx.$$

17. Verificar que

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

demostrando lo siguiente.

a) $(1+i)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$

b) $(n+1)^3 = \displaystyle\sum_{i=1}^n (3i^2+3i+1) + 1$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

18. Demostrar que si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \qquad \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

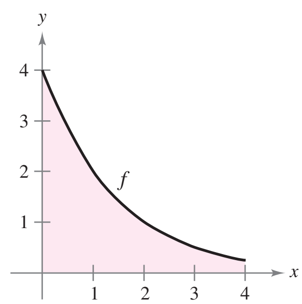
19. Sea

$$I = \int_0^4 f(x)\,dx$$

donde f se muestra en la figura. Considerar que $I(n)$ y $D(n)$ representan las sumas de Riemann utilizando los puntos extremos del lado izquierdo y los puntos terminales del lado derecho de n subintervalos de igual ancho. (Suponer que n es par.) Sean $T(n)$ y $S(n)$ los valores correspondientes de la regla de los trapecios y la regla de Simpson.

a) Para cualquier n, listar $I(n)$, $D(n)$, $T(n)$ e I en orden creciente.

b) Aproximar $S(4)$.



20. La **función integral seno**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

se utiliza a menudo en la ingeniería. La función $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ no está definida en $t = 0$, pero su límite es 1 cuando $t \to 0$. De tal modo, definir $f(0) = 1$. En ese caso f es continua en todos lados.

a) Emplear una herramienta de graficación para representar $\operatorname{Si}(x)$.

b) ¿En qué valores de x $\operatorname{Si}(x)$ tiene máximos relativos?

c) Encontrar las coordenadas del primer punto de inflexión donde $x > 0$.

d) Decidir si $\operatorname{Si}(x)$ tiene alguna asíntota horizontal. Si es así, identificar cada una.

21. Determinar los límites de integración donde $a \le b$, tal que

$$\int_a^b (x^2 - 16)\,dx$$

tiene valor mínimo.

5 Funciones logarítmica, exponencial y otras funciones trascendentes

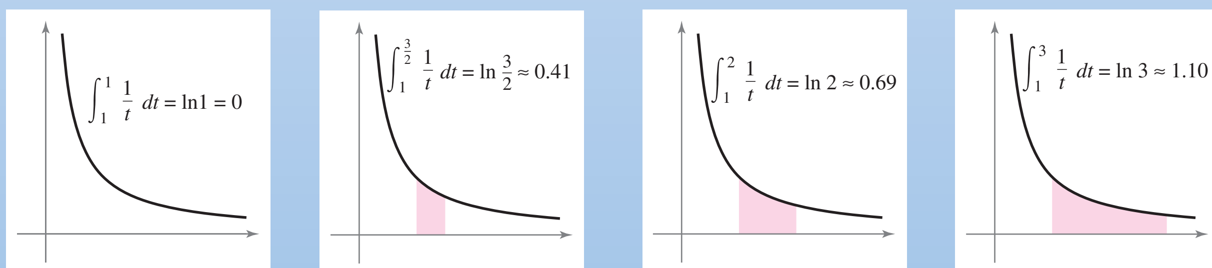
Hasta ahora en este texto, se han estudiado dos tipos de funciones elementales: funciones algebraicas y funciones trigonométricas. Este capítulo concluye la introducción de funciones elementales. Como cuando se introduce un nuevo tipo, se estudiarán sus propiedades, su derivada y su antiderivada.

En este capítulo, se aprenderá:

- Las propiedades de la función logaritmo natural. Cómo encontrar la derivada y antiderivada de la función logaritmo natural. (5.1, 5.2)
- Cómo determinar si una función tiene una función inversa. (5.3)
- Las propiedades de la función exponencial natural. Cómo encontrar la derivada y antiderivada de la función exponencial natural. (5.4)
- Las propiedades, derivadas y antiderivadas de las funciones logarítmica y exponencial con base diferente de *e*. (5.5)
- Las propiedades de las funciones trigonométricas inversas. Cómo encontrar derivadas y antiderivadas de funciones trigonométricas inversas. (5.6, 5.7)
- Las propiedades de las funciones hiperbólicas. Cómo encontrar derivadas y antiderivadas de funciones hiperbólicas. (5.8)

Owaki-Kulla/Photolibrary

El arco de entrada en San Luis, Missouri, tiene más de 600 pies de alto y está cubierto con 886 toneladas de acero inoxidable de un cuarto de pulgada. ¿Qué función se involucra en la ecuación matemática usada para construir el arco? (Ver la sección 5.8, Proyecto de trabajo.)



En la sección 5.1 se verá cómo la función $f(x) = 1/x$ puede usarse para definir la función logaritmo natural. Para hacer esto, considerar la integral definida $\int_1^x 1/t\,dt$. Cuando $x < 1$, el valor de esta integral definida es negativa. Cuando $x = 1$, el valor es cero. Cuando $x > 1$, el valor es positivo.

5.1 La función logaritmo natural: derivación

- Desarrollar y usar propiedades de la función logaritmo natural.
- Comprender la definición del número *e*.
- Derivar funciones que involucran la función logaritmo natural.

The Granger Collection

JOHN NAPIER (1550-1617)
El matemático escocés John Napier inventó los logaritmos. Napier formó el término *logaritmo* con dos palabras griegas: *logos* (razón) y *arithmos* (número), para denominar la teoría que desarrolló a lo largo de veinte años y que apareció por primera vez en el libro *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio* (Una descripción de la maravillosa regla de los algoritmos). Aunque no introdujo la función logaritmo natural, algunas veces se llama función logaritmo napieriana.

La función logaritmo natural

Recordar que en la regla general de la potencia

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad \text{Regla general de la potencia.}$$

tiene una restricción importante, no se aplica al caso $n = -1$. De hecho, todavía no se ha encontrado una antiderivada o primitiva para la función $f(x) = 1/x$. En esta sección se usará el segundo teorema fundamental del cálculo para *definir* esa antiderivada o primitiva. Ésta es una función que no ha aparecido previamente en este libro. No es algebraica ni trigonométrica, sino que está incluida en una nueva clase de funciones, llamadas *funciones logarítmicas*. Esta función particular es la **función logaritmo natural**.

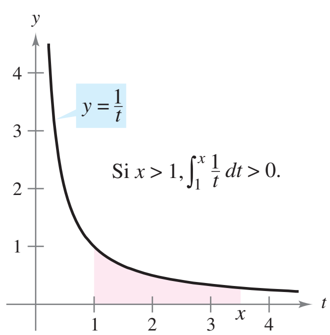
DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

La **función logaritmo natural** se define como

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0.$$

El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de todos los números reales positivos.

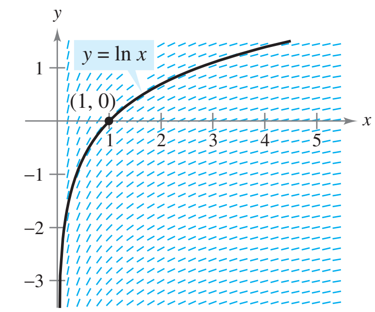
A partir de la definición se deduce que ln x es positiva para $x > 1$ y negativa para $0 < x < 1$ (figura 5.1). Además, $\ln(1) = 0$, ya que los límites inferior y superior de integración son iguales cuando $x = 1$.



Si $x > 1$, entonces $\ln x > 0$ Si $0 < x < 1$, entonces $\ln x < 0$
Figura 5.1

EXPLORACIÓN

Representación de la función logaritmo natural Usando *sólo* la definición de la función logaritmo natural, trazar una gráfica. Explicar el razonamiento.



Cada pequeño segmento recto tiene una pendiente de $1/x$
Figura 5.2

Para dibujar la gráfica de $y = \ln x$, se puede pensar en la función logaritmo natural como una *antiderivada* o primitiva dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

La figura 5.2 es una gráfica generada por computadora; llamada *campo de pendientes* o *campo de direcciones*, que consta de pequeños segmentos de pendiente $1/x$. La gráfica de $y = \ln x$ es la solución que pasa por el punto $(1, 0)$. Se estudiarán campos de pendientes en la sección 6.1.

El siguiente teorema resume varias propiedades básicas de la función logaritmo natural.

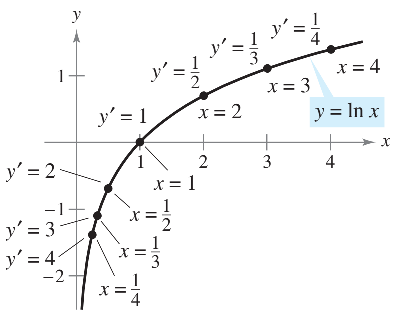
TEOREMA 5.1 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

La función logaritmo natural tiene las siguientes propiedades.

1. El dominio es $(0, \infty)$ y el recorrido o rango es $(-\infty, \infty)$.
2. La función es continua, creciente e inyectiva.
3. La gráfica es cóncava hacia abajo.

DEMOSTRACIÓN El dominio de $f(x) = \ln x$ es $(0, \infty)$ por definición. Además, la función es continua, por ser derivable. Y es creciente porque su derivada

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{Primera derivada.}$$



La función logaritmo natural es creciente, y su gráfica es cóncava hacia abajo
Figura 5.3

es positiva para $x > 0$, como se muestra en la figura 5.3. Es cóncava hacia abajo porque

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{Segunda derivada.}$$

es negativa para $x > 0$. La prueba de que f es inyectiva se presenta en el apéndice A. Los siguientes límites implican que el recorrido o rango es toda la recta real.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$

La justificación de ambos límites se encuentra en el apéndice A.

Utilizando la definición de la función logaritmo natural, se pueden probar importantes propiedades de las operaciones con logaritmos naturales. Si ya está familiarizado con los logaritmos, el lector reconocerá que estas propiedades son características de todos los logaritmos.

TEOREMA 5.2 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Si a y b son números positivos y n es racional, se satisfacen las siguientes propiedades.

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$
4. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

DEMOSTRACIÓN La primera propiedad ya se ha discutido. La segunda se deduce del hecho de que dos antiderivadas o primitivas de una misma función difieren en una constante. Del segundo teorema fundamental del cálculo y la definición de la función logaritmo natural, se sabe que

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{d}{dx}\left[\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right] = \frac{1}{x}.$$

Así pues, se consideran las dos derivadas

$$\frac{d}{dx}[\ln(ax)] = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$$

y

$$\frac{d}{dx}[\ln a + \ln x] = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Como $\ln(ax)$ y $(\ln a + \ln x)$ son antiderivadas o primitivas de $1/x$, deben diferir a lo más en una constante.

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x + C$$

Tomando $x = 1$, se puede ver que $C = 0$. La tercera propiedad se demuestra de manera análoga comparando las derivadas de $\ln(x^n)$ y $n \ln x$. Por último, al utilizar la segunda y tercera propiedades, se puede comprobar la cuarta.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln[a(b^{-1})] = \ln a + \ln(b^{-1}) = \ln a - \ln b$$

El ejemplo 1 muestra cómo usar propiedades de los logaritmos para desarrollar expresiones logarítmicas.

EJEMPLO 1 Desarrollo de expresiones logarítmicas

a) $\ln\frac{10}{9} = \ln 10 - \ln 9$ Propiedad 4.

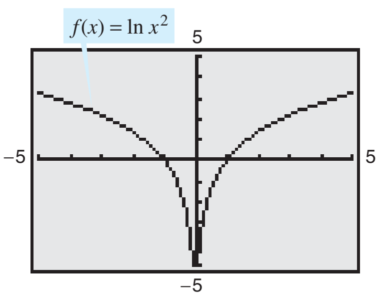
b) $\ln\sqrt{3x+2} = \ln(3x+2)^{1/2}$ Reescribir con exponente racional.

$= \frac{1}{2}\ln(3x+2)$ Propiedad 3.

c) $\ln\frac{6x}{5} = \ln(6x) - \ln 5$ Propiedad 4.

$= \ln 6 + \ln x - \ln 5$ Propiedad 2.

d)
$$\begin{aligned}\ln\frac{(x^2+3)^2}{x\sqrt[3]{x^2+1}} &= \ln(x^2+3)^2 - \ln\left(x\sqrt[3]{x^2+1}\right)\\ &= 2\ln(x^2+3) - [\ln x + \ln(x^2+1)^{1/3}]\\ &= 2\ln(x^2+3) - \ln x - \ln(x^2+1)^{1/3}\\ &= 2\ln(x^2+3) - \ln x - \frac{1}{3}\ln(x^2+1)\end{aligned}$$



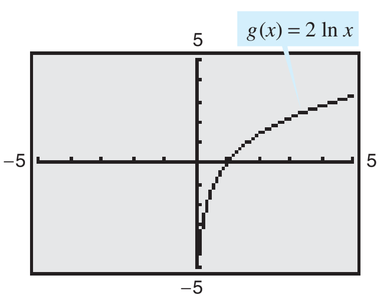
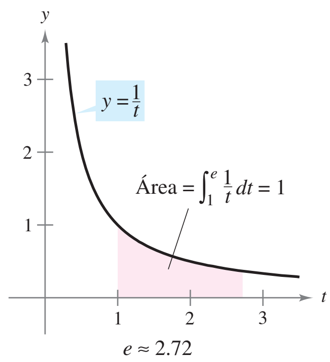


Figura 5.4

Cuando se usan las propiedades de los logaritmos para reexpresar funciones logarítmicas, hay que analizar si el dominio de la función reescrita es el mismo que el de la función original. Así, el dominio de $f(x) = \ln x^2$ son todos los números reales salvo $x = 0$, mientras que el de $g(x) = 2\ln x$ son todos los números reales positivos (ver la figura 5.4).

El número *e*



e es la base de los logaritmos naturales porque $\ln e = 1$
Figura 5.5

Es muy probable que ya se hayan estudiado los logaritmos en cursos anteriores de álgebra. Ahí, sin las ventajas del cálculo, suelen definirse en términos de un número **base**. Por ejemplo, los logaritmos comunes tienen base 10 porque $\log_{10} 10 = 1$. (Volveremos a esto en la sección 5.5.)

Para definir la **base de los logaritmos naturales**, se aprovecha que la función logaritmo natural es continua, inyectiva y con recorrido o rango de $(-\infty, \infty)$. Por tanto, debe existir un único número real x tal que $\ln x = 1$, como muestra la figura 5.5. Este número se denota por la letra e. Puede demostrarse que e es irracional y que tiene un valor aproximado.

$$e \approx 2.71828182846$$

DEFINICIÓN DE *e*

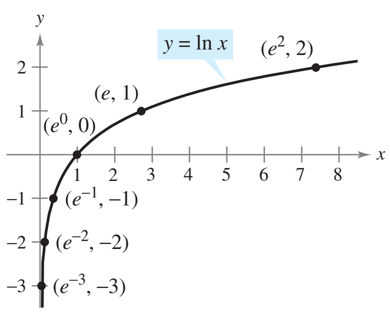
La letra e denota el número real positivo tal que

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre el número e, se recomienda ver el artículo "Unexpected Occurrences of the Number e", de Harris S. Shultz y Bill Leonard en la revista *Mathematics Magazine*.

Sabiendo que $\ln e = 1$, usar las propiedades logarítmicas para calcular los logaritmos naturales de otros números. Por ejemplo, usando la propiedad

$$\begin{aligned} \ln(e^n) &= n \ln e \\ &= n(1) \\ &= n \end{aligned}$$



Si $x = e^n$, entonces $\ln x = n$
Figura 5.6

se puede evaluar $\ln(e^n)$ para diversos valores de n, como se muestran en la tabla y en la figura 5.6.

x	$\frac{1}{e^3} \approx 0.050$	$\frac{1}{e^2} \approx 0.135$	$\frac{1}{e} \approx 0.368$	$e^0 = 1$	$e \approx 2.718$	$e^2 \approx 7.389$
$\ln x$	-3	-2	-1	0	1	2

Los logaritmos de esta tabla son fáciles de calcular de esa forma porque los valores de x son potencias enteras de e. Sin embargo, la mayoría de las expresiones logarítmicas se pueden evaluar mejor con una calculadora.

EJEMPLO 2 Evaluación de expresiones con logaritmos naturales

a) $\ln 2 \approx 0.693$

b) $\ln 32 \approx 3.466$

c) $\ln 0.1 \approx -2.303$

La derivada de la función logaritmo natural

La derivada de la función logaritmo natural se da por el teorema 5.3. La primera parte del teorema proviene de la definición de la función logaritmo natural como una antiderivada o primitiva. La segunda parte del teorema es simplemente la versión de la regla de la cadena de la primera parte.

TEOREMA 5.3 DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

Sea u una función derivable en x.

1. $\dfrac{d}{dx}[\ln x] = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$ **2.** $\dfrac{d}{dx}[\ln u] = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u'}{u}, \quad u > 0$

EXPLORACIÓN

Usar una herramienta de graficación para representar

$$y_1 = \frac{1}{x}$$

y

$$y_2 = \frac{d}{dx}[\ln x]$$

en la misma pantalla, con $0.1 \leq x \leq 5$ y $-2 \leq y \leq 8$. Explicar por qué las gráficas aparentemente son idénticas.

EJEMPLO 3 Derivación de funciones logarítmicas

a) $\dfrac{d}{dx}[\ln(2x)] = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$ $\qquad u = 2x.$

b) $\dfrac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)] = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ $\qquad u = x^2 + 1.$

c) $\dfrac{d}{dx}[x \ln x] = x\left(\dfrac{d}{dx}[\ln x]\right) + (\ln x)\left(\dfrac{d}{dx}[x]\right)$ Regla del producto.

$$= x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$$

d) $\dfrac{d}{dx}[(\ln x)^3] = 3(\ln x)^2 \dfrac{d}{dx}[\ln x]$ Regla de la cadena.

$$= 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}$$

Napier utilizaba las propiedades de los logaritmos para simplificar *cálculos* con productos, cocientes y potencias. Por supuesto, actualmente con las calculadoras a nuestra disposición hay poco lugar para esas aplicaciones de los logaritmos. No obstante, es de gran valor el uso de las propiedades de los logaritmos para simplificar la derivada de productos, cocientes y potencias.

EJEMPLO 4 Propiedades de los logaritmos como ayuda en la derivación

Derivar $f(x) = \ln\sqrt{x + 1}$.

Solución Como

$$f(x) = \ln\sqrt{x + 1} = \ln(x + 1)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(x + 1)$$ Reescribir antes de derivar.

se puede escribir

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + 1}\right) = \frac{1}{2(x + 1)}.$$ Derivar.

EJEMPLO 5 Propiedades de los logaritmos como ayuda en la derivación

Derivar $f(x) = \ln \dfrac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$.

Solución

$$f(x) = \ln \frac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}} \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$= \ln x + 2\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2x^3-1) \qquad \text{Reescribir antes de derivar.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{6x^2}{2x^3-1}\right) \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+1} - \frac{3x^2}{2x^3-1} \qquad \text{Simplificar.}$$

NOTA En los ejemplos 4 y 5 se puede ver la ventaja de aplicar las propiedades de los logaritmos *antes* de derivar. Considérese, por ejemplo, la dificultad de derivar directamente la función del ejemplo 5.

En ocasiones, es conveniente usar los logaritmos como ayuda en la derivación de funciones *no logarítmicas*. Este procedimiento se llama **derivación logarítmica**.

EJEMPLO 6 Derivación logarítmica

Encontrar la derivada de

$$y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 2.$$

Solución Notar que $y > 0$ para todo $x \neq 2$. Así, $\ln y$ está definido. Iniciar aplicando el logaritmo natural en los dos miembros de la ecuación. Y a continuación aplicar las propiedades de los logaritmos y la derivación implícita. Por último, despejar y'.

$$y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 2 \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$\ln y = \ln \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{Aplicar logaritmo natural en ambos lados.}$$

$$\ln y = 2\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \qquad \text{Propiedades de los logaritmos.}$$

$$\frac{y'}{y} = 2\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)} \qquad \text{Simplificar.}$$

$$y' = y\left[\frac{x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)}\right] \qquad \text{Despejar } y'.$$

$$= \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}\left[\frac{x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)}\right] \qquad \text{Sustituir } y.$$

$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{(x^2+1)^{3/2}} \qquad \text{Simplificar.}$$

Puesto que el logaritmo natural no está definido para números negativos, encontraremos con frecuencia expresiones como $\ln|u|$. El siguiente teorema afirma que se pueden derivar funciones de la forma $y = \ln|u|$ ignorando el signo del valor absoluto.

TEOREMA 5.4 DERIVADAS CON VALORES ABSOLUTOS

Si u es una función derivable de x tal que $u \neq 0$, entonces

$$\frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}.$$

DEMOSTRACIÓN Si $u > 0$, entonces $|u| = u$, y el resultado se obtiene aplicando el teorema 5.3. Si $u < 0$, entonces $|u| = -u$, y se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\ln|u|] &= \frac{d}{dx}[\ln(-u)]\\ &= \frac{-u'}{-u}\\ &= \frac{u'}{u}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Derivadas con valores absolutos

Encontrar la derivada de

$$f(x) = \ln|\cos x|.$$

Solución Según el teorema 5.4, tomar $u = \cos x$ y escribir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\ln|\cos x|] &= \frac{u'}{u} && \frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}\\ &= \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} && u = \cos x\\ &= -\tan x. && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Localización de extremos relativos

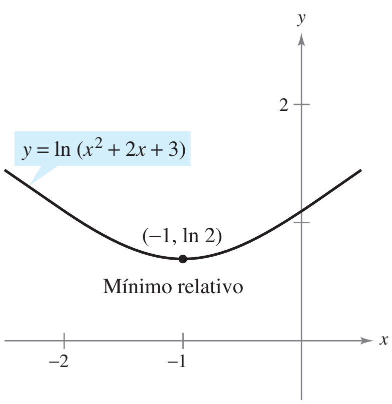
Localizar los extremos relativos de

$$y = \ln(x^2 + 2x + 3).$$

Solución Al derivar y, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3}.$$

Como $dy/dx = 0$ para $x = -1$, se puede aplicar el criterio de la primera derivada y concluir que el punto $(-1, \ln 2)$ es un mínimo relativo. Como no hay más puntos críticos, ése es el único extremo relativo (ver la figura 5.7).



La derivada de y cambia de negativo a positivo en $x = -1$
Figura 5.7

5.1 Ejercicios

1. Completar la tabla usando la herramienta de graficación y la regla de Simpson con $n = 10$, aproximar la integral $\int_1^x (1/t)\,dt$.

x	0.5	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\int_1^x (1/t)\,dt$							

2. *a)* Dibujar los puntos generados en el ejercicio 1 y conectarlos con una curva suave. Comparar el resultado con la gráfica de $y = \ln x$.

b) Usar la herramienta de graficación para representar $y = \int_1^x (1/t)\,dt$ para $0.2 \le x \le 4$. Comparar los resultados con la gráfica de $y = \ln x$.

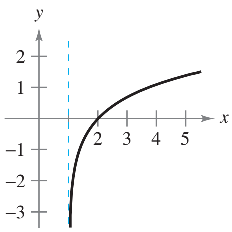
En los ejercicios 3 a 6, usar la herramienta de graficación para evaluar la función logaritmo *a)* usando la tecla logaritmo natural y *b)* usando la función de integración para evaluar la integral $\int_1^x (1/t)\,dt$.

3. $\ln 45$ **4.** $\ln 8.3$

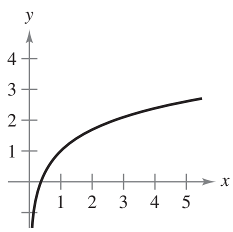
5. $\ln 0.8$ **6.** $\ln 0.6$

En los ejercicios 7 a 10, comparar la función con los gráficos. [Las gráficas están etiquetadas *a)*, *b)*, *c)* y *d)*.]

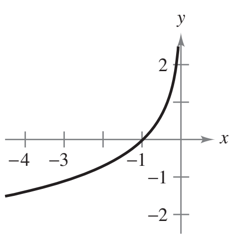
a)



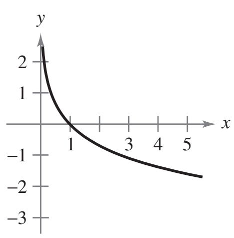
b)



c)



d)



7. $f(x) = \ln x + 1$ **8.** $f(x) = -\ln x$

9. $f(x) = \ln(x - 1)$ **10.** $f(x) = -\ln(-x)$

En los ejercicios 11 a 18, trazar la gráfica de la función y su dominio.

11. $f(x) = 3 \ln x$ **12.** $f(x) = -2 \ln x$

13. $f(x) = \ln 2x$ **14.** $f(x) = \ln|x|$

15. $f(x) = \ln(x - 1)$ **16.** $g(x) = 2 + \ln x$

17. $h(x) = \ln(x + 2)$ **18.** $f(x) = \ln(x - 2) + 1$

En los ejercicios 19 y 20, usar las propiedades de los logaritmos para aproximar el logaritmo indicado, teniendo que $\ln 2 \approx 0.6931$ y $\ln 3 \approx 1.0986$.

19. *a)* $\ln 6$ *b)* $\ln \frac{2}{3}$ *c)* $\ln 81$ *d)* $\ln \sqrt{3}$

20. *a)* $\ln 0.25$ *b)* $\ln 24$ *c)* $\ln \sqrt[3]{12}$ *d)* $\ln \frac{1}{72}$

En los ejercicios 21 a 30, usar las propiedades de los logaritmos para desarrollar las expresiones.

21. $\ln \dfrac{x}{4}$ **22.** $\ln \sqrt{x^5}$

23. $\ln \dfrac{xy}{z}$ **24.** $\ln(xyz)$

25. $\ln\left(x\sqrt{x^2 + 5}\right)$ **26.** $\ln \sqrt{a - 1}$

27. $\ln \sqrt{\dfrac{x - 1}{x}}$ **28.** $\ln(3e^2)$

29. $\ln z(z - 1)^2$ **30.** $\ln \dfrac{1}{e}$

En los ejercicios 31 a 36, escribir la expresión como el logaritmo de una sola cantidad.

31. $\ln(x - 2) - \ln(x + 2)$ **32.** $3 \ln x + 2 \ln y - 4 \ln z$

33. $\frac{1}{3}[2 \ln(x + 3) + \ln x - \ln(x^2 - 1)]$

34. $2[\ln x - \ln(x + 1) - \ln(x - 1)]$

35. $2 \ln 3 - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$

36. $\frac{3}{2}[\ln(x^2 + 1) - \ln(x + 1) - \ln(x - 1)]$

En los ejercicios 37 y 38, *a)* verificar que $f = g$ usando una herramienta de graficación para representar f y g en la misma pantalla. *b)* Entonces verificar que $f = g$ algebraicamente.

37. $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{4}, \quad x > 0, \quad g(x) = 2 \ln x - \ln 4$

38. $f(x) = \ln \sqrt{x(x^2 + 1)}, \quad g(x) = \frac{1}{2}[\ln x + \ln(x^2 + 1)]$

En los ejercicios 39 a 42, calcular el límite.

39. $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \ln(x - 3)$ **40.** $\displaystyle\lim_{x\to 6^-} \ln(6 - x)$

41. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \ln[x^2(3 - x)]$ **42.** $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} \ln \frac{x}{\sqrt{x - 4}}$

En los ejercicios 43 a 46, escribir la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función logarítmica en el punto (1, 0).

43. $y = \ln x^3$ **44.** $y = \ln x^{3/2}$

45. $y = x^4$ **46.** $y = \ln x^{1/2}$

En los ejercicios 47 a 76, hallar la derivada de la función.

47. $f(x) = \ln(3x)$ **48.** $f(x) = \ln(x - 1)$

49. $g(x) = \ln x^2$ **50.** $h(x) = \ln(2x^2 + 1)$

51. $y = (\ln x)^4$ **52.** $y = x^2 \ln x$

53. $y = \ln(t+1)^2$
54. $y = \ln\sqrt{x^2-4}$
55. $y = \ln\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$
56. $y = \ln[t(t^2+3)^3]$
57. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$
58. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x+3}\right)$
59. $g(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$
60. $h(t) = \dfrac{\ln t}{t}$
61. $y = \ln(\ln x^2)$
62. $y = \ln(\ln x)$
63. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
64. $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$
65. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x}\right)$
66. $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)$
67. $y = \dfrac{-\sqrt{x^2+1}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$
68. $y = \dfrac{-\sqrt{x^2+4}}{2x^2} - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{x^2+4}}{x}\right)$
69. $y = \ln|\operatorname{sen} x|$
70. $y = \ln|\csc x|$
71. $y = \ln\left|\dfrac{\cos x}{\cos x - 1}\right|$
72. $y = \ln|\sec x + \tan x|$
73. $y = \ln\left|\dfrac{-1+\operatorname{sen} x}{2+\operatorname{sen} x}\right|$
74. $y = \ln\sqrt{2+\cos^2 x}$
75. $f(x) = \displaystyle\int_2^{\ln(2x)} (t+1)\, dt$
76. $g(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x} (t^2+3)\, dt$

En los ejercicios 77 a 82, *a*) encontrar una ecuación para la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado, *b*) usar una herramienta de graficación para representar la función y la recta tangente en el punto y *c*) usar la función *derivada* de la herramienta de graficación para confirmar los resultados.

77. $f(x) = 3x^2 - \ln x, \quad (1, 3)$
78. $f(x) = 4 - x^2 - \ln\left(\frac{1}{2}x + 1\right), \quad (0, 4)$
79. $f(x) = \ln\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}, \quad \left(\dfrac{\pi}{4}, \ln\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$
80. $f(x) = \operatorname{sen} 2x \ln x^2, \quad (1, 0)$
81. $f(x) = x^3 \ln x, \quad (1, 0)$
82. $f(x) = \dfrac{1}{2}x \ln x^2, \quad (-1, 0)$

En los ejercicios 83 a 86, usar derivación implícita para encontrar *dy/dx*.

83. $x^2 - 3\ln y + y^2 = 10$
84. $\ln xy + 5x = 30$
85. $4x^3 + \ln y^2 + 2y = 2x$
86. $4xy + \ln x^2 y = 7$

En los ejercicios 87 y 88, usar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado.

87. $x + y - 1 = \ln(x^2+y^2), \quad (1, 0)$
88. $y^2 + \ln xy = 2, \quad (e, 1)$

En los ejercicios 89 y 90, mostrar que la función es una solución de la ecuación diferencial.

	Función	*Ecuación diferencial*
89.	$y = 2\ln x + 3$	$xy'' + y' = 0$
90.	$y = x\ln x - 4x$	$x + y - xy' = 0$

En los ejercicios 91 a 96, hallar los extremos relativos y los puntos de inflexión. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

91. $y = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$
92. $y = x - \ln x$
93. $y = x\ln x$
94. $y = \dfrac{\ln x}{x}$
95. $y = \dfrac{x}{\ln x}$
96. $y = x^2 \ln \dfrac{x}{4}$

Aproximaciones lineal y cuadrática **En los ejercicios 97 y 98, usar una herramienta de graficación para representar la función. A continuación, representar**

$$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1)$$

y

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \tfrac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$$

en la misma pantalla. Comparar los valores de *f*, P_1 y P_2 y sus primeras derivadas en $x = 1$.

97. $f(x) = \ln x$
98. $f(x) = x\ln x$

En los ejercicios 99 y 100, usar el método de Newton para aproximar, con tres cifras decimales, la coordenada *x* del punto de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones. Usar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

99. $y = \ln x, \quad y = -x$
100. $y = \ln x, \quad y = 3 - x$

En los ejercicios 101 a 106, usar derivación logarítmica para encontrar *dy/dx*.

101. $y = x\sqrt{x^2+1}, \quad x > 0$
102. $y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}, \quad x > 0$
103. $y = \dfrac{x^2\sqrt{3x-2}}{(x+1)^2}, \quad x > \dfrac{2}{3}$
104. $y = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}, \quad x > 1$
105. $y = \dfrac{x(x-1)^{3/2}}{\sqrt{x+1}}, \quad x > 1$
106. $y = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}, \quad x > 2$

Desarrollo de conceptos

107. Con sus propias palabras, enunciar las propiedades de la función logaritmo natural.

108. Definir la base de la función logaritmo natural.

109. Suponer que f es una función positiva y derivable en toda la recta real. Sea $g(x) = \ln f(x)$.

a) Si g es decreciente, ¿debe f ser decreciente necesariamente? Explicar la respuesta.

b) Si la gráfica de f es cóncava hacia arriba, ¿lo es necesariamente la de g? Explicar la respuesta.

110. Considerar la función $f(x) = x - 2\ln x$ sobre $[1, 3]$.

a) Explicar por qué el teorema de Rolle (sección 3.2) no se aplica.

b) ¿Piensa que la conclusión del teorema de Rolle es verdadera para f? Explicar.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 111 a 114, determinar si las ecuaciones son verdaderas o falsas. Si son falsas, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

111. $\ln(x + 25) = \ln x + \ln 25$

112. $\ln xy = \ln x \ln y$

113. Si $y = \ln \pi$, entonces $y' = 1/\pi$.

114. Si $y = \ln e$, entonces $y' = 1$.

115. ***Hipoteca de casa*** El término t (en años) de una hipoteca de casa de \$200 000 al 7.5% de interés puede aproximarse mediante

$$t = 13.375 \ln\left(\frac{x}{x - 1\,250}\right), \quad x > 1\,250$$

donde x es el pago mensual en dólares.

a) Usar una herramienta de graficación para representar el modelo.

b) Usar el modelo para aproximar el término de una hipoteca de casa, para la cual el pago mensual es de \$1 398.43. ¿Cuál es la cantidad de pago total?

c) Usar el modelo para aproximar el término de una hipoteca de casa para la cual el pago mensual es de \$1 611.19. ¿Cuál es la cantidad de pago total?

d) Encontrar la razón de cambio instantánea de t con respecto a x cuando $x = \$1\,398.43$ y $x = \$1\,611.19$.

e) Escribir un párrafo corto que describa el beneficio del pago mensual más alto.

116. ***Intensidad del sonido*** La relación entre el número de decibeles β y la intensidad del sonido I en watts por cm^2 es

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-16}}\right).$$

Usar las propiedades de los logaritmos para simplificar la fórmula y determinar el número de decibeles de un sonido con intensidad de 10^{-10} watts por cm^2.

117. ***Modelo matemático*** La tabla muestra las temperaturas T (°F) de ebullición del agua a ciertas presiones p (libras por pulgada cuadrada). (*Fuente: Standard Handbook of Mechanical Engineers*)

p	5	10	14.696 (1 atm)	20
T	162.24°	193.21°	212.00°	227.96°

p	30	40	60	80	100
T	250.33°	267.25°	292.71°	312.03°	327.81°

Un modelo que ajusta los datos es

$$T = 87.97 + 34.96 \ln p + 7.91\sqrt{p}.$$

a) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.

b) Encontrar la razón de cambio de T respecto de p cuando $p = 10$ y $p = 70$.

c) Usar una herramienta de graficación para representar T'. Encontrar $\lim_{p\to\infty} T'(p)$ e interpretar el resultado en el contexto del problema.

118. ***Modelado matemático*** La presión de la atmósfera decrece con el incremento de la altitud. A nivel del mar, el promedio de la presión del aire es una atmósfera (1.033227 kilogramos por centímetro cuadrado). La tabla muestra la presión p (en atmósferas) para algunas altitudes h (en kilómetros).

h	0	5	10	15	20	25
p	1	0.55	0.25	0.12	0.06	0.02

a) Usar una herramienta de graficación para ajustar un modelo de la forma $p = a + b \ln h$ a esos datos. Explicar por qué el resultado es un mensaje de error.

b) Usar una herramienta de graficación para ajustar el modelo logarítmico de $h = a + b \ln p$ a esos datos.

c) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.

d) Usar el modelo para estimar la altitud cuando $p = 0.75$.

e) Usar el modelo para estimar la presión cuando $h = 13$.

f) Usar el modelo para encontrar el ritmo o velocidad de cambio de la presión cuando $h = 5$ y $h = 20$. Interpretar los resultados.

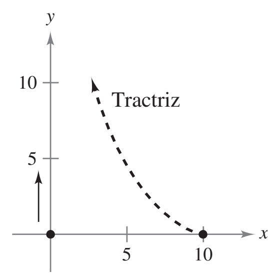
119. ***Tractriz*** Una persona que camina por un muelle recto, tira de un bote por medio de una cuerda de 10 metros. El bote viaja a lo largo de un camino conocido como *tractriz* (ver la figura). La ecuación de esta ruta es

$$y = 10 \ln\left(\frac{10 + \sqrt{100 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{100 - x^2}.$$

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función.

b) ¿Cuál es la pendiente de la curva cuando $x = 5$ y $x = 9$?

c) ¿Cuál es la pendiente de la curva cuando el camino se aproxima a $x \to 10$?



Para discusión

120. Dado que $f(x) = \ln x^a$, donde a es un número real tal que $a > 0$, determinar la razón de cambio de f cuando *a*) $x = 10$ y *b*) $x = 100$.

121. ***Conjetura*** Usar una herramienta de graficación para representar f y g en la misma pantalla y determinar cuál de ellas crece a mayor ritmo para valores "grandes" de x. ¿Qué se puede concluir del ritmo de crecimiento de la función logaritmo natural?

a) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \sqrt{x}$ *b*) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \sqrt[4]{x}$

122. Para aproximar e^x puede usarse una función de la forma $f(x) = \dfrac{a + bx}{1 + cx}$. (Esta función se conoce como una **aproximación de Padé**.) Los valores de $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$ son iguales al valor correspondiente de e^x. Mostrar que esos valores son iguales a 1 y encontrar los valores de a, b y c, tal que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$. Después, usar una herramienta de graficación para comparar las gráficas de f y e^x.