2.1 La derivada y el problema de la recta tangente

- Hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.
- Usar la definición de límite para calcular la derivada de una función.
- Comprobar la relación entre derivabilidad y continuidad.

ISAAC NEWTON (1642-1727)

Además de sus trabajos relativos al Cálculo, Newton aportó contribuciones a la Física tan revolucionarias como la Ley de la Gravitación Universal y sus tres leyes del movimiento.

El problema de la recta tangente

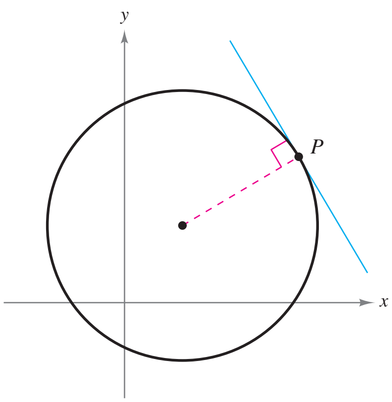
El cálculo se desarrolló a la sombra de cuatro problemas en los que estaban trabajando los matemáticos europeos en el siglo XVII.

1. El problema de la recta tangente (sección 1.1 y esta sección)
2. El problema de la velocidad y la aceleración (secciones 2.2 y 2.3)
3. El problema de los máximos y mínimos (sección 3.1)
4. El problema del área (secciones 1.1 y 4.2)

Cada uno de ellos involucra la noción de límite y podría servir como introducción al cálculo.

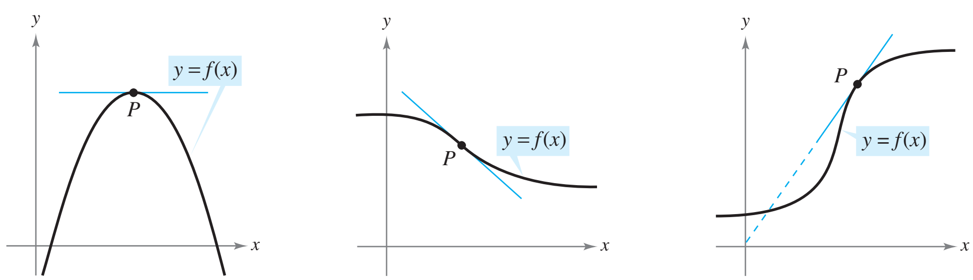
En la sección 1.1 se hizo una breve introducción al problema de la recta tangente. Aunque Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650), Christian Huygens (1629-1695) e Isaac Barrow (1630-1677) habían propuesto soluciones parciales, la primera solución general se suele atribuir a Isaac Newton (1642-1727) y a Gottfried Leibniz (1646-1716). El trabajo de Newton respecto a este problema procedía de su interés por la refracción de la luz y la óptica.

¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? En una circunferencia, la recta tangente en un punto P es la recta perpendicular al radio que pasa por P, como se muestra en la figura 2.1.



Recta tangente a una circunferencia
Figura 2.1

Sin embargo, en una curva general el problema se complica. Por ejemplo, ¿cómo se podrían definir las rectas tangentes que se observan en la figura 2.2? Afirmando que una recta es tangente a una curva en un punto P si toca a la curva en P sin atravesarla. Tal definición sería correcta para la primera curva de la figura 2.2, pero no para la segunda. También se podría decir que una recta es tangente a una curva si la toca o hace intersección en ella exactamente en el punto P, definición que serviría para una circunferencia pero no para curvas más generales, como sugiere la tercera curva de la figura 2.2.

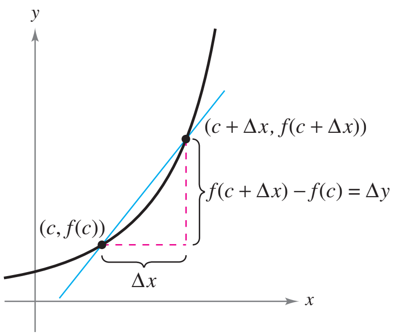


Recta tangente a una curva en un punto
Figura 2.2

EXPLORACIÓN

Identificación de una recta tangente Utilizar una herramienta de graficación para representar la función $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$. En la misma pantalla, dibujar la gráfica $y = x - 5$, $y = 2x - 5$ y $y = 3x - 5$. ¿Cuál de estas rectas, si es que hay alguna, parece tangente a la gráfica de f en el punto $(0, -5)$? Explicar el razonamiento.

En esencia, el problema de encontrar la recta tangente en un punto P se reduce al de calcular su *pendiente* en ese punto. Se puede aproximar la pendiente de la recta tangente usando la **recta secante*** que pasa por P y por otro punto cercano de la curva, como se muestra en la figura 2.3. Si $(c, f(c))$ es el punto de tangencia y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ es el otro punto de la gráfica de f, la pendiente de la recta secante que pasa por ambos puntos se encuentra sustituyendo en la fórmula



Recta secante que pasa por $(c, f(c))$ y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$
Figura 2.3

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{(c + \Delta x) - c} \qquad \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}.$$

$$\boxed{m_{\text{sec}} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.} \qquad \text{Pendiente de la recta secante.}$$

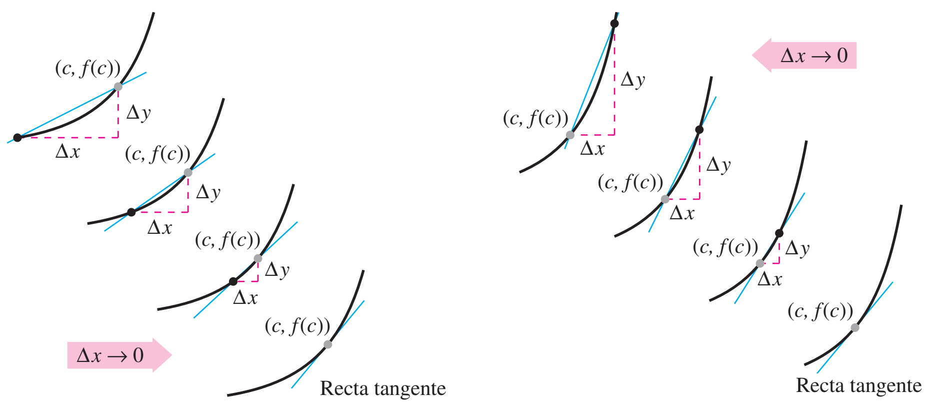
El miembro de la derecha en esta ecuación es un **cociente de incremento o de diferencias**. El denominador Δx es el **cambio** (o incremento) **en x** y el numerador $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$ es el **cambio** (o incremento) **en y**.

La belleza de este procedimiento radica en que se pueden obtener más aproximaciones y más precisas de la pendiente de la recta tangente tomando puntos de la gráfica cada vez más próximos al punto P de tangencia, como se muestra en la figura 2.4.

EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE

En 1637 el matemático René Descartes afirmó lo siguiente respecto al problema de la recta tangente:

"Y no tengo inconveniente en afirmar que éste no es sólo el problema de Geometría más útil y general que conozco, sino incluso el que siempre desearía conocer."



Aproximaciones a la recta tangente
Figura 2.4

DEFINICIÓN DE LA RECTA TANGENTE CON PENDIENTE *m*

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

entonces la recta que pasa por $(c, f(c))$ y cuenta con una pendiente m es la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ se llama también **pendiente de la gráfica de f en $x = c$**.

---

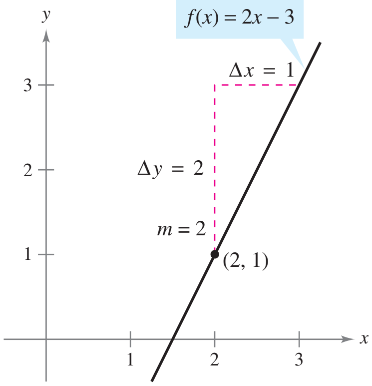
* *El uso de la palabra* secante *procede del latín* secare, *que significa cortar, y no es una referencia a la función trigonométrica del mismo nombre.*

EJEMPLO 1 La pendiente de la gráfica de una función lineal

Encontrar la pendiente de la gráfica de

$$f(x) = 2x - 3$$

en el punto (2, 1).



La pendiente de f en (2, 1) es $m = 2$
Figura 2.5

Solución Para encontrar la pendiente de la gráfica de f cuando $c = 2$, aplicar la definición de la pendiente de una recta tangente como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(2 + \Delta x) - 3] - [2(2) - 3]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 2\Delta x - 3 - 4 + 3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

La pendiente de f en $(c, f(c)) = (2, 1)$ es $m = 2$, como se observa en la figura 2.5.

NOTA En el ejemplo 1, la definición de la pendiente de f por medio de límites concuerda con la definición analizada en la sección P.2.

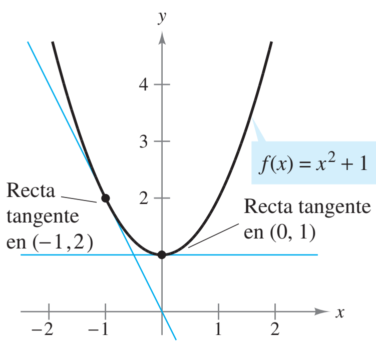
La gráfica de una función lineal tiene la misma pendiente en todos sus puntos. Esto no sucede en las funciones no lineales, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Rectas tangentes a la gráfica de una función no lineal

Calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de

$$f(x) = x^2 + 1$$

en los puntos (0, 1) y $(-1, 2)$, que se ilustran en la figura 2.6.



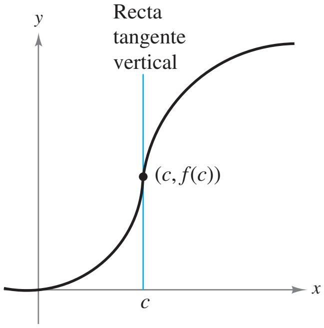
La pendiente de f en un punto cualquiera $(c, f(c))$ es $m = 2c$
Figura 2.6

Solución Sea $(c, f(c))$ un punto cualquiera de la gráfica de f. La pendiente de la recta tangente en él se encuentra mediante:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(c + \Delta x)^2 + 1] - (c^2 + 1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c^2 + 2c(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 1 - c^2 - 1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2c(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2c + \Delta x) \\
&= 2c.
\end{aligned}$$

De tal manera, la pendiente en *cualquier* punto $(c, f(c))$ de la gráfica de f es $m = 2c$. En el punto (0, 1) la pendiente es $m = 2(0) = 0$ y en $(-1, 2)$ la pendiente es $m = 2(-1) = -2$.

NOTA Observar que en el ejemplo 2, c se mantiene constante en el proceso de límite (cuando $\Delta x \to 0$).



La gráfica de f tiene recta tangente vertical en $(c, f(c))$
Figura 2.7

La definición de la recta tangente a una curva no incluye la posibilidad de una recta tangente vertical. Para éstas, se usa la siguiente definición. Si f es continua en c y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = -\infty$$

la recta vertical, $x = c$, que pasa por $(c, f(c))$ es una **recta tangente vertical** a la gráfica de f, por ejemplo, la función que se muestra en la figura 2.7 tiene tangente vertical en $(c, f(c))$. Si el dominio de f es el intervalo cerrado $[a, b]$, se puede ampliar la definición de recta tangente vertical de manera que incluya los extremos, considerando la continuidad y los límites por la derecha (para $x = a$) y por la izquierda (para $x = b$).

Derivada de una función

Se ha llegado a un punto crucial en el estudio del cálculo. El límite utilizado para definir la pendiente de una recta tangente también se utiliza para definir una de las dos operaciones fundamentales del cálculo: la **derivación**.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

La **derivada** de f en x está dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que exista ese límite. Para todos los x para los que exista este límite, f' es una función de x.

Observar que la derivada de una función de x también es una función de x. Esta "nueva" función proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$, siempre que la gráfica tenga una recta tangente en dicho punto.

El proceso de calcular la derivada de una función se llama **derivación**. Una función es **derivable** en x si su derivada en x existe, y **derivable en un intervalo abierto** (a, b) si es derivable en todos y cada uno de los puntos de ese intervalo.

Además de $f'(x)$, que se lee "f prima de x", se usan otras notaciones para la derivada de $y = f(x)$. Las más comunes son:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad D_x[y].$$

Notaciones para la derivada.

La notación dy/dx se lee "derivada de y *con respecto a* x" o simplemente "dy, dx". Usando notaciones de límites, se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Cálculo de la derivada mediante el proceso de límite

Calcular la derivada de $f(x) = x^3 + 2x$.

Solución

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x) - (x^3+2x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - x^3 - 2x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}\left[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\right]}{\cancel{\Delta x}}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\right]\\
&= 3x^2 + 2
\end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO Cuando se use la definición para encontrar la derivada de una función, la clave consiste en volver a expresar el cociente incremental (o cociente de diferencias), de manera que Δx no aparezca como factor del denominador.

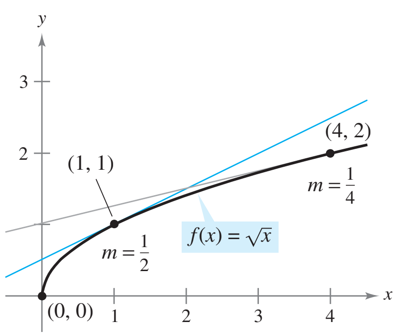
Cabe recordar que la derivada de una función f es en sí una función, misma que puede emplearse para encontrar la pendiente de la recta tangente en el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f.

EJEMPLO 4 Uso de la derivada para calcular la pendiente en un punto

Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$. Calcular luego la pendiente de la gráfica de f en los puntos $(1, 1)$ y $(4, 2)$. Analizar el comportamiento de f en $(0, 0)$.

Solución Se racionaliza el numerador, como se explicó en la sección 1.3.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}\right)\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0
\end{aligned}$$



La pendiente de f en $(x, f(x))$, $x > 0$, es $m = 1/(2\sqrt{x})$

Figura 2.8

En el punto $(1, 1)$ la pendiente es $f'(1) = \frac{1}{2}$. En el punto $(4, 2)$ la pendiente es $f'(4) = \frac{1}{4}$. Ver la figura 2.8. En el punto $(0, 0)$ la pendiente no está definida. Además, la gráfica de f tiene tangente vertical en $(0, 0)$.

En muchas aplicaciones, resulta conveniente usar una variable independiente distinta de x, como se manifiesta en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Cálculo de la derivada de una función

Encontrar la derivada de la función $y = 2/t$ respecto a t.

Solución Considerando $y = f(t)$, se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$ Definición de derivada.

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{2}{t + \Delta t} - \dfrac{2}{t}}{\Delta t}$$ $f(t + \Delta t) = 2/(t + \Delta t)$ y $f(t) = 2/t$.

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{2t - 2(t + \Delta t)}{t(t + \Delta t)}}{\Delta t}$$ Combinar las fracciones del numerador.

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-2\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}(t)(t + \Delta t)}$$ Cancelar el factor común Δt.

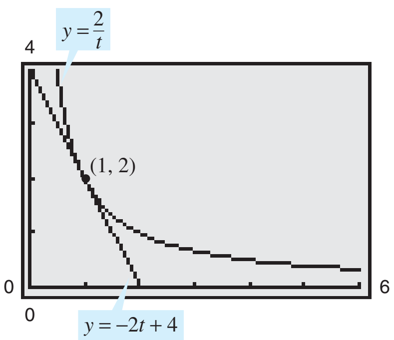
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-2}{t(t + \Delta t)}$$ Simplificar.

$$= -\frac{2}{t^2}.$$ Evaluar el límite cuando $\Delta t \to 0$.

TECNOLOGÍA Se puede utilizar una herramienta de graficación para corroborar el resultado del ejemplo 5. Es decir, usando la fórmula $dy/dt = -2/t^2$, se sabe que la pendiente de la gráfica de $y = 2/t$ en el punto $(1, 2)$ es $m = -2$. Esto implica que, usando la forma punto-pendiente, una ecuación de la recta tangente a la gráfica en $(1, 2)$ es

$$y - 2 = -2(t - 1) \quad \text{o} \quad y = -2t + 4$$

como se muestra en la figura 2.9.



En el punto $(1, 2)$ la recta $y = -2t + 4$ es tangente a la gráfica de $y = 2/t$
Figura 2.9

Derivabilidad y continuidad

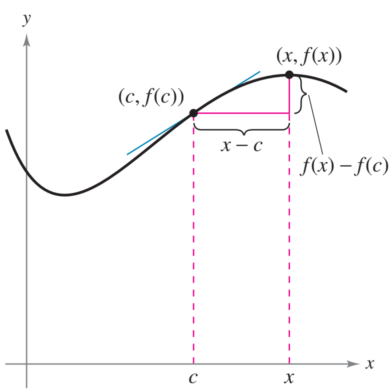
La siguiente forma alternativa como límite de la derivada es útil al investigar la relación que existe entre derivabilidad y continuidad. La derivada de f en c es

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$ Fórmula alternativa de la derivada.

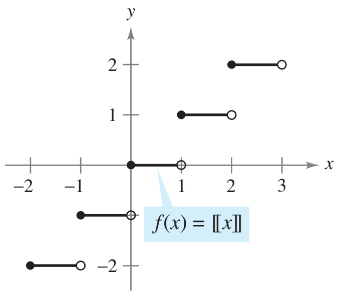
siempre que dicho límite exista (ver la figura 2.10). (En el apéndice A se demuestra la equivalencia de ambas fórmulas.) Observe que la existencia del límite en esta forma alternativa requiere que los límites unilaterales

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existan y sean iguales. Estos límites laterales se denominan **derivada por la izquierda y por la derecha**, respectivamente. Se dice que f es **derivable en un intervalo cerrado [*a*, *b*]** si es derivable en (a, b) y existen además la derivada por la derecha en a y la derivada por la izquierda en b.



Cuando x tiende a c, la recta secante se aproxima a la recta tangente
Figura 2.10



La función parte entera no es derivable en $x = 0$, ya que no es continua en ese punto
Figura 2.11

Si una función no es continua en $x = c$, no puede ser derivable en $x = c$. Por ejemplo, la función parte entera o mayor entero

$$f(x) = [\![x]\!]$$

no es continua en $x = 0$, y en consecuencia no es derivable en $x = 0$ (ver la figura 2.11). Esto se comprueba con sólo observar que

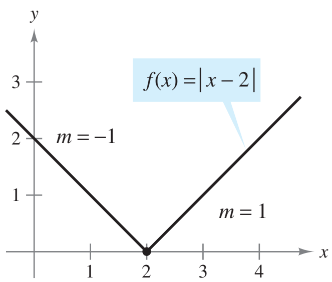
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{[\![x]\!] - 0}{x} = \infty \qquad \text{Derivada por la izquierda.}$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[\![x]\!] - 0}{x} = 0. \qquad \text{Derivada por la derecha.}$$

Aunque es cierto que derivable implica continua (como se muestra en el teorema 2.1), el recíproco no es cierto. En otras palabras, puede ocurrir que una función sea continua en $x = c$ y *no* sea derivable en $x = c$. Los ejemplos 6 y 7 ilustran tal posibilidad.

EJEMPLO 6 Una gráfica con un punto angular



f no es derivable en $x = 2$, porque las derivadas laterales no son iguales
Figura 2.12

La función

$$f(x) = |x - 2|$$

que se muestra en la figura 2.12 es continua en $x = 2$. Sin embargo, los límites unilaterales

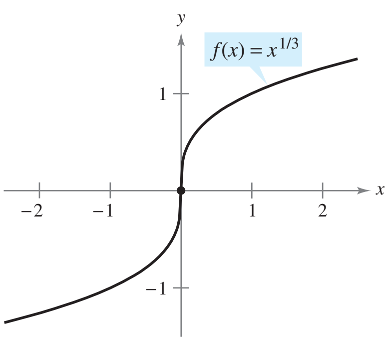
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = -1 \qquad \text{Derivada por la izquierda.}$$

y

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = 1 \qquad \text{Derivada por la derecha.}$$

no son iguales. Por consiguiente, f no es derivable en $x = 2$ y la gráfica de f no tiene una recta tangente en el punto $(2, 0)$.

EJEMPLO 7 Una gráfica con una recta tangente vertical



f no es derivable en $x = 0$, porque tiene tangente vertical en ese punto
Figura 2.13

La función

$$f(x) = x^{1/3}$$

es continua en $x = 0$, como se observa en la figura 2.13. Sin embargo, como el límite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} \\ &= \infty\end{aligned}$$

es infinito, se puede concluir que la recta tangente en $x = 0$ es vertical. Por tanto, f no es derivable en $x = 0$.

En los ejemplos 6 y 7 se puede observar que una función no es derivable en un punto donde su gráfica cuenta con un punto angular *o* una tangente vertical.

TECNOLOGÍA Algunas herramientas de graficación utilizan los programas de cálculo *Maple*, *Mathematica* y *TI89*, para realizar una derivación simbólica. Otros la hacen *numérica*, calculando valores de la derivada mediante la fórmula

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

donde Δx es un número pequeño como 0.001. ¿Observa algún problema con esta definición? Por ejemplo, usándola ¿cuál sería la derivada de $f(x) = |x|$ en $x = 0$?

TEOREMA 2.1 DERIVABLE IMPLICA CONTINUA

Si f es derivable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.

DEMOSTRACIÓN Para comprobar que f es continua en $x = c$ bastará con mostrar que $f(x)$ tiende a $f(c)$ cuando $x \to c$. Para tal fin, usar la derivabilidad de f en $x = c$ considerando el siguiente límite.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] &= \lim_{x \to c} \left[(x - c)\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)\right] \\
&= \left[\lim_{x \to c} (x - c)\right]\left[\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right] \\
&= (0)[f'(c)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Puesto que la diferencia $f(x) - f(c)$ tiende a cero cuando $x \to c$, se puede concluir que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. De tal manera, f es continua en $x = c$.

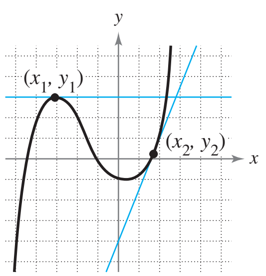
Los siguientes enunciados expresan en forma resumida la relación que existe entre continuidad y derivabilidad:

1. Si una función es derivable en $x = c$, entonces es continua en $x = c$. Por tanto, derivable implica continua.
2. Es posible que una función sea continua en $x = c$ sin ser derivable. En otras palabras, continua no implica derivable (ver el ejemplo 6).

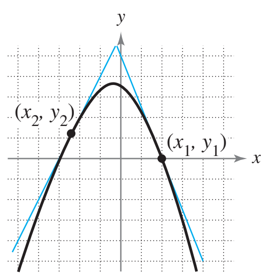
2.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, estimar la pendiente de la curva en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

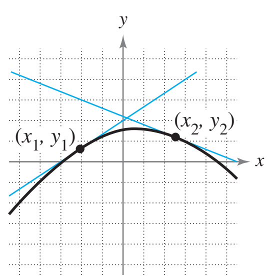
1. *a)*



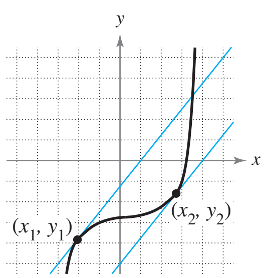
b)



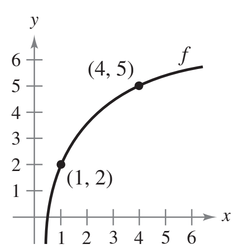
2. *a)*



b)



Con el fin de resolver los ejercicios 3 y 4, utilizar la gráfica que se muestra a continuación.



3. Identificar o trazar en la figura cada una de las cantidades siguientes.

a) $f(1)$ y $f(4)$ *b)* $f(4) - f(1)$

c) $y = \dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}(x - 1) + f(1)$

4. Escribir un símbolo de desigualdad (< o >) entre las cantidades dadas.

a) $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$ ☐ $\dfrac{f(4) - f(3)}{4 - 3}$

b) $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$ ☐ $f'(1)$

En los ejercicios 5 a 10, encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

5. $f(x) = 3 - 5x, \quad (-1, 8)$
6. $g(x) = \frac{3}{2}x + 1, \quad (-2, -2)$
7. $g(x) = x^2 - 9, \quad (2, -5)$
8. $g(x) = 6 - x^2, \quad (1, 5)$
9. $f(t) = 3t - t^2, \quad (0, 0)$
10. $h(t) = t^2 + 3, \quad (-2, 7)$

En los ejercicios 11 a 24, encontrar la derivada mediante el proceso de límite.

11. $f(x) = 7$
12. $g(x) = -3$
13. $f(x) = -10x$
14. $f(x) = 3x + 2$
15. $h(s) = 3 + \frac{2}{3}s$
16. $f(x) = 8 - \frac{1}{5}x$
17. $f(x) = x^2 + x - 3$
18. $f(x) = 2 - x^2$
19. $f(x) = x^3 - 12x$
20. $f(x) = x^3 + x^2$
21. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$
22. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
23. $f(x) = \sqrt{x + 4}$
24. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

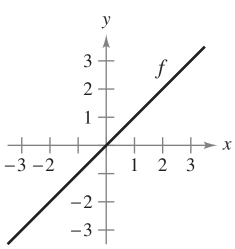
En los ejercicios 25 a 32, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado, *b*) utilizar una herramienta de graficación para dibujar la gráfica, la función y su recta tangente en dicho punto y *c*) aplicar la función *derivada* de una herramienta de graficación con el fin de verificar sus resultados.

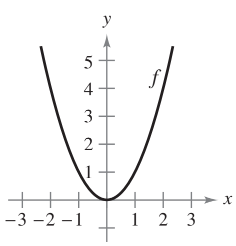
25. $f(x) = x^2 + 3, \quad (1, 4)$
26. $f(x) = x^2 + 3x + 4, \quad (-2, 2)$
27. $f(x) = x^3, \quad (2, 8)$
28. $f(x) = x^3 + 1, \quad (1, 2)$
29. $f(x) = \sqrt{x}, \quad (1, 1)$
30. $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad (5, 2)$
31. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}, \quad (4, 5)$
32. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}, \quad (0, 1)$

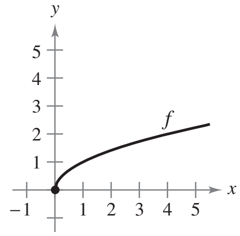
En los ejercicios 33 a 38, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* y paralela a la recta dada.

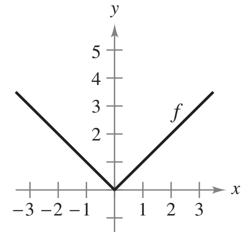
	Función	*Recta*
33.	$f(x) = x^2$	$2x - y + 1 = 0$
34.	$f(x) = 2x^2$	$4x + y + 3 = 0$
35.	$f(x) = x^3$	$3x - y + 1 = 0$
36.	$f(x) = x^3 + 2$	$3x - y - 4 = 0$
37.	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x + 2y - 6 = 0$
38.	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$	$x + 2y + 7 = 0$

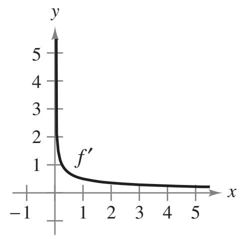
En los ejercicios 39 a 42, se muestra la gráfica de *f*. Seleccionar la gráfica de *f′*.

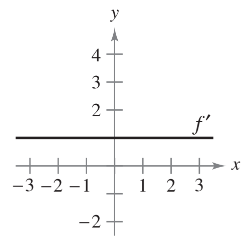
39.


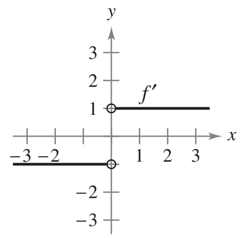
40.


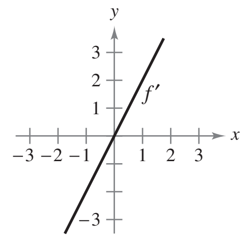
41.


42.


a)


b)


c)


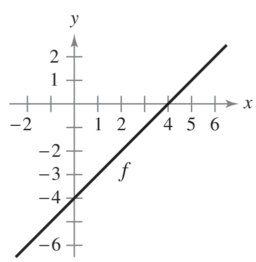
d)


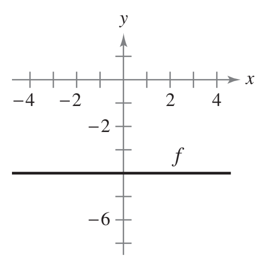
43. La recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en el punto $(4, 5)$ pasa por el punto $(7, 0)$. Encontrar $g(4)$ y $g'(4)$.

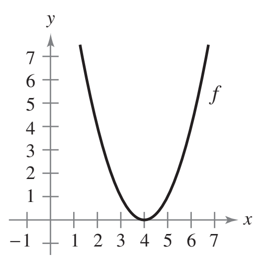
44. La recta tangente a la gráfica de $y = h(x)$ en el punto $(-1, 4)$ pasa por el punto $(3, 6)$. Encontrar $h(-1)$ y $h'(-1)$.

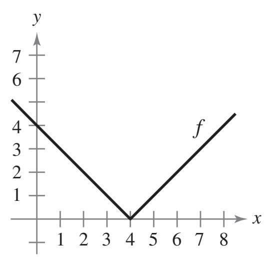
Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 45 a 50, construir la gráfica de *f′* y explicar cómo se obtuvo la respuesta.

45.


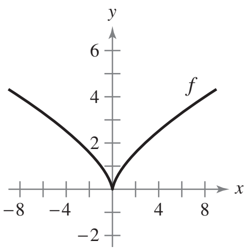
46.


47.


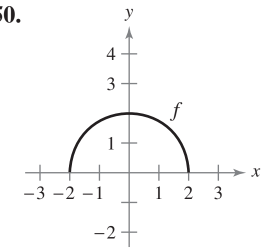
48.


Desarrollo de conceptos (*continuación*)

49.



50.



51. Construir la gráfica de una función cuya derivada siempre sea negativa. Explicar.

52. Construir la gráfica de una función cuya derivada siempre sea positiva. Explicar el razonamiento.

En los ejercicios 53 a 56, el límite representa a $f'(c)$ para una función f y un número c. Encontrar f y c.

53. $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0} \frac{[5 - 3(1 + \Delta x)] - 2}{\Delta x}$ **54.** $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(-2 + \Delta x)^3 + 8}{\Delta x}$

55. $\displaystyle\lim_{x\to 6} \frac{-x^2 + 36}{x - 6}$ **56.** $\displaystyle\lim_{x\to 9} \frac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9}$

En los ejercicios 57 a 59, identificar una función f que tenga las características señaladas. Representarla gráficamente.

57. $f(0) = 2$; $f'(x) = -3, -\infty < x < \infty$

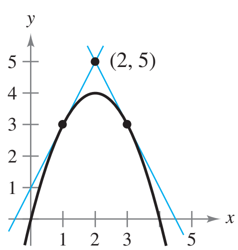
58. $f(0) = 4; f'(0) = 0$; $f'(x) < 0$ para $x < 0$; $f'(x) > 0$ para $x > 0$

59. $f(0) = 0; f'(0) = 0; f'(x) > 0$ si $x \neq 0$

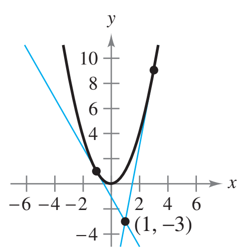
60. Suponer que $f'(c) = 3$. Encontrar $f'(-c)$ si: *a*) f es una función impar y *b*) f es una función par.

En los ejercicios 61 y 62, encontrar las ecuaciones de dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasen por el punto señalado.

61. $f(x) = 4x - x^2$



62. $f(x) = x^2$



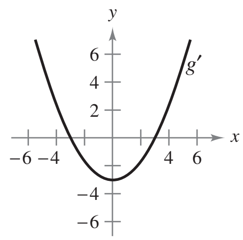
63. ***Razonamiento gráfico*** Utilizar una herramienta de graficación para representar cada una de las funciones y sus rectas tangentes en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$. Con base en los resultados, determinar si las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de una función en distintos valores de x siempre son distintas.

a) $f(x) = x^2$ *b*) $g(x) = x^3$

Para discusión

64. ***Razonamiento gráfico*** En la figura se muestra la gráfica de g'.

Para discusión (*continuación*)



a) $g'(0) =$ ▢ *b*) $g'(3) =$ ▢

c) ¿Qué se puede concluir de la gráfica de g, sabiendo que $g'(1) = -\frac{8}{3}$?

d) ¿Qué se puede concluir de la gráfica de g, sabiendo que $g'(-4) = \frac{7}{3}$?

e) $g(6) - g(4)$ ¿es positiva o negativa? Explicar la respuesta.

f) ¿Es posible encontrar $g(2)$ a partir de la gráfica? Explicar la respuesta.

65. ***Análisis gráfico*** Considerar la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y estimar los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$ y $f'(2)$.

b) Utilizar los resultados de la parte *a*) para determinar los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$ y $f'(-2)$.

c) Trazar una posible gráfica de f'.

d) Utilizar la definición de derivada para determinar $f'(x)$.

66. ***Análisis gráfico*** Considerar la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3$.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y estimar los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$.

b) Utilizar los resultados de la parte *a*) para determinar los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$, $f'(-2)$ y $f'(-3)$.

c) Trazar una posible gráfica de f'.

d) Utilizar la definición de derivada para determinar $f'(x)$.

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 67 y 68, representar en una misma ventana de la herramienta de graficación las gráficas de f y g y describir la relación entre ellas.**

$$g(x) = \frac{f(x + 0.01) - f(x)}{0.01}.$$

Clasificar las gráficas y describir la relación entre ellas.

67. $f(x) = 2x - x^2$ **68.** $f(x) = 3\sqrt{x}$

En los ejercicios 69 y 70, evaluar $f(2)$ y $f(2.1)$, y utilizar los resultados para estimar $f'(2)$.

69. $f(x) = x(4 - x)$ **70.** $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 71 y 72, utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su derivada en la misma ventana. Clasificar las gráficas y describir la relación que existe entre ellas.**

71. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **72.** $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - 3x$

En los ejercicios 73 a 82, utilizar la forma alterna para calcular la derivada en $x = c$ (si existe).

73. $f(x) = x^2 - 5,\quad c = 3$

74. $g(x) = x(x - 1),\quad c = 1$

75. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1,\quad c = -2$

76. $f(x) = x^3 + 6x,\quad c = 2$

77. $g(x) = \sqrt{|x|},\quad c = 0$

78. $f(x) = 2/x,\quad c = 5$

79. $f(x) = (x - 6)^{2/3},\quad c = 6$

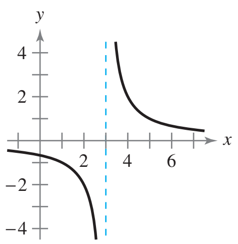
80. $g(x) = (x + 3)^{1/3},\quad c = -3$

81. $h(x) = |x + 7|,\quad c = -7$

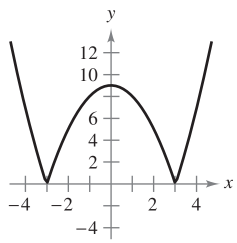
82. $f(x) = |x - 6|,\quad c = 6$

En los ejercicios 83 a 88, describir los valores x para los que f es derivable.

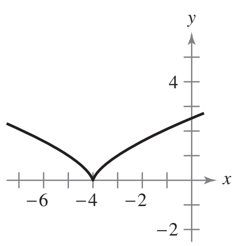
83. $f(x) = \dfrac{2}{x - 3}$



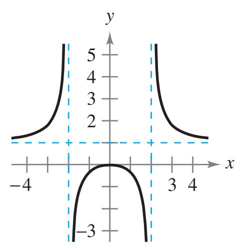
84. $f(x) = |x^2 - 9|$



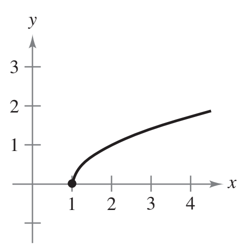
85. $f(x) = (x + 4)^{2/3}$



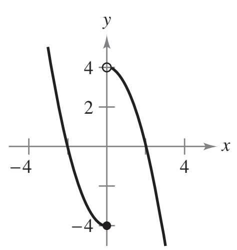
86. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$



87. $f(x) = \sqrt{x - 1}$



88. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \le 0 \\ 4 - x^2, & x > 0 \end{cases}$



Análisis gráfico **En los ejercicios 89 a 92, utilizar una herramienta de graficación para encontrar los valores de x en los que f es derivable.**

89. $f(x) = |x - 5|$

90. $f(x) = \dfrac{4x}{x - 3}$

91. $f(x) = x^{2/5}$

92. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x, & x \le 1 \\ x^2 - 2x, & x > 1 \end{cases}$

En los ejercicios 93 a 96, calcular las derivadas laterales en $x = 1$ (si existen). ¿Es derivable la función en $x = 1$?

93. $f(x) = |x - 1|$

94. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

95. $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^3, & x \le 1 \\ (x - 1)^2, & x > 1 \end{cases}$

96. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

En los ejercicios 97 y 98, determinar si la función es derivable en $x = 2$.

97. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 2 \\ 4x - 3, & x > 2 \end{cases}$

98. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x < 2 \\ \sqrt{2x}, & x \ge 2 \end{cases}$

99. ***Razonamiento gráfico*** Una recta de pendiente m pasa por el punto $(0, 4)$ y tiene ecuación $y = mx + 4$.

a) Escribir la distancia d que hay entre la recta y el punto $(3, 1)$ como función de m.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función d del apartado *a*). Basándonos en la gráfica, ¿es esa función derivable para todo valor de m? Si no es así, especificar en dónde no lo es.

100. ***Conjetura*** Tomando en cuenta las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$:

a) Dibujar la gráfica f y f' sobre el mismo conjunto de ejes.

b) Dibujar la gráfica g y g' sobre el mismo conjunto de ejes.

c) Identificar un patrón entre f y g y sus respectivas derivadas. Utilizarlo para hacer conjeturas respecto a $h'(x)$ si $h(x) = x^n$, donde n es un número entero mayor o igual y $n \ge 2$.

d) Encontrar $f'(x)$ si $f(x) = x^4$. Comparar el resultado con la conjetura del apartado *c*). ¿Esto comprueba la conjetura? Explicar la respuesta.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 101 a 104, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Para las que sean falsas, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

101. La pendiente de la recta tangente a una función derivable f en el punto $(2, f(2))$ es $\dfrac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$.

102. Si una función es continua en un punto, entonces es derivable en él.

103. Si una función tiene derivadas laterales por la derecha y por la izquierda en un punto, entonces es derivable en él.

104. Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en él.

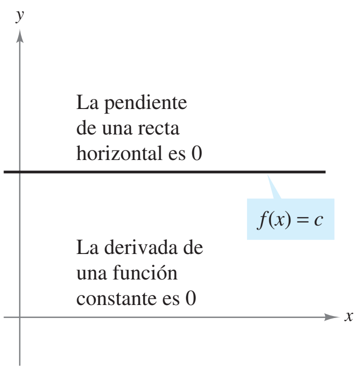
105. Sean $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Demostrar que f es continua, pero no derivable, en $x = 0$. Demostrar que g es derivable en 0 y calcular $g'(0)$.

106. ***Redacción*** Utilizar una herramienta de graficación para representar las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = |x| + 1$ en la misma ventana. Utilizar las funciones *zoom* y *trace* para analizarlas cerca del punto $(0, 1)$. ¿Qué se observa? ¿Cuál función es derivable en ese punto? Escribir un pequeño párrafo describiendo el significado geométrico de la derivabilidad en un punto.

2.2 Reglas básicas de derivación y razón de cambio

- Encontrar la derivada de una función por la regla de la constante.
- Encontrar la derivada de una función por la regla de la potencia.
- Encontrar la derivada de una función por la regla del múltiplo constante.
- Encontrar la derivada de una función por las reglas de suma y diferencia.
- Encontrar la derivada de las funciones seno y coseno.
- Usar derivadas para calcular razón de cambio.



Se observa que la regla de la constante equivale a decir que la pendiente de una recta horizontal es 0. Esto demuestra la relación que existe entre derivada y pendiente
Figura 2.14

La regla de la constante

En la sección 2.1 se usó la definición por medio de límites para calcular las derivadas. Ésta y las dos próximas secciones presentan varias “reglas de derivación” que permiten calcular las derivadas sin el uso *directo* de la definición por límites.

TEOREMA 2.2 LA REGLA DE LA CONSTANTE

La derivada de una función constante es 0. Es decir, si c es un número real, entonces

$$\frac{d}{dx}[c] = 0.$$

(Ver la figura 2.14)

DEMOSTRACIÓN Sea $f(x) = c$. Entonces, por la definición de derivada mediante el proceso de límite, se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[c] &= f'(x)\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla de la constante

	Función	*Derivada*
a)	$y = 7$	$\dfrac{dy}{dx} = 0$
b)	$f(x) = 0$	$f'(x) = 0$
c)	$s(t) = -3$	$s'(t) = 0$
d)	$y = k\pi^2$, k es constante	$y' = 0$

EXPLORACIÓN

Conjetura Utilizar la definición de derivada de la sección 2.1 para encontrar la derivada de las siguientes funciones. ¿Qué patrones se observan? Utilizar los resultados para elaborar una conjetura acerca de la derivada de $f(x) = x^n$.

a) $f(x) = x^1$ ***b)*** $f(x) = x^2$ ***c)*** $f(x) = x^3$
d) $f(x) = x^4$ ***e)*** $f(x) = x^{1/2}$ ***f)*** $f(x) = x^{-1}$

La regla de la potencia

Antes de demostrar la próxima regla, revisar el proceso de desarrollo de un binomio.

$$(x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

El desarrollo general del binomio para un entero positivo n cualquiera es

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \underbrace{\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n}_{(\Delta x)^2 \text{ es un factor común en estos términos.}}.$$

Este desarrollo del binomio se va a utilizar para demostrar un caso especial de la regla de la potencia.

TEOREMA 2.3 LA REGLA DE LA POTENCIA

Si n es un número racional, entonces la función $f(x) = x^n$ es derivable y

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Para que f sea derivable en $x = 0$, n debe ser un número tal que x^{n-1} se encuentre definido en un intervalo que contenga al 0.

NOTA Del ejemplo 7 de la sección 2.1, se encontró que la función $f(x) = x^{1/3}$ está definida en $x = 0$ pero no es derivable en $x = 0$. Esto se debe a que $x^{-2/3}$ no está definida sobre un intervalo que contiene al cero.

DEMOSTRACIÓN Si n es un entero positivo mayor que 1, entonces del desarrollo del binomio resulta

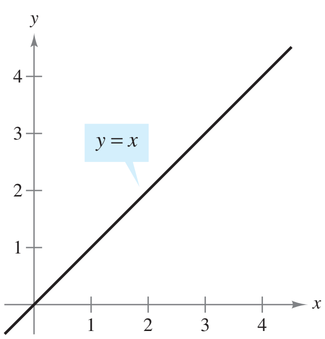
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^n] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x) + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right] \\
&= nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0 \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Esto demuestra el caso en que n es un entero positivo mayor que 1. Se deja al lector la demostración del caso $n = 1$. En el ejemplo 7 de la sección 2.3 se demuestra el caso para el que n es un entero negativo. En el ejercicio 76 de la sección 2.5 se demuestra el caso en el cual n es racional (en la sección 5.5 la regla de la potencia se extenderá hasta abarcar los valores irracionales de n).

Al utilizar la regla de la potencia, resulta conveniente separar el caso para el que $n = 1$ como otra regla distinta de derivación, a saber

$$\boxed{\frac{d}{dx}[x] = 1.}$$

Regla de las potencias para $n = 1$.



La pendiente de la recta $y = x$ es 1

Figura 2.15

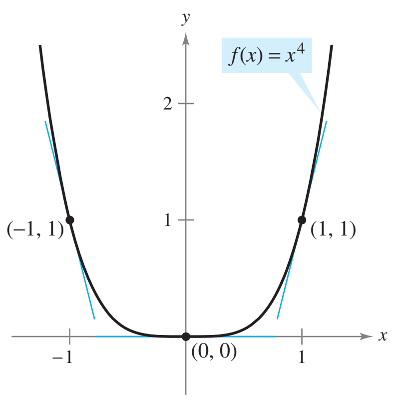
Esta regla es congruente con el hecho de que la pendiente de la recta $y = x$ es 1, como se muestra en la figura 2.15.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de la potencia

Función	*Derivada*
a) $f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$	$g'(x) = \dfrac{d}{dx}[x^{1/3}] = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$
c) $y = \dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[x^{-2}] = (-2)x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

Observar que en el ejemplo 2*c*, *antes* de derivar se ha reescrito $1/x^2$ como x^{-2}. En muchos problemas de derivación, el primer paso consiste en reescribir la función.

Dada:		Reescribir:		Derivar:		Simplificar
$y = \dfrac{1}{x^2}$	⇨	$y = x^{-2}$	⇨	$\dfrac{dy}{dx} = (-2)x^{-3}$	⇨	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{x^3}$



Observar que la pendiente es negativa en el punto $(-1, 1)$, cero en el $(0, 0)$ y positiva en el $(1, 1)$
Figura 2.16

EJEMPLO 3 Pendiente de una gráfica

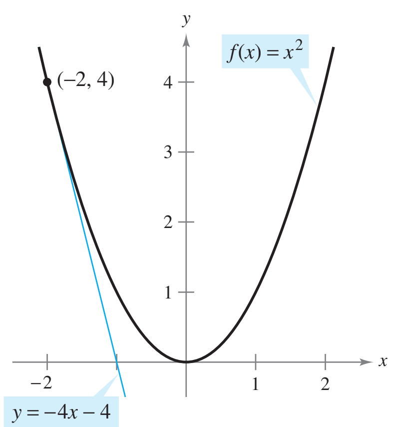
Calcular la pendiente de la gráfica de $f(x) = x^4$ cuando

a) $x = -1$ ***b)*** $x = 0$ ***c)*** $x = 1.$

Solución La pendiente de una gráfica en un punto es igual a la derivada en dicho punto. La derivada de f es $f'(x) = 4x^3$.

a) Para $x = -1$, la pendiente es $f'(-1) = 4(-1)^3 = -4$. La pendiente es negativa.
b) Para $x = 0$, la pendiente es $f'(0) = 4(0)^3 = 0$. La pendiente es 0.
c) Para $x = 1$, la pendiente es $f'(1) = 4(1)^3 = 4$. La pendiente es positiva.

Ver la figura 2.16.



La recta tangente $y = -4x - 4$ es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto $(-2, 4)$
Figura 2.17

EJEMPLO 4 Ecuación de una recta tangente

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ cuando $x = -2$.

Solución Para encontrar el *punto* sobre la gráfica de f, evaluar la función en $x = -2$.

$(-2, f(-2)) = (-2, -4)$ Punto de la gráfica.

Para calcular la *pendiente* de la gráfica en $x = -2$, evaluar la derivada, $f'(x) = 2x$, en $x = -2$.

$m = f'(-2) = -4$ Pendiente de la gráfica en $(-2, 4)$.

Ahora, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, escribir

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{Forma punto-pendiente.}$$
$$y - 4 = -4[x - (-2)] \quad \text{Sustituir } y_1, m \text{ y } x_1.$$
$$y = -4x - 4. \quad \text{Simplificar.}$$

Ver la figura 2.17.

La regla del múltiplo constante

TEOREMA 2.4 LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE

Si f es una función derivable y c un número real, entonces cf también es derivable y $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$.

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[cf(x)] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} c\left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]\\
&= c\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] && \text{Aplicar teorema 1.2.}\\
&= cf'(x)
\end{aligned}$$

De manera informal, esta regla establece que las constantes se pueden extraer de la derivada, incluso cuando aparecen en un denominador.

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] = cf'(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{c}\right] &= \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{c}\right)f(x)\right]\\
&= \left(\frac{1}{c}\right)\frac{d}{dx}[f(x)] = \left(\frac{1}{c}\right)f'(x)
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Aplicación de la regla del múltiplo constante

Función	*Derivada*
a) $y = \frac{2}{x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[2x^{-1}] = 2\frac{d}{dx}[x^{-1}] = 2(-1)x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$
b) $f(t) = \frac{4t^2}{5}$	$f'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{5}t^2\right] = \frac{4}{5}\frac{d}{dt}[t^2] = \frac{4}{5}(2t) = \frac{8}{5}t$
c) $y = 2\sqrt{x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[2x^{1/2}] = 2\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) = x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$
d) $y = \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^{-2/3}\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3} = -\frac{1}{3x^{5/3}}$
e) $y = -\frac{3x}{2}$	$y' = \frac{d}{dx}\left[-\frac{3}{2}x\right] = -\frac{3}{2}(1) = -\frac{3}{2}$

La regla del múltiplo constante y la de la potencia se pueden combinar en una sola. La regla resultante es

$$\frac{d}{dx}[cx^n] = cnx^{n-1}.$$

EJEMPLO 6 Uso de paréntesis al derivar

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
a)	$y = \dfrac{5}{2x^3}$	$y = \dfrac{5}{2}(x^{-3})$	$y' = \dfrac{5}{2}(-3x^{-4})$	$y' = -\dfrac{15}{2x^4}$
b)	$y = \dfrac{5}{(2x)^3}$	$y = \dfrac{5}{8}(x^{-3})$	$y' = \dfrac{5}{8}(-3x^{-4})$	$y' = -\dfrac{15}{8x^4}$
c)	$y = \dfrac{7}{3x^{-2}}$	$y = \dfrac{7}{3}(x^2)$	$y' = \dfrac{7}{3}(2x)$	$y' = \dfrac{14x}{3}$
d)	$y = \dfrac{7}{(3x)^{-2}}$	$y = 63(x^2)$	$y' = 63(2x)$	$y' = 126x$

Las reglas de suma y diferencia

TEOREMA 2.5 LAS REGLAS DE SUMA Y DIFERENCIA

La derivada de la suma (o de la diferencia) de dos funciones derivables f y g es derivable en sí. Además, la derivada de $f + g$ (o $f - g$) es igual a la suma (o diferencia) de las derivadas de f y g.

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$ Regla de la suma.

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$$ Regla de la diferencia.

DEMOSTRACIÓN Una demostración de la regla de la suma se sigue del teorema 1.2 (la de la diferencia se demuestra de manera análoga).

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

Las reglas de suma y diferencia pueden ampliarse en cualquier número finito de funciones. Por ejemplo, si $F(x) = f(x) + g(x) - h(x)$, entonces $F'(x) = f'(x) + g'(x) - h'(x)$.

EJEMPLO 7 Aplicación de las reglas de suma y diferencia

	Función	*Derivada*
a)	$f(x) = x^3 - 4x + 5$	$f'(x) = 3x^2 - 4$
b)	$g(x) = -\dfrac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x$	$g'(x) = -2x^3 + 9x^2 - 2$

PARA MAYOR INFORMACIÓN
El esbozo de una demostración geométrica de las derivadas de las funciones seno y coseno puede consultarse en el artículo "The Spider's Spacewalk Derivation of sin′ and cos′" de Tim Hesterberg en *The College Mathematics Journal*.

Derivadas de las funciones seno y coseno

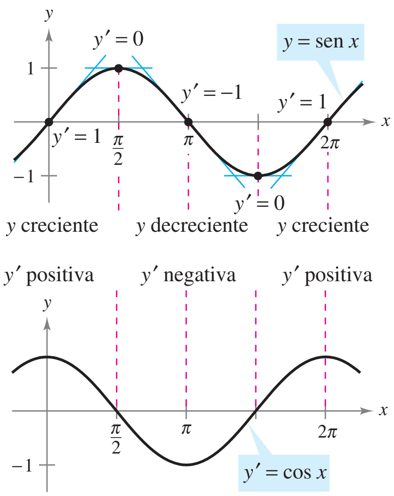
En la sección 1.3 se vieron los límites siguientes:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = 0$$

Estos dos límites pueden utilizarse para demostrar las reglas de derivación de las funciones seno y coseno (las derivadas de las demás funciones trigonométricas se analizan en la sección 2.3).

TEOREMA 2.6 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x \qquad \frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$$



La derivada de la función seno es la función coseno
Figura 2.18

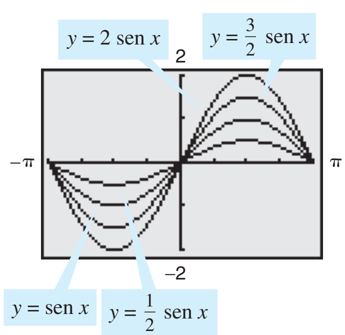
DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} \qquad \text{Definición de derivada.}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos \Delta x + \cos x \operatorname{sen} \Delta x - \operatorname{sen} x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} \Delta x - (\operatorname{sen} x)(1 - \cos \Delta x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(\cos x)\left(\frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}\right) - (\operatorname{sen} x)\left(\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}\right)\right]\\
&= \cos x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}\right) - \operatorname{sen} x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}\right)\\
&= (\cos x)(1) - (\operatorname{sen} x)(0)\\
&= \cos x
\end{aligned}$$

Esta regla de derivación se ilustra en la figura 2.18. Observar que para cada x, la *pendiente* de la curva seno es igual al valor del coseno. La demostración de la segunda regla se deja como ejercicio (ver el ejercicio 120).

EJEMPLO 8 Derivadas que contienen senos y cosenos

	Función	*Derivada*
a)	$y = 2 \operatorname{sen} x$	$y' = 2 \cos x$
b)	$y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2} = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x$	$y' = \dfrac{1}{2} \cos x = \dfrac{\cos x}{2}$
c)	$y = x + \cos x$	$y' = 1 - \operatorname{sen} x$



$$\frac{d}{dx}[a \operatorname{sen} x] = a \cos x$$

Figura 2.19

TECNOLOGÍA Una herramienta de graficación permite visualizar la interpretación de una derivada. Por ejemplo, en la figura 2.19 se muestran las gráficas de

$$y = a \operatorname{sen} x$$

para $a = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ y 2. Estimar la pendiente de cada gráfica en el punto (0, 0). Después verificar los cálculos de manera analítica mediante el cálculo de la derivada de cada función cuando $x = 0$.

Razón de cambio

Ya se ha visto que la derivada se utiliza para calcular pendientes. Pero también sirve para determinar la razón de cambio de una variable respecto a otra, lo que le confiere utilidad en una amplia variedad de situaciones. Algunos ejemplos son las tasas de crecimiento de poblaciones, las tasas de producción, las tasas de flujo de un líquido, la velocidad y la aceleración.

Un uso frecuente de la razón de cambio consiste en describir el movimiento de un objeto que va en línea recta. En tales problemas, la recta del movimiento se suele representar en posición horizontal o vertical, con un origen marcado en ella. Sobre tales rectas, el movimiento hacia la derecha (o hacia arriba) se considera de dirección positiva y el movimiento hacia la izquierda (o hacia abajo) de dirección negativa.

La función s que representa la posición (respecto al origen) de un objeto como función del tiempo t se denomina **función de posición**. Si durante cierto lapso de tiempo Δt el objeto cambia su posición en una cantidad $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, entonces, empleando la consabida fórmula:

$$\text{Razón} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

la **velocidad media** es

$$\frac{\text{Cambio en distancia}}{\text{Cambio en tiempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Velocidad media.

EJEMPLO 9 Velocidad media de un objeto en su caída

Si se deja caer una bola de billar desde una altura de 100 pies, su altura s en el instante t se representa mediante la función posición

$$s = -16t^2 + 100$$

Función posición.

donde s se mide en pies y t en segundos. Encontrar su velocidad media para cada uno de estos intervalos.

a) $[1, 2]$ ***b***) $[1, 1.5]$ ***c***) $[1, 1.1]$

Solución

a) En el intervalo $[1, 2]$, el objeto cae desde una altura de $s(1) = -16(1)^2 + 100 = 84$ pies hasta una altura de $s(2) = -16(2)^2 + 100 = 36$ pies. La velocidad media es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{36 - 84}{2 - 1} = \frac{-48}{1} = -48 \text{ pies por segundo.}$$

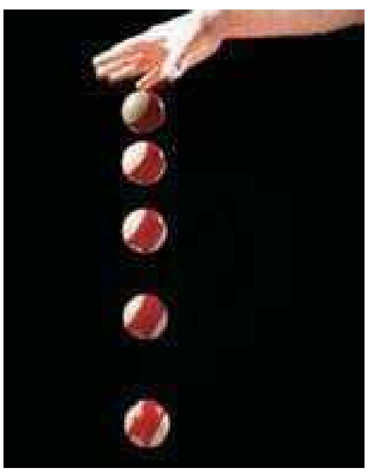
b) En el intervalo $[1, 1.5]$ el objeto cae desde una altura de 84 pies hasta una altura de 64 pies. La velocidad media es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{64 - 84}{1.5 - 1} = \frac{-20}{0.5} = -40 \text{ pies por segundo.}$$

c) En el intervalo $[1, 1.1]$ el objeto cae desde una altura de 84 pies hasta una altura de 80.64 pies. La velocidad media es

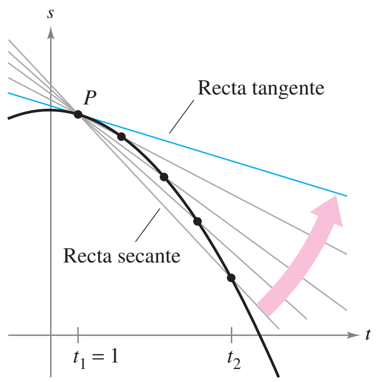
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80.64 - 84}{1.1 - 1} = \frac{-3.36}{0.1} = -33.6 \text{ pies por segundo.}$$

Observar que las velocidades medias son *negativas*, lo que refleja el hecho de que el objeto se mueve hacia abajo.



Richard Megna/Fundamental Photographs

Exposición fotográfica de larga duración de una bola de billar en caída libre.



La velocidad media entre t_1 y t_2 es igual a la pendiente de la recta secante. La velocidad instantánea en t_1 es igual a la pendiente de la recta tangente
Figura 2.20

Supongamos que en el ejemplo anterior se quisiera encontrar la velocidad *instantánea* (o simplemente de la velocidad) del objeto cuando $t = 1$. Al igual que la pendiente de la recta tangente puede aproximarse utilizando las pendientes de rectas secantes, se puede aproximar la velocidad en $t = 1$ por medio de las velocidades medias durante un pequeño intervalo $[1, 1 + \Delta t]$ (ver la figura 2.20). Se obtiene dicha velocidad calculando el límite cuando Δt tiende a cero. Al intentar hacerlo se puede comprobar que la velocidad cuando $t = 1$ es de -32 pies por segundo.

En general, si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, su **velocidad** en el instante t es

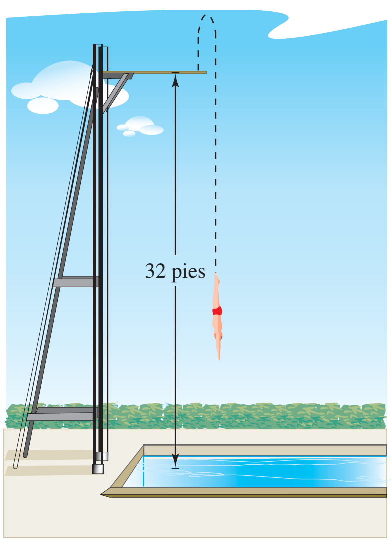
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$ Función velocidad.

En otras palabras, la función velocidad es la derivada de la función posición. La velocidad puede ser positiva, cero o negativa. La **rapidez** de un objeto se define como el valor absoluto de su velocidad, y nunca es negativa.

La posición de un objeto en caída libre (despreciando la resistencia del aire) bajo la influencia de la gravedad se obtiene mediante la ecuación

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0$$ Función posición.

donde s_0 es la altura inicial del objeto, v_0 la velocidad inicial y g la aceleración de la gravedad. En la Tierra, el valor de g es de aproximadamente -32 pies.



La velocidad es positiva cuando un objeto se eleva, y negativa cuando desciende. Se observa que el clavadista se mueve hacia arriba durante la primera mitad de segundo, porque la velocidad es positiva para $0 < t < \frac{1}{2}$. Cuando la velocidad es de 0, el clavadista ha alcanzado la altura máxima del salto
Figura 2.21

EJEMPLO 10 Aplicación de la derivada para calcular la velocidad

En el instante $t = 0$, un clavadista se lanza desde un trampolín que está a 32 pies sobre el nivel del agua de la piscina (ver la figura 2.21). La posición del clavadista está dada por

$$s(t) = -16t^2 + 16t + 32$$ Función posición.

donde s se mide en pies y t en segundos.

a) ¿Cuánto tarda el clavadista en llegar al agua?

b) ¿Cuál es su velocidad al momento del impacto?

Solución

a) Para determinar el momento en que toca el agua hacemos $s = 0$ y despejamos t.

$$-16t^2 + 16t + 32 = 0$$ Igualar a cero la función posición.

$$-16(t + 1)(t - 2) = 0$$ Factorizar.

$$t = -1 \text{ o } 2$$ Despejar t.

Como $t \geq 0$, hemos de seleccionar el valor positivo, así que el clavadista llega al agua en $t = 2$ segundos.

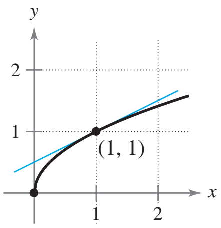
b) Su velocidad en el instante t está dada por la derivada $s'(t) = -32t + 16$. En consecuencia, su velocidad en $t = 2$ es

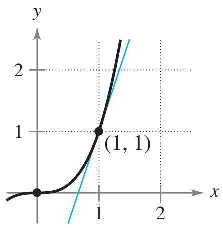
$$s'(2) = -32(2) + 16 = -48 \text{ pies por segundo.}$$

2.2 Ejercicios

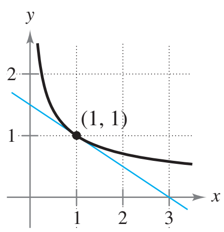
En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica para estimar la pendiente de la recta tangente a $y = x^n$ en el punto (1, 1). Verificar la respuesta de manera analítica.

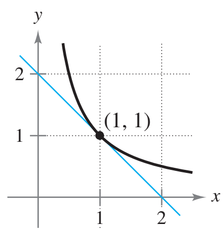
1. *a)* $y = x^{1/2}$ *b)* $y = x^3$





2. *a)* $y = x^{-1/2}$ *b)* $y = x^{-1}$





En los ejercicios 3 a 24, usar las reglas de derivabilidad para calcular la derivada de la función.

3. $y = 12$
4. $f(x) = -9$
5. $y = x^7$
6. $y = x^{16}$
7. $y = \dfrac{1}{x^5}$
8. $y = \dfrac{1}{x^8}$
9. $f(x) = \sqrt[5]{x}$
10. $g(x) = \sqrt[4]{x}$
11. $f(x) = x + 11$
12. $g(x) = 3x - 1$
13. $f(t) = -2t^2 + 3t - 6$
14. $y = t^2 + 2t - 3$
15. $g(x) = x^2 + 4x^3$
16. $y = 8 - x^3$
17. $s(t) = t^3 + 5t^2 - 3t + 8$
18. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$
19. $y = \dfrac{\pi}{2}\,\text{sen}\,\theta - \cos\theta$
20. $g(t) = \pi\cos t$
21. $y = x^2 - \frac{1}{2}\cos x$
22. $y = 7 + \text{sen}\,x$
23. $y = \dfrac{1}{x} - 3\,\text{sen}\,x$
24. $y = \dfrac{5}{(2x)^3} + 2\cos x$

En los ejercicios 25 a 30, completar la tabla.

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
25.	$y = \dfrac{5}{2x^2}$			
26.	$y = \dfrac{2}{3x^2}$			
27.	$y = \dfrac{6}{(5x)^3}$			
28.	$y = \dfrac{\pi}{(3x)^2}$			
29.	$y = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$			
30.	$y = \dfrac{4}{x^{-3}}$			

En los ejercicios 31 a 38, encontrar la pendiente de la gráfica de la función en el punto indicado. Utilizar la función *derivative* de una herramienta de graficación para verificar los resultados.

	Función	*Punto*
31.	$f(x) = \dfrac{8}{x^2}$	$(2, 2)$
32.	$f(t) = 3 - \dfrac{3}{5t}$	$\left(\frac{3}{5}, 2\right)$
33.	$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{5}x^3$	$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
34.	$y = 3x^3 - 10$	$(2, 14)$
35.	$y = (4x + 1)^2$	$(0, 1)$
36.	$f(x) = 3(5 - x)^2$	$(5, 0)$
37.	$f(\theta) = 4\,\text{sen}\,\theta - \theta$	$(0, 0)$
38.	$g(t) = -2\cos t + 5$	$(\pi, 7)$

En los ejercicios 39 a 54, encontrar la derivada de cada función.

39. $f(x) = x^2 + 5 - 3x^{-2}$
40. $f(x) = x^2 - 3x - 3x^{-2}$
41. $g(t) = t^2 - \dfrac{4}{t^3}$
42. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$
43. $f(x) = \dfrac{4x^3 + 3x^2}{x}$
44. $f(x) = \dfrac{x^3 - 6}{x^2}$
45. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$
46. $h(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$
47. $y = x(x^2 + 1)$
48. $y = 3x(6x - 5x^2)$
49. $f(x) = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$
50. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$
51. $h(s) = s^{4/5} - s^{2/3}$
52. $f(t) = t^{2/3} - t^{1/3} + 4$
53. $f(x) = 6\sqrt{x} + 5\cos x$
54. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3\cos x$

En los ejercicios 55 a 58, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado, *b*) utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su recta tangente en el punto, y *c*) verificar los resultados empleando la función *derivative* de su herramienta de graficación.

	Función	*Punto*
55.	$y = x^4 - 3x^2 + 2$	$(1, 0)$
56.	$y = x^3 + x$	$(-1, -2)$
57.	$f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$	$(1, 2)$
58.	$y = (x^2 + 2x)(x + 1)$	$(1, 6)$

En los ejercicios 59 a 64, determinar los puntos (si los hay) donde la gráfica de la función tiene una recta tangente horizontal.

59. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

60. $y = x^3 + x$

61. $y = \dfrac{1}{x^2}$

62. $y = x^2 + 9$

63. $y = x + \text{sen}\, x, \quad 0 \le x < 2\pi$

64. $y = \sqrt{3}x + 2\cos x, \quad 0 \le x < 2\pi$

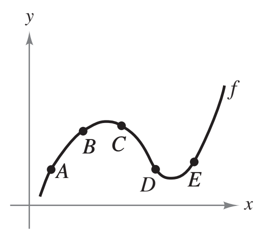
En los ejercicios 65 a 70, encontrar una k tal que la recta sea tangente a la gráfica de la función.

	Función	*Recta*
65.	$f(x) = x^2 - kx$	$y = 5x - 4$
66.	$f(x) = k - x^2$	$y = -6x + 1$
67.	$f(x) = \dfrac{k}{x}$	$y = -\dfrac{3}{4}x + 3$
68.	$f(x) = k\sqrt{x}$	$y = x + 4$
69.	$f(x) = kx^3$	$y = x + 1$
70.	$f(x) = kx^4$	$y = 4x - 1$

71. Bosquejar la gráfica de una función f tal que $f' > 0$ para todas las x y cuya razón de cambio de la función sea decreciente.

Para discusión

72. Utilizar la gráfica para responder a las siguientes preguntas.



a) ¿Entre qué par de puntos consecutivos es mayor la razón de cambio promedio de la función?

b) ¿La razón de cambio promedio de f entre A y B es mayor o menor que la razón de cambio instantáneo en B?

c) Trazar una recta tangente a la gráfica entre los puntos C y D cuya pendiente sea igual a la razón de cambio promedio de la función entre C y D.

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 73 y 74 se muestra la relación que existe entre f y g. Explicar la relación entre f' y g'.

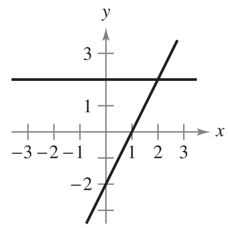
73. $g(x) = f(x) + 6$

74. $g(x) = -5\,f(x)$

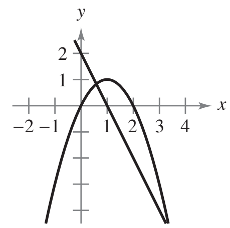
Desarrollo de conceptos (*continuación*)

En los ejercicios 75 y 76, se muestran las gráficas de la función f y de su derivada f' en el mismo plano cartesiano. Clasificar las gráficas como f o f' y explicar en un breve párrafo los criterios empleados para hacer tal selección.

75.



76.



77. Construir las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ y $y = -x^2 + 6x - 5$, así como las dos rectas que son tangentes a ambas gráficas. Encontrar las ecuaciones de dichas rectas.

78. Demostrar que las gráficas de $y = x$ y $y = 1/x$ tienen rectas tangentes perpendiculares entre sí en su punto de intersección.

79. Demostrar que la gráfica de la función

$$f(x) = 3x + \text{sen}\, x + 2$$

no tiene ninguna recta tangente horizontal.

80. Demostrar que la gráfica de la función

$$f(x) = x^5 + 3x^3 + 5x$$

no tiene una recta tangente con pendiente de 3.

En los ejercicios 81 y 82, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f que pasa por el punto (x_0, y_0), no perteneciente a la gráfica. Para determinar el punto de tangencia (x, y) en la gráfica de f, resolver la ecuación

$$f'(x) = \frac{y_0 - y}{x_0 - x}.$$

81. $f(x) = \sqrt{x}$

$(x_0, y_0) = (-4, 0)$

82. $f(x) = \dfrac{2}{x}$

$(x_0, y_0) = (5, 0)$

83. ***Aproximación lineal*** En una ventana cuadrada de la herramienta de graficación, aplicar el *zoom* para aproximar la gráfica de

$$f(x) = 4 - \tfrac{1}{2}x^2$$

a fin de estimar $f'(1)$. Calcular $f'(1)$ por derivación.

84. ***Aproximación lineal*** En una ventana cuadrada de la herramienta de graficación, aplicar el *zoom* para aproximar la gráfica de

$$f(x) = 4\sqrt{x} + 1$$

a fin de estimar $f'(4)$. Calcular $f'(4)$ por derivación.

85. ***Aproximación lineal*** Tomando en cuenta la función $f(x) = x^{3/2}$ con el punto de solución (4, 8):

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar f. Usar el *zoom* para ampliar el entorno del punto (4, 8). Tras varias ampliaciones, la gráfica aparecerá casi lineal. Utilizar la función *trace* para determinar las coordenadas de un punto de la gráfica próximo al (4, 8). Encontrar la ecuación de la secante $S(x)$ que une esos dos puntos.

b) Encontrar la ecuación de la recta

$$T(x) = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

tangente a la gráfica de f que pasa por el punto dado. ¿Por qué las funciones lineales S y T son casi iguales?

c) Representar f y T en la misma ventana de la herramienta de graficación. Observar que T es una buena aproximación de f cuando x es cercano a 4. ¿Qué ocurre con la precisión de esta aproximación a medida que el punto de tangencia se aleja?

d) Demostrar la conclusión obtenida en el apartado *c*) completando la tabla.

Δx	-3	-2	-1	-0.5	-0.1	0
$f(4 + \Delta x)$						
$T(4 + \Delta x)$						

Δx	0.1	0.5	1	2	3
$f(4 + \Delta x)$					
$T(4 + \Delta x)$					

86. ***Aproximación lineal*** Repetir el ejercicio 85 empleando ahora la función $f(x) = x^3$, donde $T(x)$ es la recta tangente en el punto (1, 1). Explicar por qué la precisión de la aproximación lineal disminuye más rápido que en el ejercicio anterior.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 87 a 92, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que lo es.**

87. Si $f'(x) = g'(x)$, entonces $f(x) = g(x)$.

88. Si $f(x) = g(x) + c$, entonces $f'(x) = g'(x)$.

89. Si $y = \pi^2$, entonces $dy/dx = 2\pi$.

90. Si $y = x/\pi$, entonces $dy/dx = 1/\pi$.

91. Si $g(x) = 3f(x)$, entonces $g'(x) = 3f'(x)$.

92. Si $f(x) = 1/x^n$, entonces $f'(x) = 1/(nx^{n-1})$.

En los ejercicios 93 a 96, calcular la razón de cambio promedio de la función en el intervalo dado. Compararlo con las razones de cambio instantáneas en los extremos del intervalo.

93. $f(t) = 4t + 5$, $[1, 2]$

94. $f(t) = t^2 - 7$, $[3, 3.1]$

95. $f(x) = \dfrac{-1}{x}$, $[1, 2]$

96. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$

Movimiento vertical **En los ejercicios 97 y 98, utilizar la función de posición $s(t) = -16t^2 + v_0 t + s_0$ para objetos en caída libre.**

97. Se deja caer una moneda desde lo alto de un edificio que tiene una altura de 1 362 pies.

a) Determinar las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda.

b) Calcular su velocidad promedio en el intervalo [1, 2].

c) Encontrar las velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$.

d) Calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo.

e) Determinar su velocidad al caer en el suelo.

98. Desde una altura de 220 pies, se lanza hacia abajo una bola con una velocidad inicial de -22 pies/s. ¿Cuál es su velocidad tras 3 segundos? ¿Y luego de descender 108 pies?

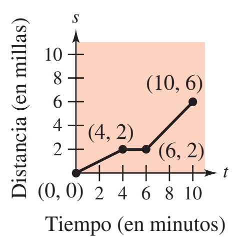
Movimiento vertical **En los ejercicios 99 y 100, utilizar la función posición $s(t) = -4.9t^2 + v_0 t + s_0$ para objetos en caída libre.**

99. Se lanza un proyectil hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad inicial de 120 m/s. ¿Cuál es su velocidad a los 5 segundos? ¿Y a los 10?

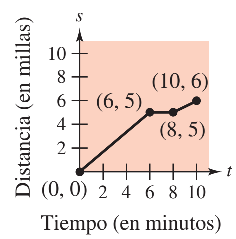
100. Con el fin de estimar la altura de un edificio, se deja caer una piedra desde su parte más alta en el agua de una piscina que se encuentra al nivel del suelo. ¿Cuál es la altura del edificio, si el chapoteo se observa 5.6 segundos después de soltar la piedra?

Para pensar **En los ejercicios 101 y 102 se muestra la gráfica de una función posición, que representa la distancia recorrida en millas por una persona que conduce durante 10 minutos para llegar a su trabajo. Elaborar un boceto de la función velocidad correspondiente.**

101.

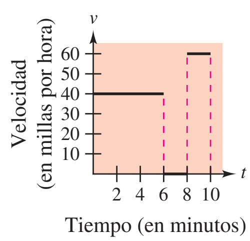


102.

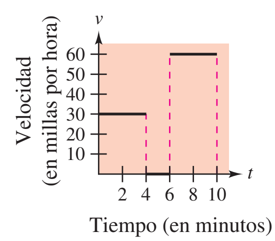


Para pensar **En los ejercicios 103 y 104 se muestra la gráfica de una función velocidad, que representa la velocidad, en millas por hora, de una persona que conduce durante 10 minutos para llegar a su trabajo. Elaborar un boceto de la función posición correspondiente.**

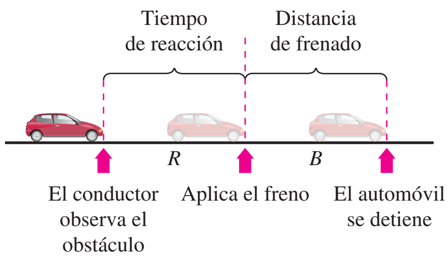
103.



104.



105. ***Modelado matemático*** La distancia de frenado de un automóvil que viaja a una velocidad v (kilómetros por hora), es la distancia R (metros) que recorre durante el tiempo de reacción del conductor más la distancia B (metros) que recorre una vez aplicados los frenos (ver la figura). La tabla muestra los resultados de un experimento al respecto.



Velocidad, v	20	40	60	80	100
Distancia durante el tiempo de reacción, R	8.3	16.7	25.0	33.3	41.7
Distancia durante el tiempo de frenado, B	2.3	9.0	20.2	35.8	55.9

a) Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para obtener un modelo lineal para el tiempo de reacción.
b) Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para obtener un modelo cuadrático para la distancia aplicando los frenos.
c) Encontrar el polinomio que expresa la distancia total T recorrida hasta que el vehículo se detiene por completo.
d) Utilizar una herramienta de graficación para representar las funciones R, B y T en una misma ventana.
e) Calcular la derivada de T y el ritmo de cambio de la distancia total de frenado para $v = 40$, $v = 80$ y $v = 100$.
f) A partir de los resultados de este ejercicio, elaborar conclusiones acerca del comportamiento de la distancia total de frenado a medida que se aumenta la velocidad.

106. ***Costo del combustible*** Un automóvil viaja 15 000 millas al año y recorre x millas por galón. Suponiendo que el costo promedio del combustible es \$2.76 por galón, calcular el costo anual C del combustible consumido como función de x y utilizar esta función para completar la tabla.

x	10	15	20	25	30	35	40
C							
dC/dx							

¿Quién se beneficiaría más con el aumento en 1 milla por galón en la eficiencia del vehículo: un conductor que obtiene 15 millas por galón o uno que obtiene 35 millas por galón? Explicar la respuesta.

107. ***Volumen*** El volumen de un cubo con lado s es $V = s^3$. Calcular el ritmo de cambio del volumen respecto a s cuando $s = 6$ centímetros.

108. ***Área*** El área de un cuadrado con lados s es $A = s^2$. Encontrar la razón de cambio del área respecto a s cuando $s = 6$ metros.

109. ***Velocidad*** Verificar que la velocidad media en el intervalo $[t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]$ es la misma que la velocidad instantánea en $t = t_0$ para la función posición

$$s(t) = -\tfrac{1}{2}at^2 + c.$$

110. ***Gestión de inventario*** El costo anual de inventario C de un fabricante es

$$C = \frac{1\,008\,000}{Q} + 6.3Q$$

donde Q es el tamaño del pedido cuando se reponen existencias. Calcular el cambio del costo anual cuando Q crece de 350 a 351 y compararlo con la razón de cambio instantáneo para $Q = 350$.

111. ***Redacción*** La ecuación $N = f(p)$ representa el número de galones N de gasolina normal sin plomo que vende una gasolinería a un precio de p dólares por galón.

a) Describir el significado de $f'(2.979)$.
b) ¿$f'(2.979)$ suele resultar positiva o negativa? Explicar la respuesta.

112. ***Ley del enfriamiento de Newton*** Esta ley establece que la razón de cambio o velocidad de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura T y la temperatura ambiente T_a. Elaborar una ecuación para esta ley.

113. Encontrar la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por el punto (0, 1) y es tangente a la recta $y = x - 1$ en el punto (1, 0).

114. Sea (a, b) un punto cualquiera de la gráfica de $y = 1/x$, $x > 0$. Demostrar que el área del triángulo formado por la recta tangente que pasa por (a, b) y los ejes coordenados es 2.

115. Encontrar la recta o rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 9x$ en el punto $(1, -9)$.

116. Encontrar la ecuación de la recta o rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ en el punto dado.

a) $(0, a)$ *b*) $(a, 0)$

¿Existe alguna restricción para la constante a?

En los ejercicios 117 y 118, encontrar *a* y *b* tales que *f* sea derivable en todos los puntos.

117. $f(x) = \begin{cases} ax^3, & x \le 2 \\ x^2 + b, & x > 2 \end{cases}$

118. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ ax + b, & x \ge 0 \end{cases}$

119. ¿Dónde son derivables las funciones $f_1(x) = |\operatorname{sen} x|$ y $f_2(x) = \operatorname{sen} |x|$?

120. Demostrar que $\dfrac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$.

PARA MAYOR INFORMACIÓN En el artículo “Sines and Cosines of the Times”, de Victor J. Katz, publicado en *Math Horizons*, encontrará una interpretación geométrica de las derivadas de las funciones trigonométricas.

2.3 Reglas del producto, del cociente y derivadas de orden superior

- Encontrar la derivada de una función por la regla del producto.
- Encontrar la derivada de una función por la regla del cociente.
- Encontrar las derivadas de las funciones trigonométricas.
- Encontrar las derivadas de orden superior de una función.

La regla del producto

En la sección 2.2 se vio que la derivada de una suma de dos funciones es simplemente la suma de sus derivadas. La regla para derivar el producto de dos funciones no es tan simple.

TEOREMA 2.7 LA REGLA DEL PRODUCTO

El producto de dos funciones derivables f y g también es derivable. Además, su derivada es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la derivada de la primera por la segunda.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

NOTA Algunas personas prefieren la siguiente versión de la regla del producto

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

La ventaja de esta forma radica en que se puede generalizar con facilidad a multiplicaciones con tres o más factores. ■

DEMOSTRACIÓN Algunas demostraciones matemáticas, como en el caso de la regla de la suma, son directas. Otras requieren pasos inteligentes cuyo motivo puede resultar imperceptible para el lector. Esta demostración presenta uno de esos pasos, sumar y restar una misma cantidad, la cual se muestra en distinto color.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

Observar que $\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$ porque se considera que f es derivable y, por tanto, continua.

La regla del producto es extensiva a multiplicaciones con más de dos factores. Por ejemplo, si f, g y h son funciones derivables de x, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

Por ejemplo, la derivada de $y = x^2 \operatorname{sen} x \cos x$ es

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2x \operatorname{sen} x \cos x + x^2 \cos x \cos x + x^2 \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x) \\
&= 2x \operatorname{sen} x \cos x + x^2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x).
\end{aligned}$$

NOTA La prueba de la regla del producto para productos de más de dos factores se deja al lector como ejercicio (ver el ejercicio 141). ■

La regla del producto

Cuando Leibniz elaboró originalmente una fórmula para la regla del producto, lo hizo motivado por la expresión

$$(x + dx)(y + dy) - xy$$

de la cual restó $dx\,dy$ (considerándolos despreciables) y calculando la forma diferencial $x\,dy + y\,dx$. Esta derivación tuvo como resultado la forma tradicional de la regla del producto.
(*Fuente*: *The History of Mathematics* de David M. Burton)

En términos generales, la derivada del producto de dos funciones no está dada por el producto de sus derivadas. Para observarlo basta con comparar el producto de las derivadas de $f(x) = 3x - 2x^2$ y $g(x) = 5 + 4x$ con la derivada obtenida en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla del producto

Encontrar la derivada de $h(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$.

Solución

$$\begin{aligned} h'(x) &= \overbrace{(3x - 2x^2)}^{\text{Primera}}\overbrace{\frac{d}{dx}[5 + 4x]}^{\text{Derivada de la segunda}} + \overbrace{(5 + 4x)}^{\text{Segunda}}\overbrace{\frac{d}{dx}[3x - 2x^2]}^{\text{Derivada de la primera}} && \text{Aplicar la regla del producto.}\\ &= (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)\\ &= (12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2)\\ &= -24x^2 + 4x + 15 \end{aligned}$$

En el ejemplo 1 se cuenta con la opción de calcular la derivada con o sin la regla del producto. Sin ella se escribiría

$$\begin{aligned} D_x[(3x - 2x^2)(5 + 4x)] &= D_x[-8x^3 + 2x^2 + 15x]\\ &= -24x^2 + 4x + 15. \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo, se debe utilizar la regla del producto.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla del producto

Encontrar la derivada de $y = 3x^2 \operatorname{sen} x$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[3x^2 \operatorname{sen} x] &= 3x^2\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] + \operatorname{sen} x\frac{d}{dx}[3x^2] && \text{Aplicar la regla del producto.}\\ &= 3x^2 \cos x + (\operatorname{sen} x)(6x)\\ &= 3x^2 \cos x + 6x \operatorname{sen} x\\ &= 3x(x \cos x + 2 \operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Aplicación de la regla del producto

Encontrar la derivada de $y = 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \overbrace{(2x)\left(\frac{d}{dx}[\cos x]\right) + (\cos x)\left(\frac{d}{dx}[2x]\right)}^{\text{Regla del producto}} - \overbrace{2\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x]}^{\text{Regla del múltiplo constante}}\\ &= (2x)(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2) - 2(\cos x)\\ &= -2x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

NOTA Observar que en el ejemplo 3 se usa la regla del producto cuando ambos factores son variables, y la del múltiplo constante cuando uno de ellos es constante.

La regla del cociente

TEOREMA 2.8 LA REGLA DEL COCIENTE

El cociente f/g de dos funciones derivables f y g también es derivable para todos los valores de x para los que $g(x) \neq 0$. Además, la derivada de f/g se obtiene mediante el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad g(x) \neq 0$$

DEMOSTRACIÓN Al igual que en la demostración del teorema 2.7, la clave radica en sumar y restar una misma cantidad.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \qquad \text{Definición de derivada.}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x) g(x+\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x) g(x+\Delta x)}$$

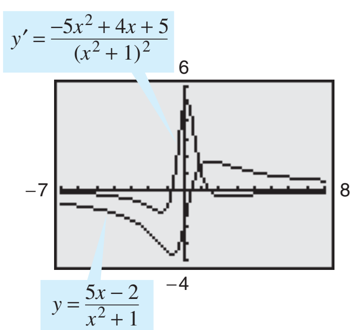
$$= \frac{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} [g(x)g(x+\Delta x)]}$$

$$= \frac{g(x)\left[\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - f(x)\left[\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} [g(x)g(x+\Delta x)]}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Observar que $\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$ porque se considera que g es derivable y por tanto es continua.

TECNOLOGÍA En una herramienta de graficación se pueden comparar las gráficas de una función y de su derivada. Por ejemplo, en la figura 2.22, la gráfica de la función del ejemplo 4 parece incluir dos puntos con rectas tangentes horizontales. ¿Cuáles son los valores de y' en dichos puntos?



Comparación gráfica de una función y su derivada
Figura 2.22

EJEMPLO 4 Aplicación de la regla del cociente

Encontrar la derivada de $y = \dfrac{5x - 2}{x^2 + 1}$.

Solución

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{5x-2}{x^2+1}\right] = \frac{(x^2+1)\dfrac{d}{dx}[5x-2] - (5x-2)\dfrac{d}{dx}[x^2+1]}{(x^2+1)^2} \qquad \text{Aplicar la regla del cociente.}$$

$$= \frac{(x^2+1)(5) - (5x-2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(5x^2+5) - (10x^2 - 4x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-5x^2 + 4x + 5}{(x^2+1)^2}$$

Observar el uso de los paréntesis en el ejemplo 4. Es recomendable utilizar paréntesis en *todos* los problemas de derivación. Por ejemplo, cuando se usa la regla del cociente, es conveniente encerrar todo factor y derivada en un paréntesis y prestar especial atención a la resta exigida en el numerador.

Al presentar las reglas de derivación en la sección precedente, se hizo hincapié en la necesidad de reescribir *antes* de derivar. El ejemplo siguiente ilustra este aspecto en relación con la regla del cociente.

EJEMPLO 5 Reescribir antes de derivar

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{3-(1/x)}{x+5}$ en $(-1, 1)$.

Solución Comenzar por reescribir la función.

$$f(x) = \frac{3-(1/x)}{x+5} \qquad \text{Función original.}$$

$$= \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x(x+5)} \qquad \text{Multiplicar por } x \text{ numerador y denominador,}$$

$$= \frac{3x-1}{x^2+5x} \qquad \text{Reescribir.}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+5x)(3)-(3x-1)(2x+5)}{(x^2+5x)^2} \qquad \text{Regla del cociente.}$$

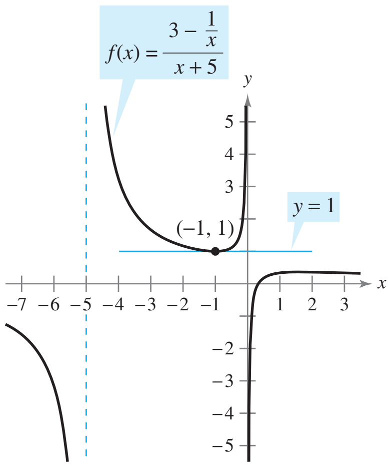
$$= \frac{(3x^2+15x)-(6x^2+13x-5)}{(x^2+5x)^2}$$

$$= \frac{-3x^2+2x+5}{(x^2+5x)^2} \qquad \text{Simplificar.}$$

Con objeto de encontrar la pendiente en $(-1, 1)$, evaluar $f'(-1)$.

$$f'(-1) = 0 \qquad \text{Pendiente de la gráfica en } (-1, 1).$$

Luego, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, se puede determinar que la ecuación de la recta tangente en ese punto es $y = 1$. Ver la figura 2.23.



La recta $y = 1$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(-1, 1)$

Figura 2.23

No todo cociente requiere ser derivado mediante la regla del cociente. Por ejemplo, cada uno de los cocientes del ejemplo siguiente se puede considerar como el producto de una constante por una función de x, de modo que es más sencillo aplicar la regla del múltiplo constante.

EJEMPLO 6 Aplicación de la regla del múltiplo constante

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
a)	$y = \dfrac{x^2+3x}{6}$	$y = \dfrac{1}{6}(x^2+3x)$	$y' = \dfrac{1}{6}(2x+3)$	$y' = \dfrac{2x+3}{6}$
b)	$y = \dfrac{5x^4}{8}$	$y = \dfrac{5}{8}x^4$	$y' = \dfrac{5}{8}(4x^3)$	$y' = \dfrac{5}{2}x^3$
c)	$y = \dfrac{-3(3x-2x^2)}{7x}$	$y = -\dfrac{3}{7}(3-2x)$	$y' = -\dfrac{3}{7}(-2)$	$y' = \dfrac{6}{7}$
d)	$y = \dfrac{9}{5x^2}$	$y = \dfrac{9}{5}(x^{-2})$	$y' = \dfrac{9}{5}(-2x^{-3})$	$y' = -\dfrac{18}{5x^3}$

NOTA Para distinguir la ventaja de la regla del múltiplo constante en ciertos cocientes, tratar de calcular las derivadas del ejemplo 6 mediante la regla del cociente. Se llegará al mismo resultado, pero con un esfuerzo mucho mayor.

En la sección 2.2 se demostró la regla de la potencia sólo para exponentes n enteros mayores que 1. En el ejemplo que sigue se amplía esa demostración a exponentes enteros negativos.

EJEMPLO 7 Demostración de la regla de la potencia (exponentes enteros negativos)

Si n es un entero negativo, existe un entero positivo k tal que $n = -k$. Por tanto, usando la regla del cociente se puede escribir

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^n] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^k}\right] \\
&= \frac{x^k(0) - (1)(kx^{k-1})}{(x^k)^2} && \text{Regla del cociente y regla de la potencia.} \\
&= \frac{0 - kx^{k-1}}{x^{2k}} \\
&= -kx^{-k-1} \\
&= nx^{n-1}. && n = -k.
\end{aligned}
$$

De tal modo, la regla de la potencia

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \qquad \text{Regla de la potencia.}$$

es válida para todo entero. En el ejercicio 76 de la sección 2.5 se pide demostrar el caso en el que n es cualquier número racional.

Derivadas de las funciones trigonométricas

Conocidas las derivadas de las funciones seno y coseno, la regla del cociente permite establecer las de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

TEOREMA 2.9 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$$

DEMOSTRACIÓN Considerando $\tan x = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ y aplicando la regla del cociente, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\tan x] &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} && \text{Aplicar la regla del cociente.} \\
&= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x.
\end{aligned}
$$

La demostración de las otras tres partes del teorema se deja como ejercicio (ver el ejercicio 89).

NOTA Debido a las identidades trigonométricas, la derivada de una función trigonométrica puede adoptar diversas formas. Esto complica la comparación de las soluciones obtenidas por el lector con las propuestas al final del libro.

EJEMPLO 8 Derivación de funciones trigonométricas

	Función	*Derivada*
a)	$y = x - \tan x$	$\dfrac{dy}{dx} = 1 - \sec^2 x$
b)	$y = x \sec x$	$y' = x(\sec x \tan x) + (\sec x)(1) = (\sec x)(1 + x \tan x)$

EJEMPLO 9 Diferentes formas de una derivada

Derivar ambas formas de $y = \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \csc x - \cot x.$

Solución

Primera forma: $y = \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - (1 - \cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \end{aligned}$$

Segunda forma:

$$\begin{aligned} y &= \csc x - \cot x \\ y' &= -\csc x \cot x + \csc^2 x \end{aligned}$$

Para demostrar que ambas derivadas son idénticas, basta escribir

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) \\ &= \csc^2 x - \csc x \cot x. \end{aligned}$$

El siguiente compendio muestra que gran parte del trabajo necesario para obtener la forma simplificada de una derivada se debe hacer *después* de derivar. Observar que dos características de una forma simplificada son la ausencia de exponentes negativos y el agrupamiento de términos semejantes.

	$f'(x)$ **tras derivar**	$f'(x)$ **tras simplificar**
Ejemplo 1	$(3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$	$-24x^2 + 4x + 15$
Ejemplo 3	$(2x)(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2) - 2(\cos x)$	$-2x \operatorname{sen} x$
Ejemplo 4	$\dfrac{(x^2 + 1)(5) - (5x - 2)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$	$\dfrac{-5x^2 + 4x + 5}{(x^2 + 1)^2}$
Ejemplo 5	$\dfrac{(x^2 + 5x)(3) - (3x - 1)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2}$	$\dfrac{-3x^2 + 2x + 5}{(x^2 + 5x)^2}$
Ejemplo 9	$\dfrac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - (1 - \cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$	$\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

Derivadas de orden superior

Así como al derivar una función posición se obtiene una función velocidad, al derivar esta última se obtiene una función **aceleración**. En otras palabras, la función aceleración es la *segunda* derivada de la función posición.

$$\begin{aligned} s(t) & \qquad \text{Función posición.} \\ v(t) = s'(t) & \qquad \text{Función velocidad.} \\ a(t) = v'(t) = s''(t) & \qquad \text{Función aceleración.} \end{aligned}$$

NOTA La segunda derivada de f es la derivada de la primera derivada de f. ■

La función dada por $a(t)$ es la **segunda derivada** de $s(t)$ y se denota como $s''(t)$.

La segunda derivada es un ejemplo de **derivada de orden superior**. Se puede definir derivadas de cualquier orden entero positivo. Por ejemplo, la **tercera derivada** es la derivada de la segunda derivada. Las derivadas de orden superior se denotan como se muestra a continuación.

Primera derivada:	y',	$f'(x)$,	$\frac{dy}{dx}$,	$\frac{d}{dx}[f(x)]$,	$D_x[y]$
Segunda derivada:	y'',	$f''(x)$,	$\frac{d^2y}{dx^2}$,	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$,	$D_x^2[y]$
Tercera derivada:	y''',	$f'''(x)$,	$\frac{d^3y}{dx^3}$,	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$,	$D_x^3[y]$
Cuarta derivada:	$y^{(4)}$,	$f^{(4)}(x)$,	$\frac{d^4y}{dx^4}$,	$\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$,	$D_x^4[y]$
⋮					
n-ésima derivada:	$y^{(n)}$,	$f^{(n)}(x)$,	$\frac{d^ny}{dx^n}$,	$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$,	$D_x^n[y]$

EJEMPLO 10 Aceleración de la gravedad

Puesto que la Luna carece de atmósfera, un objeto que cae en ella no encuentra resistencia del aire. En 1971, el astronauta David Scott verificó que una pluma de ave y un martillo caen con la misma velocidad. La función posición para cada uno de esos objetos es

$$s(t) = -0.81t^2 + 2$$

donde $s(t)$ es la altura en metros y t el tiempo en segundos. ¿Cuál es la relación entre la fuerza de gravedad de la Tierra respecto a la de la Luna?

Solución Para calcular la aceleración, derivar dos veces la función posición.

$$\begin{aligned} s(t) &= -0.81t^2 + 2 & \qquad \text{Función posición.} \\ s'(t) &= -1.62t & \qquad \text{Función velocidad.} \\ s''(t) &= -1.62 & \qquad \text{Función aceleración.} \end{aligned}$$

De esta forma resulta que la aceleración de la gravedad en la Luna es de -1.62 m/s^2. Puesto que la aceleración de la gravedad en la Tierra es de -9.8 m/s^2, la fuerza de gravedad de la Tierra respecto a la de la Luna es

$$\frac{\text{Fuerza de gravedad en la Tierra}}{\text{Fuerza de gravedad en la Luna}} = \frac{-9.8}{-1.62} \approx 6.0.$$

Seth Resnick/Getty Images

LA LUNA

La masa de la Luna es de 7.349×10^{22} kg y la de la Tierra 5.976×10^{24} kg. El radio de la Luna es 1 737 km y el de la Tierra 6 378 km. Puesto que la fuerza de gravedad de un planeta es directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de su radio, la razón entre las fuerzas de gravedad en la Luna y en la Tierra es

$$\frac{(5.976 \times 10^{24})/6\,378^2}{(7.349 \times 10^{22})/1\,737^2} \approx 6.0.$$

2.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, utilizar la regla del producto para derivar la función.

1. $g(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 4x)$
2. $f(x) = (6x + 5)(x^3 - 2)$
3. $h(t) = \sqrt{t}(1 - t^2)$
4. $g(s) = \sqrt{s}(s^2 + 8)$
5. $f(x) = x^3 \cos x$
6. $g(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 7 a 12, utilizar la regla del cociente para derivar la función.

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
8. $g(t) = \dfrac{t^2 + 4}{5t - 3}$
9. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3 + 1}$
10. $h(s) = \dfrac{s}{\sqrt{s} - 1}$
11. $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$
12. $f(t) = \dfrac{\cos t}{t^3}$

En los ejercicios 13 a 18, encontrar $f'(x)$ y $f'(c)$.

	Función	*Valor de c*
13.	$f(x) = (x^3 + 4x)(3x^2 + 2x - 5)$	$c = 0$
14.	$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^3 - 1)$	$c = 1$
15.	$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 3}$	$c = 1$
16.	$f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 5}$	$c = 4$
17.	$f(x) = x \cos x$	$c = \dfrac{\pi}{4}$
18.	$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$	$c = \dfrac{\pi}{6}$

En los ejercicios 19 a 24, completar la tabla sin usar la regla del cociente.

	Función	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
19.	$y = \dfrac{x^2 + 3x}{7}$			
20.	$y = \dfrac{5x^2 - 3}{4}$			
21.	$y = \dfrac{6}{7x^2}$			
22.	$y = \dfrac{10}{3x^3}$			
23.	$y = \dfrac{4x^{3/2}}{x}$			
24.	$y = \dfrac{5x^2 - 8}{11}$			

En los ejercicios 25 a 38, encontrar la derivada de la función algebraica.

25. $f(x) = \dfrac{4 - 3x - x^2}{x^2 - 1}$
26. $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x + 3}{x^2 - 1}$
27. $f(x) = x\left(1 - \dfrac{4}{x + 3}\right)$
28. $f(x) = x^4\left(1 - \dfrac{2}{x + 1}\right)$
29. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{\sqrt{x}}$
30. $f(x) = \sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x} + 3\right)$
31. $h(s) = (s^3 - 2)^2$
32. $h(x) = (x^2 - 1)^2$
33. $f(x) = \dfrac{2 - \dfrac{1}{x}}{x - 3}$
34. $g(x) = x^2\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x + 1}\right)$
35. $f(x) = (2x^3 + 5x)(x - 3)(x + 2)$
36. $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x - 1)$
37. $f(x) = \dfrac{x^2 + c^2}{x^2 - c^2}$, c es una constante
38. $f(x) = \dfrac{c^2 - x^2}{c^2 + x^2}$, c es una constante

En los ejercicios 39 a 54 encontrar la derivada de la función trigonométrica.

39. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} t$
40. $f(\theta) = (\theta + 1) \cos \theta$
41. $f(t) = \dfrac{\cos t}{t}$
42. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$
43. $f(x) = -x + \tan x$
44. $y = x + \cot x$
45. $g(t) = \sqrt[4]{t} + 6 \csc t$
46. $h(x) = \dfrac{1}{x} - 12 \sec x$
47. $y = \dfrac{3(1 - \operatorname{sen} x)}{2 \cos x}$
48. $y = \dfrac{\sec x}{x}$
49. $y = -\csc x - \operatorname{sen} x$
50. $y = x \operatorname{sen} x + \cos x$
51. $f(x) = x^2 \tan x$
52. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$
53. $y = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$
54. $h(\theta) = 5\theta \sec \theta + \theta \tan \theta$

CAS **En los ejercicios 55 a 58, usar un programa de cálculo para derivar las funciones.**

55. $g(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x + 2}\right)(2x - 5)$
56. $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - x - 3}{x^2 + 1}\right)(x^2 + x + 1)$
57. $g(\theta) = \dfrac{\theta}{1 - \operatorname{sen} \theta}$
58. $f(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}$

En los ejercicios 59 a 62, evaluar la derivada de la función en el punto que se indica. Utilizar una herramienta de graficación para verificar su resultado.

	Función	*Punto*
59.	$y = \dfrac{1 + \csc x}{1 - \csc x}$	$\left(\dfrac{\pi}{6}, -3\right)$
60.	$f(x) = \tan x \cot x$	$(1, 1)$
61.	$h(t) = \dfrac{\sec t}{t}$	$\left(\pi, -\dfrac{1}{\pi}\right)$
62.	$f(x) = \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x + \cos x)$	$\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

El ícono CAS indica que un ejercicio debe utilizarse con un sistema algebraico por computadora.

En los ejercicios 63 a 68, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto que se indica, *b*) utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su recta tangente en ese punto, y *c*) utilizar la función *derivative* para confirmar los resultados.

63. $f(x) = (x^3 + 4x - 1)(x - 2), \quad (1, 4)$

64. $f(x) = (x + 3)(x^2 - 2), \quad (-2, 2)$

65. $f(x) = \dfrac{x}{x + 4}, \quad (-5, 5)$

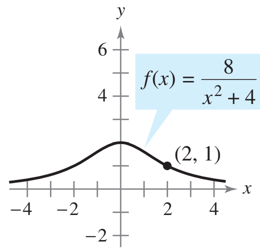
66. $f(x) = \dfrac{(x - 1)}{(x + 1)}, \quad \left(2, \dfrac{1}{3}\right)$

67. $f(x) = \tan x, \quad \left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

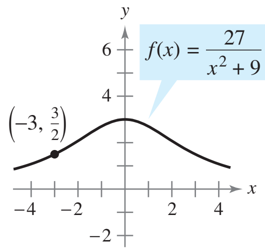
68. $f(x) = \sec x, \quad \left(\dfrac{\pi}{3}, 2\right)$

Curvas famosas **En los ejercicios 69 a 72, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado (las curvas de los ejercicios 69 y 70 se conocen como *Brujas de Agnesi*. Las curvas de los ejercicios 71 y 72 de denominan *serpentinas*).**

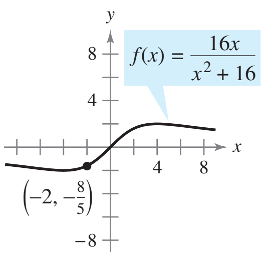
69.



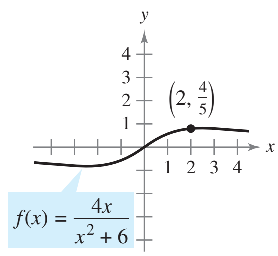
70.



71.



72.



En los ejercicios 73 a 76, determinar el punto o los puntos donde la gráfica tiene tangente horizontal.

73. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

74. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

75. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

76. $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 7}$

77. ***Rectas tangentes*** Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ paralelas a la recta $2y + x = 6$. Después dibujar la gráfica de la función y las rectas tangentes.

78. ***Rectas tangentes*** Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ que pasan por el punto $(-1, 5)$. Después dibujar la gráfica de la función y las rectas tangentes.

En los ejercicios 79 y 80, verificar que $f'(x) = g'(x)$, y explicar la relación que existe entre f y g.

79. $f(x) = \dfrac{3x}{x + 2}, \quad g(x) = \dfrac{5x + 4}{x + 2}$

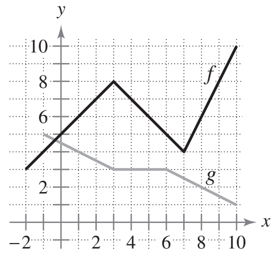
80. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x - 3x}{x}, \quad g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + 2x}{x}$

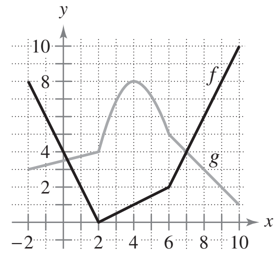
En los ejercicios 81 y 82, utilizar las gráficas de f y g, siendo

$$p(x) = f(x)g(x) \quad \text{y} \quad q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

81. *a*) Encontrar $p'(1)$.
b) Encontrar $q'(4)$

82. *a*) Encontrar $p'(4)$.
b) Encontrar $q'(7)$





83. ***Área*** La longitud de un rectángulo está dada por $6t + 5$ y su altura es $\sqrt{t}$, donde t es el tiempo en segundos y las dimensiones están en centímetros. Encontrar el ritmo de cambio del área respecto al tiempo.

84. ***Volumen*** El radio de un cilindro recto circular está dado por $\sqrt{t + 2}$ y su altura por $\frac{1}{2}\sqrt{t}$, donde t es el tiempo en segundos y las dimensiones se encuentran en pulgadas. Encontrar el ritmo de cambio del volumen respecto al tiempo.

85. ***Reposición de inventario*** El costo C de pedido y transporte de los elementos utilizados para la fabricación de un producto es

$$C = 100\left(\frac{200}{x^2} + \frac{x}{x + 30}\right), \quad x \geq 1$$

donde C se mide en miles de dólares y x es el tamaño del pedido, en cientos. Encontrar la razón de cambio de C respecto a x cuando *a*) $x = 10$, *b*) $x = 15$ y *c*) $x = 20$. ¿Qué implican estas razones de cambio cuando el tamaño del pedido aumenta?

86. ***Ley de Boyle*** Esta ley establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Utilizar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen.

87. ***Crecimiento demográfico*** Una población de 500 bacterias se introduce en un cultivo y aumenta de número de acuerdo con la ecuación

$$P(t) = 500\left(1 + \frac{4t}{50 + t^2}\right)$$

donde t se mide en horas. Calcular el ritmo de cambio al que está creciendo la población cuando $t = 2$.

88. ***Fuerza gravitacional*** La ley de la gravitación universal de Newton establece que la fuerza F que existe entre dos masas, m_1 y m_2, es

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{d^2}$$

donde G es una constante y d es la distancia entre ambas masas. Encontrar una ecuación que calcule el ritmo de cambio instantáneo de F respecto a d (suponer que m_1 y m_2 representan puntos móviles).

89. Demostrar las siguientes reglas de derivación.

a) $\dfrac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$ *b)* $\dfrac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$

c) $\dfrac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$

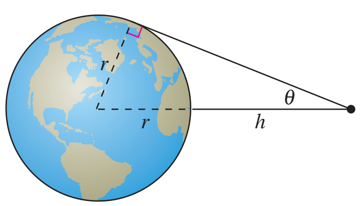
90. ***Ritmo o velocidad de cambio*** Determinar si existe algún valor de x en el intervalo $[0, 2\pi)$ tal que los ritmos de cambio de $f(x) = \sec x$ y de $g(x) = \csc x$ sean iguales.

91. ***Modelo matemático*** La siguiente tabla muestra las cantidades q (en millones) de computadoras personales embarcadas en Estados Unidos y los valores v (en miles de millones de dólares) de estos embarques durante los años 1999 a 2004. La t representa el año, y $t = 9$ corresponde a 1999. (*Fuente: U.S. Census Bureau.*)

Año, t	9	10	11	12	13	14
q	19.6	15.9	14.6	12.9	15.0	15.8
v	26.8	22.6	18.9	16.2	14.7	15.3

a) Utilizar una herramienta de graficación para encontrar los modelos cúbicos para el número de computadoras personales embarcadas $q(t)$ y su valor $v(t)$ correspondiente.
b) Representar gráficamente cada uno de los modelos desarrollados al responder el apartado *a*).
c) Encontrar $A = v(t)/q(t)$, para obtener la gráfica A. ¿Qué representa esta función?
d) Interpretar $A'(t)$ en el contexto de estos datos.

92. ***Satélites*** Cuando los satélites exploran la Tierra, sólo tienen alcance para una parte de su superficie. Algunos de ellos cuentan con sensores que pueden medir el ángulo θ que se muestra en la figura. Si h representa la distancia que hay entre el satélite y la superficie de la Tierra y r el radio de esta última:



a) Demostrar que $h = r(\csc \theta - 1)$.
b) Encontrar el ritmo al que cambia h respecto a θ cuando $\theta = 30°$. (Suponer que $r = 3\,960$ millas.)

En los ejercicios 93 a 100, encontrar la segunda derivada de la función.

93. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x$ **94.** $f(x) = 8x^6 - 10x^5 + 5x^3$

95. $f(x) = 4x^{3/2}$ **96.** $f(x) = x + 32x^{-2}$

97. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ **98.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$

99. $f(x) = x \operatorname{sen} x$ **100.** $f(x) = \sec x$

En los ejercicios 101 a 104, encontrar la derivada de orden superior que se indica.

101. $f'(x) = x^2, \quad f''(x)$ **102.** $f''(x) = 2 - \dfrac{2}{x}, \quad f'''(x)$

103. $f'''(x) = 2\sqrt{x}, \quad f^{(4)}(x)$ **104.** $f^{(4)}(x) = 2x + 1, \quad f^{(6)}(x)$

En los ejercicios 105 a 108, utilizar la información dada para encontrar $f'(2)$.

$g(2) = 3$ **y** $g'(2) = -2$

$h(2) = -1$ **y** $h'(2) = 4$

105. $f(x) = 2g(x) + h(x)$ **106.** $f(x) = 4 - h(x)$

107. $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ **108.** $f(x) = g(x)h(x)$

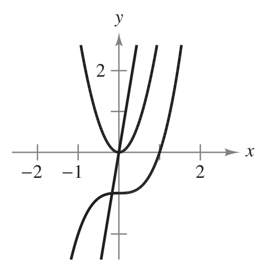
Desarrollo de conceptos

109. Construir la gráfica de una función derivable f tal que $f(2) = 0$, $f' < 0$ para $-\infty < x < 2$ y $f' > 0$ para $2 < x < \infty$. Explicar el razonamiento.

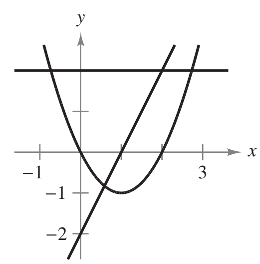
110. Construir la gráfica de una función derivable f tal que $f > 0$ y $f' < 0$ para todos los números reales x. Explicar el razonamiento.

En los ejercicios 111 y 112 se muestran las gráficas de f, f' y f'' sobre el mismo plano cartesiano. ¿Cuál es cuál? Explicar el razonamiento.

111.

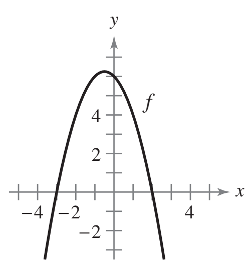


112.

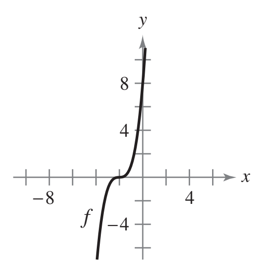


En los ejercicios 113 a 116 se muestra la gráfica de f. Construir las gráficas de f' y f''.

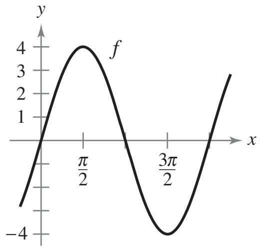
113.



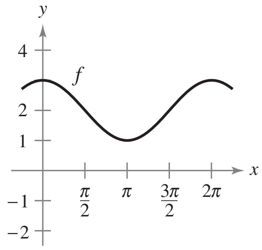
114.



115.



116.



117. ***Aceleración*** La velocidad, en m/s, de un objeto es $v(t) = 36 - t^2$, $0 \leq t \leq 6$. Calcular su velocidad y su aceleración cuando $t = 3$. ¿Qué se puede decir acerca de la rapidez del objeto cuando velocidad y aceleración tienen signos opuestos?

118. ***Aceleración*** La velocidad de un automóvil que parte del reposo es

$$v(t) = \frac{100t}{2t + 15}$$

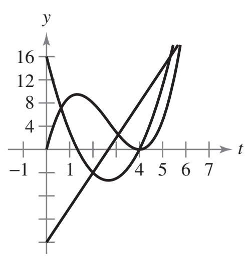
donde v se mide en pies por segundo. Calcular su aceleración en *a*) 5 segundos, *b*) 10 segundos y *c*) 20 segundos.

119. ***Distancia de frenado*** Al momento de aplicar los frenos, un vehículo viaja a 66 pies/s (45 millas por hora). La función posición del vehículo es $s(t) = -8.25t^2 + 66t$, donde s se mide en pies y t en segundos. Utilizar esta función para completar la tabla y encontrar la velocidad media durante cada intervalo.

t	0	1	2	3	4
$s(t)$					
$v(t)$					
$a(t)$					

Para discusión

120. ***Movimiento de una partícula*** En la figura se muestran las gráficas de las funciones posición, velocidad y aceleración de una partícula.



a) Copiar las gráficas de las funciones. Identificar cada una de ellas. Explicar el razonamiento.

b) En la ilustración, identificar cuándo aumenta y disminuye la velocidad de la partícula. Explicar el razonamiento.

Búsqueda de un patrón **En los ejercicios 121 y 122, desarrollar una fórmula general para $f^{(n)}(x)$, dada $f(x)$.**

121. $f(x) = x^n$ **122.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

123. ***Búsqueda de un patrón*** Considerando la función $f(x) = g(x)h(x)$.

a) Utilizar la regla del producto para elaborar una regla general para encontrar $f''(x)$, $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

b) Empleando los resultados del apartado *a*), confeccionar una regla general para $f^{(n)}(x)$.

124. ***Búsqueda de un patrón*** Desarrollar una fórmula general para $[xf(x)]^{(n)}$, donde f es una función derivable de x.

En los ejercicios 125 y 126, encontrar las derivadas de la función f para $n = 1, 2, 3$ y 4. Utilizar los resultados para elaborar una regla general para $f'(x)$ en términos de n.

125. $f(x) = x^n \operatorname{sen} x$ **126.** $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^n}$

Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 127 a 130, verificar que la función satisfaga la ecuación diferencial.**

	Función	*Ecuación diferencial*
127.	$y = \dfrac{1}{x}, x > 0$	$x^3 y'' + 2x^2 y' = 0$
128.	$y = 2x^3 - 6x + 10$	$-y''' - xy'' - 2y' = -24x^2$
129.	$y = 2 \operatorname{sen} x + 3$	$y'' + y = 3$
130.	$y = 3 \cos x + \operatorname{sen} x$	$y'' + y = 0$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 131 a 136, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que lo es.**

131. Si $y = f(x)g(x)$, entonces $dy/dx = f'(x)g'(x)$.

132. Si $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$, entonces $d^5y/dx^5 = 0$.

133. Si $f'(c)$ y $g'(c)$ son cero y $h(x) = f(x)g(x)$, entonces $h'(c) = 0$.

134. Si $f(x)$ es un polinomio de n-ésimo grado, entonces $f^{(n+1)}(x) = 0$.

135. La segunda derivada representa la razón de cambio de la primera derivada.

136. Si la velocidad de un objeto es constante, entonces su aceleración es cero.

137. Encontrar un polinomio de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que su gráfica tenga una recta tangente con pendiente de 10 en el punto (2, 7) y una intersección en x en (1, 0).

138. Tomando en cuenta el siguiente polinomio de tercer grado:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0.$$

determinar las condiciones de a, b, c y d, si la gráfica de f: *a*) no tiene tangentes horizontales, *b*) tiene exactamente una tangente horizontal, *c*) tiene exactamente dos tangentes horizontales. Acompañar las respuestas con un ejemplo.

139. Calcular la derivada de $f(x) = x|x|$. ¿Existe $f''(0)$?

140. ***Para pensar*** Sean f y g funciones cuyas respectivas primera y segunda derivadas existen dentro del intervalo I. ¿Cuál de las siguientes fórmulas es verdadera?

a) $fg'' - f''g = (fg' - f'g)'$

b) $fg'' + f''g = (fg)''$

141. Utilizar la regla del producto dos veces para demostrar que si f, g y h son funciones derivables de x, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

2.4 La regla de la cadena

- **Encontrar la derivada de una función compuesta por la regla de la cadena.**
- **Encontrar la derivada de una función por la regla general de la potencia.**
- **Simplificar la derivada de una función por técnicas algebraicas.**
- **Aplicar la regla de la cadena a funciones trigonométricas.**

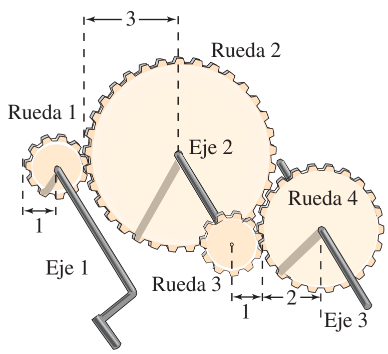
La regla de la cadena

Ahora es tiempo de analizar una de las reglas de derivación más potentes: la **regla de la cadena**. Ésta se aplica a las funciones compuestas y añade versatilidad a las reglas analizadas en las dos secciones precedentes. Como ejemplo, comparar las funciones que se muestran a continuación; las de la izquierda se pueden derivar sin la regla de la cadena, mientras que a las de la derecha conviene aplicarles dicha regla.

Sin la regla de la cadena	*Con la regla de la cadena*
$y = x^2 + 1$	$y = \sqrt{x^2 + 1}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y = \operatorname{sen} 6x$
$y = 3x + 2$	$y = (3x + 2)^5$
$y = x + \tan x$	$y = x + \tan x^2$

En esencia, la regla de la cadena establece que si y cambia dy/du veces más rápido que u, mientras que u cambia du/dx veces más rápido que x, entonces y cambia $(dy/du)(du/dx)$ veces más rápido que x.

EJEMPLO 1 La derivada de una función compuesta



Eje 1: y revoluciones por minuto
Eje 2: u revoluciones por minuto
Eje 3: x revoluciones por minuto
Figura 2.24

Un juego de ruedas dentadas está construido, como muestra la figura 2.24, de forma que la segunda y la tercera giran sobre un eje común. Cuando la primera gira, impulsa a la segunda y ésta a su vez a la tercera. Sean y, u y x los números de revoluciones por minuto del primero, segundo y tercer ejes. Encontrar dy/du, du/dx y dy/dx, y verificar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Solución Puesto que la circunferencia del segundo engranaje es tres veces mayor que la de la primera, el primer eje debe dar tres vueltas para que el segundo complete una. Del mismo modo, el segundo eje ha de dar dos vueltas para que el tercero complete una y, por tanto, se debe escribir

$$\frac{dy}{du} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = 2.$$

Combinando ambos resultados, el primer eje debe dar seis vueltas para hacer girar una vez al tercer eje. De tal manera:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \boxed{\begin{array}{l}\text{Razón de cambio del primer}\\ \text{eje con respecto al segundo}\end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{l}\text{Razón de cambio del segundo}\\ \text{eje con respecto al tercero}\end{array}}\\
&= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3 \cdot 2 = 6\\
&= \boxed{\begin{array}{l}\text{Razón de cambio del primer}\\ \text{eje con respecto al tercero}\end{array}}.
\end{aligned}$$

En otras palabras, la razón de cambio de y respecto a x es igual al producto de la razón de cambio de y con respecto a u multiplicado por el de u con respecto a x.

EXPLORACIÓN

Aplicación de la regla de la cadena Cada una de las funciones que se encuentran a continuación se pueden derivar utilizando las reglas de derivación estudiadas en las secciones 2.2 y 2.3. Calcular la derivada de cada función utilizando dichas reglas; luego encontrar la derivada utilizando la regla de la cadena. Comparar los resultados. ¿Cuál de los dos métodos es más sencillo?

a) $\dfrac{2}{3x+1}$

b) $(x+2)^3$

c) sen $2x$

El ejemplo 1 ilustra un caso simple de la regla de la cadena. Su enunciado general es el siguiente.

TEOREMA 2.10 LA REGLA DE LA CADENA

Si $y = f(u)$ es una función derivable de u y además $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable de x y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o su equivalente

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

DEMOSTRACIÓN Sea $h(x) = f(g(x))$. Usando la forma alternativa de la derivada, es necesario demostrar que, para $x = c$,

$$h'(c) = f'(g(c))g'(c).$$

Un aspecto importante en esta demostración es el comportamiento de g cuando x tiende a c. Se presentan dificultades cuando existen valores de x, distintos de c, tales que $g(x) = g(c)$. En el apéndice A se explica cómo utilizar la derivabilidad de f y g para superar este problema. Por ahora, supóngase que $g(x) \neq g(c)$ para valores de x distintos de c. En las demostraciones de las reglas del producto y del cociente se sumó y restó una misma cantidad. Ahora se recurrirá a un truco similar, multiplicar y dividir por una misma cantidad (distinta de cero). Observar que, como g es derivable, también es continua, por lo que $g(x) \to g(c)$ cuando $x \to c$.

$$\begin{aligned} h'(c) &= \lim_{x \to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} \\ &= \lim_{x \to c} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right], \quad g(x) \neq g(c) \\ &= \left[\lim_{x \to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \right] \left[\lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] \\ &= f'(g(c))g'(c) \end{aligned}$$

Al aplicar la regla de la cadena, es útil considerar que la función compuesta $f \circ g$ está constituida por dos partes: una interior y otra exterior.

Función exterior

$$y = f(g(x)) = f(u)$$

Función interior

La derivada de $y = f(u)$ es la derivada de la función exterior (en la función interior u) multiplicada por la derivada de la función interior.

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

EJEMPLO 2 Descomposición de una función compuesta

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
a)	$y = \dfrac{1}{x+1}$	$u = x + 1$	$y = \dfrac{1}{u}$
b)	$y = \operatorname{sen} 2x$	$u = 2x$	$y = \operatorname{sen} u$
c)	$y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$	$u = 3x^2 - x + 1$	$y = \sqrt{u}$
d)	$y = \tan^2 x$	$u = \tan x$	$y = u^2$

EJEMPLO 3 Aplicación de la regla de la cadena

Encontrar dy/dx para $y = (x^2 + 1)^3$.

AYUDA DE ESTUDIO El ejemplo 3 también se puede resolver sin hacer uso de la regla de la cadena, si se observa que

$$y = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

y, por tanto,

$$y' = 6x^5 + 12x^3 + 6x.$$

Comprobar que esta derivada es la misma que la del ejemplo 3. ¿Qué método sería preferible para encontrar

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1)^{50}?$$

Solución Para esta función, considerar que la función interior es $u = x^2 + 1$. Por medio de la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{3(x^2 + 1)^2}_{\frac{dy}{du}}\underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} = 6x(x^2 + 1)^2.$$

La regla general de la potencia

La función del ejemplo 3 es uno de los tipos más comunes de funciones compuestas, $y = [u(x)]^n$. La regla para derivar tales funciones se llama **regla general de la potencia**, y no es sino un caso particular de la regla de la cadena.

TEOREMA 2.11 LA REGLA GENERAL DE LA POTENCIA

Si $y = [u(x)]^n$, donde u es una función derivable de x y n es un número racional, entonces

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$$

o su equivalente

$$\frac{d}{dx}[u^n] = n\,u^{n-1}\,u'.$$

DEMOSTRACIÓN Puesto que $y = u^n$, aplicar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$= \frac{d}{du}[u^n]\frac{du}{dx}.$$

Por medio de la regla (simple) de la potencia estudiada en la sección 2.2, se tiene $D_u[u^n] = nu^{n-1}$ y se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

EJEMPLO 4 Aplicación de la regla general de la potencia

Encontrar la derivada de $f(x) = (3x - 2x^2)^3$.

Solución Sea $u = 3x - 2x^2$. Entonces

$$f(x) = (3x - 2x^2)^3 = u^3$$

y, mediante la regla general de la potencia, se deduce que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \overset{n}{3}\overbrace{(3x - 2x^2)^2}^{u^{n-1}}\overbrace{\frac{d}{dx}[3x - 2x^2]}^{u'} && \text{Aplicar la regla general de la potencia.} \\ &= 3(3x - 2x^2)^2(3 - 4x). && \text{Derivar } 3x - 2x^2. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Derivación de funciones con radicales

Encontrar los puntos de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ en los que $f'(x) = 0$ y aquellos en los que $f'(x)$ no existe.

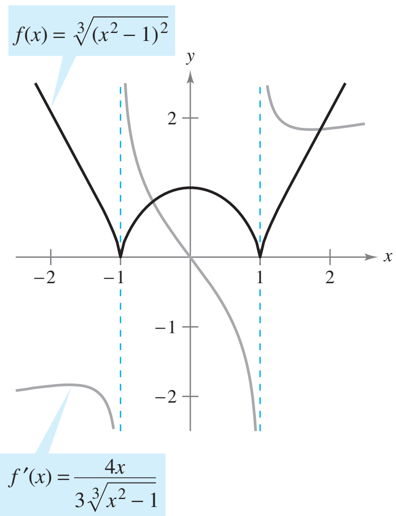
Solución Reescribir de nuevo la función como

$$f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}.$$

Aplicar ahora la regla general de las potencias (con $u = x^2 - 1$); se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \overset{n}{\frac{2}{3}}\overbrace{(x^2 - 1)^{-1/3}}^{u^{n-1}}\overbrace{(2x)}^{u'} && \text{Aplicar la regla general de las potencias.} \\ &= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}. && \text{Expresar en forma radical.} \end{aligned}$$

De tal manera, $f'(x) = 0$ en $x = 0$ y $f'(x)$ no existe en $x = \pm 1$, como se muestra en la figura 2.25.



La derivada de f es 0 en $x = 0$ y no está definida en $x = \pm 1$
Figura 2.25

EJEMPLO 6 Derivación de cocientes con numeradores constantes

Derivar $g(t) = \dfrac{-7}{(2t - 3)^2}$.

Solución Para empezar, reescribir la función como

$$g(t) = -7(2t - 3)^{-2}.$$

Después, con la regla general de la potencia se tiene

$$\begin{aligned} g'(t) &= \underbrace{(-7)}_{\substack{\text{Regla del} \\ \text{múltiplo constante}}}\overbrace{(-2)}^{n}\overbrace{(2t - 3)^{-3}}^{u^{n-1}}\overbrace{(2)}^{u'} && \text{Aplicar la regla general de la potencia.} \\ &= 28(2t - 3)^{-3} && \text{Simplificar.} \\ &= \frac{28}{(2t - 3)^3}. && \text{Expresar con exponente positivo.} \end{aligned}$$

NOTA Derivar la función del ejemplo 6 usando la regla del cociente. El resultado será el mismo, pero el método es menos eficiente que la regla general de la potencia. ■

Simplificación de derivadas

Los siguientes tres ejemplos ponen de manifiesto algunas técnicas para simplificar las derivadas de funciones que involucran productos, cocientes y composiciones.

EJEMPLO 7 Simplificación por factorización de la potencia mínima

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2\sqrt{1-x^2} && \text{Función original.}\\
&= x^2(1-x^2)^{1/2} && \text{Reescribir.}\\
f'(x) &= x^2\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{1/2}\right] + (1-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx}\left[x^2\right] && \text{Regla del producto.}\\
&= x^2\left[\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)\right] + (1-x^2)^{1/2}(2x) && \text{Regla general de la potencia.}\\
&= -x^3(1-x^2)^{-1/2} + 2x(1-x^2)^{1/2} && \text{Simplificar.}\\
&= x(1-x^2)^{-1/2}\left[-x^2(1) + 2(1-x^2)\right] && \text{Factorizar.}\\
&= \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 8 Simplificación de la derivada de un cociente

TECNOLOGÍA Las herramientas de graficación con derivación simbólica son capaces de derivar funciones muy complicadas. No obstante, suelen presentar el resultado en forma no simplificada. Si se cuenta con una de ese tipo, usarla para calcular las derivadas de las funciones de los ejemplos 7, 8 y 9, y comparar después los resultados.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}} && \text{Función original.}\\
&= \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}} && \text{Reescribir.}\\
f'(x) &= \frac{(x^2+4)^{1/3}(1) - x(1/3)(x^2+4)^{-2/3}(2x)}{(x^2+4)^{2/3}} && \text{Regla del cociente.}\\
&= \frac{1}{3}(x^2+4)^{-2/3}\left[\frac{3(x^2+4)-(2x^2)(1)}{(x^2+4)^{2/3}}\right] && \text{Factorizar.}\\
&= \frac{x^2+12}{3(x^2+4)^{4/3}} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 9 Simplificación de la derivada de una potencia

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2 && \text{Función original.}\\
y' &= \underset{n}{2}\overbrace{\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)}^{u^{n-1}}\overbrace{\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-1}{x^2+3}\right]}^{u'} && \text{Regla general de la potencia.}\\
&= \left[\frac{2(3x-1)}{x^2+3}\right]\left[\frac{(x^2+3)(3)-(3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}\right] && \text{Regla del cociente.}\\
&= \frac{2(3x-1)(3x^2+9-6x^2+2x)}{(x^2+3)^3} && \text{Multiplicar.}\\
&= \frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}
$$

Funciones trigonométricas y la regla de la cadena

A continuación se muestran las "versiones de la regla de la cadena" correspondientes a las derivadas de las funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}[\text{sen } u] = (\cos u)\, u' \qquad \frac{d}{dx}[\cos u] = -(\text{sen } u)\, u'$$

$$\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)\, u' \qquad \frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)\, u'$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)\, u' \qquad \frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)\, u'$$

EJEMPLO 10 Aplicación de la regla de la cadena a funciones trigonométricas

a) $y = \text{sen } \overbrace{2x}^{u}$ $\qquad y' = \overbrace{\cos 2x}^{\cos u}\, \overbrace{\frac{d}{dx}[2x]}^{u'} = (\cos 2x)(2) = 2 \cos 2x$

b) $y = \cos(x - 1)$ $\qquad y' = -\text{sen}(x - 1)$

c) $y = \tan 3x$ $\qquad y' = 3 \sec^2 3x$

Hay que asegurarse de entender los convenios matemáticos que afectan a paréntesis y funciones trigonométricas. Así, en el ejemplo 10*a*, se escribe sen $2x$ que significa sen $(2x)$.

EJEMPLO 11 Paréntesis y funciones trigonométricas

a) $y = \cos 3x^2 = \cos(3x^2)$ $\qquad y' = (-\text{sen } 3x^2)(6x) = -6x \text{ sen } 3x^2$

b) $y = (\cos 3)x^2$ $\qquad y' = (\cos 3)(2x) = 2x \cos 3$

c) $y = \cos(3x)^2 = \cos(9x^2)$ $\qquad y' = (-\text{sen } 9x^2)(18x) = -18x \text{ sen } 9x^2$

d) $y = \cos^2 x = (\cos x)^2$ $\qquad y' = 2(\cos x)(-\text{sen } x) = -2 \cos x \text{ sen } x$

e) $y = \sqrt{\cos x} = (\cos x)^{1/2}$ $\qquad y' = \frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}(-\text{sen } x) = -\frac{\text{sen } x}{2\sqrt{\cos x}}$

Para calcular la derivada de una función con la forma $k(x) = f(g(h(x)))$ es necesario aplicar la regla de la cadena dos veces, como se ilustra en el ejemplo 12.

EJEMPLO 12 Aplicación reiterada de la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
f(t) &= \text{sen}^3 4t && \text{Función original.}\\
&= (\text{sen } 4t)^3 && \text{Reescribir.}\\
f'(t) &= 3(\text{sen } 4t)^2 \frac{d}{dt}[\text{sen } 4t] && \text{Aplicar la regla de la cadena por primera vez.}\\
&= 3(\text{sen } 4t)^2(\cos 4t) \frac{d}{dt}[4t] && \text{Aplicar la regla de la cadena por segunda vez.}\\
&= 3(\text{sen } 4t)^2(\cos 4t)(4) &&\\
&= 12 \text{ sen}^2 4t \cos 4t && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

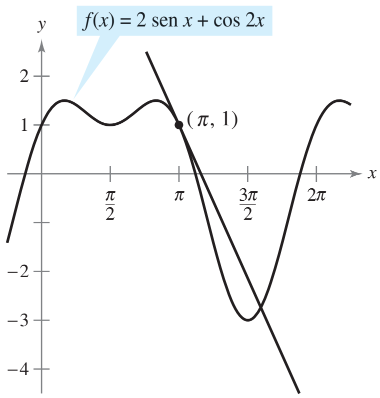


Figura 2.26

EJEMPLO 13 Recta tangente a una función trigonométrica

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$$

en el punto $(\pi, 1)$, como se muestra en la figura 2.26. A continuación determinar todos los valores de x en el intervalo $(0, 2\pi)$ en los que la gráfica de f tienen una tangente horizontal.

Solución Comenzar por encontrar $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x && \text{Función original.} \\ f'(x) &= 2 \cos x + (-\operatorname{sen} 2x)(2) && \text{Aplicar la regla de la cadena a } \cos 2x. \\ &= 2 \cos x - 2 \operatorname{sen} 2x && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

Para encontrar la ecuación de la recta tangente en $(\pi, 1)$, evaluar $f'(\pi)$.

$$\begin{aligned} f'(\pi) &= 2 \cos \pi - 2 \operatorname{sen} 2\pi && \text{Sustituir.} \\ &= -2 && \text{Pendiente de la gráfica en } (\pi, 1). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, escribir

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{Forma punto-pendiente.} \\ y - 1 &= -2(x - \pi) && \text{Sustituir } y_1, m \text{ y } x_1. \\ y &= 1 - 2x + 2\pi. && \text{Ecuación de la recta tangente en } (\pi, 1). \end{aligned}$$

Se puede determinar que $f'(x) = 0$ cuando $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ y $\frac{3\pi}{2}$. De tal modo, f tiene una tangente horizontal en $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$, y $\frac{3\pi}{2}$.

AYUDA DE ESTUDIO Para adquirir mayor práctica en la derivación, se deben aprender todas las reglas. Como ayuda para la memoria, observar que las cofunciones (coseno, cotangente y cosecante) tienen un signo negativo en sus derivadas.

Esta sección concluye con un compendio de las reglas de derivación estudiadas hasta este momento.

Compendio de reglas de derivación

Reglas generales de derivación

Sean f, g y u funciones derivables de x.

Regla del múltiplo constante:

$$\frac{d}{dx}[cf] = cf'$$

Regla de la suma o de la diferencia:

$$\frac{d}{dx}[f \pm g] = f' \pm g'$$

Regla del producto:

$$\frac{d}{dx}[fg] = fg' + gf'$$

Regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Derivadas de funciones algebraicas

Regla de la constante:

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Regla simple de la potencia:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}[x] = 1$$

Derivadas de funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x \qquad \frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$$

Regla de la cadena

Regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\, u'$$

Regla general de la potencia:

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\, u'$$

2.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, completar la tabla.

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
1.	$y = (5x - 8)^4$		
2.	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$		
3.	$y = \sqrt{x^3 - 7}$		
4.	$y = 3\tan(\pi x^2)$		
5.	$y = \csc^3 x$		
6.	$y = \operatorname{sen} \dfrac{5x}{2}$		

En los ejercicios 7 a 36, encontrar la derivada de la función.

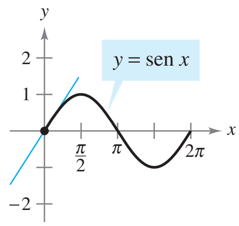
7. $y = (4x - 1)^3$
8. $y = 2(6 - x^2)^5$
9. $g(x) = 3(4 - 9x)^4$
10. $f(t) = (9t + 2)^{2/3}$
11. $f(t) = \sqrt{5 - t}$
12. $g(x) = \sqrt{9 - 4x}$
13. $y = \sqrt[3]{6x^2 + 1}$
14. $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$
15. $y = 2\sqrt[4]{9 - x^2}$
16. $f(x) = -3\sqrt[4]{2 - 9x}$
17. $y = \dfrac{1}{x - 2}$
18. $s(t) = \dfrac{1}{t^2 + 3t - 1}$
19. $f(t) = \left(\dfrac{1}{t - 3}\right)^2$
20. $y = -\dfrac{5}{(t + 3)^3}$
21. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$
22. $g(t) = \sqrt{\dfrac{1}{t^2 - 2}}$
23. $f(x) = x^2(x - 2)^4$
24. $f(x) = x(3x - 9)^3$
25. $y = x\sqrt{1 - x^2}$
26. $y = \frac{1}{2}x^2\sqrt{16 - x^2}$
27. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
28. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^4 + 4}}$
29. $g(x) = \left(\dfrac{x + 5}{x^2 + 2}\right)^2$
30. $h(t) = \left(\dfrac{t^2}{t^3 + 2}\right)^2$
31. $f(v) = \left(\dfrac{1 - 2v}{1 + v}\right)^3$
32. $g(x) = \left(\dfrac{3x^2 - 2}{2x + 3}\right)^3$
33. $f(x) = ((x^2 + 3)^5 + x)^2$
34. $g(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$
35. $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$
36. $g(t) = \sqrt{\sqrt{t + 1} + 1}$

CAS **En los ejercicios 37 a 42, utilizar un sistema algebraico por computadora para encontrar la derivada de la función. Utilizar el mismo mecanismo para representar gráficamente la función y su derivada en el mismo plano cartesiano. Describir el comportamiento de la función que corresponde a cualquier cero de la gráfica de la derivada.**

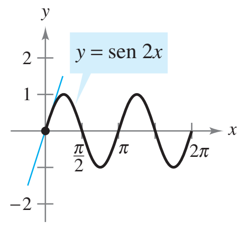
37. $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 1}$
38. $y = \sqrt{\dfrac{2x}{x + 1}}$
39. $y = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x}}$
40. $g(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}$
41. $y = \dfrac{\cos \pi x + 1}{x}$
42. $y = x^2 \tan \dfrac{1}{x}$

En los ejercicios 43 y 44, calcular la pendiente de la recta tangente a la función seno en el origen. Comparar este valor con el número de ciclos completos en el intervalo $[0, 2\pi]$. ¿Cuál es la conclusión respecto a la pendiente de una función sen ax en el origen?

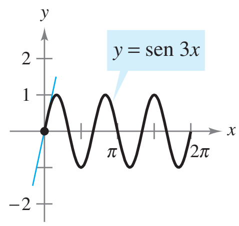
43. *a)*



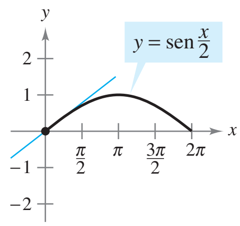
b)



44. *a)*



b)



En los ejercicios 45 a 66, encontrar la derivada de la función.

45. $y = \cos 4x$
46. $y = \operatorname{sen} \pi x$
47. $g(x) = 5\tan 3x$
48. $h(x) = \sec x^2$
49. $y = \operatorname{sen}(\pi x)^2$
50. $y = \cos(1 - 2x)^2$
51. $h(x) = \operatorname{sen} 2x \cos 2x$
52. $g(\theta) = \sec\left(\frac{1}{2}\theta\right)\tan\left(\frac{1}{2}\theta\right)$
53. $f(x) = \dfrac{\cot x}{\operatorname{sen} x}$
54. $g(v) = \dfrac{\cos v}{\csc v}$
55. $y = 4\sec^2 x$
56. $g(t) = 5\cos^2 \pi t$
57. $f(\theta) = \tan^2 5\theta$
58. $g(\theta) = \cos^2 8\theta$
59. $f(\theta) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\theta$
60. $h(t) = 2\cot^2(\pi t + 2)$
61. $f(t) = 3\sec^2(\pi t - 1)$
62. $y = 3x - 5\cos(\pi x)^2$
63. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)^2$
64. $y = \operatorname{sen}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$
65. $y = \operatorname{sen}(\tan 2x)$
66. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}$

En los ejercicios 67 a 74, evaluar la derivada de la función en el punto indicado. Utilizar una herramienta de graficación para verificar los resultados.

	Función	*Punto*
67.	$s(t) = \sqrt{t^2 + 6t - 2}$	$(3, 5)$
68.	$y = \sqrt[5]{3x^3 + 4x}$	$(2, 2)$
69.	$f(x) = \dfrac{5}{x^3 - 2}$	$\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$
70.	$f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 3x)^2}$	$\left(4, \dfrac{1}{16}\right)$
71.	$f(t) = \dfrac{3t + 2}{t - 1}$	$(0, -2)$
72.	$f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 3}$	$(2, 3)$
73.	$y = 26 - \sec^3 4x$	$(0, 25)$
74.	$y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{\cos x}$	$\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2}{\pi}\right)$

En los ejercicios 75 a 82, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto que se indica, *b*) utilizar una herramienta de graficación para representar la función y la recta tangente en ese punto y *c*) verificar los resultados empleando la función *derivative* de su herramienta de graficación.

	Función	*Punto*
75.	$f(x) = \sqrt{2x^2 - 7}$	$(4, 5)$
76.	$f(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x^2 + 5}$	$(2, 2)$
77.	$y = (4x^3 + 3)^2$	$(-1, 1)$
78.	$f(x) = (9 - x^2)^{2/3}$	$(1, 4)$
79.	$f(x) = \operatorname{sen} 2x$	$(\pi, 0)$
80.	$y = \cos 3x$	$\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
81.	$f(x) = \tan^2 x$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$
82.	$y = 2\tan^3 x$	$\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$

En los ejercicios 83 a 86, *a*) utilizar una herramienta de graficación para encontrar la derivada de la función del punto dado, *b*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función del punto dado y *c*) utilizar la herramienta de graficación para representar la función y su recta tangente en la misma ventana.

83. $g(t) = \dfrac{3t^2}{\sqrt{t^2 + 2t - 1}}, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

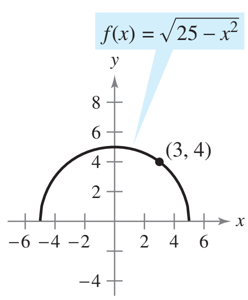
84. $f(x) = \sqrt{x}(2 - x)^2, \quad (4, 8)$

85. $s(t) = \dfrac{(4 - 2t)\sqrt{1 + t}}{3}, \quad \left(0, \frac{4}{3}\right)$

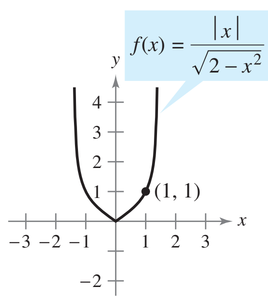
86. $y = (t^2 - 9)\sqrt{t + 2}, \quad (2, -10)$

Curvas famosas **En los ejercicios 87 y 88, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica del punto dado. Después utilizar una herramienta de graficación para dibujar la función y su recta tangente en la misma ventana.**

87. Semicírculo superior



88. Curva de bala



89. ***Recta tangente horizontal*** Determinar el o los puntos en el intervalo $(0, 2\pi)$ en los que la gráfica de $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x$ tiene una tangente horizontal.

90. ***Recta tangente horizontal*** Determinar el o los puntos en los que la gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x - 1}}$ tiene una tangente horizontal.

En los ejercicios 91 a 96, encontrar la segunda derivada de la función.

91. $f(x) = 5(2 - 7x)^4$

92. $f(x) = 4(x^2 - 2)^3$

93. $f(x) = \dfrac{1}{x - 6}$

94. $f(x) = \dfrac{4}{(x + 2)^3}$

95. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

96. $f(x) = \sec^2 \pi x$

En los ejercicios 97 a 100, evaluar la segunda derivada de la función en el punto dado. Utilizar una herramienta de graficación para verificar los resultados.

97. $h(x) = \frac{1}{9}(3x + 1)^3, \quad \left(1, \frac{64}{9}\right)$

98. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 4}}, \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)$

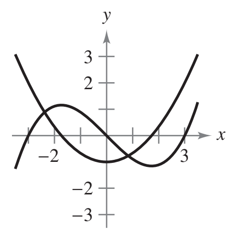
99. $f(x) = \cos(x^2), \quad (0, 1)$

100. $g(t) = \tan 2t, \quad \left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$

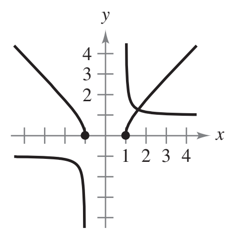
Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 101 a 104, se muestran las gráficas de una función *f* y su derivada *f′*. Clasificar las gráficas según correspondan a *f* o *f′* y escribir en un breve párrafo los criterios utilizados para hacer la selección.

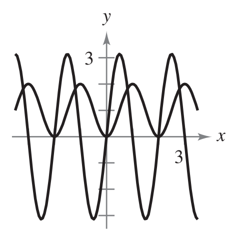
101.



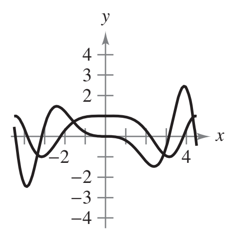
102.



103.



104.



En los ejercicios 105 y 106, se da la relación que existe entre *f* y *g*. Explicar la relación que existe entre *f′* y *g′*.

105. $g(x) = f(3x)$

106. $g(x) = f(x^2)$

107. ***Para pensar*** La tabla muestra algunos valores de la derivada de una función desconocida f. Completar la tabla encontrando (si es posible) la derivada de cada una de las siguientes transformaciones de f.

a) $g(x) = f(x) - 2$

b) $h(x) = 2f(x)$

c) $r(x) = f(-3x)$

d) $s(x) = f(x + 2)$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-2	-4
$g'(x)$						
$h'(x)$						
$r'(x)$						
$s'(x)$						

Tabla para 107

Para discusión

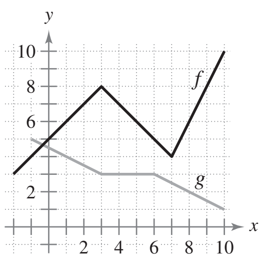
108. Dado que $g(5) = -3$, $g'(5) = 6$, $h(5) = 3$ y $h'(5) = -2$, encontrar $f'(5)$ (si es posible) para cada una de las siguientes funciones. Si no es posible, establecer la información adicional que se requiere.

a) $f(x) = g(x)h(x)$ *b)* $f(x) = g(h(x))$

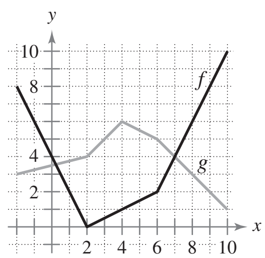
c) $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ *d)* $f(x) = [g(x)]^3$

En los ejercicios 109 y 110 se muestran las gráficas de f y g. Sea $h(x) = f(g(x))$ y $s(x) = g(f(x))$. Calcular las derivadas, si es que existen. Si las derivadas no existen, explicar por qué.

109. *a)* Encontrar $h'(1)$ *b)* Encontrar $s'(5)$



110. *a)* Encontrar $h'(3)$ *b)* Encontrar $s'(9)$

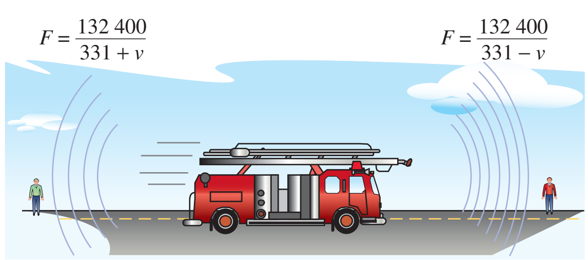


111. ***Efecto Doppler*** La frecuencia F de la sirena de un carro de bomberos oída por un observador en reposo está dada por

$$F = \frac{132\,400}{331 \pm v}$$

donde $\pm v$ representa la velocidad del carro de bomberos (observar la figura). Calcular la razón de cambio de F respecto de v cuando

a) el carro se acerca a una velocidad de 30 m/s (usar $-v$).
b) el carro se aleja a una velocidad de 30 m/s (usar $+v$).



112. ***Movimiento armónico*** El desplazamiento de su posición de equilibrio para un objeto en movimiento armónico situado al extremo de un muelle es

$$y = \tfrac{1}{3}\cos 12t - \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\, 12t$$

donde y se mide en pies y t en segundos. Determinar la posición y la velocidad del objeto cuando $t = \pi/8$.

113. ***Péndulo*** Un péndulo de 15 cm se mueve según la ecuación $\theta = 0.2 \cos 8t$, donde θ es el desplazamiento angular de la vertical en radianes y t es el tiempo en segundos. Calcular el máximo desplazamiento angular y la razón de cambio de θ cuando $t = 3$ segundos.

114. ***Movimiento ondulatorio*** Una boya oscila con movimiento armónico simple dado por $y = A \cos \omega t$, mientras las olas pasan por ella. La boya se mueve verticalmente, desde el punto más bajo hasta el más alto, un total de 3.5 pies. Cada 10 segundos regresa a su punto de máxima altura.

a) Escribir una ecuación que explique el movimiento de esa boya si está en su máxima altura cuando $t = 0$.
b) Calcular la velocidad de la boya en función de t.

115. ***Sistema circulatorio*** La velocidad S de la sangre que está a r cm del centro en una arteria está dada por

$$S = C(R^2 - r^2)$$

donde C es una constante, R es el radio de la arteria y S se mide en cm/s. Suponer que se administra un fármaco y la arteria empieza a dilatarse a un ritmo dR/dt. A una distancia constante r, encontrar el ritmo de cambio de S con respecto a t para $C = 1.76 \times 10^5$, $R = 1.2 \times 10^{-2}$ y $dR/dt = 10^{-5}$.

116. ***Modelado matemático*** En la siguiente tabla se muestra la temperatura máxima promedio (en grados Fahrenheit) correspondiente a la ciudad de Chicago, Illinois. *(Fuente: National Oceanic and Atmospheric Administration)*

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Temperatura	29.6	34.7	46.1	58.0	69.9	79.2

Mes	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Temperatura	83.5	81.2	73.9	62.1	47.1	34.4

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar los datos y encontrar un modelo para esos datos con la forma

$$T(t) = a + b\,\text{sen}\,(ct - d)$$

donde T es la temperatura y t el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiente al mes de enero.
b) Representar el modelo en la herramienta de graficación. ¿Ajusta bien a los datos?
c) Encontrar T' y utilizar la herramienta de graficación para representar la derivada.
d) Con base en la gráfica de la derivada, ¿cuándo cambia la temperatura de manera más rápida? ¿Y más lenta? ¿Coinciden las respuestas con las observaciones experimentales? Explicar la respuesta.

117. ***Modelado matemático*** El costo de producción de x unidades de un artículo es $C = 60x + 1\,350$. Durante una semana, la gerencia observó el número de unidades producidas a lo largo de t horas en un turno de 8 horas. En la tabla se muestran los valores promedio de x para una semana.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x	0	16	60	130	205	271	336	384	392

a) Utilizar una herramienta de graficación para ajustar un modelo cúbico para los datos.

b) Usar la regla de la cadena para encontrar dC/dt.

c) Explicar por qué la función de costo no se incrementa con un ritmo constante durante el turno de 8 horas.

118. ***Búsqueda de un patrón*** Sea $f(x) = \operatorname{sen} \beta x$, donde β es una constante.

a) Calcular las cuatro primeras derivadas de la función.

b) Verificar que la función y su segunda derivada satisfacen la ecuación $f''(x) + \beta^2 f(x) = 0$.

c) Utilizar los resultados del apartado *a*) para desarrollar fórmulas generales para las derivadas de orden par e impar.

$f^{(2k)}(x)$ y $f^{(2k-1)}(x)$.

[*Sugerencia:* $(-1)^k$ es positivo si k es par y negativo si k es impar.]

119. ***Conjetura*** Sea f una función derivable de periodo p.

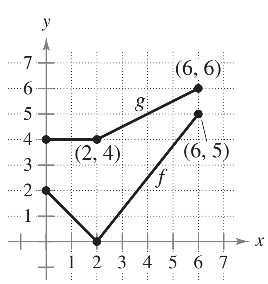
a) La función f' ¿es periódica? Verificar la respuesta.

b) Considerando la función $g(x) = f(2x)$, la función $g'(x)$ ¿es periódica? Verificar la respuesta.

120. ***Para pensar*** Sean $r(x) = f(g(x))$ y $s(x) = g(f(x))$, con f y g tales como muestra la figura adjunta. Calcular

a) $r'(1)$

b) $s'(4)$



121. *a*) Encontrar la derivada de la función $g(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ de dos maneras distintas.

b) Para $f(x) = \sec^2 x$ y $g(x) = \tan^2 x$, demostrar que $f'(x) = g'(x)$.

122. *a*) Demostrar que la derivada de una función impar es par. Esto es, si $f(-x) = -f(x)$, entonces $f'(-x) = f'(x)$.

b) Demostrar que la derivada de una función par es impar. Es decir, si $f(-x) = f(x)$, entonces $f'(-x) = -f'(x)$.

123. Sea u una función derivable de x. Considerar que $|u| = \sqrt{u^2}$ para demostrar que

$$\frac{d}{dx}[|u|] = u'\frac{u}{|u|}, \quad u \neq 0.$$

En los ejercicios 124 a 127, utilizar el resultado del ejercicio 123 para encontrar la derivada de la función.

124. $g(x) = |3x - 5|$

125. $f(x) = |x^2 - 9|$

126. $h(x) = |x| \cos x$

127. $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

Aproximaciones lineal y cuadrática **Las aproximaciones lineal y cuadrática de una función f en $x = a$ son**

$$P_1(x) = f'(a)(x - a) + f(a) \text{ y}$$

$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + f'(a)(x - a) + f(a).$$

En los ejercicios 128 y 129 *a*) calcular las aproximaciones lineal y cuadrática de f que se especifican, *b*) utilizar una herramienta de graficación para representar f y sus aproximaciones, *c*) determinar cuál de las dos, P_1 o P_2, es mejor aproximación y *d*) establecer cómo varía la precisión a medida que se aleja de $x = a$.

128. $f(x) = \tan x$

$a = \dfrac{\pi}{4}$

129. $f(x) = \sec x$

$a = \dfrac{\pi}{6}$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 130 a 132, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que lo es.**

130. Si $y = (1 - x)^{1/2}$, entonces $y' = \frac{1}{2}(1 - x)^{-1/2}$.

131. Si $f(x) = \operatorname{sen}^2(2x)$, entonces $f'(x) = 2(\operatorname{sen} 2x)(\cos 2x)$.

132. Si y es una función derivable de u, u es una función derivable de v y v es una función derivable de x, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}.$$

Preparación del examen Putnam

133. Sea $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_n \operatorname{sen} nx$, donde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son números reales y n es un número entero positivo. Dado que $|f(x)| \leq |\operatorname{sen} x|$, para todo x real, demostrar que $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

134. Sea k un número entero positivo fijo. La n-ésima derivada de $\dfrac{1}{x^k - 1}$ tiene la forma

$$\frac{P_n(x)}{(x^k - 1)^{n+1}}$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio. Encontrar $P_n(1)$.

2.5 Derivación implícita

- **Distinguir entre funciones explícitas e implícitas.**
- **Hallar la derivada de una función por derivación implícita.**

Funciones explícitas e implícitas

Hasta este punto, la mayoría de las funciones estudiadas en el texto se enunciaron de **forma explícita**. Por ejemplo, en la ecuación

$$y = 3x^2 - 5 \qquad \text{Forma explícita.}$$

la variable y está escrita explícitamente como función de x. Sin embargo, algunas funciones sólo se enuncian de manera implícita en una ecuación. Así, la función $y = 1/x$ está definida **implícitamente** por la ecuación $xy = 1$. Supongamos que se pide calcular la derivada dy/dx para esta ecuación. Podemos escribir y como función explícita de x, y luego derivar.

Forma implícita	*Forma explícita*	*Derivada*
$xy = 1$	$y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$\dfrac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

Esta estrategia funciona siempre que se pueda despejar y como función de x en la ecuación, de lo contrario, este método no es viable. Por ejemplo, ¿cómo encontrar dy/dx para la ecuación

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2$$

donde resulta muy difícil despejar y como función explícita de x? En tales situaciones se debe usar la llamada **derivación implícita**.

Para comprender esta técnica, es preciso tener en cuenta que la derivación se efectúa *con respecto a* x. Esto quiere decir que cuando se tenga que derivar términos que sólo contienen a x, la derivación será la habitual. Sin embargo, cuando haya que derivar un término donde aparezca y, será necesario aplicar la regla de la cadena, ya que se está suponiendo que y está definida implícitamente como función derivable de x.

EXPLORACIÓN

Representación gráfica de una ecuación implícita
¿Cómo se podría utilizar una herramienta de graficación para representar

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2?$$

He aquí dos procedimientos posibles:

a) Despejar x en la ecuación. Intercambiar los papeles de x y y, y dibujar la gráfica de las dos ecuaciones resultantes. Las gráficas combinadas presentarán una rotación de 90° con respecto a la gráfica de la ecuación original.

b) Configurar la herramienta de graficación en modo *paramétrico* y representar las ecuaciones

$$x = -\sqrt{2t^3 - 4t + 2}$$
$$y = t$$

y

$$x = \sqrt{2t^3 - 4t + 2}$$
$$y = t.$$

A partir de cualquiera de estos métodos, ¿se puede decidir si la gráfica tiene una recta tangente en el punto (0, 1)? Explicar el razonamiento.

EJEMPLO 1 Derivación respecto de x

a) $\dfrac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$ — Las variables coinciden: usar la regla simple de las potencias.

Las variables coinciden

b) $\dfrac{d}{dx}[\underbrace{y^3}_{u^n}] = \underbrace{3y^2}_{nu^{n-1}}\underbrace{\dfrac{dy}{dx}}_{u'}$ — Las variables no coinciden: usar la regla de la cadena.

Las variables no coinciden

c) $\dfrac{d}{dx}[x + 3y] = 1 + 3\dfrac{dy}{dx}$ — Regla de la cadena: $\dfrac{d}{dx}[3y] = 3y'$.

d)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[xy^2] &= x\frac{d}{dx}[y^2] + y^2\frac{d}{dx}[x] && \text{Regla del producto.}\\
&= x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(1) && \text{Regla de la cadena.}\\
&= 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

Derivación implícita

Estrategias para la derivación implícita

1. Derivar ambos lados de la ecuación *respecto de x*.
2. Agrupar todos los términos en que aparezca dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.
3. Factorizar dy/dx del lado izquierdo de la ecuación.
4. Despejar dy/dx.

Observar que en el ejemplo 2 la derivación implícita puede producir una expresión para dy/dx en la que aparezcan a la vez x y y.

EJEMPLO 2 Derivación implícita

Encontrar dy/dx dado que $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$.

Solución

1. Derivar los dos miembros de la ecuación respecto de x.

$$\frac{d}{dx}[y^3 + y^2 - 5y - x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$\frac{d}{dx}[y^3] + \frac{d}{dx}[y^2] - \frac{d}{dx}[5y] - \frac{d}{dx}[x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

2. Agrupar los términos con dy/dx en la parte izquierda y pasar todos los demás al lado derecho.

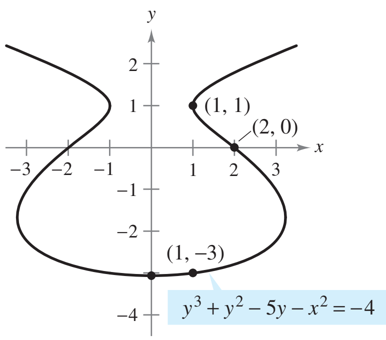
$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} = 2x$$

3. Factorizar dy/dx en la parte izquierda.

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 2y - 5) = 2x$$

4. Despejar dy/dx dividiendo entre $(3y^2 + 2y - 5)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$



Puntos en la gráfica	Pendiente de la gráfica
(2, 0)	$-\frac{4}{5}$
(1, −3)	$\frac{1}{8}$
$x = 0$	0
(1, 1)	No definida

La ecuación implícita

$$y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$$

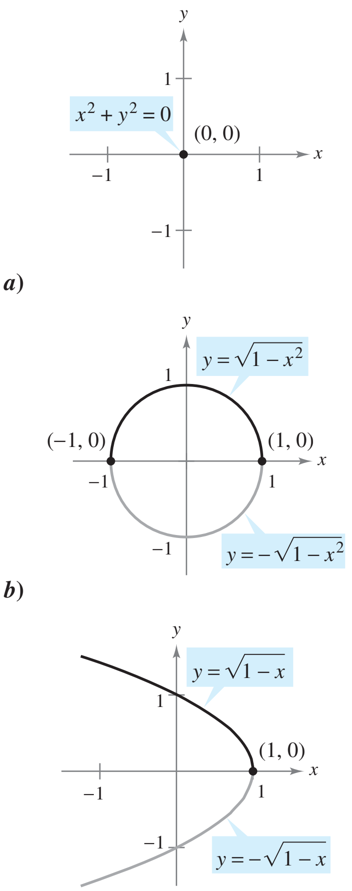
tiene la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

Figura 2.27

Para ver cómo usar la *derivación implícita*, considerar la gráfica de la figura 2.27. En ella se puede observar que y no es una función de x. A pesar de ello, la derivada determinada en el ejemplo 2 proporciona una fórmula para la pendiente de la recta tangente en un punto de esta gráfica. Debajo de la gráfica se muestran las pendientes en varios puntos de la gráfica.

TECNOLOGÍA Con la mayoría de las herramientas de graficación es fácil representar una ecuación que expresa de manera explícita a y en función de x. Por el contrario, representar las gráficas asociadas a otras ecuaciones requiere cierto ingenio. Por ejemplo, tratar de representar la gráfica de la ecuación empleada en el ejemplo 2 configurando la herramienta de graficación en modo *paramétrico*, a fin de elaborar la gráfica de las representaciones paramétricas $x = \sqrt{t^3 + t^2 - 5t + 4}$, $y = t$ y $x = -\sqrt{t^3 + t^2 - 5t + 4}$, $y = t$, para $-5 \le t \le 5$. ¿Cómo se compara el resultado con la gráfica que se muestra en la figura 2.27?



Algunos segmentos de curva pueden representarse por medio de funciones derivables
Figura 2.28

En una ecuación que no tiene puntos solución, por ejemplo, $x^2 + y^2 = -4$, no tiene sentido despejar dy/dx. Sin embargo, si una porción de una gráfica puede representarse mediante una función derivable, dy/dx tendrá sentido como pendiente en cada punto de esa porción. Recordar que una función no es derivable en *a*) los puntos con tangente vertical y *b*) los puntos en los que la función no es continua.

EJEMPLO 3 Representación de una gráfica mediante funciones derivables

Si es posible, representar y como función derivable de x.

a) $x^2 + y^2 = 0$ ***b)*** $x^2 + y^2 = 1$ ***c)*** $x + y^2 = 1$

Solución

a) La gráfica de esta ecuación se compone de un solo punto. Por tanto, no define y como función derivable de x. Ver la figura 2.28*a*.

b) La gráfica de esta ecuación es la circunferencia unidad, centrada en (0, 0). La semicircunferencia superior está dada por la función derivable

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1$$

y la inferior por la función derivable

$$y = -\sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

En los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, la pendiente no está definida. Ver la figura 2.28*b*.

c) La mitad superior de esta parábola está dada por la función derivable

$$y = \sqrt{1 - x}, \quad x < 1$$

y la inferior por la función derivable

$$y = -\sqrt{1 - x}, \quad x < 1.$$

En el punto (1, 0) la pendiente no está definida. Ver la figura 2.28*c*.

EJEMPLO 4 Cálculo de la pendiente de una gráfica implícita

Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

en el punto $\left(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$. Ver la figura 2.29.

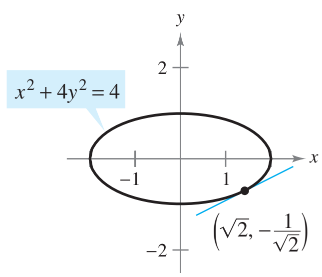


Figura 2.29

Solución

$$x^2 + 4y^2 = 4 \qquad \text{Ecuación original.}$$

$$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{Derivar respecto de } x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y} = \frac{-x}{4y} \qquad \text{Despejar términos con } \frac{dy}{dx}.$$

Por tanto, en $\left(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$, la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{2}}{-4/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \qquad \text{Evaluar } \frac{dy}{dx} \text{ cuando } x = \sqrt{2}, \text{ y } y = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

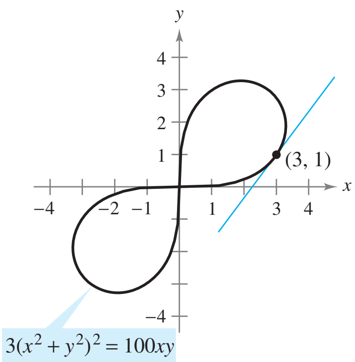
NOTA Para observar las ventajas de la derivación implícita, intentar rehacer el ejemplo 4 manejando la función explícita $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$.

EJEMPLO 5 Cálculo de la pendiente de una gráfica implícita

Calcular la pendiente de la gráfica de $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$ en el punto $(3, 1)$.

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[3(x^2 + y^2)^2] &= \frac{d}{dx}[100xy] \\
3(2)(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) &= 100\left[x\frac{dy}{dx} + y(1)\right] \\
12y(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} - 100x\frac{dy}{dx} &= 100y - 12x(x^2 + y^2) \\
[12y(x^2 + y^2) - 100x]\frac{dy}{dx} &= 100y - 12x(x^2 + y^2) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{100y - 12x(x^2 + y^2)}{-100x + 12y(x^2 + y^2)} \\
&= \frac{25y - 3x(x^2 + y^2)}{-25x + 3y(x^2 + y^2)}
\end{aligned}$$



Lemniscata
Figura 2.30

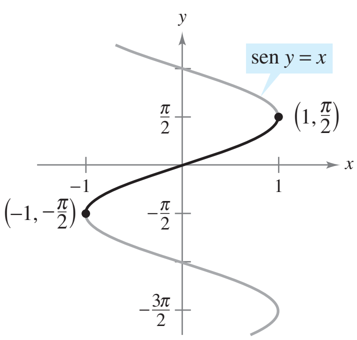
En el punto $(3, 1)$, la pendiente de la gráfica es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25(1) - 3(3)(3^2 + 1^2)}{-25(3) + 3(1)(3^2 + 1^2)} = \frac{25 - 90}{-75 + 30} = \frac{-65}{-45} = \frac{13}{9}$$

como muestra la figura 2.30. Esta gráfica se denomina **lemniscata**.

EJEMPLO 6 Determinación de una función derivable

Encontrar dy/dx implícitamente para la ecuación sen $y = x$. A continuación, determinar el mayor intervalo de la forma $-a < y < a$ en el que y es una función derivable de x (ver la figura 2.31).



La derivada es $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
Figura 2.31

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} y] &= \frac{d}{dx}[x] \\
\cos y\frac{dy}{dx} &= 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y}
\end{aligned}$$

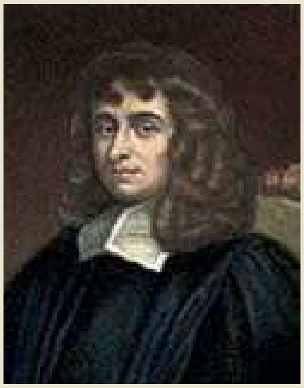
El intervalo más grande cercano al origen en el que y es derivable respecto de x es $-\pi/2 < y < \pi/2$. Para verlo, observar que cos y es positivo en ese intervalo y 0 en sus extremos. Si se restringe a ese intervalo, es posible escribir dy/dx explícitamente como función de x. Para ello, usar

$$\begin{aligned}
\cos y &= \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} \\
&= \sqrt{1 - x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

y concluir que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Este ejemplo se estudia más adelante cuando se definen las funciones trigonométricas inversas en la sección 5.6.



The Granger Collection

Isaac Barrow (1630-1677)
La gráfica de la figura 2.32 se conoce como la **curva kappa** debido a su semejanza con la letra griega kappa, κ. La solución general para la recta tangente a esta curva fue descubierta por el matemático inglés Isaac Barrow. Newton fue su alumno y con frecuencia intercambiaron correspondencia relacionada con su trabajo en el entonces incipiente desarrollo del cálculo.

Al usar la derivación implícita, con frecuencia es posible simplificar la forma de la derivada (como en el ejemplo 6) utilizando de manera apropiada la ecuación *original*. Se puede emplear una técnica semejante para encontrar y simplificar las derivadas de orden superior obtenidas de forma implícita.

EJEMPLO 7 Cálculo implícito de la segunda derivada

Dada $x^2 + y^2 = 25$, encontrar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Evaluar la primera y segunda derivadas en el punto $(-3, 4)$.

Solución Derivando ambos términos respecto de x se obtiene

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

En $(-3, 4)$: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(-3)}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Derivando otra vez respecto de x vemos que

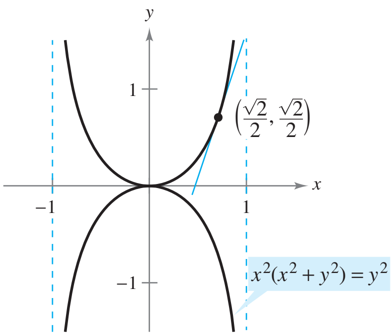
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(y)(1) - (x)(dy/dx)}{y^2} \qquad \text{Regla del cociente.}$$

$$= -\frac{y - (x)(-x/y)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3}.$$

En $(-3, 4)$: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{25}{4^3} = -\dfrac{25}{64}$.

EJEMPLO 8 Recta tangente a una gráfica

Encontrar la recta tangente a la gráfica dada por $x^2(x^2 + y^2) = y^2$ en el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, como muestra la figura 2.32.



La curva kappa
Figura 2.32

Solución Reescribiendo y derivando implícitamente, resulta

$$x^4 + x^2y^2 - y^2 = 0$$

$$4x^3 + x^2\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + 2xy^2 - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} = -2x(2x^2 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2x^2 + y^2)}{y(1 - x^2)}.$$

En el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{2}/2)[2(1/2) + (1/2)]}{(\sqrt{2}/2)[1 - (1/2)]} = \frac{3/2}{1/2} = 3$$

y la ecuación de la recta tangente en ese punto es

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$y = 3x - \sqrt{2}.$$

2.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 16, encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita.

1. $x^2 + y^2 = 9$
2. $x^2 - y^2 = 25$
3. $x^{1/2} + y^{1/2} = 16$
4. $x^3 + y^3 = 64$
5. $x^3 - xy + y^2 = 7$
6. $x^2y + y^2x = -2$
7. $x^3y^3 - y = x$
8. $\sqrt{xy} = x^2y + 1$
9. $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 = 12$
10. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$
11. $\operatorname{sen} x + 2 \cos 2y = 1$
12. $(\operatorname{sen} \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$
13. $\operatorname{sen} x = x(1 + \tan y)$
14. $\cot y = x - y$
15. $y = \operatorname{sen} xy$
16. $x = \sec \dfrac{1}{y}$

En los ejercicios 17 a 20, *a*) encontrar dos funciones explícitas despejando *y* en términos de *x*, *b*) construir la gráfica de la ecuación y clasificar las partes dadas por las respectivas funciones explícitas, *c*) derivar las funciones explícitas y *d*) encontrar dy/dx y demostrar que el resultado es equivalente al del apartado *c*).

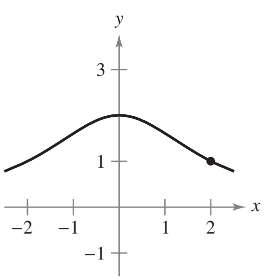
17. $x^2 + y^2 = 64$
18. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
19. $16x^2 + 25y^2 = 400$
20. $16y^2 - x^2 = 16$

En los ejercicios 21 a 28, encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita y calcular la derivada en el punto indicado.

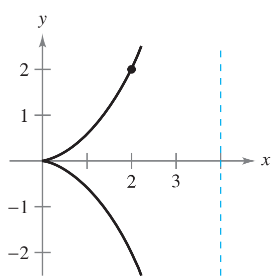
21. $xy = 6, \quad (-6, -1)$
22. $x^2 - y^3 = 0, \quad (1, 1)$
23. $y^2 = \dfrac{x^2 - 49}{x^2 + 49}, \quad (7, 0)$
24. $(x + y)^3 = x^3 + y^3, \quad (-1, 1)$
25. $x^{2/3} + y^{2/3} = 5, \quad (8, 1)$
26. $x^3 + y^3 = 6xy + 1, \quad (2, 3)$
27. $\tan(x + y) = x, \quad (0, 0)$
28. $x \cos y = 1, \quad \left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$

Curvas famosas **En los ejercicios 29 a 32, calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto propuesto.**

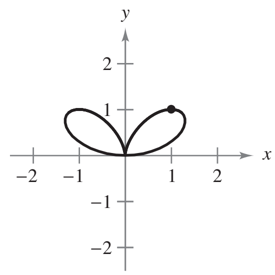
29. Bruja de Agnesi:
$(x^2 + 4)y = 8$
Punto: $(2, 1)$



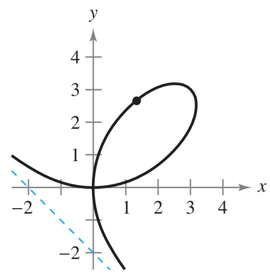
30. Cisoide:
$(4 - x)y^2 = x^3$
Punto: $(2, 2)$



31. Bifolio:
$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$
Punto: $(1, 1)$

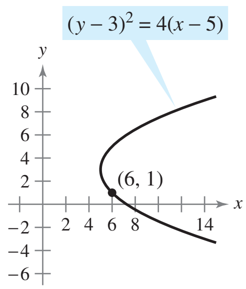


32. Folio de Descartes:
$x^3 + y^3 - 6xy = 0$
Punto: $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

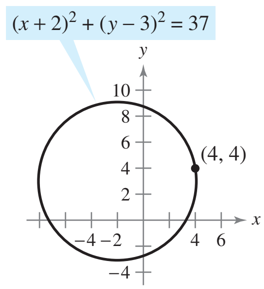


Curvas famosas **En los ejercicios 33 a 40, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado.**

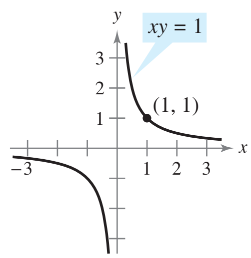
33. Parábola



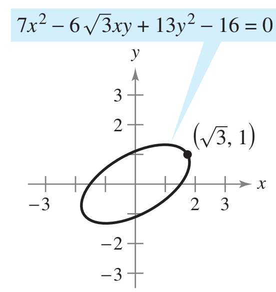
34. Circunferencia



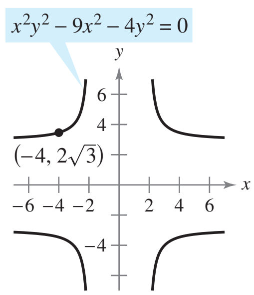
35. Hipérbola rotada



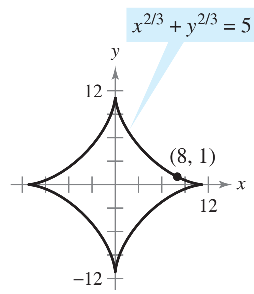
36. Elipse rotada



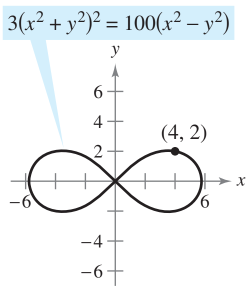
37. Cruciforme



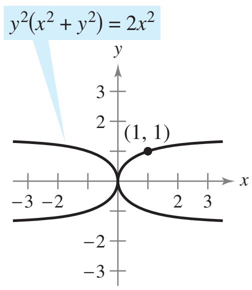
38. Astroide



39. Lemniscata



40. Curva kappa



41. *a*) Utilizar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ en $(1, 2)$.

b) Demostrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

42. *a*) Utilizar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$ en $(3, -2)$.

b) Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

En los ejercicios 43 y 44, calcular dy/dx de manera implícita y encontrar el mayor intervalo con la forma $-a < y < a$ o $0 < y < a$ tal que y sea una función derivable de x. Expresar dy/dx en función de x.

43. $\tan y = x$ **44.** $\cos y = x$

En los ejercicios 45 a 50, encontrar d^2y/dx^2 en términos de x y y.

45. $x^2 + y^2 = 4$ **46.** $x^2y^2 - 2x = 3$

47. $x^2 - y^2 = 36$ **48.** $1 - xy = x - y$

49. $y^2 = x^3$ **50.** $y^2 = 10x$

En los ejercicios 51 y 52 usar una herramienta de graficación para representar la ecuación. Encontrar la ecuación de la recta tangente en la gráfica obtenida en el punto y la gráfica en la recta tangente.

51. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \quad (9, 4)$ **52.** $y^2 = \frac{x-1}{x^2+1}, \quad \left(2, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

En los ejercicios 53 y 54, encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la circunferencia en el punto indicado (la *recta normal* en un punto es perpendicular a la tangente en ese punto). Utilizar una herramienta de graficación para representar la ecuación, la recta tangente y la normal.

53. $x^2 + y^2 = 25$
$(4, 3), (-3, 4)$

54. $x^2 + y^2 = 36$
$(6, 0), (5, \sqrt{11})$

55. Demostrar que la recta normal a cualquier punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ pasa por el origen.

56. Dos circunferencias de radio 4 son tangentes a la gráfica de $y^2 = 4x$ en el punto $(1, 2)$. Encontrar las ecuaciones de esas dos circunferencias.

En los ejercicios 57 y 58, localizar los puntos en los que la gráfica de la ecuación tiene recta tangente horizontal o vertical.

57. $25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$

58. $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

Trayectorias ortogonales **En los ejercicios 59 a 62, utilizar herramienta de graficación para representar las ecuaciones y probar que en sus intersecciones son ortogonales. (Dos gráficas son *ortogonales* en un punto de intersección si sus rectas tangentes en ese punto son perpendiculares entre sí.)**

59. $2x^2 + y^2 = 6$
$y^2 = 4x$

60. $y^2 = x^3$
$2x^2 + 3y^2 = 5$

61. $x + y = 0$
$x = \operatorname{sen} y$

62. $x^3 = 3(y - 1)$
$x(3y - 29) = 3$

Trayectorias ortogonales **En los ejercicios 63 y 64, verificar que las dos familias de curvas son ortogonales, siendo C y K números reales. Utilizar una herramienta de graficación para representar ambas familias con dos valores de C y dos valores de K.**

63. $xy = C, x^2 - y^2 = K$ **64.** $x^2 + y^2 = C^2, y = Kx$

En los ejercicios 65 a 68, derivar: *a*) respecto a x (y es una función de x) y *b*) respecto a t (x y y son funciones de t).

65. $2x^2 - 3x^4 = 0$ **66.** $x^2 - 3xy^2 + y^3 = 10$

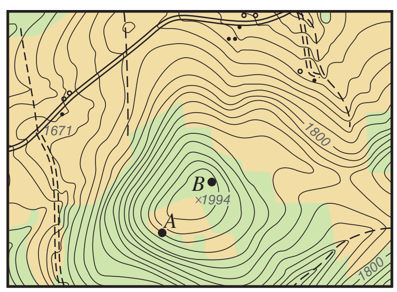
67. $\cos \pi y - 3 \operatorname{sen} \pi x = 1$ **68.** $4 \operatorname{sen} x \cos y = 1$

Desarrollo de conceptos

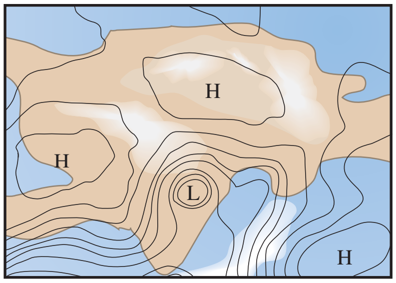
69. Describir la diferencia que existe entre la forma explícita de una ecuación y una ecuación implícita. Elaborar un ejemplo de cada una.

70. Con sus propias palabras, establezca las estrategias a seguir en la derivación implícita.

71. ***Trayectorias ortogonales*** En la siguiente figura se muestra un mapa topográfico realizado por un grupo de excursionistas. Ellos se encuentran en el área boscosa que está en la parte superior de la colina que se muestra en el mapa y deciden seguir la ruta de descenso menos empinada (trayectorias ortogonales a los contornos del mapa). Dibujar la ruta que deben seguir si parten desde el punto A y si lo hacen desde el punto B. Si su objetivo es llegar a la carretera que pasa por la parte superior del mapa, ¿cuál de esos puntos de partida deben utilizar?



72. ***Mapa climático*** El siguiente mapa climático muestra varias curvas *isobáricas* (curvas que representan áreas con presión constante de aire); tres de alta presión H y una de baja presión L. Puesto que la velocidad del viento es mayor a lo largo de las trayectorias ortogonales de las curvas isobáricas, utilizar el mapa para determinar las áreas con mayor velocidad del viento.



73. Considerando la ecuación $x^4 = 4(4x^2 - y^2)$:

a) Utilizar una herramienta de graficación para representarla.

b) Encontrar y representar gráficamente las cuatro rectas tangentes a la curva en $y = 3$.

c) Calcular las coordenadas exactas del punto de intersección de las dos rectas tangentes en el primer cuadrante.

Para discusión

74. Determinar si el enunciado es verdadero. Si es falso, explicar por qué y corregir. Para cada caso, suponer que y es una función de x.

a) $\dfrac{d}{dx}\cos(x^2) = -2x\,\text{sen}(x^2)$ *b*) $\dfrac{d}{dy}\cos(y^2) = 2y\,\text{sen}(y^2)$

c) $\dfrac{d}{dx}\cos(y^2) = -2y\,\text{sen}(y^2)$

75. Sea L una recta tangente a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$. Demostrar que la suma de las intersecciones de L en los ejes x y y es c.

76. Demostrar (teorema 2.3) que:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

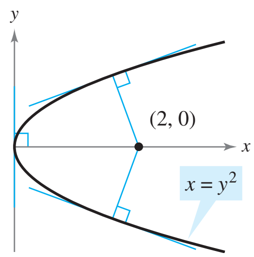
para el caso donde n es un número racional. (*Sugerencia*: Escribir $y = x^{p/q}$ en la forma $y^q = x^p$ y derivar de forma implícita. Suponer que p y q son enteros, con $q > 0$.)

77. ***Pendiente*** Encontrar todos los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 100$ donde la pendiente es igual a $\frac{3}{4}$.

78. ***Tangente horizontal*** Determinar el (los) punto(s) en el (los) que la gráfica de $y^4 = y^2 - x^2$ tiene una tangente horizontal.

79. ***Rectas tangentes*** Encontrar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ que pasa por el punto (4, 0).

80. ***Normales a una parábola*** En la gráfica se mostraron las rectas normales desde el punto (2, 0) a la gráfica de la parábola $x = y^2$. Encontrar cuántas rectas normales existen desde el punto $(x_0, 0)$ a la gráfica de la parábola si *a*) $x_0 = \frac{1}{4}$, *b*) $x_0 = \frac{1}{2}$ y *c*) $x_0 = 1$. ¿Para qué valor de x_0 existen dos rectas normales perpendiculares entre sí?



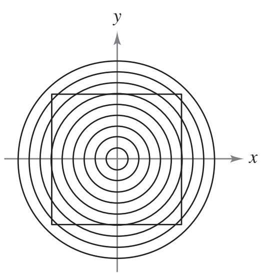
81. ***Rectas normales*** *a*) Encontrar la ecuación de la recta normal a la elipse $\dfrac{x^2}{32} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ en el punto (4, 2). *b*) Utilizar una herramienta de graficación para representar la elipse y la recta normal. *c*) ¿En qué otros puntos interseca esta recta normal a la elipse?

PROYECTO DE TRABAJO

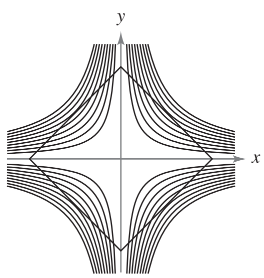
Ilusiones ópticas

En cada una de las siguientes gráficas se genera una ilusión óptica por intersecciones de rectas con una familia de curvas. En todos los casos, las rectas parecen ser curvas. Encontrar el valor de dy/dx para los valores de x y y.

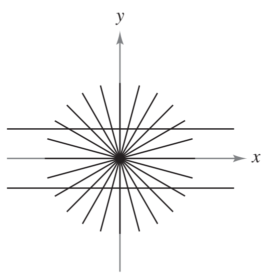
a) Circunferencia: $x^2 + y^2 = C^2$
$x = 3, y = 4, C = 5$



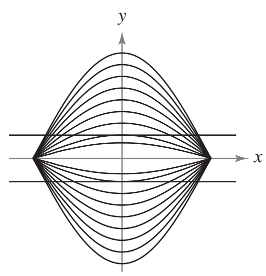
b) Hipérbolas: $xy = C$
$x = 1, y = 4, C = 4$



c) Rectas: $ax = by$
$x = \sqrt{3}, y = 3,$
$a = \sqrt{3}, b = 1$



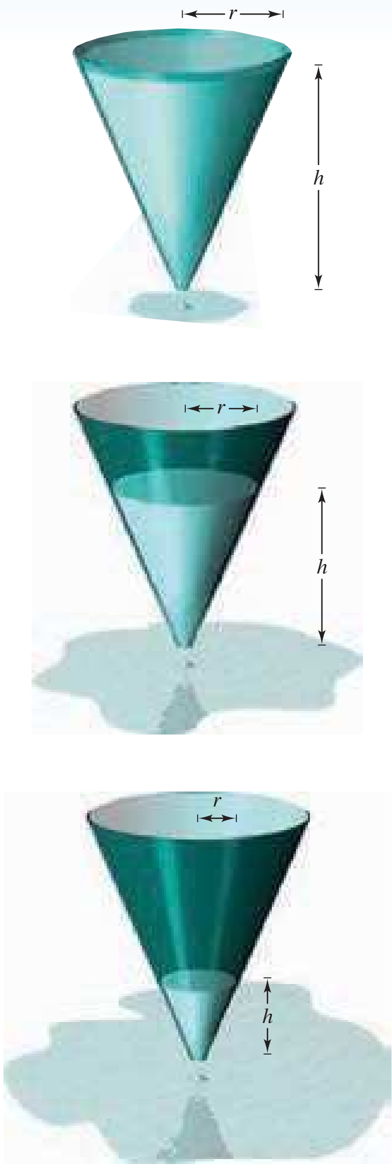
d) Curvas coseno: $y = C\cos x$
$x = \dfrac{\pi}{3}, y = \dfrac{1}{3}, C = \dfrac{2}{3}$



PARA MAYOR INFORMACIÓN Para obtener más información sobre las matemáticas de las ilusiones ópticas, leer el artículo "Descriptive Models for Perception of Optical Illusions", de David A. Smith, en *The UMAP Journal*.

2.6 Razones de cambio relacionadas

- Hallar una razón de cambio relacionada.
- Resolver problemas de la vida real con razones de cambio relacionadas.



El volumen está relacionado con el radio y con la altura
Figura 2.33

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre la historia de los problemas de razones de cambio relacionadas, ver el artículo "The Lengthening Shadow: The Story of Related Rates", de Bill Austin, Don Barry y David Berman, en *Mathematics Magazine*.

Cálculo de razones de cambio relacionadas

Ya se sabe cómo usar la regla de la cadena para encontrar dy/dx de manera implícita. Otra aplicación relevante de la regla de la cadena consiste en encontrar razones de cambio de dos o más variables relacionadas que están cambiando respecto al *tiempo*.

Por ejemplo, cuando sale agua de un depósito cónico (figura 2.33), el volumen V, el radio r y la altura h del nivel del agua son funciones de t. Sabiendo que estas magnitudes variables se relacionan mediante la ecuación

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \qquad \text{Ecuación original.}$$

se puede derivar implícitamente con respecto a t a fin de obtener la ecuación de **razones de cambio**

$$\frac{d}{dt}(V) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{3} r^2 h\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[r^2 \frac{dh}{dt} + h\left(2r\frac{dr}{dt}\right)\right] \qquad \text{Diferenciar con respecto a } t.$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(r^2 \frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}\right).$$

Para esta ecuación se puede ver que la razón de cambio de V está relacionada con la razón de cambio de h y r.

EXPLORACIÓN

Cálculo de una razón de cambio relacionada Suponer que en el tanque cónico que se muestra en la figura 2.33, la altura está cambiando a un ritmo de -0.2 pies por minuto y el radio lo está haciendo a un ritmo de -0.1 pies por minuto. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen cuando el radio es $r = 1$ pie y la altura es $h = 2$ pies? ¿La razón de cambio del volumen depende de los valores de r y h? Explicar la respuesta.

EJEMPLO 1 Dos razones de cambio relacionadas

Sean x y y dos funciones derivables de t, y relacionadas por la ecuación $y = x^2 + 3$. Calcular dy/dt para $x = 1$, sabiendo que $dx/dt = 2$ para $x = 1$.

Solución Derivar ambos lados *con respecto a* t, utilizando la regla de la cadena.

$$y = x^2 + 3 \qquad \text{Ecuación original.}$$

$$\frac{d}{dt}[y] = \frac{d}{dt}[x^2 + 3] \qquad \text{Derivar con respecto a } t.$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \qquad \text{Regla de la cadena.}$$

Cuando $x = 1$ y $dx/dt = 2$, se tiene

$$\frac{dy}{dt} = 2(1)(2) = 4.$$

Solución de problemas con razones de cambio relacionadas

En el ejemplo 1 se *dio* la ecuación que relaciona las variables x y y, y se pedía hallar el ritmo de cambio de y para $x = 1$.

Ecuación: $y = x^2 + 3$

Ritmo dado: $\dfrac{dx}{dt} = 2 \quad \text{cuando } x = 1$

Hallar: $\dfrac{dy}{dt} \quad \text{cuando } x = 1$

En los ejemplos restantes de esta sección, se debe *crear* un modelo matemático a partir de una descripción verbal.

EJEMPLO 2 Ondas en un lago

El área total se incrementa a medida que lo hace el radio del círculo exterior
Figura 2.34

En un lago en calma se deja caer una piedra, lo que provoca ondas circulares, como se muestra en la figura 2.34. El radio r del círculo exterior está creciendo a una razón constante de 1 pie/s. Cuando el radio es 4 pies, ¿a qué razón está cambiando el área A de la región circular perturbada?

Solución Las variables r y A están relacionadas por $A = \pi r^2$. La razón de cambio del radio r es $dr/dt = 1$.

Ecuación: $A = \pi r^2$

Ritmo dado: $\dfrac{dr}{dt} = 1$

Hallar: $\dfrac{dA}{dt} \quad \text{cuando } r = 4$

Con esta información, proceder como en el ejemplo 1.

$$\frac{d}{dt}[A] = \frac{d}{dt}[\pi r^2] \qquad \text{Derivar con respecto a } t.$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \qquad \text{Regla de la cadena.}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(4)(1) = 8\pi \qquad \text{Sustituir 4 por } r \text{ y 1 por } dr/dt.$$

Cuando el radio es de 4 pies, el área cambia a razón de 8π pies^2/s.

Estrategia para la solución de problemas de razones de cambio relacionadas

1. Identificar todas las cantidades *dadas* y *por determinar*. Hacer un esbozo y clasificarlas.
2. Escribir una ecuación que incluya las variables cuyas razones de cambio se encuentran en la información dada o deben calcularse.
3. Utilizando la regla de la cadena, derivar de manera implícita ambos lados de la ecuación con *respecto al tiempo t*.
4. *Después* de terminar el paso 3, sustituir en la ecuación resultante todos los valores conocidos de las variables y sus razones de cambio. Luego se despeja la razón de cambio requerida.

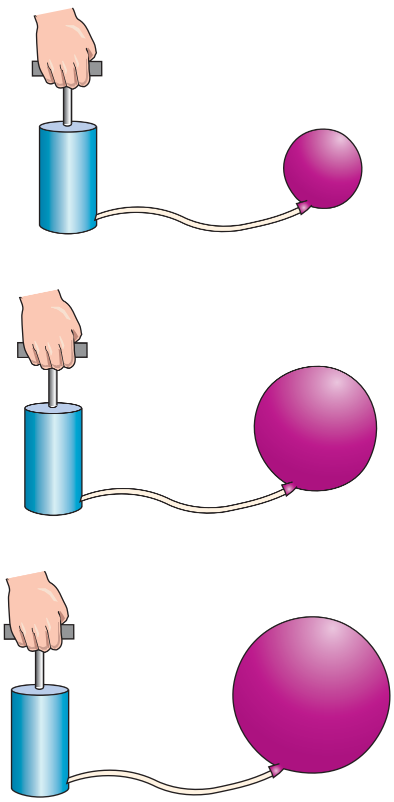
NOTA Al utilizar esta estrategia, hay que cerciorarse de que el paso 4 no se realiza hasta que el paso 3 esté terminado. Sustituir los valores conocidos de las variables antes de derivarlas tendría como resultado final una derivada inapropiada.

La tabla siguiente contiene varios ejemplos de modelos matemáticos que incluyen razones de cambio. Por ejemplo, la razón de cambio del primer ejemplo es la velocidad del automóvil.

Enunciado verbal	Modelo matemático
La velocidad de un automóvil tras una hora de viaje es de 50 millas por hora.	$x =$ distancia recorrida $\dfrac{dx}{dt} = 50$ cuando $t = 1$
Se introduce agua en una piscina a razón de 10 metros cúbicos por hora.	$V =$ volumen de agua en la piscina $\dfrac{dV}{dt} = 10\text{ m}^3/\text{h}$
Una rueda gira a 25 revoluciones por minuto (1 revolución $= 2\pi$ radianes).	$\theta =$ ángulo de giro $\dfrac{d\theta}{dt} = 25(2\pi)\text{ rad/min}$

EJEMPLO 3 Inflado de un globo

Se bombea aire en el interior de un globo esférico (ver la figura 2.35) a razón de 4.5 pies cúbicos por minuto. Calcular la razón de cambio del radio del globo cuando el radio es de 2 pies.



Inflando un globo
Figura 2.35

Solución Sea V el volumen del globo y r su radio. Puesto que el volumen está creciendo a razón de 4.5 pies cúbicos por minuto, se sabe que en el instante t la razón de cambio del volumen es $dV/dt = \frac{9}{2}$. De tal modo que el problema se puede formular de la siguiente manera:

Ritmo dado: $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{9}{2}$ (ritmo constante)

Calcular: $\dfrac{dr}{dt}$ cuando $r = 2$

Para encontrar el ritmo de cambio del radio, encontrar una ecuación que relacione el radio r con el volumen V.

Ecuación: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ Volumen de una esfera.

Derivar ambos lados de la ecuación con respecto a t, para obtener:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \qquad \text{Derivar con respecto a } t.$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{dV}{dt}\right). \qquad \text{Despejar } dr/dt.$$

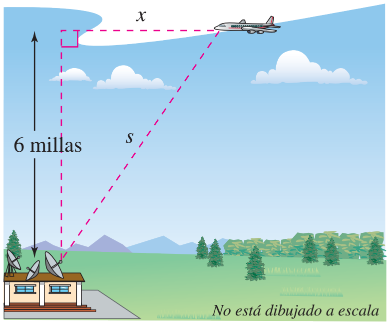
Por último, cuando $r = 2$ la razón de cambio del radio resulta ser

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{9}{2}\right) \approx 0.09 \text{ pies por minuto.}$$

Observar que en el ejemplo 3 el volumen está creciendo a razón *constante*, pero el radio cambia a razón *variable*. El hecho de que dos razones estén relacionados no implica que sean proporcionales. En este caso en particular, el radio crece más y más lentamente con el paso del tiempo. ¿Por qué?

EJEMPLO 4 Velocidad de un avión detectado por radar

Un avión recorre una ruta de vuelo que le llevará directamente sobre una estación de radar, como se muestra en la figura 2.36. Si s está decreciendo a razón de 400 millas por hora cuando $s = 10$ millas, ¿cuál es la velocidad del avión?



Un avión vuela a 6 millas de altura y dista s millas de la estación de radar
Figura 2.36

Solución Sea x la distancia horizontal al radar, como se ilustra en la figura 2.36. Observar que cuando $s = 10$, $x = \sqrt{10^2 - 36} = 8$.

Ritmo dado: $ds/dt = -400$ cuando $s = 10$

Encontrar: dx/dt cuando $s = 10$ y $x = 8$

Encontrar la velocidad del avión de la siguiente manera:

Ecuación:

$$x^2 + 6^2 = s^2 \qquad \text{Teorema de Pitágoras.}$$

$$2x\frac{dx}{dt} = 2s\frac{ds}{dt} \qquad \text{Derivar con respecto a } t.$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{x}\left(\frac{ds}{dt}\right) \qquad \text{Despejar } dx/dt.$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{8}(-400) \qquad \text{Sustituir } s, x \text{ y } ds/dt.$$

$$= -500 \text{ millas por hora} \qquad \text{Simplificar.}$$

Puesto que la velocidad es de -500 millas por hora, la *rapidez* (o “velocidad” en sentido coloquial) es 500 millas/h.

NOTA Observar en el ejemplo 4 que la velocidad es negativa porque x representa una distancia que disminuye.

EJEMPLO 5 Ángulo de elevación variable

Calcular la razón de cambio del ángulo de elevación θ de la cámara que se muestra en la figura 2.37, diez segundos después del despegue.

Solución Sea θ el ángulo de elevación, como se muestra en la figura 2.37. Cuando $t = 10$, la altura s del cohete es $s = 50t^2 = 50(10)^2 = 5\,000$ pies.

Ritmo dado: $ds/dt = 100t =$ velocidad del cohete

Encontrar: $d\theta/dt$ cuando $t = 10$ y $s = 5\,000$

Utilizando la figura 2.37, relacionar s y θ mediante la ecuación $\tan\theta = s/2\,000$.

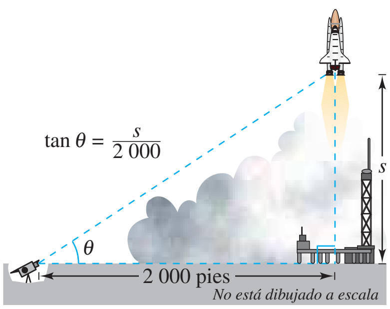
Ecuación:

$$\tan\theta = \frac{s}{2\,000} \qquad \text{Ver la figura 2.37.}$$

$$(\sec^2\theta)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\,000}\left(\frac{ds}{dt}\right) \qquad \text{Derivar con respecto a } t.$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \cos^2\theta\,\frac{100t}{2\,000} \qquad \text{Sustituir } 100t \text{ por } ds/dt.$$

$$= \left(\frac{2\,000}{\sqrt{s^2 + 2\,000^2}}\right)^2 \frac{100t}{2\,000} \qquad \cos\theta = 2\,000/\sqrt{s^2 + 2\,000^2}.$$



Una cámara de televisión, situada a ras del suelo, está filmando el despegue del transbordador espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación de posición $s = 50t^2$, donde s se mide en pies y t en segundos. La cámara está a 2 000 pies de la plataforma de lanzamiento
Figura 2.37

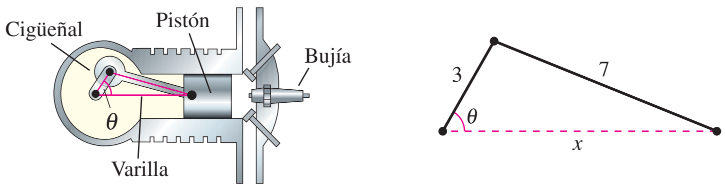
Cuando $t = 10$ y $s = 5\,000$, se tiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\,000(100)(10)}{5\,000^2 + 2\,000^2} = \frac{2}{29} \text{ radianes por segundo.}$$

De tal modo, cuando $t = 10$, θ cambia a razón de $\frac{2}{29}$ radianes por segundo.

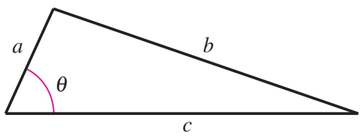
EJEMPLO 6 Velocidad de un pistón

En el motor que se muestra en la figura 2.38, una varilla de 7 pulgadas está conectada a un cigüeñal de 3 pulgadas de radio, que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a 200 revoluciones por minuto. Calcular la velocidad del pistón cuando $\theta = \pi/3$.



La velocidad de un pistón está relacionada con el ángulo del cigüeñal
Figura 2.38

Solución Nombrar las distancias como se muestra en la figura 2.38. Puesto que una revolución completa equivale a 2π radianes, se deduce que $d\theta/dt = 200(2\pi) = 400\,\pi$ radianes por minuto.



Ley de los cosenos:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta$
Figura 2.39

Ritmo dado: $\dfrac{d\theta}{dt} = 400\pi$ (razón constante)

Encontrar: $\dfrac{dx}{dt}$ cuando $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Usar la ley de los cosenos (figura 2.39) para encontrar una ecuación que relacione a x y a θ.

Ecuación:

$$
\begin{aligned}
7^2 &= 3^2 + x^2 - 2(3)(x)\cos\theta\\
0 &= 2x\frac{dx}{dt} - 6\left(-x \operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt} + \cos\theta\frac{dx}{dt}\right)\\
(6\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt} &= 6x \operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}\\
\frac{dx}{dt} &= \frac{6x\operatorname{sen}\theta}{6\cos\theta - 2x}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)
\end{aligned}
$$

Cuando $\theta = \pi/3$, se puede despejar x de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
7^2 &= 3^2 + x^2 - 2(3)(x)\cos\frac{\pi}{3}\\
49 &= 9 + x^2 - 6x\left(\frac{1}{2}\right)\\
0 &= x^2 - 3x - 40\\
0 &= (x - 8)(x + 5)\\
x &= 8
\end{aligned}
$$

Elegir la solución positiva.

De esta manera, cuando $x = 8$ y $\theta = \pi/3$, la velocidad del pistón es

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{6(8)\left(\sqrt{3}/2\right)}{6(1/2) - 16}(400\pi)\\
&= \frac{9\,600\pi\sqrt{3}}{-13}\\
&\approx -4\,018 \text{ pulgadas por minuto.}
\end{aligned}
$$

NOTA Observar que la velocidad en el ejemplo 6 es negativa porque x representa una distancia que está decreciendo.

2.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, suponer que x y y son funciones derivables de t y encontrar los valores señalados de dy/dt y dx/dt.

	Ecuación		*Encontrar*	*Dado*
1.	$y = \sqrt{x}$	*a*)	$\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 4$	$\frac{dx}{dt} = 3$
		b)	$\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 25$	$\frac{dy}{dt} = 2$
2.	$y = 4(x^2 - 5x)$	*a*)	$\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 3$	$\frac{dx}{dt} = 2$
		b)	$\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$	$\frac{dy}{dt} = 5$
3.	$xy = 4$	*a*)	$\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 8$	$\frac{dx}{dt} = 10$
		b)	$\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$	$\frac{dy}{dt} = -6$
4.	$x^2 + y^2 = 25$	*a*)	$\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 3, y = 4$	$\frac{dx}{dt} = 8$
		b)	$\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 4, y = 3$	$\frac{dy}{dt} = -2$

En los ejercicios 5 a 8, un punto se está moviendo sobre la gráfica de la función, de modo que dx/dt es 2 cm/s. Calcular dy/dt para los valores de x que se indican.

5.	$y = 2x^2 + 1$	*a*) $x = -1$	*b*) $x = 0$	*c*) $x = 1$
6.	$y = \frac{1}{1 + x^2}$	*a*) $x = -2$	*b*) $x = 0$	*c*) $x = 2$
7.	$y = \tan x$	*a*) $x = -\frac{\pi}{3}$	*b*) $x = -\frac{\pi}{4}$	*c*) $x = 0$
8.	$y = \cos x$	*a*) $x = \frac{\pi}{6}$	*b*) $x = \frac{\pi}{4}$	*c*) $x = \frac{\pi}{3}$

Desarrollo de conceptos

9. Considerando la función lineal $y = ax + b$, ¿si x cambia a razón constante, ¿y también lo hace a razón constante? De ser así, ¿lo hace con la misma razón que x? Explicar la respuesta.

10. Con las propias palabras, mencionar la estrategia para resolver problemas de razones de cambio relacionadas.

11. Encontrar la razón de cambio de la distancia entre el origen y un punto que se mueve por la gráfica de $y = x^2 + 1$, si $dx/dt = 2$ cm/s.

12. Encontrar la razón de cambio de la distancia entre el origen y un punto que se mueve sobre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, si $dx/dt = 2$ cm/s.

13. ***Área*** El radio r de un círculo está creciendo a razón de 4 centímetros por minuto. Calcular la razón de cambio del área cuando *a*) $r = 8$ cm y *b*) $r = 32$ cm.

14. ***Área*** Sea A el área de un círculo con un radio r variable con el tiempo. Si dr/dt es constante, ¿es constante dA/dt? Explicar la respuesta.

15. ***Área*** El ángulo entre los dos lados iguales, con longitud s, de un triángulo isósceles es θ.

a) Demostrar que el área del triángulo se obtiene mediante $A = \frac{1}{2}s^2 \operatorname{sen} \theta$.

b) Si θ está creciendo a razón de $\frac{1}{2}$ radián por minuto, encontrar la razón de cambio del área cuando $\theta = \pi/6$ y $\theta = \pi/3$.

c) Explicar por qué la razón de cambio del área del triángulo no es constante, a pesar de que $d\theta/dt$ es constante.

16. ***Volumen*** El radio r de una esfera está creciendo a razón de 3 pulgadas por minuto.

a) Calcular la razón de cambio del volumen cuando $r = 9$ y $r = 36$ pulgadas.

b) Explicar por qué la razón de cambio del volumen de la esfera no es constante, a pesar de que dr/dt es constante.

17. ***Volumen*** Se infla un globo esférico con gas a razón de 800 centímetros cúbicos por minuto. ¿A qué razón está aumentando su radio en el momento en el que éste está a *a*) 30 centímetros y *b*) 60 centímetros?

18. ***Volumen*** Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 6 centímetros por segundo. ¿A qué ritmo está aumentando el volumen cuando cada arista mide *a*) 2 cm y *b*) 10 cm?

19. ***Superficie*** Bajo las condiciones del problema anterior, determinar la razón a la que cambia el *área de la superficie* cuando cada arista mide *a*) 2 cm y *b*) 10 cm.

20. ***Volumen*** La fórmula para calcular el volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Encontrar el ritmo de cambio del volumen si dr/dt es de 2 pulgadas por minuto y $h = 3r$, cuando *a*) $r = 6$ pulgadas y *b*) $r = 24$ pulgadas.

21. ***Volumen*** En una planta de arena y grava, la arena cae de una cinta transportadora creando un montículo de forma cónica, a razón de 10 pies cúbicos por minuto. El diámetro de la base del montículo es de aproximadamente tres veces la altura. ¿A qué razón cambia la altura del montón cuando su altura es 15 pies?

22. ***Profundidad*** Un depósito cónico (con el vértice abajo) mide 10 pies de ancho en su parte más alta y tiene 12 pies de profundidad. Si se le vierte agua a razón de 10 pies^3 por minuto, calcular la razón de cambio de la profundidad del agua cuando ésta es de 8 pies.

23. ***Profundidad*** Una piscina tiene 12 metros de largo, 6 de ancho y una profundidad que oscila desde 1 hasta 3 m (ver la figura). Se bombea agua en ella a razón de $\frac{1}{4}$ de metro cúbico por minuto y ya hay 1 m de agua en el extremo más profundo.

a) ¿Qué porcentaje de la piscina está lleno?

b) ¿A qué razón se eleva el nivel del agua?

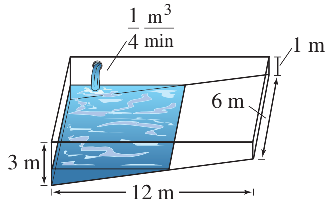


Figura para 23

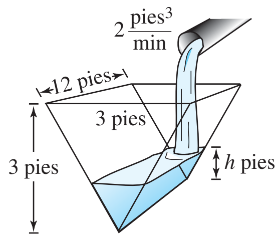


Figura para 24

24. ***Profundidad*** Una artesa tiene 12 pies de largo y 3 de ancho en su parte superior (ver la figura), sus extremos tienen forma de triángulo isósceles con una altura de 3 pies.

a) Si se vierte agua en ella a razón de 2 pies cúbicos por minuto, ¿a qué razón sube el nivel del agua cuando hay 1 pie de profundidad de agua?

b) Si el agua sube a una razón de $\frac{3}{8}$ de pulgada por minuto cuando $h = 2$, determinar una razón al que se está vertiendo agua en la artesa.

25. ***Escalera deslizante*** Una escalera de 25 pies de longitud está apoyada sobre una pared (ver la figura). Su base se desliza por la pared a razón de 2 pies por segundo.

a) ¿A qué razón está bajando su extremo superior por la pared cuando la base está a 7, 15 y 24 pies de la pared?

b) Determinar la razón a la que cambia el área del triángulo formado por la escalera, el suelo y la pared, cuando la base de la primera está a 7 pies de la pared.

c) Calcular la razón de cambio del ángulo formado por la escalera y la pared cuando la base está a 7 pies de la pared.

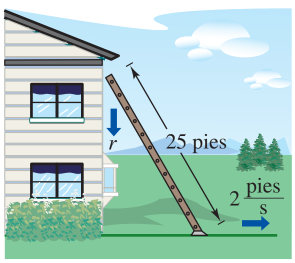


Figura para 25

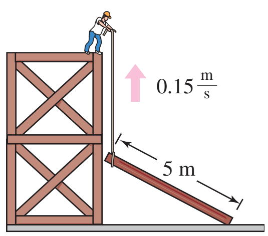


Figura para 26

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para obtener más información sobre las matemáticas relativas a las escaleras deslizantes, ver el artículo "The Falling Ladder Paradox", de Paul Scholten y Andrew Simoson, en *The College Mathematics Journal*.

26. ***Construcción*** Un obrero levanta, con ayuda de una soga, un tablón de cinco metros hasta lo alto de un edificio en construcción (ver la figura). Suponer que el otro extremo del tablón sigue una trayectoria perpendicular a la pared y que el obrero mueve el tablón a razón de 0.15 m/s. ¿A qué ritmo desliza por el suelo el extremo cuando está a 2.5 m de la pared?

27. ***Construcción*** Una polea situada en lo alto de un edificio de 12 metros levanta un tubo de la misma longitud hasta colocarlo en posición vertical, como se muestra en la figura. La polea recoge la cuerda a razón de -0.2 m/s. Calcular las razones de cambio vertical y horizontal del extremo del tubo cuando $y = 6$.

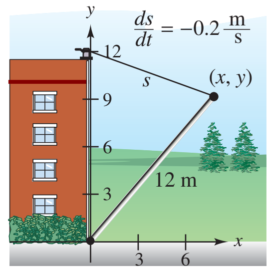


Figura para 27

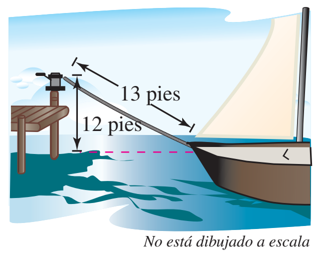


Figura para 28

28. ***Navegación*** Un velero es arrastrado hacia el muelle por medio de una polea situada a una altura de 12 pies por encima de la quilla del barco (ver la figura).

a) Si la cuerda se recoge a razón de 4 pies por segundo, determinar la velocidad del velero cuando quedan 13 pies de cuerda sin recoger. ¿Qué ocurre con la velocidad del velero a medida que el barco se acerca más al muelle?

b) Suponiendo que el bote se mueve a un ritmo constante de 4 pies por segundo, determinar la velocidad a la que la polea recoge la cuerda cuando quedan 13 pies de ella por recoger. ¿Qué ocurre con la velocidad de la polea a medida que el barco se acerca más al muelle?

29. ***Control de tráfico aéreo*** Un controlador detecta que dos aviones que vuelan a la misma altura tienen trayectorias perpendiculares y convergen en un punto (ver la figura). Uno de ellos está a 225 millas de dicho punto y vuela a 450 millas por hora. El otro está a 300 millas y se desplaza a 600 millas/h.

a) ¿A qué ritmo se reduce la distancia entre ellos?

b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para modificar la ruta de alguno de ellos?

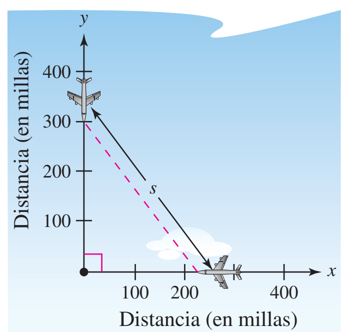


Figura para 29

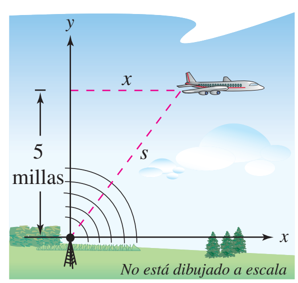


Figura para 30

30. ***Control de tráfico aéreo*** Un avión vuela a 5 millas de altura y pasa exactamente por encima de una antena de radar (ver la figura). Cuando el avión está a 10 millas ($s = 10$), el radar detecta que la distancia s está cambiando a una velocidad de 240 millas/h. ¿Cuál es la velocidad del avión?

31. ***Deportes*** Un campo de beisbol tiene forma de un cuadrado con lados de 90 pies (ver la figura). Si un jugador corre de segunda a tercera a 25 pies por segundo y se encuentra a 20 pies de la tercera base, ¿a qué ritmo está cambiando su distancia s respecto a *home*?

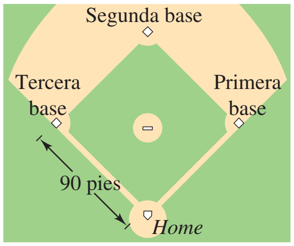


Figura para 31 y 32

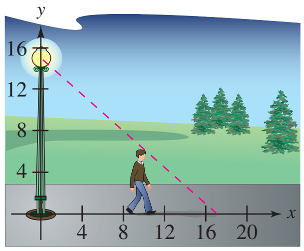


Figura para 33

32. ***Deportes*** En el campo de beisbol del ejercicio anterior, suponer que el jugador corre desde primera hasta segunda base a 25 pies por segundo. Calcular la razón de cambio de su distancia con respecto a *home* cuando se encuentra a 20 pies de la segunda base.

33. ***Longitud de una sombra*** Un hombre de 6 pies de altura camina a 5 pies por segundo alejándose de una luz que está a 15 pies de altura sobre el suelo (ver la figura). Cuando este hombre está a 10 pies de la base de la luz:

a) ¿a qué velocidad se mueve el extremo de su sombra?

b) ¿a qué razón está cambiando la longitud de su sombra?

34. ***Longitud de una sombra*** Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que el hombre camina *hacia* la luz y que ésta se encuentra situada a 20 pies de altura (ver la figura).

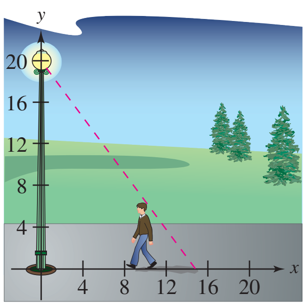


Figura para 34

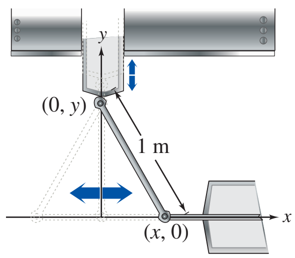


Figura para 35

35. ***Diseño de máquinas*** Los extremos de una varilla móvil de 1 m de longitud tienen coordenadas $(x, 0)$ y $(0, y)$ (ver la figura). La posición del extremo que se apoya en el eje x es

$$x(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}$$

donde t se mide en segundos.

a) Calcular la duración de un ciclo completo de la varilla.

b) ¿Cuál es el punto más bajo que alcanza el extremo de la varilla que está en el eje y?

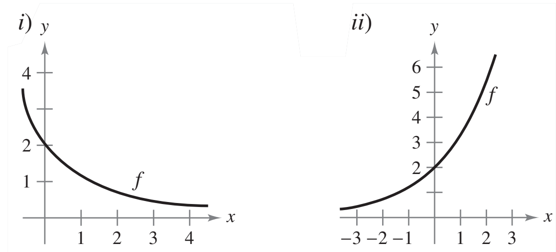
c) Encontrar la velocidad del extremo que se mueve por el eje y cuando el otro está en $(\frac{1}{4}, 0)$.

36. ***Diseño de máquinas*** Repetir el ejercicio anterior para una función de posición $x(t) = \frac{3}{5}\operatorname{sen}\pi t$. Utilizar el punto $(\frac{3}{10}, 0)$ para el apartado *c*).

37. ***Evaporación*** Al caer, una gota esférica alcanza una capa de aire seco y comienza a evaporarse a un ritmo proporcional a su área superficial $(S = 4\pi r^2)$. Demostrar que el radio de la gota decrece a ritmo constante.

Para discusión

38. Utilizando la gráfica de f, *a*) determinar si dy/dt es positiva o negativa dado que dx/dt es negativa y *b*) determinar si dx/dt es positiva o negativa dado que dy/dt es positiva.



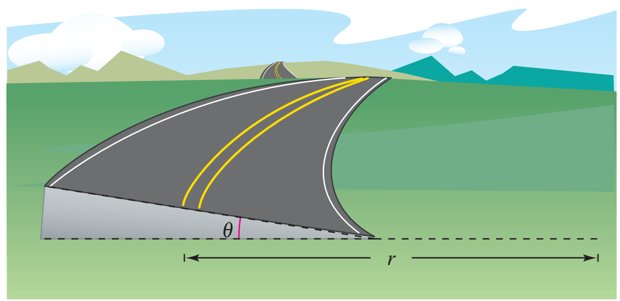
39. ***Electricidad*** La resistencia eléctrica combinada R de R_1 y R_2, conectadas en paralelo, es dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

donde R, R_1 y R_2 se miden en ohmios. R_1 y R_2 están creciendo a razón de 1 y 1.5 ohmios por segundo, respectivamente. ¿A qué ritmo está cambiando R cuando $R_1 = 50$ y $R_2 = 75$ ohmios?

40. ***Expansión adiabática*** Cuando cierto gas poliatómico sufre una expansión adiabática, su presión p y su volumen V satisfacen la ecuación $pV^{1.3} = k$, donde k es una constante. Encontrar la relación que existe entre las razones dp/dt y dV/dt.

41. ***Diseño de autopistas*** En cierta autopista, la trayectoria de los automóviles es un arco circular de radio r. Con el fin de no depender totalmente de la fricción para compensar la fuerza centrífuga, se construye un peralte con un ángulo de inclinación θ sobre la horizontal (ver la figura). Este ángulo satisface la ecuación $rg \tan\theta = v^2$, donde v es la velocidad de los automóviles y $g = 32$ pies por segundo al cuadrado es la aceleración de la gravedad. Encontrar la relación que existe entre las razones de cambio relacionadas dv/dt y $d\theta/dt$.



42. ***Ángulo de elevación*** Un globo asciende a 4 metros por segundo desde un punto del suelo a 50 m de un observador. Calcular la razón de cambio del ángulo de elevación del globo cuando está a 50 metros de altura.

43. ***Ángulo de elevación*** El pescador de la figura recoge sedal para capturar su pieza a razón de 1 pie por segundo, desde un punto que está a 10 pies por encima del agua (ver la figura). ¿A qué ritmo cambia el ángulo θ entre el sedal y el agua cuando quedan por recoger 25 pies de sedal?

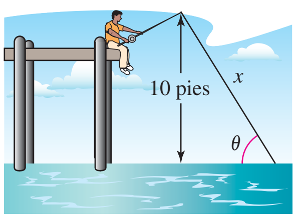


Figura para 43

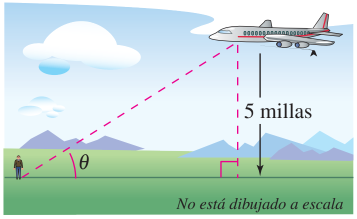


Figura para 44

44. ***Ángulo de elevación*** Un avión vuela a 5 millas de altitud y a una velocidad de 600 millas por hora, hacia un punto situado exactamente en la vertical de un observador (ver la figura). ¿A qué ritmo está cambiando el ángulo de elevación θ cuando el ángulo es *a*) $\theta = 30°$, *b*) $\theta = 60°$ y *c*) $\theta = 75°$?

45. ***Velocidad lineal y velocidad angular*** La patrulla de la figura está estacionada a 50 pies de un largo almacén. La luz de su torreta gira a 30 revoluciones por minuto. ¿A qué velocidad se está moviendo la luz a lo largo del muro cuando el haz forma ángulos de *a*) $\theta = 30°$, *b*) $\theta = 60°$ y *c*) $\theta = 70°$?

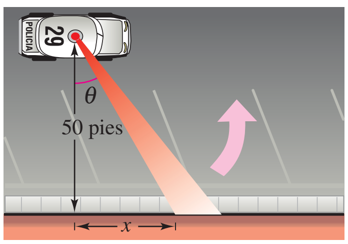


Figura para 45

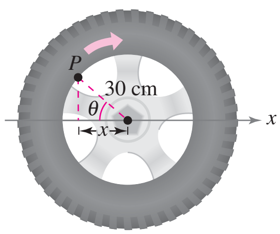


Figura para 46

46. ***Velocidad lineal y velocidad angular*** Una rueda de 30 cm de radio gira a razón de 10 vueltas por segundo. Se pinta un punto P en su borde (ver la figura).

a) Encontrar dx/dt como función de θ.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función del apartado *a*).

c) ¿Cuándo es mayor el valor absoluto del ritmo de cambio de x?, ¿y el menor?

d) Calcular dx/dt cuando $\theta = 30°$ y $\theta = 60°$.

47. ***Control de vuelo*** Un avión vuela en condiciones de aire en calma a una velocidad de 275 millas por hora. Si asciende con un ángulo de 18°, calcular el ritmo al que está ganando altura.

48. ***Cámara de vigilancia*** Una cámara de vigilancia está a 50 pies de altura sobre un vestíbulo de 100 pies de largo (ver la figura). Es más fácil diseñar la cámara con una velocidad de rotación constante, pero en tal caso toma las imágenes del vestíbulo a velocidad variable. En consecuencia, es deseable diseñar un sistema con velocidad angular variable de modo tal que la velocidad de la toma a lo largo del vestíbulo sea constante. Encontrar un modelo para la velocidad variable de rotación adecuado si $|dx/dt| = 2$ pies por segundo.

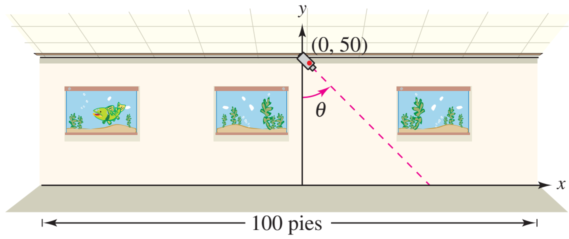


Figura para 48

49. ***Para pensar*** Describir la relación que existe entre la razón de cambio de y y el de x en los casos siguientes. Suponer que todas las variables y derivadas son positivas.

a) $\dfrac{dy}{dt} = 3\dfrac{dx}{dt}$ *b*) $\dfrac{dy}{dt} = x(L - x)\dfrac{dx}{dt}, \quad 0 \le x \le L$

Aceleración **En los ejercicios 50 y 51, calcular la aceleración del objeto especificado. (*Sugerencia:* Recordar que si una variable cambia a velocidad constante, su aceleración es nula.)**

50. Calcular la aceleración del extremo superior de la escalera del ejercicio 25 cuando su base está a 7 pies de la pared.

51. Calcular la aceleración del velero del ejercicio 28*a* cuando faltan por recoger 13 pies de cuerda.

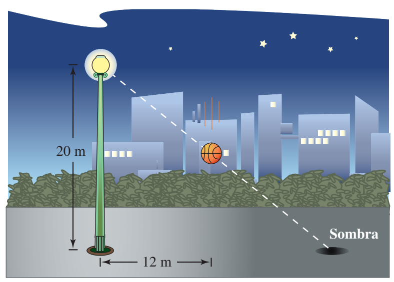
52. ***Modelo matemático*** La siguiente tabla muestra el número de mujeres solteras s (nunca casadas) y casadas m (en millones) en el mundo laboral estadounidense desde 1997 hasta 2005. (*Fuente*: *U.S. Bureau of Labor Statistics*)

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
s	16.5	17.1	17.6	17.8	18.0	18.2	18.4	18.6	19.2
m	33.8	33.9	34.4	35.1	35.2	35.5	36.0	35.8	35.9

a) Utilizar las funciones de regresión de su herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $m(s) = as^3 + bs^2 + cs + d$ para esos datos, donde t es el tiempo en años, siendo $t = 7$ el año 1997.

b) Encontrar dm/dt. Después utilizar ese modelo para estimar dm/dt para $t = 10$, si se supone que el número de mujeres solteras s que forman parte de la fuerza de trabajo va a crecer a razón de 0.75 millones al año.

53. ***Sombra en movimiento*** Se deja caer una pelota desde una altura de 20 m, a una distancia de 12 m de una lámpara (ver la figura). La sombra de la pelota se mueve a lo largo del suelo. ¿A qué ritmo se está moviendo la sombra 1 segundo después de soltar la pelota? (*Enviado por Dennis Gittinger, St. Philips College, San Antonio, TX*)



2 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 a 4, encontrar la derivada de la función usando la propia definición de derivada.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 5$

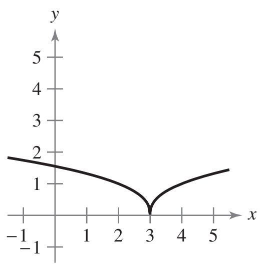
2. $f(x) = \sqrt{x} + 1$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

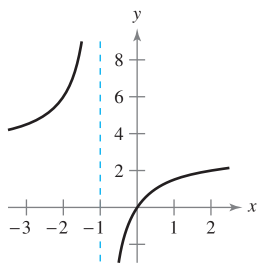
4. $f(x) = \dfrac{6}{x}$

En los ejercicios 5 y 6, buscar los valores de x en los que f es derivable.

5. $f(x) = (x-3)^{2/5}$



6. . $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$



7. Construir la gráfica de $f(x) = 4 - |x - 2|$.

a) ¿f es continua en $x = 2$?

b) ¿f es derivable en $x = 2$? Explicar la respuesta.

8. Construir la gráfica de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2, & x < -2 \\ 1 - 4x - x^2, & x \geq -2. \end{cases}$

a) ¿f es continua en $x = -2$?

b) ¿f es derivable en $x = -2$? Explicar la respuesta.

En los ejercicios 9 y 10, encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

9. $g(x) = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{x}{6}, \quad \left(-1, \dfrac{5}{6}\right)$

10. $h(x) = \dfrac{3x}{8} - 2x^2, \quad \left(-2, -\dfrac{35}{4}\right)$

En los ejercicios 11 y 12, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto dado, *b*) utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su tangente en el punto y *c*) usar la función *derivative* de una herramienta de graficación para confirmar sus resultados.

11. $f(x) = x^3 - 1, \quad (-1, -2)$

12. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}, \quad (0, 2)$

En los ejercicios 13 y 14, utilizar la forma alternativa de la derivada para calcular la derivada en $x = c$ (si existe).

13. $g(x) = x^2(x-1), \quad c = 2$

14. $f(x) = \dfrac{1}{x+4}, \quad c = 3$

En los ejercicios 15 a 30, usar las reglas de derivación para encontrar la derivada de la función.

15. $y = 25$

16. $y = -30$

17. $f(x) = x^8$

18. $g(x) = x^{20}$

19. $h(t) = 13t^4$

20. $f(t) = -8t^5$

21. $f(x) = x^3 - 11x^2$

22. $g(s) = 4s^4 - 5s^2$

23. $h(x) = 6\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$

24. $f(x) = x^{1/2} - x^{-1/2}$

25. $g(t) = \dfrac{2}{3t^2}$

26. $h(x) = \dfrac{10}{(7x)^2}$

27. $f(\theta) = 4\theta - 5 \operatorname{sen} \theta$

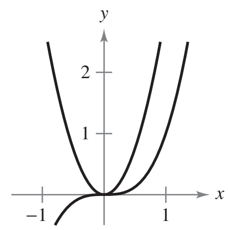
28. $g(\alpha) = 4 \cos \alpha + 6$

29. $f(\theta) = 3 \cos \theta - \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{4}$

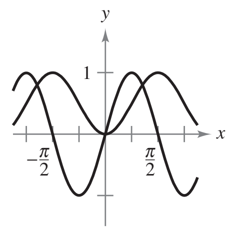
30. $g(\alpha) = \dfrac{5 \operatorname{sen} \alpha}{3} - 2\alpha$

Redacción **En los ejercicios 31 y 32, en la figura se muestran las gráficas de una función y su derivada. Nombrar las gráficas como f y f' y escribir un pequeño párrafo estableciendo los criterios utilizados al hacer la selección.**

31.



32.



33. ***Cuerda vibrante*** Cuando se pulsa la cuerda de una guitarra, ésta vibra con una frecuencia $F = 200\sqrt{T}$, donde F se mide en vibraciones por segundo y la tensión T se mide en libras. Encontrar las razones de cambio en F cuando *a*) $T = 4$ y *b*) $T = 9$.

34. ***Movimiento vertical*** Se deja caer una pelota desde una altura de 100 pies. Un segundo después, se deja caer otra pelota desde una altura de 75 pies. ¿Cuál de ellas llega primero al suelo?

35. ***Movimiento vertical*** Para estimar la altura de un edificio, se deja caer una piedra desde su parte superior a una piscina que se encuentra a nivel del suelo. ¿Qué altura tiene el edificio si el impacto en el agua ocurre 9.2 segundos después de lanzada la piedra?

36. ***Movimiento vertical*** Se deja caer una bomba desde un aeroplano que vuela a una altura de 14 400 pies. ¿Cuánto tiempo tardará la bomba en llegar al suelo? (Debido al movimiento del avión, la caída no será vertical, pero el tiempo será el mismo.) Si el avión viaja a 600 millas por hora, ¿cuánto se moverá la bomba de manera horizontal después de soltarla?

37. ***Movimiento de un proyectil*** Se lanza una pelota que sigue la trayectoria descrita por $y = x - 0.02x^2$.

a) Construir la gráfica de la trayectoria.

b) Encontrar la distancia horizontal total de la pelota.

c) ¿En qué valor de x alcanzará la pelota la altura máxima? (Utilizar la simetría de la ruta.)

d) Encontrar la ecuación que sirve para calcular el ritmo de cambio instantáneo para la altura de la pelota con respecto al cambio horizontal. Evaluar la ecuación en $x = 0, 10, 25, 30$ y 50.

e) ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de la altura cuando la pelota alcanza su altura máxima?

38. ***Movimiento de un proyectil*** La trayectoria de un proyectil lanzado con un ángulo de 45° con respecto al piso es

$$y = x - \frac{32}{v_0^2}(x^2)$$

donde la velocidad inicial es v_0 pies por segundo.

a) Encontrar la coordenada x del punto donde el proyectil golpea al suelo. Utilizar la simetría de la trayectoria del proyectil para localizar la coordenada x del punto en el que alcanza su altura máxima.

b) ¿Cuál es la razón de cambio instantáneo de la altura cuando el proyectil se encuentra a su altura máxima?

c) Demostrar que duplicar la velocidad inicial del proyectil multiplicaría por 4 la altura máxima y el alcance.

d) Calcular la altura máxima y el alcance de un proyectil lanzado con una velocidad inicial de 70 pies por segundo. Utilizar una herramienta de graficación para representar la trayectoria del proyectil.

39. ***Movimiento horizontal*** La función de posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x es:

$x(t) = t^2 - 3t + 2$ para $-\infty < t < \infty$.

a) Calcular la velocidad de la partícula.

b) Encontrar el o los intervalos t abiertos en los que la partícula se mueve hacia la izquierda.

c) Determinar la posición de la partícula cuando la velocidad es 0.

d) Encontrar la velocidad de la partícula cuando la posición es 0.

40. ***Modelado matemático*** En la siguiente tabla se muestra la velocidad de un automóvil en millas por hora y la distancia de frenado en pies:

Velocidad, x	20	30	40	50	60
Distancia de frenado, y	25	55	105	188	300

a) Utilizar las funciones de regresión de la herramienta de graficación para encontrar un modelo cuadrático para los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar los datos y trazar el modelo.

c) Utilizar una herramienta de graficación para representar dy/dx.

d) Utilizar el modelo para aproximar la distancia de frenado para una velocidad de 65 millas por hora.

e) Utilizar la gráfica de los apartados *b*) y *c*) para explicar el cambio en la distancia de frenado a medida que aumenta la velocidad.

En los ejercicios 41 a 54, encontrar la derivada de la función.

41. $f(x) = (5x^2 + 8)(x^2 - 4x - 6)$

42. $g(x) = (x^3 + 7x)(x + 3)$

43. $h(x) = \sqrt{x}\,\text{sen}\,x$

44. $f(t) = 2t^5 \cos t$

45. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

46. $f(x) = \dfrac{6x - 5}{x^2 + 1}$

47. $f(x) = \dfrac{1}{9 - 4x^2}$

48. $f(x) = \dfrac{9}{3x^2 - 2x}$

49. $y = \dfrac{x^4}{\cos x}$

50. $y = \dfrac{\text{sen}\,x}{x^4}$

51. $y = 3x^2 \sec x$

52. $y = 2x - x^2 \tan x$

53. $y = x \cos x - \text{sen}\,x$

54. $g(x) = 3x\,\text{sen}\,x + x^2 \cos x$

En los ejercicios 55 a 58, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto dado.

55. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2}$, $(1, 1)$

56. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$, $\left(\dfrac{1}{2}, -3\right)$

57. $f(x) = -x \tan x$, $(0, 0)$

58. $f(x) = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

59. ***Aceleración*** La velocidad de un objeto es $v(t) = 36 - t^2$, $0 \le t \le 6$, en metros por segundo. Calcular la velocidad y aceleración del objeto cuando $t = 4$.

60. ***Aceleración*** La velocidad inicial de un automóvil que parte del reposo es

$$v(t) = \frac{90t}{4t + 10}$$

donde v se mide en pies por segundo. Calcular la velocidad y aceleración del vehículo una vez transcurridos los siguientes tiempos:

a) 1 segundo *b*) 5 segundos *c*) 10 segundos

En los ejercicios 61 a 66, calcular la segunda derivada de la función.

61. $g(t) = -8t^3 - 5t + 12$

62. $h(x) = 21x^{-3} + 3x$

63. $f(x) = 15x^{5/2}$

64. $f(x) = 20\sqrt[5]{x}$

65. $f(\theta) = 3 \tan \theta$

66. $h(t) = 10 \cos t - 15\,\text{sen}\,t$

En los ejercicios 67 y 68, demostrar que la función que satisface la ecuación.

	Función	*Ecuación*
67.	$y = 2\,\text{sen}\,x + 3\cos x$	$y'' + y = 0$
68.	$y = \dfrac{10 - \cos x}{x}$	$xy' + y = \text{sen}\,x$

En los ejercicios 69 a 80, encontrar la derivada de la función.

69. $h(x) = \left(\dfrac{x + 5}{x^2 + 3}\right)^2$

70. $f(x) = \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^5$

71. $f(s) = (s^2 - 1)^{5/2}(s^3 + 5)$

72. $h(\theta) = \dfrac{\theta}{(1 - \theta)^3}$

73. $y = 5\cos(9x + 1)$

74. $y = 1 - \cos 2x + 2\cos^2 x$

75. $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\text{sen}\,2x}{4}$

76. $y = \dfrac{\sec^7 x}{7} - \dfrac{\sec^5 x}{5}$

77. $y = \dfrac{2}{3}\text{sen}^{3/2} x - \dfrac{2}{7}\text{sen}^{7/2} x$

78. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

79. $y = \dfrac{\text{sen}\,\pi x}{x + 2}$

80. $y = \dfrac{\cos(x - 1)}{x - 1}$

En los ejercicios 81 a 84, encontrar la derivada de la función en el punto dado.

81. $f(x) = \sqrt{1 - x^3}$, $(-2, 3)$

82. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$, $(3, 2)$

83. $y = \frac{1}{2}\csc 2x, \quad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$

84. $y = \csc 3x + \cot 3x, \quad \left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$

CAS **En los ejercicios 85 a 88, utilizar un sistema algebraico computarizado para encontrar la derivada de la función. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su derivada en el mismo plano cartesiano. Describir el comportamiento de la función que corresponda a todo cero de la gráfica de la derivada.**

85. $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$ 86. $f(x) = [(x-2)(x+4)]^2$

87. $f(t) = \sqrt{t+1}\,\sqrt[3]{t+1}$ 88. $y = \sqrt{3x}\,(x+2)^3$

CAS **En los ejercicios 89 a 92, *a*) utilizar un sistema algebraico computarizado para encontrar la derivada de la función en el punto dado, *b*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto y *c*) representar gráficamente la función y su recta tangente en el mismo plano cartesiano.**

89. $f(t) = t^2(t-1)^5, \quad (2, 4)$

90. $g(x) = x\sqrt{x^2+1}, \quad \left(3, 3\sqrt{10}\right)$

91. $f(x) = \tan\sqrt{1-x}, \quad \left(-2, \tan\sqrt{3}\right)$

92. $f(x) = 2\csc^3\left(\sqrt{x}\right), \quad (1, 2\csc^3 1)$

En los ejercicios 93 a 96, encontrar la segunda derivada de la función.

93. $y = 7x^2 + \cos 2x$ 94. $y = \dfrac{1}{x} + \tan x$

95. $f(x) = \cot x$ 96. $y = \operatorname{sen}^2 x$

CAS **En los ejercicios 97 a 100, utilizar un sistema algebraico computarizado para encontrar la segunda derivada de la función.**

97. $f(t) = \dfrac{4t^2}{(1-t)^2}$ 98. $g(x) = \dfrac{6x-5}{x^2+1}$

99. $g(\theta) = \tan 3\theta - \operatorname{sen}(\theta - 1)$ 100. $h(x) = 5x\sqrt{x^2-16}$

101. ***Refrigeración*** La temperatura T en grados Fahrenheit de los alimentos colocados en un congelador es

$$T = \frac{700}{t^2 + 4t + 10}$$

donde t es el tiempo en horas. Calcular la razón de cambio de T con respecto a t en cada uno de los siguientes tiempos:

a) $t = 1$ *b*) $t = 3$ *c*) $t = 5$ *d*) $t = 10$

102. ***Flujo de fluidos*** La velocidad de salida v de un líquido que fluye por el orificio que se encuentra en la parte inferior de un tanque está dada por $v = \sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración de la gravedad (32 pies por segundo al cuadrado) y h es la profundidad del líquido dentro del tanque. Encontrar el ritmo de cambio de v con respecto a h cuando *a*) $h = 9$ y *b*) $h = 4$. (Observar que $g = +32$ pies por segundo al cuadrado. El signo g depende de cómo se modele el problema. En este caso, considerar una g negativa produciría un valor imaginario para v.)

En los ejercicios 103 a 108, utilizar la derivación implícita para encontrar dy/dx.

103. $x^2 + 3xy + y^3 = 10$ 104. $y^2 = (x-y)(x^2+y)$

105. $\sqrt{xy} = x - 4y$ 106. $y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 25$

107. $x \operatorname{sen} y = y \cos x$ 108. $\cos(x+y) = x$

En los ejercicios 109 y 110, encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la ecuación en el punto dado. Utilizar una herramienta de graficación para representar la ecuación, la recta tangente y la normal.

109. $x^2 + y^2 = 10, \quad (3, 1)$ 110. $x^2 - y^2 = 20, \quad (6, 4)$

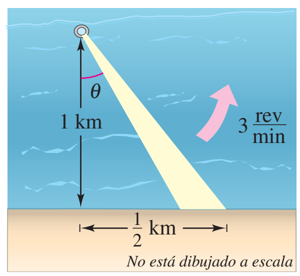
111. Un punto se mueve sobre la curva $y = \sqrt{x}$ de manera tal que el valor en y aumenta con un ritmo de dos unidades por segundo. ¿A qué ritmo cambia x en cada uno de los siguientes valores?

a) $x = \frac{1}{2}$ *b*) $x = 1$ *c*) $x = 4$

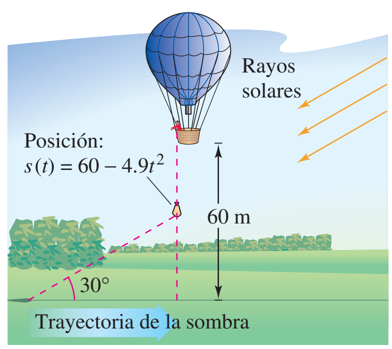
112. ***Superficie*** Las aristas de un cubo se expanden a un ritmo de 8 centímetros por segundo. ¿A qué ritmo cambia el área de su superficie cuando sus aristas tienen 6.5 centímetros?

113. ***Profundidad*** La sección transversal de un canal de 5 metros es un trapezoide isósceles con base menor de dos metros, base mayor de tres metros y una altura de dos metros. El agua corre por el canal a un ritmo de un metro cúbico por minuto. ¿Con qué rapidez aumenta el nivel del agua cuando ésta tiene un metro de profundidad?

114. ***Velocidad lineal y angular*** Un faro giratorio se localiza a 1 kilómetro en línea recta de una playa (ver la figura). Si el faro gira a un ritmo de tres revoluciones por minuto, ¿a qué velocidad parece moverse el haz de luz (en kilómetros por hora) para un espectador que se encuentra a medio kilómetro sobre la playa?



115. ***Sombra en movimiento*** Se deja caer un costal de arena desde un globo aerostático que se encuentra a 60 metros de altura; en ese momento el ángulo de elevación del Sol es de 30 grados (ver la figura). Encontrar el ritmo al que se mueve la sombra sobre el piso cuando el costal está a una altura de 35 metros. [*Sugerencia:* La posición del costal está dada por $s(t) = 60 - 4.9t^2$.]



SP Solución de problemas

1. Tomando en cuenta la gráfica de la parábola $y = x^2$:

a) Encontrar el radio r del círculo más grande posible centrado sobre el eje x que es tangente a la parábola en el origen, como se muestra en la figura. Este círculo se denomina el **círculo de curvatura** (ver la sección 12.5). Encontrar la ecuación de este círculo. Utilizar una herramienta de graficación para representar el círculo y la parábola en la misma ventana, con el fin de verificar la respuesta.

b) Encontrar el centro $(0, b)$ del círculo con radio 1 centrado sobre el eje y que es tangente a la parábola en dos puntos, como se muestra en la figura. Encontrar la ecuación de este círculo. Utilizar una herramienta de graficación para representar el círculo y la parábola en la misma ventana, con el fin de verificar la respuesta.

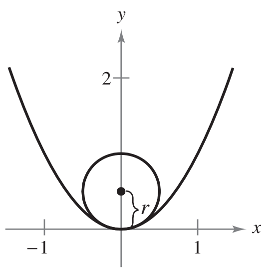


Figura para 1*a*

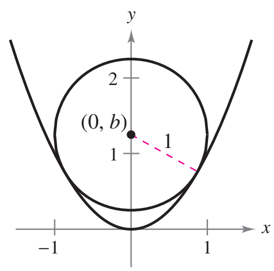


Figura para 1*b*

2. Representar las dos parábolas $y = x^2$ y $y = -x^2 + 2x - 5$ en el mismo plano cartesiano. Encontrar las ecuaciones de las dos rectas igualmente tangentes a ambas parábolas.

3. *a*) Encontrar el polinomio $P_1(x) = a_0 + a_1x$ cuyo valor y pendiente concuerdan con el valor y la pendiente de $f(x) = \cos x$ en el punto $x = 0$.

b) Encontrar el polinomio $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ cuyo valor y primeras dos derivadas concuerdan con el valor y las dos primeras derivadas de $f(x) = \cos x$ en el punto $x = 0$. Este polinomio se denomina **polinomio de Taylor** de segundo grado de $f(x) = \cos x$ en $x = 0$.

c) Completar la siguiente tabla comparando los valores de $f(x) = \cos x$ y $P_2(x)$. ¿Qué es lo que se observa?

x	-1.0	-0.1	-0.001	0	0.001	0.1	1.0
$\cos x$							
$P_2(x)$							

d) Encontrar el polinomio de Taylor de tercer grado de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$.

4. *a*) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(2, 4)$.

b) Encontrar la ecuación de la recta normal a $y = x^2$ en el punto $(2, 4)$. (La recta normal es perpendicular a la tangente.) ¿Dónde corta esta recta a la parábola por segunda vez?

c) Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a $y = x^2$ en el punto $(0, 0)$.

d) Demostrar que para todo punto $(a, b) \neq (0, 0)$ sobre la parábola $y = x^2$, la recta normal corta a la gráfica una segunda vez.

5. Encontrar un polinomio de tercer grado $p(x)$ tangente a la recta $y = 14x - 13$ en el punto $(1, 1)$, y tangente a la recta $y = -2x - 5$ en el punto $(-1, -3)$.

6. Encontrar la función de la forma $f(x) = a + b \cos cx$ tangente a la recta $y = 1$ en el punto $(0, 1)$ y tangente a la recta

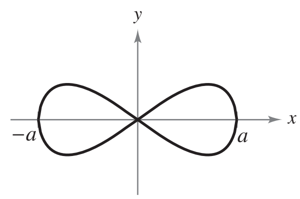
$$y = x + \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$$

en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

7. La gráfica de la **curva ocho**, en forma de pera,

$$x^4 = a^2(x^2 - y^2),\ a \neq 0,$$

es la siguiente



a) Explicar cómo podría utilizarse una herramienta de graficación para representar esta curva.

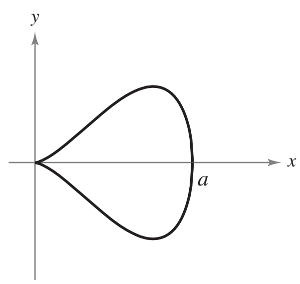
b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la curva para diversos valores de la constante a. Describir cómo influye en la forma de la curva.

c) Determinar los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal.

8. La gráfica de la **curva cuártica**, en forma de pera,

$$b^2y^2 = x^3(a - x), \quad a, b > 0,$$

es la siguiente



a) Explicar cómo podría utilizar una herramienta de graficación para representar esta curva.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la curva para diversos valores de las constantes a y b. Describir cómo influyen en la forma de la curva.

c) Determinar los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal.

9. Un hombre que mide seis pies de estatura camina a un ritmo de 5 pies por segundo hacia una farola del alumbrado público que tiene 30 pies de altura (ver la figura). Su hijo, que mide 3 pies, le sigue a la misma velocidad pero 10 pies detrás de él. Por momentos, la sombra que queda detrás del niño es la producida por el hombre, y en otros, es la del niño.

a) Suponiendo que el hombre está a 90 pies de la farola, demostrar que su sombra se proyecta tras del niño.

b) Suponiendo que el hombre está a 60 pies de la farola, demostrar que la sombra del niño se extiende más allá de la del hombre.

c) Determinar la distancia d desde el hombre hasta la farola en la que los bordes de ambas sombras están exactamente a la misma distancia de la farola.

d) Determinar a qué velocidad se mueve el borde de la sombra en función de x, la distancia entre el hombre y la farola. Analizar la continuidad de esta función de velocidad de la sombra.

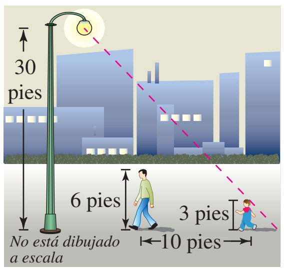


Figura para 9

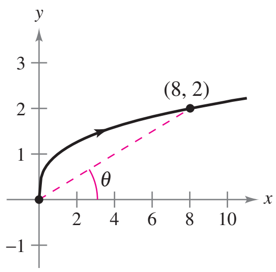


Figura para 10

10. Una partícula se mueve sobre la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ (ver la figura). Cuando $x = 8$, la componente y de su posición aumenta con un ritmo de un centímetro por segundo.

a) ¿A qué velocidad se modifica la componente x en este momento?

b) ¿A qué velocidad se modifica la distancia desde el origen en este momento?

c) ¿A qué velocidad cambia el ángulo de inclinación θ en este momento?

11. Sea L una función derivable para todo x. Demostrar que si $L(a + b) = L(a) + L(b)$ para todo a y b, entonces $L'(x) = L'(0)$ para todo x. ¿A qué se parece la gráfica de L?

12. Sea E una función que satisface $E(0) = E'(0) = 1$. Demostrar que si $E(a + b) = E(a)E(b)$ para todo a y b, entonces E es derivable y $E'(x) = E(x)$ para todo x. Encontrar un ejemplo de una función que satisfaga $E(a + b) = E(a)E(b)$.

13. El límite fundamental $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ supone que x se mide en radianes. ¿Qué sucede si x se midió en grados en vez de radianes?

a) Configurar una herramienta de graficación en modo *degree* y completar la tabla.

z (en grados)	0.1	0.01	0.0001
$\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$			

b) Utilizar la tabla para estimar

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

para z en grados. ¿Cuál es el valor exacto de este límite? (*Sugerencia:* $180° = \pi$ radianes).

c) Utilizar la definición por límite de la derivada para encontrar

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z$$

para z en grados.

d) Definir las nuevas funciones $S(z) = \operatorname{sen}(cz)$ y $C(z) = \cos(cz)$, donde $c = \pi/180°$. Encontrar $S(90)$ y $C(180)$. Utilizar la regla de la cadena para calcular

$$\frac{d}{dz} S(z).$$

e) Explicar por qué el cálculo es más sencillo utilizando radianes en lugar de grados.

14. Un astronauta que está en la Luna lanza una roca. El peso de dicha roca es

$$s = -\frac{27}{10}t^2 + 27t + 6$$

donde s se mide en pies y t en segundos.

a) Encontrar expresiones para la velocidad y aceleración de la roca.

b) Encontrar el tiempo en que la roca está en su punto más alto calculando el tiempo en el que la velocidad es igual a 0. ¿Cuál es la altura de la roca en este momento?

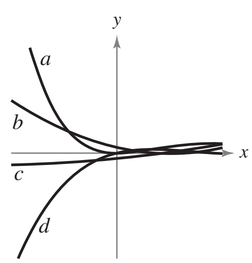
c) ¿Cómo se compara la aceleración de la roca con la aceleración de la gravedad de la Tierra?

15. Si a es la aceleración de objeto, la *variación de la aceleración* j se define como $j = a'(t)$.

a) Utilizar esta definición para elaborar una interpretación física de j.

b) Encontrar j para el vehículo que se menciona en el ejercicio 119 de la sección 2.3 e interpretar el resultado.

c) En la figura se muestra la gráfica de las funciones de posición, velocidad, aceleración y variación de la aceleración de un vehículo. Identificar cada gráfica y explicar el razonamiento.



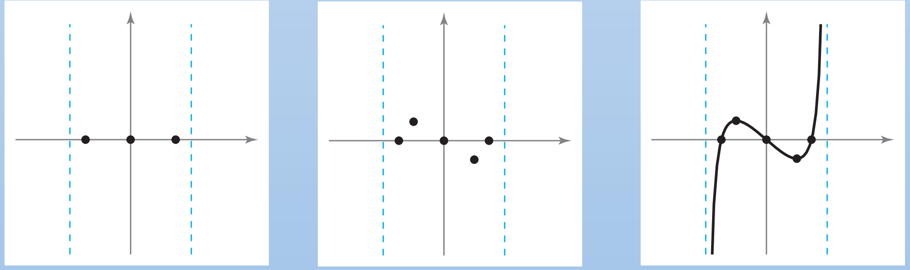
3 Aplicaciones de la derivada

En este capítulo se discutirán diferentes aplicaciones de la derivada de una función. Estas aplicaciones se dividen en tres categorías básicas: trazado de curvas, optimización y técnicas de aproximación.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo utilizar la derivada para localizar los valores máximos y mínimos de una función en un intervalo cerrado. (3.1)
- Cómo un gran número de resultados en este capítulo dependen de dos importantes teoremas: el *Teorema de Rolle* y el *Teorema del valor medio*. (3.2)
- Cómo utilizar la primera derivada para determinar si una función es creciente o decreciente. (3.3)
- Cómo emplear la segunda derivada para determinar si la gráfica de una función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. (3.4)
- Cómo determinar las asíntotas horizontales de la gráfica de una función. (3.5)
- Cómo graficar una función con las técnicas del capítulo P-3. (3.6)
- Cómo resolver problemas de optimización. (3.7)
- Cómo utilizar técnicas de aproximación para resolver problemas. (3.8 y 3.9)

Una nave pequeña inicia su descenso desde una altitud de 1 milla, 4 millas al oeste de la pista de aterrizaje. Dada una función que modela la trayectoria en la que planea el avión, ¿cuándo desciende el avión con la mayor razón de cambio? (Ver la sección 3.4, ejercicio 75.)



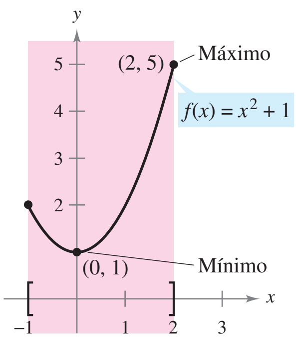
En el capítulo 3 se usará el cálculo para analizar gráficas de funciones. Por ejemplo, se puede usar la derivada de una función para determinar sus valores máximos y mínimos. Se usarán límites para identificar las asíntotas de la gráfica de una función. En la sección 3.6 se combinarán estas técnicas para trazar la gráfica de una función.

3.1 Extremos en un intervalo

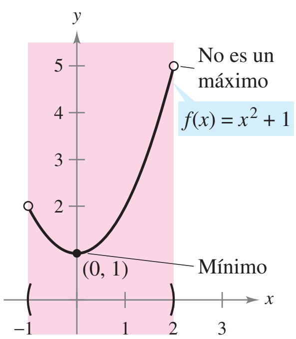
- **Entender la definición de extremos de una función en un intervalo.**
- **Entender la definición de extremos relativos de una función en un intervalo abierto.**
- **Encontrar los extremos en un intervalo cerrado.**

Extremos de una función

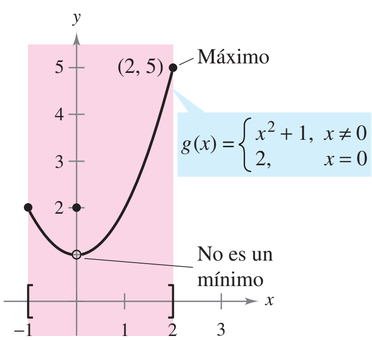
En el cálculo, se dedica mucho esfuerzo para determinar el comportamiento de una función f sobre un intervalo I. ¿f tiene un valor máximo en I? ¿Tiene un valor mínimo? ¿Dónde es creciente la función? ¿Dónde es decreciente? En este capítulo se verá cómo las derivadas se utilizan para responder estas preguntas. También por qué los planteamientos anteriores son importantes en las aplicaciones de la vida real.



a) *f* es continua [– 1, 2] es cerrado



b) *f* es continua (– 1, 2) es abierto



c) *g* no es continua [–1, 2] es cerrado.
Los extremos pueden encontrarse en puntos interiores o en puntos terminales de un intervalo. Los extremos que se presentan en puntos terminales se denominan **extremos o terminales**
Figura 3.1

DEFINICIÓN DE EXTREMOS

Sea f definida sobre un intervalo I que contiene a c.

1. $f(c)$ es el **mínimo de *f* en *I*** si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en I.
2. $f(c)$ es el **máximo de *f* en *I*** si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en I.

Los mínimos y máximos de una función en un intervalo son los **valores extremos**, o simplemente **extremos**, de la función en el intervalo. El mínimo y el máximo de una función en un intervalo también reciben el nombre de **mínimo absoluto** y **máximo absoluto** en el intervalo.

Una función no siempre tiene un mínimo o un máximo en un intervalo. Por ejemplo, en la figura 3.1*a* y *b*, es posible ver que la función $f(x) = x^2 + 1$ tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo cerrado $[-1, 2]$, pero no tiene un máximo en el intervalo abierto $(-1, 2)$. Además, en la figura 3.1*c* se observa que la continuidad (o la falta de la misma) puede afectar a la existencia de un extremo en un intervalo. Esto sugiere el siguiente teorema. (Aunque el teorema de los valores extremos es intuitivamente plausible, la prueba del mismo no se encuentra dentro del objetivo de este libro.)

TEOREMA 3.1 EL TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

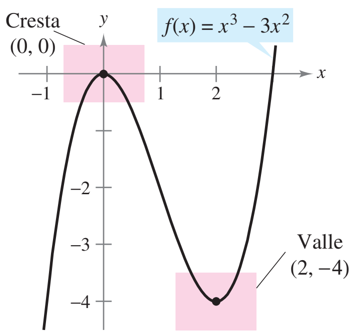
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo.

EXPLORACIÓN

Determinación de los valores mínimo y máximo El teorema del valor extremo (al igual que el teorema del valor intermedio) es un *teorema de existencia* porque indica la existencia de valores mínimo y máximo, pero no muestra cómo determinarlos. Emplear la función para valores extremos de una herramienta de graficación con el fin de encontrar los valores mínimo y máximo de cada una de las siguientes funciones. En cada caso, ¿los valores de x son exactos o aproximados? Explicar.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en el intervalo cerrado $[-1, 3]$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 2$ en el intervalo cerrado $[-1, 3]$



f tiene un máximo relativo en (0, 0) y un mínimo relativo en (2, − 4)

Figura 3.2

Extremos relativos y puntos o números críticos

En la figura 3.2, la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2$ tiene un **máximo relativo** en el punto (0, 0) y un **mínimo relativo** en el punto (2, −4). De manera informal, para una función continua, es posible que se piense que un máximo relativo ocurre en una "cima" de la gráfica. Y que un mínimo relativo se presenta en un "valle" en la gráfica. Tales cimas y valles pueden ocurrir de dos maneras. Si la cima (o valle) es suave y redondeada, la gráfica tiene una tangente horizontal en el punto alto (o punto bajo). Si la cima (o valle) es angosta y picuda, la gráfica representa una función que no es derivable en el punto alto (o punto bajo).

DEFINICIÓN DE EXTREMOS RELATIVOS

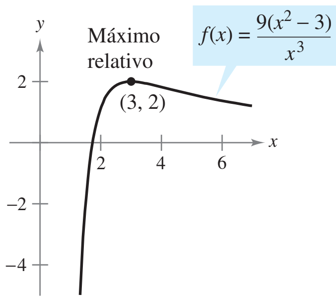
1. Si hay un intervalo abierto que contiene a c en el cual $f(c)$ es un máximo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de **máximo relativo** de f, o se podría afirmar que f tiene un **máximo relativo en $(c, f(c))$.**
2. Si hay un intervalo abierto que contiene a c en el cual $f(c)$ es un mínimo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de **mínimo relativo** de f, o se podría afirmar que f tiene un **mínimo relativo en $(c, f(c))$.**

El plural de máximo relativo es máximos relativos, y el plural de mínimo relativo es mínimos relativos. Un máximo relativo y un mínimo relativo algunas veces son llamados **máximo local** y **mínimo local**, respectivamente.

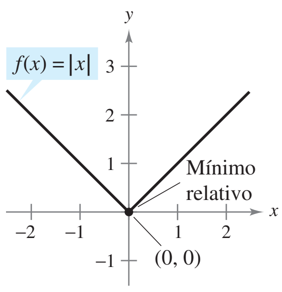
El ejemplo 1 examina las derivadas de una función en extremos relativos *dados*. (Se habla bastante acerca de la *determinación* de los extremos relativos de una función en la sección 3.3.)

EJEMPLO 1 El valor de la derivada en los extremos relativos

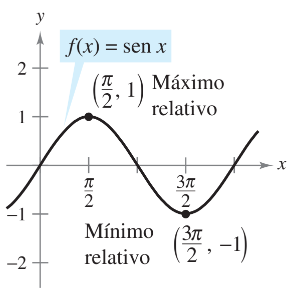
Encontrar el valor de la derivada en cada uno de los extremos relativos que se ilustran en la figura 3.3.



a) $f'(3) = 0$



b) $f'(0)$ no existe



c) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = ($

Figura 3.3

Solución

a) La derivada de $f(x) = \dfrac{9(x^2 - 3)}{x^3}$ es

$$f'(x) = \frac{x^3(18x) - (9)(x^2 - 3)(3x^2)}{(x^3)^2} \qquad \text{Derivar utilizando la regla del cociente.}$$

$$= \frac{9(9 - x^2)}{x^4}. \qquad \text{Simplificar.}$$

En el punto (3, 2), el valor de la derivada es $f'(3) = 0$ (ver la figura 3.3*a*).

b) En $x = 0$, la derivada de $f(x) = |x|$ *no existe* debido a que difieren los siguientes límites unilaterales (ver la figura 3.3*b*).

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad \text{Límite desde la izquierda.}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \qquad \text{Límite desde la derecha.}$$

c) La derivada de $f(x) = $ sen x es

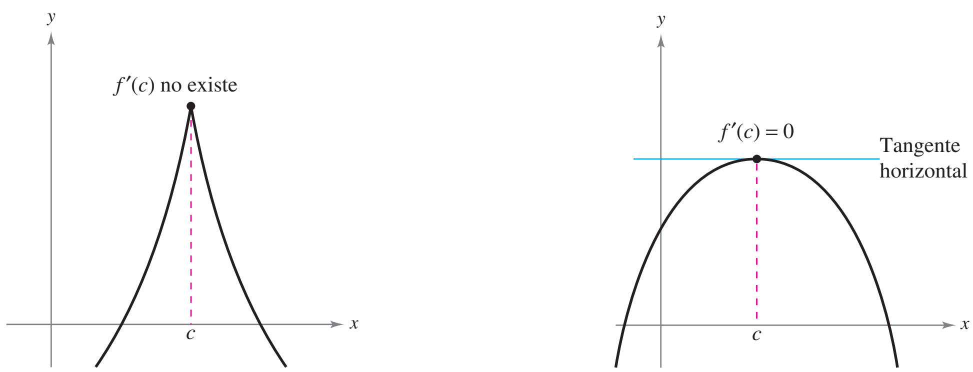
$$f'(x) = \cos x.$$

En el punto $(\pi/2, 1)$, el valor de la derivada es $f'(\pi/2,) = \cos(\pi/2) = 0$. En el punto $(3\pi/2, -1)$, el valor de la derivada es $f'(3\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0$ (ver la figura 3.3*c*).

Nótese que en el ejemplo 1 en los extremos relativos la derivada es cero o no existe. Los valores de x en estos puntos especiales reciben el nombre de **puntos críticos**. La figura 3.4 ilustra los dos tipos de números críticos. Obsérvese en la definición que el número crítico c debe estar en el dominio de f, pero c no tiene que estar en el dominio de f'.

DEFINICIÓN DE UN NÚMERO O PUNTO CRÍTICO

Sea f definida en c. Si $f'(c) = 0$ o si f no es derivable en c, entonces c es un **punto crítico** de f.



c es un punto crítico de *f*
Figura 3.4

TEOREMA 3.2 LOS EXTREMOS RELATIVOS OCURREN SÓLO EN NÚMEROS O PUNTOS CRÍTICOS

Si f tiene un mínimo relativo o un máximo relativo en $x = c$, entonces c es un punto crítico de f.

DEMOSTRACIÓN

Caso 1: Si f *no* es derivable en $x = c$, entonces, por definición, c es un punto crítico de f y el teorema es válido.
Caso 2: Si f es derivable en $x = c$, entonces $f'(c)$ debe ser positiva, negativa o 0. Suponer que $f'(c)$ es positiva. Entonces

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

lo cual implica que existe un intervalo (a, b) que contiene a c de modo tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0, \text{ para todo } x \neq c \text{ en } (a, b).$$

(Ver el ejercicio 82*b*, sección 1.2.)

Como este cociente es positivo, los signos en el denominador y el numerador deben coincidir. Lo anterior produce las siguientes desigualdades para los valores de x en el intervalo (a, b).

Izquierda de c: $x < c$ y $f(x) < f(c)$ $\Rightarrow$ $f(c)$ no es un mínimo relativo
Derecha de c: $x > c$ y $f(x) > f(c)$ $\Rightarrow$ $f(c)$ no es un máximo relativo

De tal modo, la suposición de que $f'(c) > 0$ contradice la hipótesis de que $f(c)$ es un extremo relativo. Suponiendo que $f'(c) < 0$ produce una contradicción similar, sólo queda una posibilidad, a saber, $f'(c) = 0$. En consecuencia, por definición, c es un punto crítico de f y el teorema resulta válido.

Mary Evans Picture Library

PIERRE DE FERMAT (1601-1665)

Para Fermat, que estudió abogacía, las matemáticas eran más una afición que una profesión. Sin embargo, Fermat realizó muchas contribuciones a la geometría analítica, la teoría de números, el cálculo y la probabilidad. En cartas a sus amigos, escribió muchas de las ideas fundamentales del cálculo, bastante antes de Newton o Leibniz. Por ejemplo, el teorema 3.2 algunas veces se atribuye a Fermat.

Determinación de extremos en un intervalo cerrado

El teorema 3.2 señala que los extremos relativos de una función *sólo* pueden ocurrir en los puntos críticos de la función. Sabiendo lo anterior, se pueden utilizar las siguientes estrategias para determinar los extremos en un intervalo cerrado.

Estrategias para la determinación de extremos en un intervalo cerrado

Para determinar los extremos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$, se siguen estos pasos.

1. Se encuentran los puntos críticos de f en (a, b).
2. Se evalúa f en cada punto crítico en (a, b).
3. Se evalúa f en cada punto extremo de $[a, b]$.
4. El más pequeño de estos valores es el mínimo. El más grande es el máximo.

Los siguientes tres ejemplos muestran cómo aplicar estas estrategias. Asegurarse de ver que la determinación de los puntos críticos de la función sólo es una parte del procedimiento. La evaluación de la función en los puntos críticos *y* los puntos extremos o terminales corresponden a la otra parte.

EJEMPLO 2 Determinación de los extremos en un intervalo cerrado

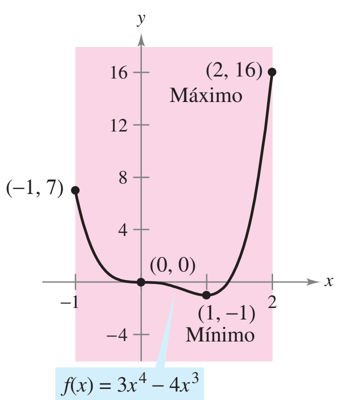
Determinar los extremos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en el intervalo $[-1, 2]$.

Solución Se empieza derivando la función

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 \qquad \text{Escribir la función original.}$$
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 \qquad \text{Derivar.}$$

Para determinar los puntos críticos de f, se necesitan encontrar los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$ y todos los valores de x para los cuales $f'(x)$ no existe.

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$
$$12x^2(x - 1) = 0 \qquad \text{Factor.}$$
$$x = 0, 1 \qquad \text{Números críticos.}$$

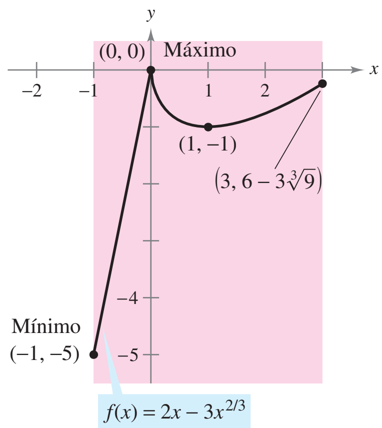


En el intervalo cerrado $[-1, 2]$, f tiene un mínimo en $(1, -1)$ y un máximo en $(2, 16)$
Figura 3.5

Debido a que f' se define para todo x, es posible concluir que estos números son los únicos puntos críticos de f. Al evaluar f en estos dos puntos críticos y en los puntos extremos de $[-1, 2]$, es posible determinar que el máximo es $f(2) = 16$ y el mínimo corresponde a $f(1) = -1$, como se muestra en la tabla. La gráfica de f se muestra en la figura 3.5.

Punto terminal izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto terminal derecho
$f(-1) = 7$	$f(0) = 0$	$f(1) = -1$ Mínimo	$f(2) = 16$ Máximo

En la figura 3.5 nótese que el punto crítico $x = 0$ no produce un mínimo relativo o un máximo relativo. Esto indica que el recíproco del teorema 3.2 no es válido. En otras palabras, *los números críticos de una función no necesitan producir extremos relativos*.



En el intervalo cerrado $[-1, 3]$, f tiene un mínimo en $(-1, -5)$ y un máximo en $(0, 0)$

Figura 3.6

EJEMPLO 3 Determinación de los extremos en un intervalo cerrado

Encontrar los extremos de $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$ en el intervalo $[-1, 3]$.

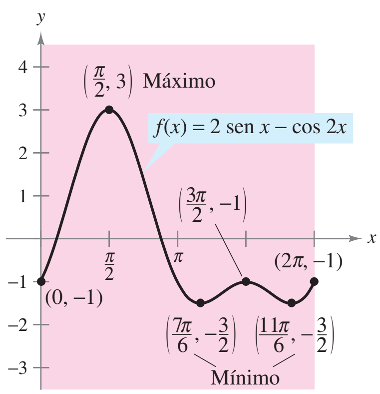
Solución Se empieza derivando la función.

$$f(x) = 2x - 3x^{2/3} \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^{1/3}} = 2\left(\frac{x^{1/3} - 1}{x^{1/3}}\right) \qquad \text{Derivar.}$$

A partir de esta derivada, es posible advertir que la función tiene dos puntos críticos en el intervalo $[-1, 3]$. El número 1 es crítico porque $f'(1) = 0$, y el punto 0 es un punto crítico debido a que $f'(0)$ no existe. Al evaluar f en estos dos números y en los puntos extremos del intervalo, se puede concluir que el mínimo es $f(-1) = -5$ y el máximo, $f(0) = 0$, como se indica en la tabla. La gráfica de f se muestra en la figura 3.6.

Punto terminal izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto terminal derecho
$f(-1) = -5$ Mínimo	$f(0) = 0$ Máximo	$f(1) = -1$	$f(3) = 6 - 3\sqrt[3]{9} \approx -0.24$



En el intervalo cerrado, $[0, 2\pi]$, f tiene dos mínimos en $(7\pi/6, -3/2)$ y $(11\pi/6, -3/2)$ y un máximo en $(\pi/2, 3)$

Figura 3.7

EJEMPLO 4 Determinación de los extremos en un intervalo cerrado

Encontrar los extremos de $f(x) = 2 \text{ sen } x - \cos 2x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Solución Esta función es derivable para todo x real, por lo que es posible determinar todos los puntos críticos derivándola e igualando $f'(x)$ a cero, como se indica.

$$f(x) = 2 \text{ sen } x - \cos 2x \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f'(x) = 2\cos x + 2 \text{ sen } 2x = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

$$2\cos x + 4\cos x \text{ sen } x = 0 \qquad \text{sen } 2x = 2\cos x \text{ sen } x.$$

$$2(\cos x)(1 + 2 \text{ sen } x) = 0 \qquad \text{Factor.}$$

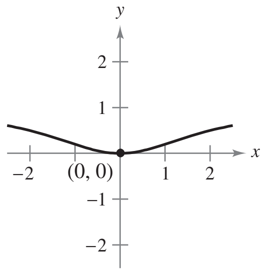
En el intervalo $[0, 2\pi]$, el factor $\cos x$ es cero cuando $x = \pi/2$ y cuando $x = 3\pi/2$. El factor $(1 + 2 \text{ sen } x)$ es cero cuando $x = 7\pi/6$ y cuando $x = 11\pi/6$. Al evaluar f en estos cuatro números críticos y en los puntos extremos del intervalo, se concluye que el máximo es $f(\pi/2) = 3$ y que el mínimo se presenta en *dos* puntos, $f(7\pi/6) = -3/2$ y $f(11\pi/6) = -3/2$, como se indica en la tabla. La gráfica se muestra en la figura 3.7.

Punto terminal izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto crítico	Punto crítico	Punto terminal derecho
$f(0) = -1$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ Máximo	$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$ Mínimo	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$	$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$ Mínimo	$f(2\pi) = -1$

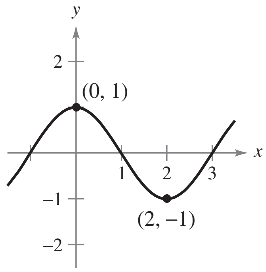
3.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, determinar el valor de la derivada (si ésta existe) en cada extremo indicado.

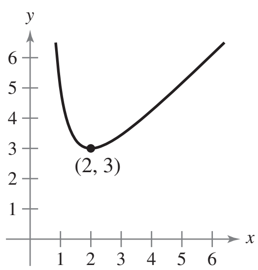
1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$



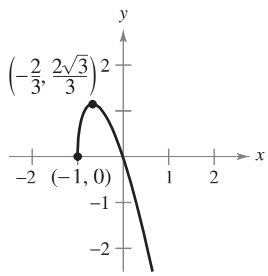
2. $f(x) = \cos \dfrac{\pi x}{2}$



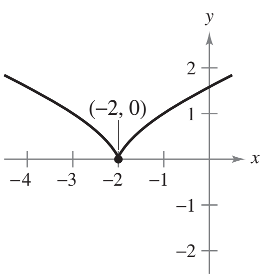
3. $g(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$



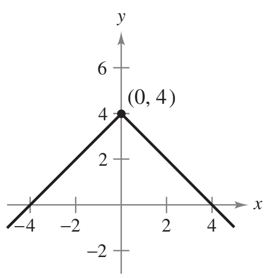
4. $f(x) = -3x\sqrt{x + 1}$



5. $f(x) = (x + 2)^{2/3}$

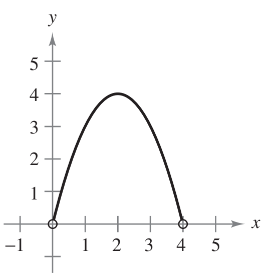


6. $f(x) = 4 - |x|$

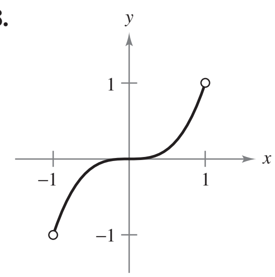


En los ejercicios 7 a 10, aproximar los puntos críticos de la función que se muestra en la gráfica. Determinar si la función tiene un máximo relativo, mínimo relativo, máximo absoluto, mínimo absoluto o ninguno de éstos en cada número crítico sobre el intervalo indicado.

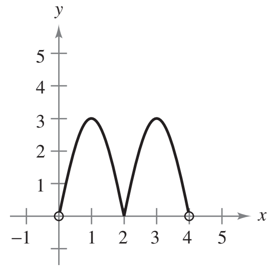
7.



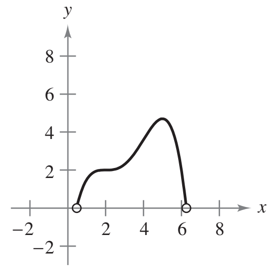
8.



9.



10.



En los ejercicios 11 a 16, determinar cualesquiera de los puntos críticos de la función.

11. $f(x) = x^3 - 3x^2$

12. $g(x) = x^4 - 4x^2$

13. $g(t) = t\sqrt{4 - t},\ t < 3$

14. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

15. $h(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$
$0 < x < 2\pi$

16. $f(\theta) = 2 \sec \theta + \tan \theta$
$0 < \theta < 2\pi$

En los ejercicios 17 a 36, ubicar los extremos absolutos de la función en el intervalo cerrado.

17. $f(x) = 3 - x,\ [-1, 2]$

18. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{3},\ [0, 5]$

19. $g(x) = x^2 - 2x,\ [0, 4]$

20. $h(x) = -x^2 + 3x - 5,\ [-2, 1]$

21. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2,\ [-1, 2]$

22. $f(x) = x^3 - 12x,\ [0, 4]$

23. $y = 3x^{2/3} - 2x,\ [-1, 1]$

24. $g(x) = \sqrt[3]{x},\ [-1, 1]$

25. $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + 3},\ [-1, 1]$

26. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1},\ [-2, 2]$

27. $h(s) = \dfrac{1}{s - 2},\ [0, 1]$

28. $h(t) = \dfrac{t}{t - 2},\ [3, 5]$

29. $y = 3 - |t - 3|,\ [-1, 5]$

30. $g(x) = \dfrac{1}{1 + |x + 1|},\ [-3, 3]$

31. $f(x) = [\![x]\!],\ [-2, 2]$

32. $h(x) = [\![2 - x]\!],\ [-2, 2]$

33. $f(x) = \cos \pi x,\ \left[0, \dfrac{1}{6}\right]$

34. $g(x) = \sec x,\ \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$

35. $y = 3 \cos x,\ [0, 2\pi]$

36. $y = \tan\left(\dfrac{\pi x}{8}\right),\ [0, 2]$

En los ejercicios 37 a 40, localizar los extremos absolutos de la función (si existen) sobre cada intervalo.

37. $f(x) = 2x - 3$
a) $[0, 2]$ *b)* $[0, 2)$
c) $(0, 2]$ *d)* $(0, 2)$

38. $f(x) = 5 - x$
a) $[1, 4]$ *b)* $[1, 4)$
c) $(1, 4]$ *d)* $(1, 4)$

39. $f(x) = x^2 - 2x$
a) $[-1, 2]$ *b)* $(1, 3]$
c) $(0, 2)$ *d)* $[1, 4)$

40. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
a) $[-2, 2]$ *b)* $[-2, 0)$
c) $(-2, 2)$ *d)* $[1, 2)$

En los ejercicios 41 a 46, dibujar la gráfica de la función. Luego localizar los extremos absolutos de la misma sobre el intervalo indicado.

41. $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & 0 \le x \le 1 \\ 4x^2, & 1 < x \le 3 \end{cases}, \quad [0, 3]$

42. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & 1 \le x < 3 \\ 2 - 3x, & 3 \le x \le 5 \end{cases}, \quad [1, 5]$

43. $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}, \quad (1, 4]$ **44.** $f(x) = \dfrac{2}{2 - x}, \quad [0, 2)$

45. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x + 1, \quad [-1, 3]$

46. $f(x) = \sqrt{x} + \cos\dfrac{x}{2}, \quad [0, 2\pi]$

En los ejercicios 47 y 48, *a*) usar un sistema de álgebra por computadora para representar la función y aproximar cualesquiera extremos absolutos sobre el intervalo dado. *b*) Utilizar una herramienta de graficación para determinar cualesquiera puntos críticos y emplear éstos para encontrar todos los extremos absolutos no ubicados en los puntos extremos o terminales. Comparar los resultados con los del apartado *a*).

47. $f(x) = 3.2x^5 + 5x^3 - 3.5x, \quad [0, 1]$

48. $f(x) = \dfrac{4}{3}x\sqrt{3 - x}, \quad [0, 3]$

En los ejercicios 49 y 50, utilizar un sistema de álgebra por computadora para encontrar el valor máximo de $|f''(x)|$ en el intervalo cerrado. (Este valor se usa en la estimación del error para la regla del trapecio, como se explica en la sección 4.6.)

49. $f(x) = \sqrt{1 + x^3}, \quad [0, 2]$ **50.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}, \quad \left[\dfrac{1}{2}, 3\right]$

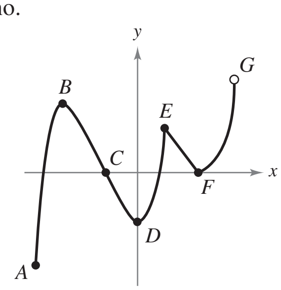
En los ejercicios 51 y 52, utilizar un sistema de álgebra por computadora para determinar el valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ en el intervalo cerrado. (Este valor se emplea en la estimación del error correspondiente a la regla de Simpson, como se explica en la sección 4.6.)

51. $f(x) = (x + 1)^{2/3}, \quad [0, 2]$ **52.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}, \quad [-1, 1]$

53. ***Redacción*** Escribir un párrafo breve explicando por qué una función definida sobre un intervalo abierto puede no tener un máximo o un mínimo. Ilustrar la explicación con un dibujo de la gráfica de tal función.

Para discusión

54. Decidir si cada uno de los puntos etiquetados es un máximo o un mínimo absoluto, un máximo o un mínimo relativo o ninguno.



Desarrollo de conceptos

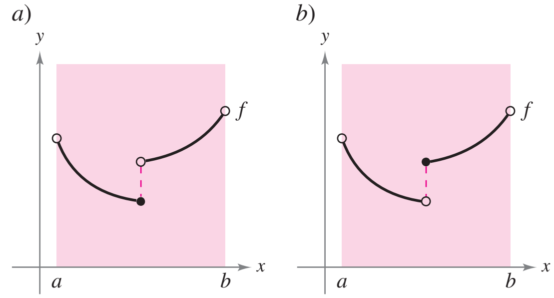
En los ejercicios 55 y 56, dibuje la gráfica de una función sobre el intervalo $[-2, 5]$ que tenga las siguientes características.

55. Máximo absoluto en $x = -2$, mínimo absoluto en $x = 1$, máximo relativo en $x = 3$.

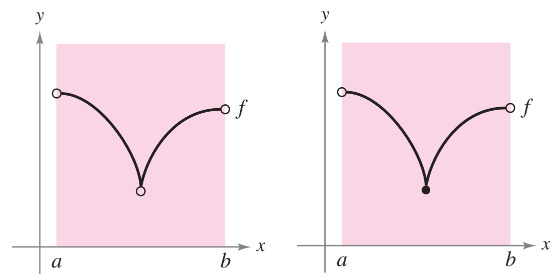
56. Mínimo relativo en $x = -1$, número crítico en $x = 0$, pero ningún extremo, máximo absoluto en $x = 2$, mínimo absoluto en $x = 5$.

En los ejercicios 57 a 60, determinar a partir de la gráfica si f tiene un mínimo en el intervalo abierto (a, b).

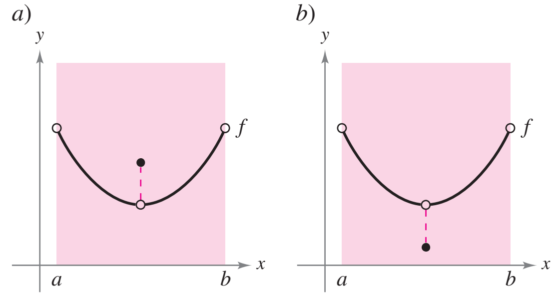
57. *a*) *b*)



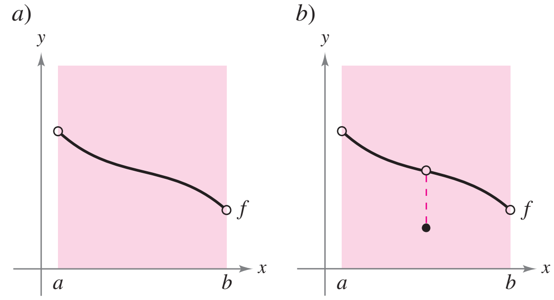
58. *a*) *b*)



59. *a*) *b*)



60. *a*) *b*)

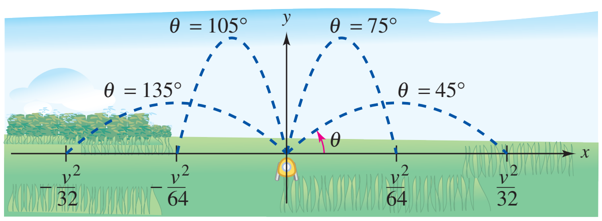


61. ***Potencia*** La fórmula para la salida de potencia P de una batería es $P = VI - RI^2$, donde V es la fuerza electromotriz en volts. R es la resistencia e I es la corriente. Determinar la corriente (medida en amperes) que corresponde a un valor máximo de P en una batería para la cual $V = 12$ volts y $R = 0.5$ ohms. Suponer que un fusible de 15 amperes enlaza la salida en el intervalo $0 \leq I \leq 15$. ¿Podría aumentarse la salida de potencia sustituyendo el fusible de 15 amperes por uno de 20 amperes? Explicar.

62. ***Aspersor giratorio para césped*** Un aspersor giratorio para césped se construye de manera tal que $d\theta/dt$ es constante, donde θ varía entre 45° y 135° (ver la figura). La distancia que el agua recorre horizontalmente es

$$x = \frac{v^2 \operatorname{sen} 2\theta}{32}, \quad 45° \leq \theta \leq 135°$$

donde v es la velocidad del agua. Determinar dx/dt y explicar por qué este aspersor no rocía de manera uniforme. ¿Qué parte del césped recibe la mayor cantidad de agua?



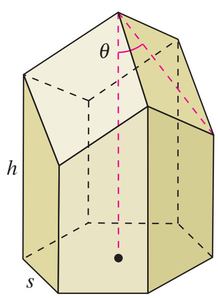
Aspersor de agua: $45° \leq \theta \leq 135°$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información acerca de "cálculo de un aspersor de riego para césped" consultar el artículo "Design of an Oscillating Sprinkler" de Bart Braden en *Mathematics Magazine*.

63. ***Panal*** El área de la superficie de una celda de un panal es

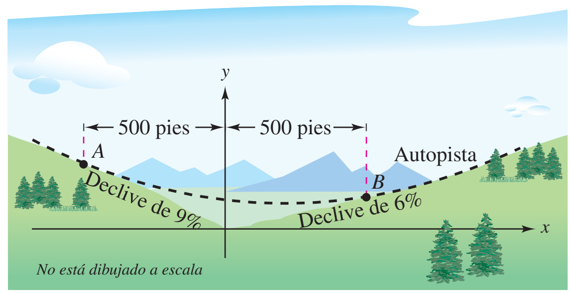
$$S = 6hs + \frac{3s^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3} - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$$

donde h y s son constantes positivas y θ es el ángulo al cual las caras superiores alcanzan la altura de la celda (ver la figura). Encontrar el ángulo θ $(\pi/6 \leq \theta \leq \pi/2)$ que minimiza el área superficial S.



PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información acerca de la estructura geométrica de una celda de un panal, consultar el artículo "The Design of Honeycombs" de Anthony L. Peressini en UMAP Módulo 502, publicado por COMAP, Inc., Suite 210, 57 Bedford Street, Lexington, MA.

64. ***Diseño de una autopista*** Para construir una autopista, es necesario rellenar una parte de un valle donde los declives (pendientes) son de 9 y 6% (ver la figura). La parte superior de la región rellenada tendrá la forma de un arco parabólico que es tangente a las dos pendientes en los puntos A y B. La distancia horizontal desde el punto A haste el eje y y desde el punto B hasta el eje y es de 500 pies en ambos casos.



a) Determinar las coordenadas de A y B.

b) Determinar una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, $-500 \leq x \leq 500$ que describa la parte superior de la región rellenada.

c) Construir una tabla en la que se indiquen las profundidades del relleno para $x = -500, -400, -300, -200, -100, 0, 100, 200, 300, 400$ y 500.

d) ¿Cuál será el punto más bajo de la autopista terminada? ¿Estará directamente sobre el punto donde se juntan los dos declives?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 65 a 68, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre la falsedad.**

65. El máximo de una función que es continua en un intervalo cerrado puede ocurrir en dos valores diferentes en el intervalo.

66. Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces debe tener un mínimo en el intervalo.

67. Si $x = c$ es un punto crítico de la función f, entonces también es un número crítico de la función $g(x) = f(x) + k$, donde k es una constante.

68. Si $x = c$ es un punto crítico de la función f, entonces también es un número crítico de la función $g(x) = f(x - k)$, donde k es una constante.

69. Sea la función f derivable en un intervalo I que contiene c. Si f tiene un valor máximo en $x = c$, demostrar que $-f$ tiene un valor mínimo en $x = c$.

70. Considerar la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$. Demostrar que f puede tener uno, dos o ningún punto crítico y dar un ejemplo de cada caso.

Preparación del examen Putnam

71. Determinar todos los números reales $a > 0$ para los que existe una función $f(x)$ continua y no negativa definida sobre $[0, a]$, con la propiedad de que la región definida por $R = \{(x, y) ; 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq f(x)\}$ tiene perímetro k y área k^2 para algún número real k.

3.2 El teorema de Rolle y el teorema del valor medio

- **Comprender el uso del teorema de Rolle.**
- **Comprender el uso del teorema del valor medio.**

Teorema de Rolle

El teorema del valor extremo (sección 3.1) establece que una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ debe tener tanto un mínimo como un máximo en el intervalo. Ambos valores, sin embargo, pueden ocurrir en los puntos extremos. El **teorema de Rolle**, nombrado así en honor del matemático francés Michel Rolle (1652-1719), proporciona las condiciones que garantizan la existencia de un valor extremo en el *interior* de un intervalo cerrado.

TEOREMA DE ROLLE

Michel Rolle, matemático francés, fue el primero en publicar en 1691 el teorema que lleva su nombre. Sin embargo, antes de ese tiempo Rolle fue uno de los más severos críticos del cálculo, señalando que éste proporcionaba resultados erróneos y se basaba en razonamientos infundados. Posteriormente Rolle se dio cuenta de la utilidad del cálculo.

EXPLORACIÓN

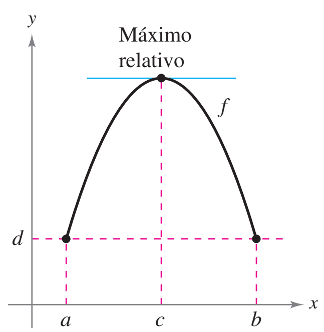
Valores extremos en un intervalo cerrado Dibujar un plano de coordenadas rectangular en un pedazo de papel. Marcar los puntos (1, 3) y (5, 3). Utilizando un lápiz o una pluma, dibujar la gráfica de una función derivable f que empieza en (1, 3) y termina en (5, 3). ¿Existe al menos un punto sobre la gráfica para el cual la derivada sea cero? ¿Sería posible dibujar la gráfica de manera que no hubiera un punto para el cual la derivada es cero? Explicar el razonamiento.

TEOREMA 3.3 TEOREMA DE ROLLE

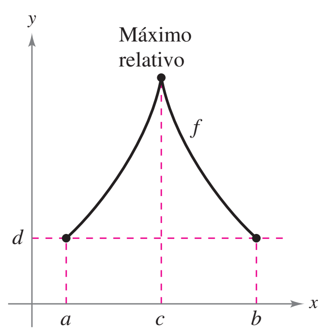
Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Si

$$f(a) = f(b)$$

entonces existe al menos un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.



a) f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)



b) f es continua en $[a, b]$

Figura 3.8

DEMOSTRACIÓN Sea $f(a) = d = f(b)$.

Caso 1: Si $f(x) = d$ para todo x en $[a, b]$, f es constante en el intervalo y, por el teorema 2.2, $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b).

Caso 2: Suponer que $f(x) > d$ para algún x en (a, b). Por el teorema del valor extremo, se sabe que f tiene un máximo en algún punto c en el intervalo. Además, como $f(c) > d$, este máximo no puede estar en los puntos terminales. De tal modo, f tiene un máximo en el intervalo *abierto* (a, b). Esto implica que $f(c)$ es un máximo *relativo* y por el teorema 3.2, c es un número crítico de f. Por último, como f es derivable en c, es posible concluir que $f'(c) = 0$.

Caso 3: Si $f(x) < d$ para algún x en (a, b), se puede utilizar un argumento similar al del caso 2, pero implicando el mínimo en vez del máximo.

De acuerdo con el teorema de Rolle, puede verse que si una función f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y si $f(a) = f(b)$, debe existir al menos un valor x entre a y b en el cual la gráfica de f tiene una tangente horizontal, como se muestra en la figura 3.8*a*. Si se elimina el requerimiento de derivabilidad del teorema de Rolle, f seguirá teniendo un número crítico en (a, b), pero quizá no produzca una tangente horizontal. Un caso de este tipo se presenta en la figura 3.8*b*.

EJEMPLO 1 Ilustración del teorema de Rolle

Encontrar las dos intersecciones en x de

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

y demostrar que $f'(x) = 0$ en algún punto entre las dos intersecciones en x.

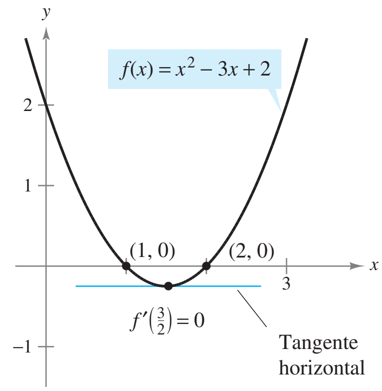
Solución Advertir que f es derivable en toda la recta real. Igualando a 0 $f(x)$ se obtiene

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad \text{Igualar } f(x) \text{ a cero.}$$
$$(x-1)(x-2) = 0. \qquad \text{Factor.}$$

De tal modo, $f(1) = f(2) = 0$, y de acuerdo con el teorema de Rolle se sabe que *existe* al menos una c en el intervalo $(1, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Para *determinar* una c de este tipo, es factible resolver la ecuación

$$f'(x) = 2x - 3 = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

y determinar que $f'(x) = 0$ cuando $x = \frac{3}{2}$. Advertir que el valor de x se encuentra en el intervalo abierto $(1, 2)$, como se indica en la figura 3.9.



El valor de x para el cual $f'(x) = 0$ está entre las dos intersecciones con el eje x
Figura 3.9

El teorema de Rolle establece que si f satisface las condiciones del teorema, debe haber *al menos* un punto entre a y b en el cual la derivada es 0. Es posible que exista más de un punto de estas características, como se muestra en el siguiente ejemplo.

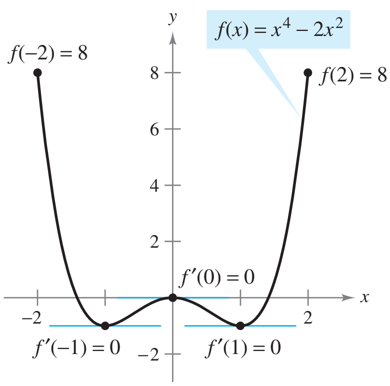
EJEMPLO 2 Ilustración del teorema de Rolle

Sea $f(x) = x^4 - 2x^2$. Determinar todos los valores de c en el intervalo $(-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

Solución Para empezar, advertir que la función satisface las condiciones del teorema de Rolle. Esto es, f es continua en el intervalo $[-2, 2]$ y derivable en el intervalo $(-2, 2)$. Además, debido a que $f(-2) = f(2) = 8$, es posible concluir que existe al menos una c en $(-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Igualando a 0 la derivada, se obtiene

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$
$$4x(x-1)(x+1) = 0 \qquad \text{Factor.}$$
$$x = 0, 1, -1. \qquad \text{Valores de } x \text{ para los cuales } f'(x) \text{ es igual a cero.}$$

De tal modo, en el intervalo $(-2, 2)$, la derivada es cero en valores diferentes de x, como se indica en la figura 3.10.



$f'(x) = 0$ para más de un valor de x en el intervalo $(-2, 2)$
Figura 3.10

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Una herramienta de graficación puede utilizarse para indicar si los puntos sobre las gráficas de los ejemplos 1 y 2 son mínimos o máximos relativos de las funciones. Sin embargo, al usar una herramienta de graficación, se debe tener presente que es posible obtener imágenes o gráficas equivocadas. Por ejemplo, usar una herramienta de graficación para representar

$$f(x) = 1 - (x-1)^2 - \frac{1}{1\,000(x-1)^{1/7} + 1}.$$

Con la mayoría de las ventanas de visión, parece ser que la función tiene un máximo de 1 cuando $x = 1$ (ver la figura 3.11). No obstante al evaluar la función en $x = 1$, se observará que $f(1) = 0$. Para determinar el comportamiento de esta función cerca de $x = 1$, es necesario examinar la gráfica de manera analítica para obtener la imagen completa.

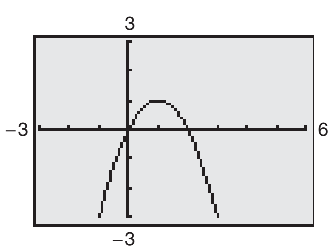


Figura 3.11

El teorema del valor medio

El teorema de Rolle puede utilizarse para probar otro teorema: el **teorema del valor medio**.

TEOREMA 3.4 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

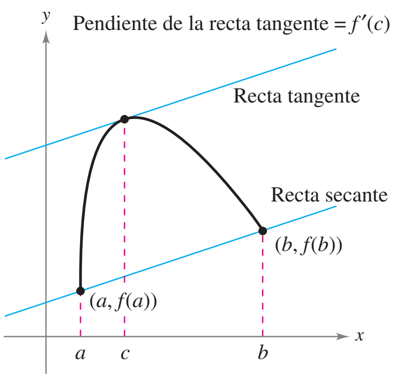


Figura 3.12

DEMOSTRACIÓN Hacemos refererencia a la figura 3.12. La ecuación de la recta secante que contiene los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$y = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) + f(a).$$

Sea $g(x)$ la diferencia entre $f(x)$ y y. Entonces

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - y \\ &= f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) - f(a). \end{aligned}$$

Evaluando g en a y b, se observa que $g(a) = 0 = g(b)$. Como f es continua en $[a, b]$ se sigue que g también es continua en $[a, b]$. Además, en virtud de que f es derivable, g también lo es, y resulta posible aplicar el teorema de Rolle a la función g. Así, existe un número c en (a, b) tal que $g'(c) = 0$, lo que implica que

$$\begin{aligned} 0 &= g'(c) \\ &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

De tal modo, existe un número c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

NOTA El término "medio" en el teorema del valor medio se refiere al ritmo de cambio medio (o promedio) de f en el intervalo $[a, b]$.

Mary Evans Picture Library

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813)
El teorema del valor medio fue demostrado por primera vez por el famoso matemático Joseph-Louis Lagrange. Nacido en Italia, Lagrange formó parte de la corte de Federico El Grande en Berlín durante 20 años. Después, se trasladó a Francia, donde se reunió con el emperador Napoleón Bonaparte, quien dijo lo siguiente: "Lagrange es la cúspide de las ciencias matemáticas".

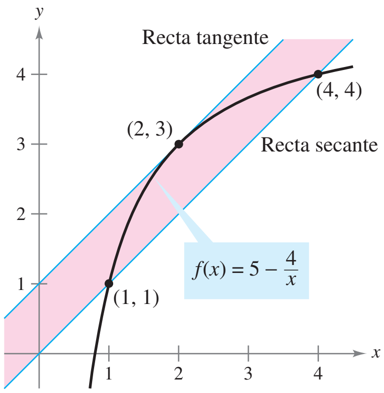
Aunque es posible utilizar el teorema del valor medio de manera directa en la solución de problemas, se usa más a menudo para demostrar otros teoremas. De hecho, algunas personas consideran que éste es el teorema más importante en el cálculo (se relaciona estrechamente con el teorema fundamental del cálculo explicado en la sección 4.4). Por ahora, es posible obtener una idea de la versatilidad de este teorema considerando los resultados planteados en los ejercicios 81 a 89 de esta sección.

El teorema del valor medio tiene implicaciones para ambas interpretaciones básicas de la derivada. Geométricamente, el teorema garantiza la existencia de una recta tangente que es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, como se indica en la figura 3.12. El ejemplo 3 ilustra esta interpretación geométrica del teorema del valor medio. En términos del ritmo o velocidad de cambio, el teorema del valor medio implica que debe haber un punto en el intervalo abierto (a, b) en el cual el ritmo o velocidad de cambio instantánea es igual al ritmo o velocidad de cambio promedio sobre el intervalo $[a, b]$. Esto se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 3 Determinación de una recta tangente

Dada $f(x) = 5 - (4/x)$, determinar todos los valores de c en el intervalo abierto $(1, 4)$ tales que

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}.$$



La recta tangente en (2, 3) es paralela a la línea secante que pasa por (1, 1) y (4, 4)
Figura 3.13

Solución La pendiente de la recta secante que pasa por $(1, f(1))$ y $(4, f(4))$ es

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 1}{4 - 1} = 1.$$

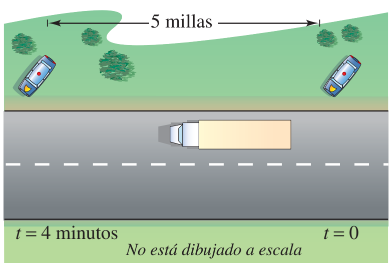
Nótese que f satisface las condiciones del teorema del valor medio. Esto es que f es continua en el intervalo $[1, 4]$ y derivable en el intervalo $(1, 4)$. Entonces, existe al menos un número c en $(1, 4)$ tal que $f'(c) = 1$. Resolviendo la ecuación $f'(x) = 1$, se obtiene

$$f'(x) = \frac{4}{x^2} = 1$$

que implica $x = \pm 2$. De tal modo, en el intervalo $(1, 4)$, se puede concluir que $c = 2$, como se indica en la figura 3.13.

EJEMPLO 4 Determinación del ritmo de cambio instantáneo

Dos patrullas estacionadas equipadas con radar se encuentran a 5 millas de distancia sobre una autopista, como se indica en la figura 3.14. Cuando pasa un camión al lado de la primera patrulla, la velocidad de éste se registra en un valor de 55 millas por hora. Cuatro minutos después, cuando el camión pasa al lado de la segunda patrulla, el registro de velocidad corresponde a 50 millas por hora. Demostrar que el camión ha excedido el límite de velocidad (de 55 millas por hora) en algún momento dentro del intervalo de los 4 minutos señalados.



En algún tiempo t, la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio durante los 4 minutos
Figura 3.14

Solución Sea $t = 0$ el tiempo (en horas) cuando el camión pasa al lado de la primera patrulla. El tiempo en el que el camión pasa al lado de la segunda patrulla es

$$t = \frac{4}{60} = \frac{1}{15} \text{ hora.}$$

Si $s(t)$ representa la distancia (en millas) recorridas por el camión, se tiene que $s(0) = 0$ y $s(\frac{1}{15}) = 5$. Por tanto, la velocidad promedio del camión sobre el trecho de cinco millas de autopista es

$$\begin{aligned}\text{Velocidad promedio} &= \frac{s(1/15) - s(0)}{(1/15) - 0}\\ &= \frac{5}{1/15} = 75 \text{ millas por hora.}\end{aligned}$$

Suponiendo que la función de posición es derivable, es posible aplicar el teorema del valor medio para concluir que el camión debe haber estado viajando a razón de 75 millas por hora en algún momento durante los 4 minutos.

Una forma alternativa útil del teorema del valor medio es como sigue: si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(c).$$

Forma alternativa del teorema del valor medio.

NOTA Al realizar los ejercicios de esta sección tener presente que las funciones polinomiales, las racionales y las trigonométricas son derivables en todos los puntos en sus dominios.

3.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, explicar por qué el teorema de Rolle no se aplica a la función aun cuando existan a y b tales que $f(a) = f(b)$.

1. $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$, $[-1, 1]$

2. $f(x) = \cot \frac{x}{2}$, $[\pi, 3\pi]$

3. $f(x) = 1 - |x - 1|$, $[0, 2]$

4. $f(x) = \sqrt{(2 - x^{2/3})^3}$, $[-1, 1]$

En los ejercicios 5 a 8, determinar dos intersecciones con el eje x de la función f y demostrar que $f'(x) = 0$ en algún punto entre las dos intersecciones.

5. $f(x) = x^2 - x - 2$

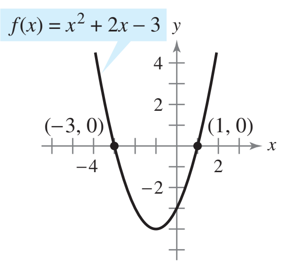
6. $f(x) = x(x - 3)$

7. $f(x) = x\sqrt{x + 4}$

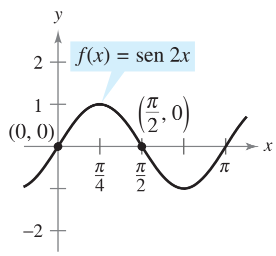
8. $f(x) = -3x\sqrt{x + 1}$

Teorema de Rolle **En los ejercicios 9 y 10, se muestra la gráfica de f. Aplicar el teorema de Rolle y determinar todos los valores de c tales que $f'(c) = 0$ en algún punto entre las intersecciones marcadas.**

9.



10.



En los ejercicios 11 a 24, determinar si es posible aplicar el teorema de Rolle a f en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si se puede aplicar el teorema de Rolle, determinar todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b) tales que $f'(c) = 0$. Si no se puede aplicar, explicar por qué no.

11. $f(x) = -x^2 + 3x$, $[0, 3]$

12. $f(x) = x^2 - 5x + 4$, $[1, 4]$

13. $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, $[1, 3]$

14. $f(x) = (x - 3)(x + 1)^2$, $[-1, 3]$

15. $f(x) = x^{2/3} - 1$, $[-8, 8]$

16. $f(x) = 3 - |x - 3|$, $[0, 6]$

17. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$, $[-1, 3]$

18. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$, $[-1, 1]$

19. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[0, 2\pi]$

20. $f(x) = \cos x$, $[0, 2\pi]$

21. $f(x) = \dfrac{6x}{\pi} - 4 \operatorname{sen}^2 x$, $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$

22. $f(x) = \cos 2x$, $[-\pi, \pi]$

23. $f(x) = \tan x$, $[0, \pi]$

24. $f(x) = \sec x$, $[\pi, 2\pi]$

En los ejercicios 25 a 28, utilizar una herramienta de graficación para representar la función en el intervalo cerrado $[a, b]$. Determinar si el teorema de Rolle puede aplicarse a f en el intervalo y, si es así, encontrar todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b) tales que $f'(c) = 0$.

25. $f(x) = |x| - 1$, $[-1, 1]$

26. $f(x) = x - x^{1/3}$, $[0, 1]$

27. $f(x) = x - \tan \pi x$, $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$

28. $f(x) = \dfrac{x}{2} - \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{6}$, $[-1, 0]$

29. ***Movimiento vertical*** La altura de una pelota t segundos después de que se lanzó hacia arriba a partir de una altura de 6 pies y con una velocidad inicial de 48 pies por segundo es $f(t) = -16t^2 + 48t + 6$.

a) Verificar que $f(1) = f(2)$.

b) De acuerdo con el teorema de Rolle, ¿cuál debe ser la velocidad en algún tiempo en el intervalo (1, 2)? Determinar ese tiempo.

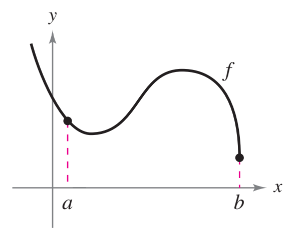
30. ***Costos de nuevos pedidos*** El costo de pedido y transporte C para componentes utilizados en un proceso de manufactura se aproxima mediante $C(x) = 10\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x + 3}\right)$, donde C se mide en miles de dólares y x es el tamaño del pedido en cientos.

a) Verificar que $C(3) = C(6)$.

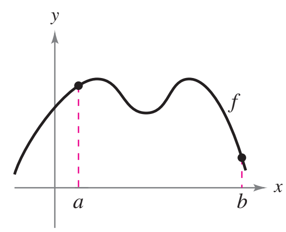
b) De acuerdo con el teorema de Rolle, el ritmo de cambio del costo debe ser 0 para algún tamaño de pedido en el intervalo (3, 6). Determinar ese tamaño de pedido.

En los ejercicios 31 y 32, copiar la gráfica y dibujar la recta secante a la misma a través de los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Después dibujar cualquier recta tangente a la gráfica para cada valor de c garantizada por el teorema del valor medio.

31.

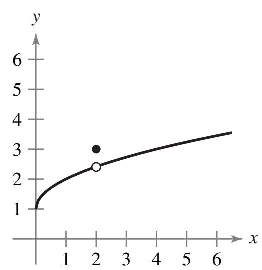


32.

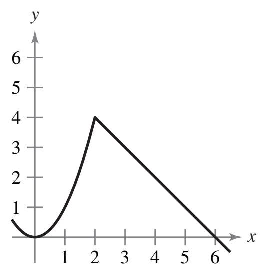


Redacción **En los ejercicios 33 a 36 explicar por qué el teorema de valor medio no se aplica a la función f en el intervalo $[0, 6]$.**

33.



34.



35. $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

36. $f(x) = |x - 3|$

37. ***Teorema del valor medio*** Considerar la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 5$. *a*) Determinar la ecuación de la recta secante que une los puntos $(-1, 4)$ y $(2, 1)$. *b*) Utilizar el teorema del valor medio para determinar un punto c en el intervalo $(-1, 2)$ tal que la recta tangente en c sea paralela a la recta secante. *c*) Encontrar la ecuación de la recta tangente que pasa por c. *d*) Utilizar después una herramienta de graficación para representar f, la recta secante y la recta tangente.

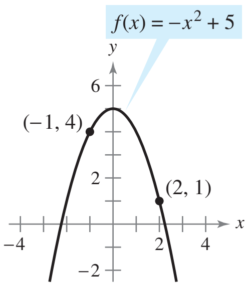


Figura para 37

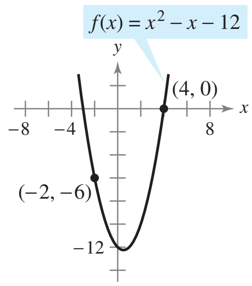


Figura para 38

38. ***Teorema del valor medio*** Considerar la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x - 12$. *a*). Encontrar la ecuación de la recta secante que une los puntos $(-2, -6)$ y $(4, 0)$. *b*) Emplear el teorema del valor medio para determinar un punto c en el intervalo $(-2, 4)$ tal que la recta tangente en c sea paralela a la recta secante. *c*) Determinar la ecuación de la recta tangente que pasa por c. *d*) Utilizar después una herramienta de graficación para representar f, la recta secante y la recta tangente.

En los ejercicios 39 a 48, determinar si el teorema del valor medio puede aplicarse a f sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Si el teorema del valor medio puede aplicarse, encontrar todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Si no puede aplicarse explicar por qué no.

39. $f(x) = x^2, \quad [-2, 1]$

40. $f(x) = x^3, \quad [0, 1]$

41. $f(x) = x^3 + 2x, \quad [-1, 1]$

42. $f(x) = x^4 - 8x, \quad [0, 2]$

43. $f(x) = x^{2/3}, \quad [0, 1]$

44. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x}, \quad [-1, 2]$

45. $f(x) = |2x + 1|, \quad [-1, 3]$

46. $f(x) = \sqrt{2 - x}, \quad [-7, 2]$

47. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad [0, \pi]$

48. $f(x) = \cos x + \tan x, \quad [0, \pi]$

En los ejercicios 49 a 52, utilizar una herramienta de graficación para *a*) representar la función f sobre el intervalo, *b*) encontrar y representar la recta secante que pasa por los puntos sobre la gráfica de f en los puntos terminales del intervalo dado y *c*) encontrar y representar cualesquiera rectas tangentes a la gráfica de f que sean paralelas a la recta secante.

49. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

50. $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x, \quad [-\pi, \pi]$

51. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [1, 9]$

52. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2, \quad [0, 6]$

53. ***Movimiento vertical*** La altura de un objeto tres segundos después de que se deja caer desde una altura de 300 metros es $s(t) = -4.9t^2 + 300$.

a) Encontrar la velocidad promedio del objeto durante los primeros tres segundos.

b) Utilizar el teorema del valor medio para verificar que en algún momento durante los primeros tres segundos de la caída la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio. Determinar ese momento.

54. ***Ventas*** Una compañía introduce un nuevo producto para el cual el número de unidades vendidas S es

$$S(t) = 200\left(5 - \frac{9}{2 + t}\right)$$

donde t es el tiempo en meses.

a) Encontrar el valor promedio de cambio de $S(t)$ durante el primer año.

b) ¿Durante qué mes del primer año $S'(t)$ es igual al valor promedio de cambio?

Desarrollo de conceptos

55. Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si existe c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$, ¿se concluye que $f(a) = f(b)$? Explicar.

56. Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Además, suponer que $f(a) = f(b)$ y que c es un número real en el intervalo tal que $f'(c) = 0$. Encontrar un intervalo para la función g sobre la cual pueda aplicarse el teorema de Rolle y determinar el punto crítico correspondiente de g (k es una constante).

a) $g(x) = f(x) + k$ *b*) $g(x) = f(x - k)$

c) $g(x) = f(kx)$

57. La función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 - x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

es derivable en $(0, 1)$ y satisface $f(0) = f(1)$. Sin embargo, su derivada nunca es cero en $(0, 1)$. ¿Contradice lo anterior al teorema de Rolle? Explicar.

58. ¿Es posible encontrar una función f tal que $f(-2) = -2$, $f(2) = 6$ y $f'(x) < 1$ para toda x. ¿Por qué sí o por qué no?

59. ***Velocidad*** Un avión despega a las 2:00 p.m. en un vuelo de 2 500 millas. El avión llega a su destino a las 7:30 p.m. Explicar por qué hay al menos dos momentos durante el vuelo en los que la velocidad del avión es de 400 millas por hora.

60. ***Temperatura*** Cuando se saca un objeto del horno y se pone a temperatura ambiente constante de 90° F la temperatura de su núcleo es de 1 500° F. Cinco horas después la temperatura del núcleo corresponde a 390° F. Explicar por qué debe existir un momento (o instante) en el intervalo en el que la temperatura disminuye a un ritmo o tasa de 222° F por hora.

61. ***Velocidad*** Dos ciclistas empiezan una carrera a las 8:00 a.m. Ambos terminan la carrera 2 horas y 15 minutos después. Demostrar en qué momento de la carrera los ciclistas viajan a la misma velocidad.

62. ***Aceleración*** A las 9:13 a.m., un automóvil deportivo viaja a 35 millas por hora. Dos minutos después se desplaza a 85 millas por hora. Demostrar que en algún momento durante este intervalo, la aceleración del automóvil es exactamente igual a 1 500 millas por hora al cuadrado.

63. Considerar la función $f(x) = 3\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar f y f'.

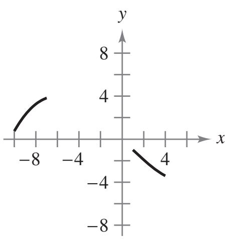
b) ¿Es f una función continua? ¿Es f' una función continua?

c) ¿Se aplica el teorema de Rolle al intervalo $[-1, 1]$? ¿Se aplica en el intervalo $[1, 2]$? Explicar.

d) Evaluar si es posible, $\lim_{x\to 3^-} f'(x)$ y $\lim_{x\to 3^+} f'(x)$.

Para discusión

64. ***Razonamiento gráfico*** La figura muestra dos partes de la gráfica de una función derivable continua f en $[-10, 4]$. La derivada f' también es continua.



a) Explicar por qué f debe tener al menos un cero en $[-10, 4]$.

b) Explicar por qué f' debe tener también al menos un cero en el intervalo $[-10, 4]$. ¿Cómo se llaman estos ceros?

c) Realizar un posible dibujo de la función con un cero con f' en el intervalo $[-10, 4]$.

d) Realizar un posible dibujo de la función con dos ceros de f' en el intervalo $[-10, 4]$.

e) ¿Fueron necesarias las condiciones de continuidad de f y f' para efectuar las partes de la *a*) a la *d*)? Explicar.

Para pensar **En los ejercicios 65 y 66, dibujar la gráfica de una función arbitraria f que satisface la condición dada pero que no cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[-5, 5]$.**

65. f es continua en $[-5, 5]$.

66. f no es continua en $[-5, 5]$.

En los ejercicios 67 a 70, usar el teorema del valor intermedio y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación tiene exactamente una solución real.

67. $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$

68. $2x^5 + 7x - 1 = 0$

69. $3x + 1 - \operatorname{sen} x = 0$

70. $2x - 2 - \cos x = 0$

71. Determinar los valores a, b y c tales que la función f satisfaga la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 3]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ ax + b, & 0 < x \leq 1 \\ x^2 + 4x + c, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

72. Determinar los valores a, b, c y d de manera que la función f satisfaga la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 2]$.

$$f(x) = \begin{cases} a, & x = -1 \\ 2, & -1 < x \leq 0 \\ bx^2 + c, & 0 < x \leq 1 \\ dx + 4, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 73 a 76, encontrar una función f que tiene la derivada $f'(x)$ y cuya gráfica pasa por el punto dado. Explicar el razonamiento.**

73. $f'(x) = 0$, $(2, 5)$

74. $f'(x) = 4$, $(0, 1)$

75. $f'(x) = 2x$, $(1, 0)$

76. $f'(x) = 2x + 3$, $(1, 0)$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 77 a 80, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

77. El teorema del valor medio puede aplicarse a $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[-1, 1]$.

78. Si la gráfica de una función tiene tres intersecciones con el eje x, entonces debe tener al menos dos puntos en los cuales su recta tangente es horizontal.

79. Si la gráfica de una función polinomial tiene tres intersecciones con el eje x, entonces debe tener al menos dos puntos en los cuales su recta tangente es horizontal.

80. Si $f'(x) = 0$ para todo x en el dominio de f, entonces f es una función constante.

81. Demostrar que si $a > 0$ y n es cualquier entero positivo, entonces la función polinomial $p(x) = x^{2n+1} + ax + b$ no puede tener dos raíces reales.

82. Demostrar que si $f'(x) = 0$ para todo x en el intervalo (a, b), entonces f es constante en (a, b).

83. Sea $p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Demostrar que para cualquier intervalo $[a, b]$, el valor c garantizado por el teorema del valor medio es el punto medio del intervalo.

84. *a*) Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^3 + x^2 + 3x + 2$. Entonces $f(-1) = g(-1)$ y $f(2) = g(2)$. Demostrar que hay al menos un valor c en el intervalo $(-1, 2)$ donde la recta tangente a f en $(c, f(c))$ es paralela a la recta tangente g en $(c, g(c))$. Identificar c.

b) Sea f y g la función derivable en $[a, b]$ donde $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$. Demostrar que hay al menos un valor c en el intervalo (a, b) donde la recta tangente f en $(c, f(c))$ es paralela a la recta tangente a g en $(c, g(c))$.

85. Demostrar que si f es derivable en $(-\infty, \infty)$ y $f'(x) < 1$ para todo número real, entonces f tiene al menos un punto fijo. Un punto fijo para una función f es un número real c tal que $f(c) = c$.

86. Usar el resultado del ejercicio 85 para demostrar que $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$ tiene al menos un punto fijo.

87. Demostrar que $|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$ para toda a y b.

88. Demostrar que $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leq |a - b|$ para toda a y b.

89. Sea $0 < a < b$. Utilizar el teorema del valor medio para demostrar que

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b - a}{2\sqrt{a}}.$$

3.3 Funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada

- **Determinar los intervalos sobre los cuales una función es creciente o decreciente.**
- **Aplicar el criterio de la primera derivada para determinar los extremos relativos de una función.**

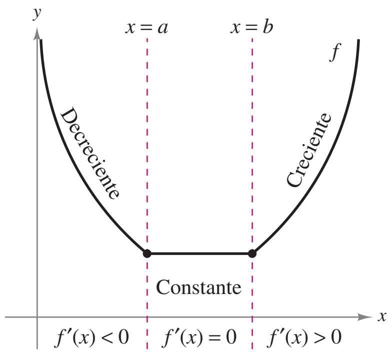
Funciones crecientes y decrecientes

En esta sección se verá cómo se pueden utilizar las derivadas para *clasificar* extremos relativos ya sea como mínimos o como máximos relativos. En primer término, es importante definir las funciones crecientes y decrecientes.

DEFINICIÓN DE FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Una función f es **creciente** sobre un intervalo si para cualesquiera dos números x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función f es **decreciente** sobre un intervalo si para cualesquiera dos números x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$.



La derivada se relaciona con la pendiente de una función
Figura 3.15

Una función es creciente si, *cuando x se mueve hacia la derecha*, su gráfica asciende, y es decreciente si su gráfica desciende. Por ejemplo, la función en la figura 3.15 es decreciente en el intervalo $(-\infty, a)$, es constante en el intervalo (a, b) y creciente en el intervalo (b, ∞). Como se muestra en el teorema 3.5, una derivada positiva implica que la función es creciente; una derivada negativa implica que la función es decreciente, y una derivada cero en todo el intervalo implica que la función es constante en ese intervalo.

TEOREMA 3.5 CRITERIO PARA LAS FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Sea f una función que es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b).

1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.
2. Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b) entonces f es decreciente en $[a, b]$.
3. Si $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b) entonces f es constante en $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN Para probar el primer caso, supongamos que $f'(x) > 0$ para todo x en el intervalo (a, b) y sean $x_1 < x_2$ cualesquiera dos puntos en el intervalo. Mediante el teorema del valor medio, se sabe que existe un número c tal que $x_1 < c < x_2$, y

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $f'(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$, se sabe que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

lo cual implica que $f(x_1) < f(x_2)$. De tal modo, f es creciente en el intervalo. El segundo caso tiene una demostración similar (ver el ejercicio 104), y el tercer caso se dio en el ejercicio 82 en la sección 3.2.

NOTA Las conclusiones en los primeros dos casos del teorema 3.5 son válidas incluso si $f'(x) = 0$ en un número finito de valores de x en (a, b).

EJEMPLO 1 Intervalos sobre los cuales f es creciente y decreciente

Determinar los intervalos abiertos sobre los cuales $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ es creciente o decreciente.

Solución Nótese que f es derivable en toda la recta de los números reales. Para determinar los puntos críticos de f, igualar a cero $f'(x)$.

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 0 \qquad \text{Derivar e igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

$$3(x)(x - 1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x = 0, 1 \qquad \text{Puntos críticos.}$$

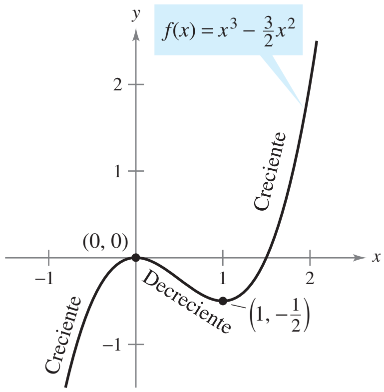


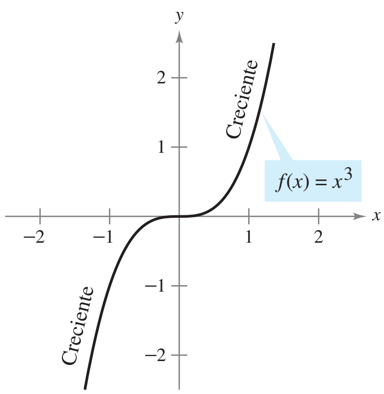
Figura 3.16

Como no hay puntos para los cuales f' no exista, es posible concluir que $x = 0$ y $x = 1$ son los únicos puntos críticos. La tabla siguiente resume la prueba de los tres intervalos determinados por estos dos puntos críticos.

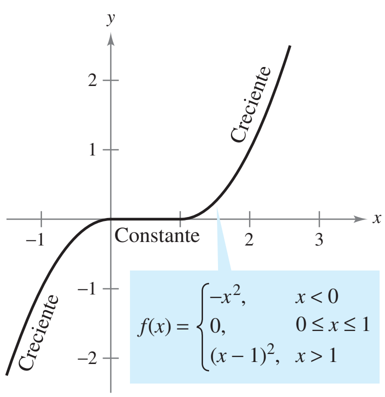
Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Signo de $f'(x)$	$f'(-1) = 6 > 0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = 6 > 0$
Conclusión	Creciente	Decreciente	Creciente

De tal modo, f es creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(0, 1)$, como se indica en la figura 3.16.

El ejemplo 1 muestra cómo determinar intervalos sobre los cuales una función es creciente o decreciente. La guía siguiente resume los pasos que se siguen en el ejemplo.



a) Función estrictamente monótona



b) No estrictamente monótona
Figura 3.17

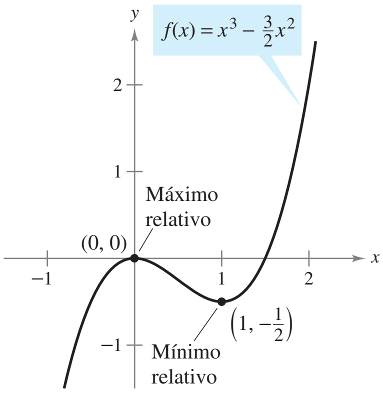
Estrategias para determinar los intervalos en los que una función es creciente o decreciente

Sea f continua en el intervalo (a, b). Para encontrar los intervalos abiertos sobre los cuales f es creciente o decreciente, hay que seguir los siguientes pasos.

1. Localizar los puntos críticos de f en (a, b), y utilizarlos para determinar intervalos de prueba.
2. Determinar el signo de $f'(x)$ en un valor de prueba en cada uno de los intervalos.
3. Recurrir al teorema 3.5 para determinar si f es creciente o decreciente para cada intervalo.

Estas estrategias también son válidas si el intervalo (a, b) se sustituye por un intervalo de la forma $(-\infty, b)$, (a, ∞) o $(-\infty, \infty)$.

Una función es **estrictamente monótona** sobre un intervalo si es creciente o decreciente en todo el intervalo. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es estrictamente monótona en toda la recta de los números reales porque es creciente siempre sobre ella, como se indica en la figura 3.17*a*. La función que se muestra en la figura 3.17*b* no es estrictamente monótona en toda la recta de los números reales porque es constante en el intervalo [0, 1].



Extremos relativos de f
Figura 3.18

Criterio de la primera derivada

Una vez que se han determinado los intervalos de crecimiento o decrecimiento, es fácil localizar los extremos relativos de la función. Por ejemplo, en la figura 3.18 (del ejemplo 1), la función

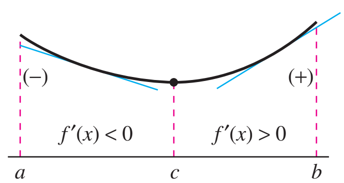
$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

tiene un máximo relativo en el punto (0, 0) porque f es creciente inmediatamente a la izquierda de $x = 0$ y decreciente inmediatamente a la derecha de $x = 0$. De manera similar, f tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -\frac{1}{2})$ debido a que f decrece de inmediato a la izquierda de $x = 1$ y crece de inmediato a la derecha de $x = 1$. El siguiente teorema, denominado prueba o criterio de la primera derivada, precisa más esta observación.

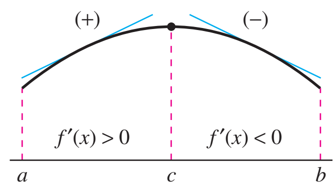
TEOREMA 3.6 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Sea c un punto crítico de una función f que es continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en el intervalo, excepto posiblemente en c, entonces $f(c)$ puede clasificarse como sigue.

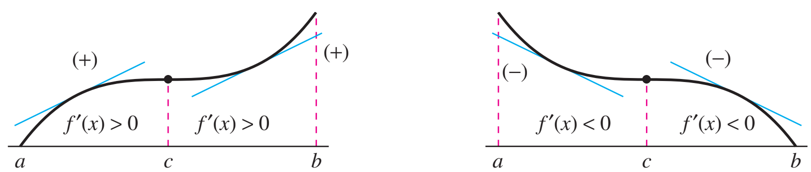
1. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un *mínimo relativo* en $(c, f(c))$.
2. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un *máximo relativo* en $(c, f(c))$.
3. Si $f'(x)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo.



Mínimo relativo



Máximo relativo



Ni mínimo relativo ni máximo relativo

DEMOSTRACIÓN Supóngase que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c. Entonces ahí existen a y b en I tales que

$$f'(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ en } (a, c)$$

y

$$f'(x) > 0 \text{ para todo } x \text{ en } (c, b).$$

Por el teorema 3.5, f es decreciente en $[a, c]$ y creciente en $[c, b]$. De tal modo, $f(c)$ es un mínimo de f en el intervalo abierto (a, b) y, en consecuencia, un mínimo relativo de f. Esto demuestra el primer caso del teorema. El segundo caso puede demostrarse de una manera similar (ver el ejercicio 105).

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio de la primera derivada

Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0, 2\pi)$.

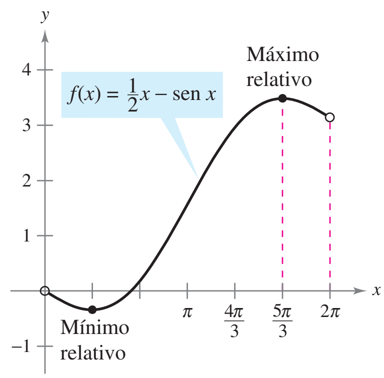
Solución Obsérvese que f es continua en el intervalo $(0, 2\pi)$. Para determinar los puntos críticos de f en este intervalo, hacer $f'(x)$ igual a 0.

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \qquad \text{Puntos críticos.}$$

Debido a que f' existe en todos los puntos, se puede concluir que $x = \pi/3$ y $x = 5\pi/3$ son los únicos puntos críticos. La tabla resume valores prueba en cada uno de los tres intervalos de prueba determinados por estos dos puntos críticos.



Ocurre un mínimo relativo donde f cambia de decreciente a creciente, y un máximo relativo donde f cambia de creciente a decreciente
Figura 3.19

Intervalo	$0 < x < \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$
Valor de prueba	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \pi$	$x = \frac{7\pi}{4}$
Signo de $f'(x)$	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$	$f'(\pi) > 0$	$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right) < 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente

Aplicando el criterio de la primera derivada, es posible concluir que f tiene un mínimo relativo en el punto donde

$$x = \frac{\pi}{3} \qquad \text{Valor de } x \text{ donde ocurre el mínimo relativo.}$$

y un máximo relativo en el punto en el que

$$x = \frac{5\pi}{3} \qquad \text{Valor de } x \text{ donde ocurre el máximo relativo.}$$

como se muestra en la figura 3.19.

EXPLORACIÓN

Comparación de los enfoques gráfico y analítico De la sección 3.2, se sabe que una herramienta de graficación, por sí misma, puede producir información equivocada acerca de los extremos relativos de una gráfica. Sin embargo, *utilizada en conjunción con un enfoque analítico* una herramienta de graficación tiene la posibilidad de ofrecer una buena forma de reforzar sus conclusiones. Recurra a una herramienta de graficación para representar la función del ejemplo 2. Después utilizar las características *zoom* y *trace* para estimar los extremos relativos. ¿Cómo son de precisas las aproximaciones gráficas que se obtuvieron?

Nótese que en los ejemplos 1 y 2 las funciones dadas son derivables en toda la recta real. Para tales funciones, los únicos puntos críticos son aquellos para los cuales $f'(x) = 0$. El ejemplo 3 se relaciona con una función que tiene dos tipos de puntos críticos: aquellos para los cuales $f'(x) = 0$ y aquellos para los cuales f no es derivable.

EJEMPLO 3 Aplicación del criterio de la primera derivada

Encontrar los extremos relativos de

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}.$$

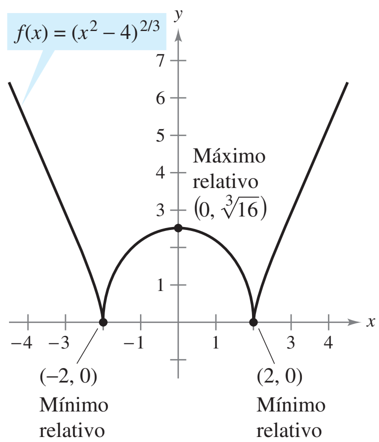
Solución Empezar observando que f es continua en toda la recta real. La derivada de f

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3}(2x) \qquad \text{Regla de la potencia general.}$$

$$= \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}} \qquad \text{Simplificar.}$$

es 0 cuando $x = 0$ y no existe cuando $x = \pm 2$. De tal modo, los puntos críticos son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$. La tabla resume los valores prueba de cuatro intervalos determinados por estos puntos críticos.

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente



Se puede aplicar el criterio de la primera derivada para encontrar los extremos relativos
Figura 3.20

Aplicando el criterio de la primera derivada, se puede concluir que f tiene un mínimo relativo en el punto $(-2, 0)$, un máximo relativo en el punto $(0, \sqrt[3]{16})$, y otro mínimo relativo en el punto $(2, 0)$, como se ilustra en la figura 3.20.

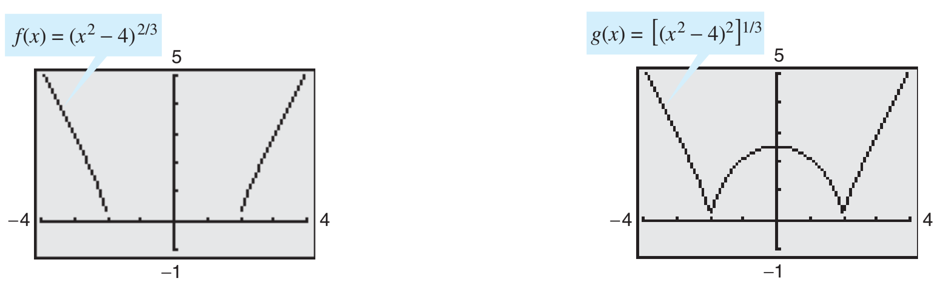
CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Cuando se utiliza una herramienta de graficación para representar una función que incluya radicales o exponentes racionales, hay que cerciorarse de entender la forma en que la herramienta de graficación evalúa las expresiones radicales. Por ejemplo, aun cuando

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$$

y

$$g(x) = [(x^2 - 4)^2]^{1/3}$$

son los mismos algebraicamente, algunas herramientas de graficación establecen una distinción entre estas dos funciones. ¿Cuál de las gráficas que se muestran en la figura 3.21 es incorrecta? ¿Por qué la herramienta de graficación produce una gráfica incorrecta?



¿Cuál de las gráficas es incorrecta?
Figura 3.21

Al usar el criterio de la primera derivada, es necesario asegurarse de que se considere el dominio de la función. Por ejemplo, en el siguiente ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

no está definida cuando $x = 0$. Este valor de x debe utilizarse con los puntos críticos para determinar los intervalos de prueba.

EJEMPLO 4 Aplicación del criterio de la primera derivada

Determinar los extremos relativos de $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$.

Solución

$$f(x) = x^2 + x^{-2} \qquad \text{Reescribir la función original.}$$
$$f'(x) = 2x - 2x^{-3} \qquad \text{Derivar.}$$
$$= 2x - \frac{2}{x^3} \qquad \text{Reescribir con exponente positivo.}$$
$$= \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} \qquad \text{Simplificar.}$$
$$= \frac{2(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)}{x^3} \qquad \text{Factorizar.}$$

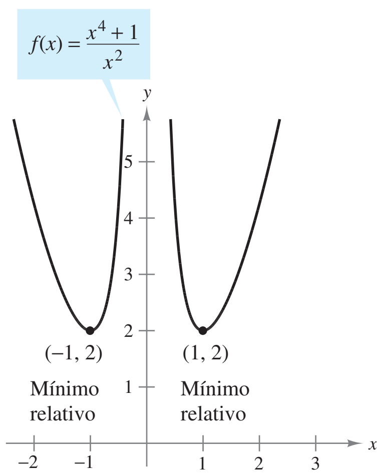
De tal modo, $f'(x)$ es cero en $x = \pm 1$. Además, como $x = 0$ no está en el dominio de f, es necesario utilizar este valor de x junto con los puntos críticos para determinar los intervalos prueba.

$$x = \pm 1 \qquad \text{Puntos críticos, } f'(\pm 1) = 0.$$
$$x = 0 \qquad \text{Cero no está en el dominio de } f.$$

La tabla resume los valores prueba de los cuatro intervalos determinados por estos tres valores de x.

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -2$	$x = -\frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Signo de $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	$f'\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$	$f'(2) > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

Aplicando el criterio de la primera derivada, se puede concluir que f tiene un mínimo relativo en el punto $(-1, 2)$ y otro en el punto $(1, 2)$, como se muestra en la figura 3.22.



Valores de x que no están en el dominio de f, así como los puntos críticos, determinan los intervalos prueba de f'

Figura 3.22

TECNOLOGÍA El paso más difícil al aplicar el criterio de la primera derivada es determinar los valores para los cuales la derivada es igual a 0. Por ejemplo, los valores de x para los cuales la derivada de

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$$

es igual a cero son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Si se tiene acceso a tecnología que puede efectuar derivación simbólica y resolver ecuaciones, utilizarla para aplicar el criterio de la primera derivada a esta función.

Si un proyectil se lanza desde el nivel del suelo y se ignora la resistencia del aire, el objeto viajará más lejos con un ángulo inicial de 45°. Pero, si el proyectil se lanza desde un punto sobre el nivel del suelo, el ángulo que produce una distancia máxima horizontal no es 45° (ver el ejemplo 5).

EJEMPLO 5 La trayectoria de un proyectil

Ignorando la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil que se lanza a un ángulo θ es

$$y = \frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2}x^2 + (\tan \theta)x + h, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

donde y es la altura, x es la distancia horizontal, g es la aceleración debida a la gravedad, v_0 es la velocidad inicial y h es la altura inicial. (Esta ecuación se obtuvo en la sección 12.3.) Sea $g = -32$ pies por segundo, $v_0 = 24$ pies por segundo y $h = 9$ pies por segundo. ¿Qué valor de θ producirá una máxima distancia horizontal?

Solución Para encontrar la distancia que el proyectil recorre, sea $y = 0$, y utilizar la fórmula cuadrática para resolver con respecto a x.

$$\frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2}x^2 + (\tan \theta)x + h = 0$$

$$\frac{-32 \sec^2 \theta}{2(24^2)}x^2 + (\tan \theta)x + 9 = 0$$

$$-\frac{\sec^2 \theta}{36}x^2 + (\tan \theta)x + 9 = 0$$

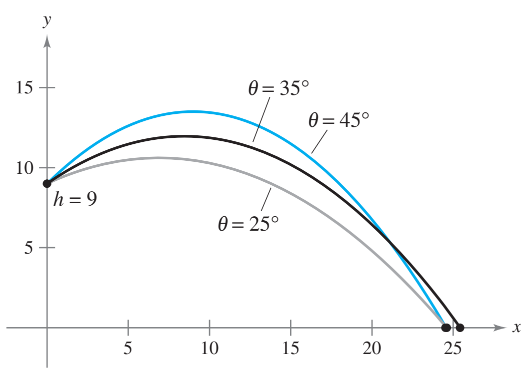
$$x = \frac{-\tan \theta \pm \sqrt{\tan^2 \theta + \sec^2 \theta}}{-\sec^2 \theta/18}$$

$$x = 18 \cos \theta\left(\operatorname{sen} \theta + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + 1}\right), \quad x \ge 0$$

En este punto, se necesita determinar el valor de θ que produce un valor máximo de x. La aplicación del criterio de la primera derivada en forma manual resultaría tediosa. Sin embargo, el uso de tecnología para resolver la ecuación $dx/d\theta = 0$ elimina la mayoría de los cálculos engorrosos. El resultado es que el valor máximo de x ocurre cuando

$$\theta \approx 0.61548 \text{ radianes, o } 35.3°.$$

Esta conclusión se refuerza dibujando la trayectoria del proyectil para diferentes valores de θ como se indica en la figura 3.23. De las tres trayectorias indicadas, notar que la distancia recorrida es mayor para $\theta = 35°$.

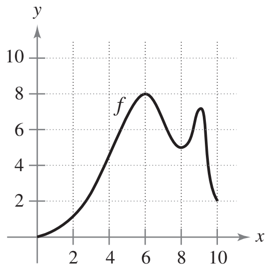


La trayectoria de un proyectil con un ángulo inicial θ
Figura 3.23

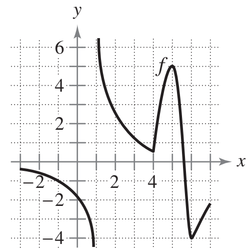
3.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica de f para determinar *a*) el intervalo abierto más grande sobre el cual f es creciente y *b*) el intervalo abierto más grande sobre el cual f es decreciente.

1.

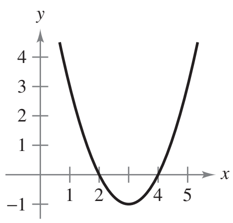


2.

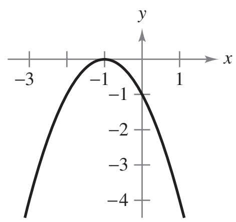


En los ejercicios 3 a 8, utilizar la gráfica para estimar los intervalos abiertos sobre los cuales la función es creciente o decreciente. Posteriormente determinar los mismos intervalos analíticamente.

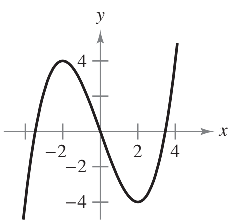
3. $f(x) = x^2 - 6x + 8$



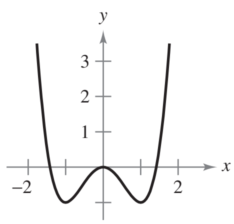
4. $y = -(x + 1)^2$



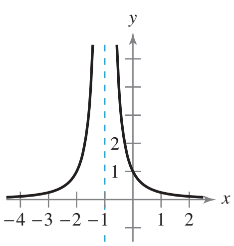
5. $y = \dfrac{x^3}{4} - 3x$



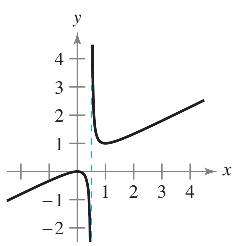
6. $f(x) = x^4 - 2x^2$



7. $f(x) = \dfrac{1}{(x + 1)^2}$



8. $y = \dfrac{x^2}{2x - 1}$



En los ejercicios 9 a 16, identificar los intervalos abiertos sobre los cuales la función es creciente o decreciente.

9. $g(x) = x^2 - 2x - 8$

10. $h(x) = 27x - x^3$

11. $y = x\sqrt{16 - x^2}$

12. $y = x + \dfrac{4}{x}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x - 1, \quad 0 < x < 2\pi$

14. $h(x) = \cos \dfrac{x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi$

15. $y = x - 2 \cos x, \quad 0 < x < 2\pi$

16. $f(x) = \cos^2 x - \cos x, \quad 0 < x < 2\pi$

En los ejercicios 17 a 42, *a*) encontrar los puntos críticos de f (si los hay), *b*) determinar el (los) intervalo(s) abierto(s) sobre los cuales la función es creciente o decreciente, *c*) aplicar el criterio de la primera derivada para identificar todos los extremos relativos y *d*) utilizar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

17. $f(x) = x^2 - 4x$

18. $f(x) = x^2 + 6x + 10$

19. $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

20. $f(x) = -(x^2 + 8x + 12)$

21. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

22. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

23. $f(x) = (x - 1)^2(x + 3)$

24. $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)$

25. $f(x) = \dfrac{x^5 - 5x}{5}$

26. $f(x) = x^4 - 32x + 4$

27. $f(x) = x^{1/3} + 1$

28. $f(x) = x^{2/3} - 4$

29. $f(x) = (x + 2)^{2/3}$

30. $f(x) = (x - 3)^{1/3}$

31. $f(x) = 5 - |x - 5|$

32. $f(x) = |x + 3| - 1$

33. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$

34. $f(x) = \dfrac{x}{x + 3}$

35. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

36. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2}$

37. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$

38. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$

39. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \le 0 \\ -2x, & x > 0 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \le -1 \\ x^2 - 2, & x > -1 \end{cases}$

41. $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \le 1 \\ 5 - x^2, & x > 1 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1, & x \le 0 \\ -x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}$

En los ejercicios 43 a 50, considerar la función sobre el intervalo $(0, 2\pi)$. Para cada función, *a*) encontrar el (los) intervalo(s) abierto(s) sobre los cuales la función es creciente o decreciente, *b*) aplicar el criterio de la primera derivada para identificar todos los extremos relativos y *c*) utilizar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

43. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos x$

44. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x + 5$

45. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

46. $f(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$

47. $f(x) = \cos^2(2x)$

48. $f(x) = \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x$

49. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x$

50. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}$

CAS **En los ejercicios 51 a 56, *a*) utilizar un sistema de álgebra por computadora para derivar la función, *b*) dibujar las gráficas de f y f' en el mismo conjunto de ejes de coordenadas sobre el intervalo indicado, *c*) encontrar los puntos críticos de f en el intervalo abierto y *d*) determinar el (los) intervalo(s) sobre el cual f' es positiva y el (los) intervalo(s) sobre el cual es negativa. Comparar el comportamiento de f y el signo de f'.**

51. $f(x) = 2x\sqrt{9 - x^2}, \quad [-3, 3]$

52. $f(x) = 10\left(5 - \sqrt{x^2 - 3x + 16}\right), \quad [0, 5]$

53. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} t, \quad [0, 2\pi]$ **54.** $f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos \dfrac{x}{2}, \quad [0, 4\pi]$

55. $f(x) = -3 \operatorname{sen} \dfrac{x}{3}, \quad [0, 6\pi]$

56. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x + 4 \cos 3x, \quad [0, \pi]$

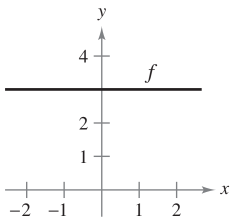
En los ejercicios 57 y 58, utilizar la simetría, los extremos y los ceros para dibujar la gráfica de *f*. ¿En qué difieren *f* y *g*?

57. $f(x) = \dfrac{x^5 - 4x^3 + 3x}{x^2 - 1}, \quad g(x) = x(x^2 - 3)$

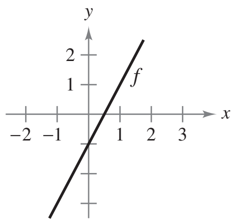
58. $f(t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t, \quad g(t) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 t$

Para pensar **En los ejercicios 59 a 64, la gráfica de *f* se muestra en la figura. Dibujar una gráfica de la derivada de *f*.**

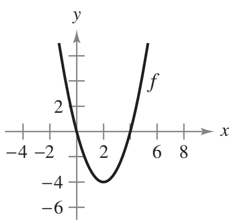
59.



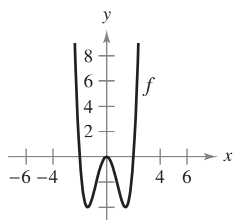
60.



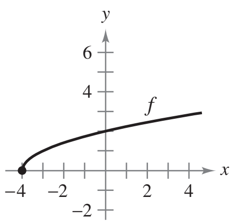
61.



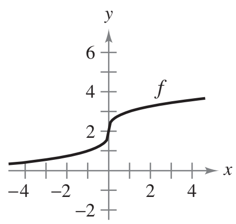
62.



63.

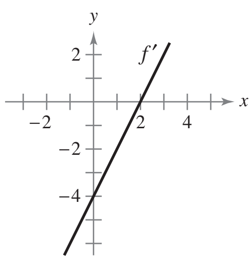


64.

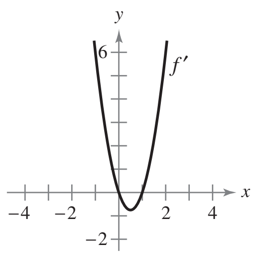


En los ejercicios 65 a 68, utilizar la gráfica de f' para *a*) identificar el (los) intervalo(s) sobre el cual *f* es creciente o decreciente y *b*) estimar los valores de *x* para los cuales *f* tiene un máximo o mínimo relativo.

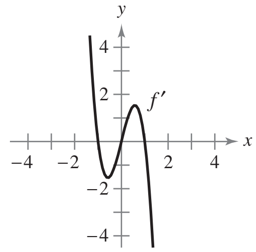
65.



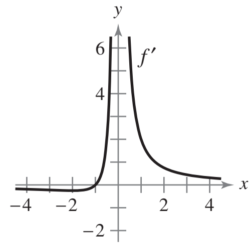
66.



67.

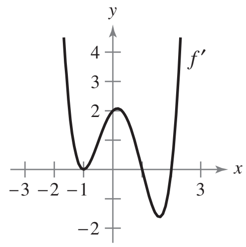


68.

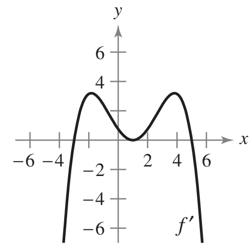


En los ejercicios 69 y 70, utilizar la gráfica de f' para *a*) identificar los puntos críticos de *f* y *b*) determinar si *f* tiene un máximo relativo, un mínimo relativo, o ninguno de los dos en cada punto crítico.

69.



70.



Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 71 a 76, suponer que *f* es derivable para todo *x*. Los signos de f' son como sigue.

$f'(x) > 0$ **en** $(-\infty, -4)$

$f'(x) < 0$ **en** $(-4, 6)$

$f'(x) > 0$ **en** $(6, \infty)$

Indicar la desigualdad apropiada para el valor de *c* indicado.

	Función	*Signo de $g'(c)$*
71.	$g(x) = f(x) + 5$	$g'(0)$ ▢ 0
72.	$g(x) = 3f(x) - 3$	$g'(-5)$ ▢ 0
73.	$g(x) = -f(x)$	$g'(-6)$ ▢ 0
74.	$g(x) = -f(x)$	$g'(0)$ ▢ 0
75.	$g(x) = f(x - 10)$	$g'(0)$ ▢ 0
76.	$g(x) = f(x - 10)$	$g'(8)$ ▢ 0

77. Dibujar la gráfica de la función arbitraria de *f* tal que

$$f'(x)\begin{cases} > 0, & x < 4 \\ \text{indefinida}, & x = 4. \\ < 0, & x > 4 \end{cases}$$

Para discusión

78. Una función derivable de *f* tiene un punto crítico en $x = 5$. Identificar los extremos relativos de *f* en el punto crítico si $f'(4) = -2.5$ y $f'(6) = 3$.

Para pensar **En los ejercicios 79 y 80, la función f es derivable en el intervalo indicado. La tabla muestra el valor de $f'(x)$ para algunos valores seleccionados de x. *a*) Dibujar la gráfica de f, *b*) aproximar los puntos críticos y *c*) identificar los extremos relativos.**

79. f es derivable sobre [–1, 1].

x	-1	-0.75	-0.50	-0.25
$f'(x)$	-10	-3.2	-0.5	0.8

x	0	0.25	0.50	0.75	1
$f'(x)$	5.6	3.6	-0.2	-6.7	-20.1

80. f es derivable sobre $[0, \pi]$.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$f'(x)$	3.14	-0.23	-2.45	-3.11	0.69

x	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$f'(x)$	3.00	1.37	-1.14	-2.84

81. ***Rodamiento de un cojinete de bola*** Un cojinete de bola se coloca sobre un plano inclinado y empieza a rodar. El ángulo de elevación del plano es θ. La distancia (en metros) que el cojinete de bola rueda en t segundos es $s(t) = 4.9(\text{sen } \theta)t^2$.

a) Determinar la velocidad del cojinete de bola después de t segundos.

b) Completar la tabla y utilizarla para determinar el valor de θ que produce la máxima velocidad en un instante particular.

θ	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	π
$s'(t)$							

82. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** La concentración C de un compuesto químico en el flujo sanguíneo t horas después de la inyección en el tejido muscular es

$$C(t) = \frac{3t}{27 + t^3}, \quad t \geq 0.$$

a) Completar la tabla y utilizarla para aproximar el tiempo en el que la concentración es más grande.

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$C(t)$							

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función de concentración y emplear la gráfica para aproximar el tiempo en el que la concentración es más grande.

c) Recurrir al cálculo para determinar analíticamente el tiempo en que la concentración es más grande.

83. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Considerar las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \text{sen } x$ en el intervalo $(0, \pi)$.

a) Completar la tabla y hacer una conjetura acerca de cuál es la función más grande en el intervalo $(0, \pi)$.

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$						
$g(x)$						

b) Utilizar la herramienta de graficación para representar las funciones y emplear las gráficas para hacer una conjetura acerca de cuál es la función más grande en el intervalo $(0, \pi)$.

c) Demostrar que $f(x) > g(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$. [*Sugerencia*: Demostrar que $h'(x) > 0$ donde $h = f - g$.]

84. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Considerar las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \tan x$ en el intervalo $(0, \pi/2)$.

a) Completar la tabla y realizar una conjetura acerca de cuál es la función más grande en el intervalo $(0, \pi/2)$.

x	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5
$f(x)$						
$g(x)$						

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar las funciones y utilizar las gráficas para realizar una suposición acerca de cuál es la función más grande en el intervalo $(0, \pi/2)$.

c) Demostrar que $f(x) < g(x)$ en el intervalo $(0, \pi/2)$. [*Sugerencia*: Demostrar que $h'(x) > 0$, donde $h = g - f$.]

85. ***Contracción de la tráquea*** La tos obliga a que la tráquea (tubo de viento) se contraiga, lo cual afecta la velocidad v del aire que pasa a través de este conducto. La velocidad del aire cuando se tose es $v = k(R - r)r^2$, $0 \leq r < R$ donde k es una constante, R es el radio normal de la tráquea y r es el radio cuando se tose. ¿Qué radio producirá la máxima velocidad del aire?

86. ***Potencia*** La potencia eléctrica P en watts en un circuito de corriente directa con dos resistores R_1 y R_2 conectados en paralelo es

$$P = \frac{vR_1R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

donde v es el voltaje. Si v y R_1 se mantienen constantes, ¿qué resistencia R_2 produce la potencia máxima?

87. ***Resistencia eléctrica*** La resistencia R de cierto tipo de resistor es

$$R = \sqrt{0.001T^4 - 4T + 100}$$

donde R se mide en ohms y la temperatura T se mide en grados Celsius.

CAS *a*) Utilizar un sistema algebraico por computadora para determinar dR/dT y el punto crítico de la función. Determinar la resistencia mínima para este tipo de resistor.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función R y usar la gráfica para aproximar la resistencia mínima de este tipo de resistor.

88. ***Modelado matemático*** Los activos al final del año para el Medicare Hospital Insurance Trust Fund (en miles de millones de dólares) en los años 1995 a 2006 se muestran a continuación:

1995: 130.3; 1996: 124.9; 1997: 115.6; 1998: 120.4;

1999: 141.4; 2000: 177.5; 2001: 208.7; 2002: 234.8;

2003: 256.0; 2004: 269.3; 2005: 285.8; 2006: 305.4

(*Fuente*: *U.S. Center for Medicare and Medicaid Services*)

a) Utilizar las capacidades de regresión de la herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $M = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$ para los datos. (Dejar que $t = 5$ represente a 1995.)

b) Utilizar una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

c) Encontrar en forma analítica el mínimo del modelo y comparar el resultado con los datos reales.

Movimiento a lo largo de una recta **En los ejercicios 89 a 92, la función $s(t)$ describe el movimiento de una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Para cada función, *a*) encontrar la función de la velocidad de la partícula en cualquier instante $t \geq 0$, *b*) identificar el (los) intervalo(s) de tiempo cuando la partícula se está moviendo en la dirección positiva, *c*) identificar el (los) intervalo(s) de tiempo cuando la partícula se mueve en la dirección negativa y *d*) identificar el instante en el que la partícula cambia su dirección.**

89. $s(t) = 6t - t^2$

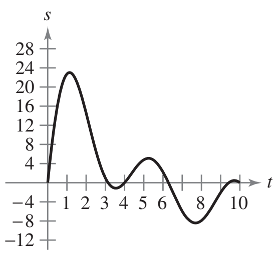
90. $s(t) = t^2 - 7t + 10$

91. $s(t) = t^3 - 5t^2 + 4t$

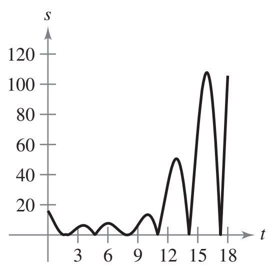
92. $s(t) = t^3 - 20t^2 + 128t - 280$

Movimiento a lo largo de una recta **En los ejercicios 93 y 94, la gráfica muestra la posición de una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Describir cómo cambia la posición de la partícula con respecto al tiempo.**

93.



94.



Creación de funciones polinomiales **En los ejercicios 95 a 98, encontrar una función polinomial**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

que tiene únicamente los extremos especificados. *a*) Determinar el grado mínimo de la función y proporcionar los criterios que se utilizaron para determinar el grado. *b*) Recurriendo al hecho de que las coordenadas de los extremos son puntos solución de la función y al de que las coordenadas *x* son puntos críticos, determinar un sistema de ecuaciones lineales cuya solución produce los coeficientes de la función requerida. *c*) Utilizar una herramienta de graficación para resolver el sistema de ecuaciones y determinar la función. *d*) Utilizar la herramienta de graficación para confirmar su resultado.

95. Mínimo relativo: (0, 0); máximo relativo: (2, 2)

96. Mínimo relativo: (0, 0); máximo relativo: (4, 1 000)

97. Mínimo relativo: (0, 0), (4, 0); máximo relativo: (2, 4)

98. Mínimo relativo: (1, 2); máximo relativo: (−1, 4), (3, 4)

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 99 a 103, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

99. La suma de dos funciones crecientes es creciente.

100. El producto de dos funciones crecientes es creciente.

101. Todo polinomio de grado n tiene $(n - 1)$ puntos críticos.

102. Un polinomio de grado n tiene a lo más $(n - 1)$ puntos críticos.

103. Existe un máximo o mínimo relativo en cada punto crítico.

104. Demostrar el segundo caso del teorema 3.5.

105. Demostrar el segundo caso del teorema 3.6.

106. Utilizar las definiciones de funciones crecientes y decrecientes para demostrar que $f(x) = x^3$ es creciente en $(-\infty, \infty)$.

107. Utilizar las definiciones de funciones creciente y decreciente para demostrar que $f(x) = 1/x$ es decreciente en $(0, \infty)$.

Preparación del examen Putnam

108. Encontrar el mínimo valor de

$$|\operatorname{sen} x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$$

con números reales x.

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

PROYECTO DE TRABAJO

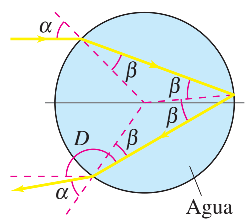
Arco iris

Los arco iris se forman cuando la luz incide sobre gotas de lluvia, sufriendo reflexión y refracción como se indica en la figura. (Esta figura presenta una sección transversal de una gota de lluvia esférica.) La ley de la refracción establece que $(\operatorname{sen} \alpha)/(\operatorname{sen} \beta) = k$, donde $k \approx 1.33$ (para el agua). El ángulo de deflexión está dado por $D = \pi + 2\alpha - 4\beta$.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar

$D = \pi + 2\alpha - 4 \operatorname{sen}^{-1}(1/k \operatorname{sen} \alpha)$,

$0 \leq \alpha \leq \pi/2$.



b) Demostrar que el ángulo mínimo de la deflexión ocurre cuando

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{3}}.$$

Para el agua, ¿cuál es el ángulo mínimo de deflexión, $D_{\text{mín}}$? (El ángulo $\pi - D_{\text{mín}}$ recibe el nombre de *ángulo de arco iris*.) ¿Qué valor de α produce este ángulo mínimo? (Un rayo de luz solar que incide sobre una gota de lluvia a este ángulo, α, se conoce como un *rayo de arco iris*.)

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información acerca de las matemáticas de los arco iris, consultar el artículo "Somewhere Within the Rainbow" de Steven Janke en *The UMAP Journal*.

3.4 Concavidad y el criterio de la segunda derivada

- **Determinar intervalos sobre los cuales una función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.**
- **Encontrar cualesquiera puntos de inflexión de la gráfica de una función.**
- **Aplicar el criterio de la segunda derivada para determinar extremos relativos de una función.**

Concavidad

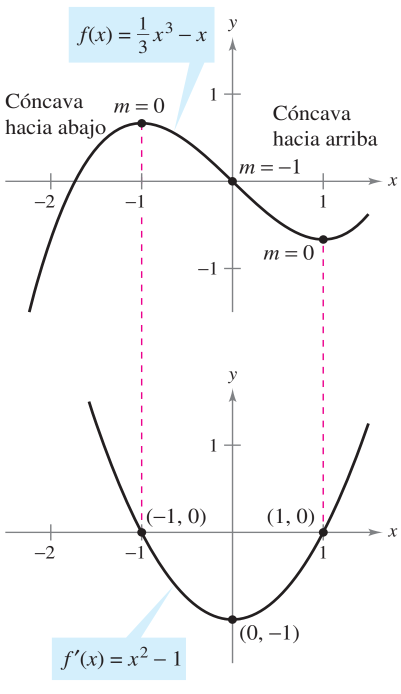
Ya se ha visto que localizar los intervalos en los que una función f es creciente o decreciente ayuda a describir su gráfica. En esta sección, se verá cómo el localizar los intervalos en los que f' es creciente o decreciente puede utilizarse para determinar dónde la gráfica de f se *curva hacia arriba* o se *curva hacia abajo*.

DEFINICIÓN DE CONCAVIDAD

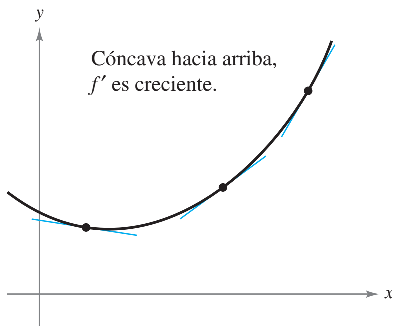
Sea f derivable en un intervalo abierto I. La gráfica de f es **cóncava hacia arriba** sobre I si f' es creciente en el intervalo y **cóncava hacia abajo** en I si f' es decreciente en el intervalo.

La siguiente interpretación gráfica de concavidad es útil. (Ver el apéndice A para una prueba de estos resultados.)

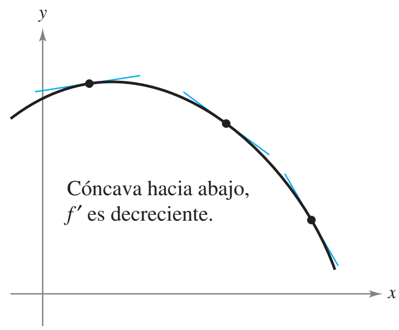
1. Sea f derivable sobre un intervalo abierto I. Si la gráfica de f es cóncava *hacia arriba* en I, entonces la gráfica de f yace *sobre* todas sus rectas tangentes en I. (Ver la figura 3.24*a*.)
2. Sea f derivable en un intervalo abierto I. Si la gráfica de f es cóncava *hacia abajo* en I, entonces la gráfica de f yace *debajo de* todas sus rectas tangentes en I. (Ver la figura 3.24*b*.)



La concavidad de f se relaciona con la monotonía de la derivada
Figura 3.25



a) La gráfica de f se encuentra sobre sus rectas tangentes



b) La gráfica de f se encuentra debajo de sus rectas tangentes

Figura 3.24

Para determinar los intervalos abiertos sobre los cuales la gráfica de una función f es cóncava hacia arriba o hacia abajo, se necesita determinar los intervalos sobre los cuales f' sea creciente o decreciente. Por ejemplo, la gráfica de

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - x$$

es cóncava hacia abajo en el intervalo abierto $(-\infty, 0)$ debido a que $f'(x) = x^2 - 1$ es ahí decreciente. (Ver la figura 3.25.) De manera similar, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(0, \infty)$ debido a que f' es creciente en $(0, \infty)$.

El siguiente teorema muestra cómo utilizar la *segunda* derivada de una función f para determinar intervalos sobre los cuales la gráfica de f es cóncava hacia arriba o hacia abajo. Una prueba de este teorema sigue directamente del teorema 3.5 y de la definición de concavidad.

TEOREMA 3.7 CRITERIO DE CONCAVIDAD

Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

1. Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.
2. Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

NOTA Un tercer caso del teorema 3.7 podría ser que si $f''(x) = 0$ para todo x en I, entonces f es lineal. Notar, sin embargo, que la concavidad no se define para una recta. En otras palabras una recta no es ni cóncava hacia arriba ni cóncava hacia abajo.

Para aplicar el teorema 3.7, se localizan los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$ o f'' no existe. Segundo, se usan los valores de x para determinar los intervalos de prueba. Por último, se prueba el signo de $f''(x)$ en cada uno de los intervalos de prueba.

EJEMPLO 1 Determinación de la concavidad

Determinar los intervalos abiertos en los cuales la gráfica de

$$f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$$

es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Solución Se empieza observando que f es continua en toda la recta real. A continuación, se encuentra la segunda derivada de f.

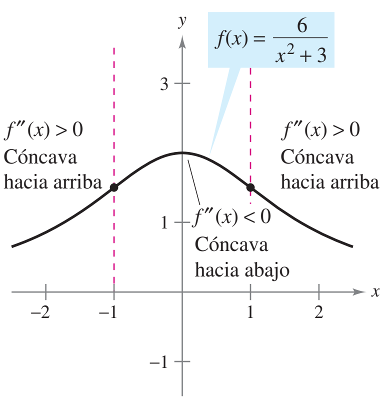
$$f(x) = 6(x^2 + 3)^{-1} \qquad \text{Reescribir la función original.}$$

$$f'(x) = (-6)(x^2 + 3)^{-2}(2x) \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{-12x}{(x^2 + 3)^2} \qquad \text{Primera derivada.}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 3)^2(-12) - (-12x)(2)(x^2 + 3)(2x)}{(x^2 + 3)^4} \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3} \qquad \text{Segunda derivada.}$$



A partir del signo de f'' se puede determinar la concavidad de la gráfica de f
Figura 3.26

Como $f''(x) = 0$ cuando $x = \pm 1$ y f'' se define en toda la recta real, se debe probar f'' en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$. Los resultados se muestran en la tabla y en la figura 3.26.

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
Signo de $f''(x)$	$f''(-2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

La función dada en el ejemplo 1 es continua en toda la recta real. Si hay valores de x en los cuales la función no es continua, dichos valores deben usarse junto con los puntos en los cuales $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe para formar los intervalos de prueba.

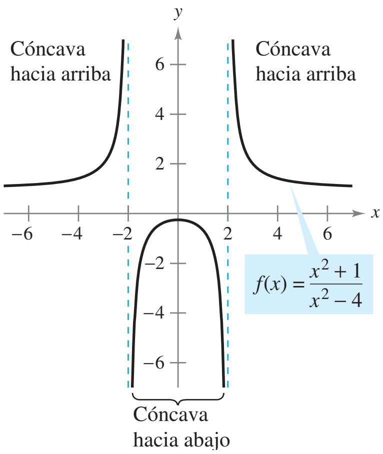


Figura 3.27

EJEMPLO 2 Determinación de la concavidad

Determinar los intervalos abiertos sobre los cuales la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Solución Al derivar dos veces se obtiene lo siguiente

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4} \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)(2x)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-4)^2} \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{-10x}{(x^2-4)^2} \qquad \text{Primera derivada.}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2-4)^2(-10)-(-10x)(2)(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4} \qquad \text{Derivar.}$$

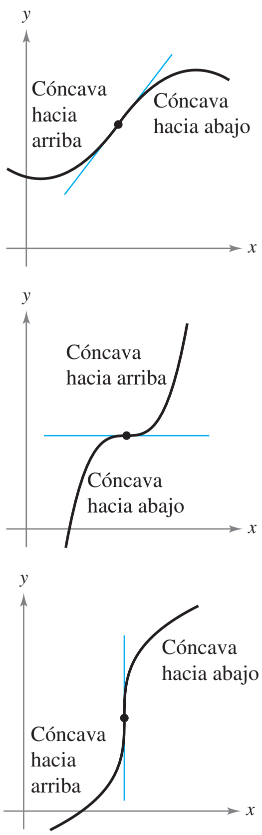
$$= \frac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \qquad \text{Segunda derivada.}$$

No hay puntos en los cuales $f''(x) = 0$, pero en $x = \pm 2$ la función f no es continua, por lo que se prueba la concavidad en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$, como se ilustra en la tabla. La gráfica de f se muestra en la figura 3.27.

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -3$	$x = 0$	$x = 3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-3) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Puntos de inflexión

La gráfica en la figura 3.26 tiene dos puntos en los cuales cambia la concavidad. Si la recta tangente a la gráfica existe en un punto de este tipo, ese punto es un **punto de inflexión**. Se muestran tres tipos de puntos de inflexión en la figura 3.28.



La concavidad de f cambia en un punto de inflexión. Notar que la gráfica cruza su recta tangente en un punto de inflexión
Figura 3.28

DEFINICIÓN DE PUNTO DE INFLEXIÓN

Sea f una función que es continua en un intervalo abierto y sea c un punto en ese intervalo. Si la gráfica de f tiene una recta tangente en este punto $(c, f(c))$, entonces este punto es un **punto de inflexión** de la gráfica de f si la concavidad de f cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo (o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba) en ese punto.

NOTA La definición de *punto de inflexión* dada en este libro requiere que la recta tangente exista en el punto de inflexión. Algunos libros no requieren esto. Por ejemplo, en este libro no se considera que la función

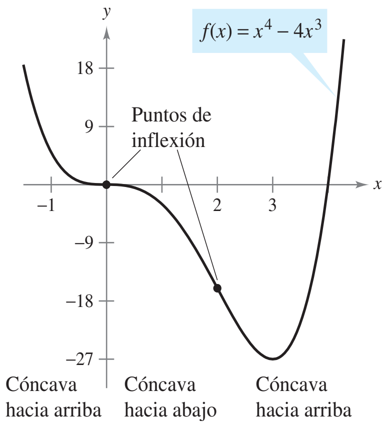
$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x^2 + 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

tenga un punto de inflexión en el origen, aun cuando la concavidad de la gráfica cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Para localizar los *posibles* puntos de inflexión, se pueden determinar los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe. Esto es similar al procedimiento para localizar los extremos relativos de f.

TEOREMA 3.8 PUNTO DE INFLEXIÓN

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(c) = 0$ o f'' no existe en $x = c$.



Pueden ocurrir puntos de inflexión donde $f''(x) = 0$ o f'' no existe
Figura 3.29

EJEMPLO 3 Determinación de los puntos de inflexión

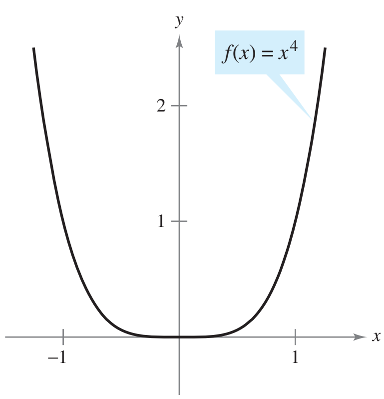
Determinar los puntos de inflexión y analizar la concavidad de la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Solución La derivación doble produce lo siguiente.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 \quad \text{Escribir la función original.}$$
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \quad \text{Encontrar la primera derivada.}$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) \quad \text{Encontrar la segunda derivada.}$$

Haciendo $f''(x) = 0$ es posible determinar que los puntos de inflexión posibles ocurren en $x = 0$ y $x = 2$. Al probar los intervalos determinados por estos valores de x, se puede concluir que ambos producen puntos de inflexión. Un resumen de esta prueba se presenta en la tabla, y la gráfica de f se ilustra en la figura 3.29.

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba



$f''(x) = 0$, pero $(0, 0)$ no es un punto de inflexión
Figura 3.30

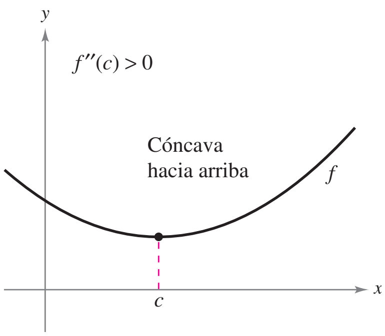
El recíproco del teorema 3.8 por lo general no es cierto. Esto es, es posible que la segunda derivada sea 0 en un punto que *no* es un punto de inflexión. Por ejemplo, la gráfica de $f(x) = x^4$ se muestra en la figura 3.30. La segunda derivada es 0 cuando $x = 0$, pero el punto $(0, 0)$ no es un punto de inflexión porque la gráfica de f es cóncava hacia arriba en ambos intervalos $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$.

EXPLORACIÓN

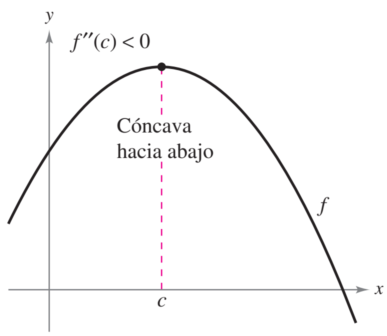
Considerar una función cúbica general de la forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Se sabe que el valor de d tiene relación con la localización de la gráfica, pero no con el valor de la primera derivada en los valores dados de x. Gráficamente, esto es cierto debido a que los cambios en el valor de d desplazan a la gráfica hacia arriba o hacia abajo, pero no cambian su forma básica. Utilizar una herramienta de graficación para representar varias funciones cúbicas con diferentes valores de c. Después proporcionar una explicación gráfica de por qué los cambios en c no afectan los valores de la segunda derivada.



Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un mínimo relativo



Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un máximo relativo

Figura 3.31

Criterio de la segunda derivada

Además de un método para analizar la concavidad, es posible utilizar la segunda derivada para efectuar una prueba simple correspondiente a los máximos y mínimos relativos. Se basa en el hecho de que si la gráfica de una función f es cóncava hacia arriba en un intervalo abierto que contiene a c y $f'(c) = 0$, $f(c)$ debe ser un mínimo relativo de f. De manera similar, si la gráfica de una función es cóncava hacia abajo en un intervalo abierto que contiene a c y $f'(c) = 0$, $f(c)$ debe ser un máximo relativo de f (ver la figura 3.31).

TEOREMA 3.9 CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a c.

1. Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$.
2. Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$.

Si $f''(c) = 0$, entonces el criterio falla. Esto es, f quizá tenga un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de los dos. En tales casos, se puede utilizar el criterio de la primera derivada.

DEMOSTRACIÓN Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, existe un intervalo abierto I que contiene a c para el cual

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \frac{f'(x)}{x - c} > 0$$

para todo $x \neq c$ en I. Si $x < c$, entonces $x - c < 0$ y $f'(x) < 0$. Además, si $x > c$, entonces $x - c > 0$ y $f'(x) > 0$. De tal modo, $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, y el criterio de la primera derivada implica que $f(c)$ es un mínimo relativo. Una demostración del segundo caso se deja al lector.

EJEMPLO 4 Empleo del criterio de la segunda derivada

Encontrar los extremos relativos correspondientes a $f(x) = -3x^5 + 5x^3$.

Solución Empezando con la determinación de los puntos críticos de f.

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2) = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

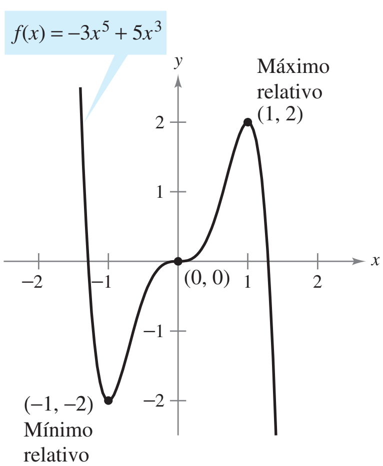
$$x = -1, 0, 1 \qquad \text{Puntos críticos.}$$

Empleando

$$f''(x) = -60x^3 + 30x = 30(-2x^3 + x)$$

se puede aplicar el criterio de la segunda derivada como se indica a continuación.

Punto	$(-1, -2)$	$(1, 2)$	$(0, 0)$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(0) = 0$
Conclusión	Mínimo relativo	Máximo relativo	Falla de la prueba



(0, 0) no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo

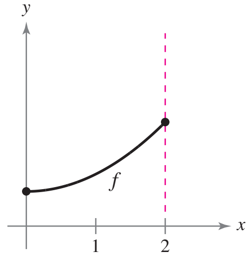
Figura 3.32

Como el criterio de la segunda derivada no decide en (0, 0), es posible utilizar el criterio de la primera derivada y observar que f aumenta hacia la izquierda y hacia la derecha de $x = 0$. De tal modo, (0, 0) no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo (aun cuando la gráfica tiene una recta tangente horizontal en este punto). La gráfica de f se muestra en la figura 3.32.

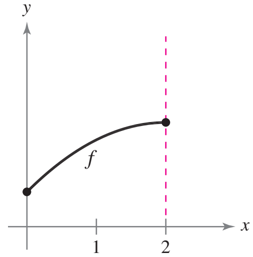
3.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4 se muestra la gráfica de *f*. Establecer los signos de f' y f'' sobre el intervalo (0, 2).

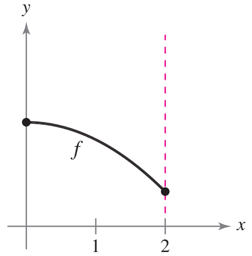
1.



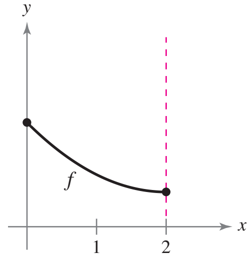
2.



3.



4.



En los ejercicios 5 a 18, determinar los intervalos abiertos en los cuales la gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

5. $y = x^2 - x - 2$

6. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

7. $g(x) = 3x^2 - x^3$

8. $h(x) = x^5 - 5x + 2$

9. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x - 1$

10. $f(x) = x^5 + 5x^4 - 40x^2$

11. $f(x) = \dfrac{24}{x^2 + 12}$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

13. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

14. $y = \dfrac{-3x^5 + 40x^3 + 135x}{270}$

15. $g(x) = \dfrac{x^2 + 4}{4 - x^2}$

16. $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 1}$

17. $y = 2x - \tan x, \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

18. $y = x + \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}, \quad (-\pi, \pi)$

En los ejercicios 19 a 36, encontrar los puntos de inflexión y analizar la concavidad de la gráfica de la función.

19. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3$

20. $f(x) = -x^4 + 24x^2$

21. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$

22. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

23. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

24. $f(x) = 2x^4 - 8x + 3$

25. $f(x) = x(x - 4)^3$

26. $f(x) = (x - 2)^3(x - 1)$

27. $f(x) = x\sqrt{x + 3}$

28. $f(x) = x\sqrt{9 - x}$

29. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$

30. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$

31. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}, \quad [0, 4\pi]$

32. $f(x) = 2\csc\dfrac{3x}{2}, \quad (0, 2\pi)$

33. $f(x) = \sec\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right), \quad (0, 4\pi)$

34. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

35. $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x, \quad [0, 2\pi]$

36. $f(x) = x + 2\cos x, \quad [0, 2\pi]$

En los ejercicios 37 a 52, encontrar todos los extremos relativos. Utilizar el criterio de la segunda derivada donde sea conveniente.

37. $f(x) = (x - 5)^2$

38. $f(x) = -(x - 5)^2$

39. $f(x) = 6x - x^2$

40. $f(x) = x^2 + 3x - 8$

41. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

42. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$

43. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$

44. $f(x) = -x^4 + 4x^3 + 8x^2$

45. $g(x) = x^2(6 - x)^3$

46. $g(x) = -\frac{1}{8}(x + 2)^2(x - 4)^2$

47. $f(x) = x^{2/3} - 3$

48. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

49. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

50. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

51. $f(x) = \cos x - x, \quad [0, 4\pi]$

52. $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x, \quad [0, 2\pi]$

CAS **En los ejercicios 53 a 56, recurrir a un sistema algebraico por computadora para analizar la función sobre el intervalo que se indica. *a*) Encontrar la primera y la segunda derivadas de la función. *b*) Determinar cualesquiera extremos relativos y puntos de inflexión. *c*) Representar gráficamente *f*, f' y f'' en el mismo conjunto de ejes de coordenadas y establecer la relación entre el comportamiento de *f* y los signos de f' y f''.**

53. $f(x) = 0.2x^2(x - 3)^3, \quad [-1, 4]$

54. $f(x) = x^2\sqrt{6 - x^2}, \quad \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$

55. $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x, \quad [0, \pi]$

56. $f(x) = \sqrt{2x}\operatorname{sen} x, \quad [0, 2\pi]$

Desarrollo de conceptos

57. Considerar a una función f tal que f' es creciente. Dibujar gráficas de f para *a*) $f' < 0$ y *b*) $f' > 0$.

58. Considerar a una función f tal que f' es decreciente. Dibujar gráficas de f para *a*) $f' < 0$ y *b*) $f' > 0$.

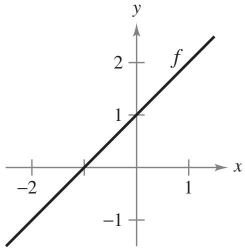
59. Dibujar la gráfica de una función f tal que *no* tenga un punto de inflexión en $(c, f(c))$ aun cuando $f''(c) = 0$.

60. S representa las ventas semanales de un producto. ¿Qué puede decirse de S' y S'' en relación con cada uno de los siguientes enunciados?

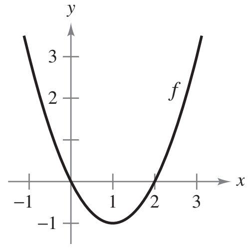
a) El ritmo de cambio de las ventas está creciendo.
b) Las ventas están creciendo a un ritmo más lento.
c) El ritmo de cambio de las ventas es constante.
d) Las ventas están estables.
e) Las ventas están declinando, pero a una velocidad menor.
f) Las ventas se han desplomado y han empezado a crecer.

En los ejercicios 61 a 64, se muestra la gráfica de f. Representar gráficamente f, f' y f'' en el mismo conjunto de ejes de coordenadas.

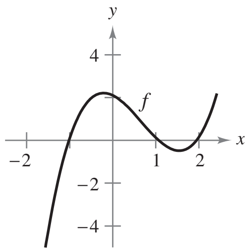
61.



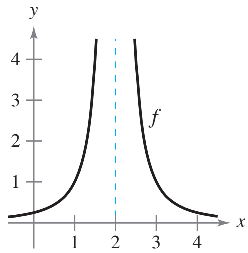
62.



63.



64.



Para pensar **En los ejercicios 65 a 68, dibujar la gráfica de una función f que tenga las características indicadas.**

65. $f(2) = f(4) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x < 3$
$f'(3)$ no existe.
$f'(x) > 0$ si $x > 3$
$f''(x) < 0, x \quad 3$

66. $f(0) = f(2) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x < 1$
$f'(1) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x > 1$
$f''(x) < 0$

67. $f(2) = f(4) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x < 3$
$f'(3)$ no existe.
$f'(x) < 0$ si $x > 3$
$f''(x) > 0, x \quad 3$

68. $f(0) = f(2) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x < 1$
$f'(1) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x > 1$
$f''(x) > 0$

69. ***Para pensar*** La figura muestra la gráfica de f''. Dibujar una gráfica de f. (La respuesta no es única.)

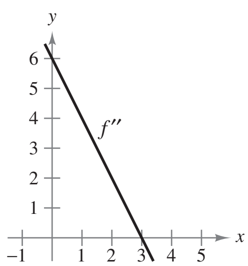


Figura para 69

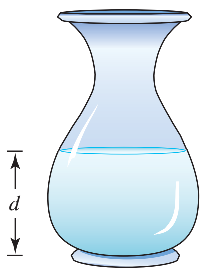


Figura para 70

Para discusión

70. ***Para pensar*** Se vierte agua en el florero que se muestra en la figura a una velocidad constante.

a) Representar gráficamente la profundidad d del agua en el florero como una función del tiempo.
b) ¿La función tiene algún extremo? Explicar.
c) Interpretar los puntos de inflexión de la gráfica de d.

71. ***Conjetura*** Considerar la función $f(x) = (x - 2)^n$.

a) Emplear una herramienta de graficación para representar f con respecto a $n = 1, 2, 3$ y 4. Utilizar las gráficas para realizar una conjetura acerca de la relación entre n y cualesquiera de los puntos de inflexión de la gráfica de f.
b) Verificar la conjetura del apartado *a*).

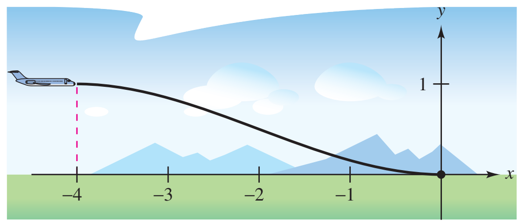
72. *a*) Representar gráficamente $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e identificar el punto de inflexión.
b) ¿Existe $f''(x)$ en el punto de inflexión? Explicar.

En los ejercicios 73 y 74, determinar a, b, c y d tales que la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ satisfaga las condiciones que se indican.

73. Máximo relativo: (3, 3)
Mínimo relativo: (5, 1)
Punto de inflexión: (4, 2)

74. Máximo relativo: (2, 4)
Mínimo relativo: (4, 2)
Punto de inflexión: (3, 3)

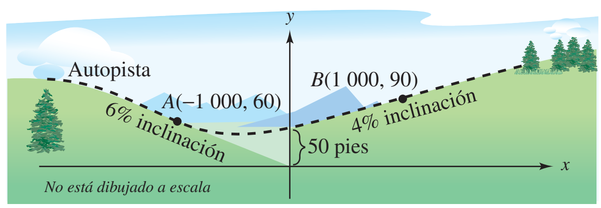
75. ***Trayectoria de planeo de un avión*** Un pequeño avión empieza su descenso desde una altura de 1 milla, 4 millas al oeste de la pista de aterrizaje (ver la figura).



a) Encontrar la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en el intervalo $[-4, 0]$ que describe una trayectoria de planeo uniforme para el aterrizaje.
b) La función del apartado *a*) modela la trayectoria de planeo del avión. ¿Cuándo descendería el avión a la velocidad más rápida?

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información acerca de este tipo de modelación, ver el artículo "How Not to Land at Lake Tahoe!" de Richard Barshinger en *The American Mathematical Monthly*.

76. ***Diseño de autopistas*** Una sección de autopista que conecta dos laderas con inclinación de 6 y 4% se va a construir entre dos puntos que están separados por una distancia horizontal de 2 000 pies (ver la figura). En el punto en que se juntan las dos laderas, hay una diferencia de altura de 50 pies.



a) Diseñar una sección de la autopista que conecte las laderas modeladas por la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(-1\,000 \le x \le 1\,000)$. En los puntos A y B, la pendiente del modelo debe igualar la inclinación de la ladera.
b) Utilizar una herramienta de graficación para representar el modelo.
c) Emplear una herramienta de graficación para representar la derivada del modelo.
d) Determinar la parte más inclinada de la sección de transición de la autopista.

77. ***Deflexión de viga*** La deflexión D de una viga de longitud L es $D = 2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2$, donde x es la distancia a un extremo de la viga. Determinar el valor de x que produce la máxima deflexión.

78. ***Gravedad específica*** Un modelo para el peso específico del agua S es

$$S = \frac{5.755}{10^8}T^3 - \frac{8.521}{10^6}T^2 + \frac{6.540}{10^5}T + 0.99987, \quad 0 < T < 25$$

donde T es la temperatura del agua en grados Celsius.

CAS *a*) Utilizar un sistema algebraico por computadora para determinar las coordenadas del valor máximo de la función.

b) Dibujar una gráfica de la función sobre el dominio especificado. (Utilizar un ajuste en el cual $0.996 \le S \le 1.001$.)

c) Estimar el peso específico del agua cuando $T = 20°$.

79. ***Costo promedio*** Un fabricante ha determinado que el costo total C de operación de una fábrica es $C = 0.5x^2 + 15x + 5000$, donde x es el número de unidades producidas. ¿En qué nivel de producción se minimizará el costo promedio por unidad? (El costo promedio por unidad es C/x.)

80. ***Costo de inventario*** El costo total C para pedir y almacenar x unidades es $C = 2x + (300\,000/x)$. ¿Qué tamaño de pedido producirá un costo mínimo?

81. ***Crecimiento de ventas*** Las ventas anuales S de un nuevo producto están dadas por $S = \dfrac{5\,000t^2}{8 + t^2}$, $0 \le t \le 3$, donde t es el tiempo en años.

a) Completar la tabla. Después utilizarla para estimar cuándo las ventas anuales se incrementan a ritmo más alto.

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3
S						

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función S. Después emplear la gráfica para estimar cuándo las ventas anuales están creciendo más rápidamente.

c) Encontrar el tiempo exacto en el que las ventas anuales crecen al ritmo más alto.

82. ***Modelado matemático*** La tabla muestra la velocidad media S (palabras por minuto) a la que teclea un estudiante de mecanografía después de t semanas de asistir a clase.

t	5	10	15	20	25	30
S	38	56	79	90	93	94

Un modelo para los datos es $S = \dfrac{100t^2}{65 + t^2}$, $t > 0$.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.

b) Utilizar la segunda derivada para determinar la concavidad de S. Comparar el resultado con la gráfica del apartado *a*).

c) ¿Cuál es el signo de la primera derivada para $t > 0$? Combinando esta información con la concavidad del modelo, ¿qué se puede inferir sobre la velocidad cuando t crece?

Aproximaciones lineal y cuadrática **En los ejercicios 83 a 86, utilizar una herramienta de graficación para representar la función. Representar después las aproximaciones lineal y cuadrática**

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

en la misma ventana de observación. Comparar los valores de f, P_1 y P_2 y sus primeras derivadas en $x = a$. ¿Cómo cambia la aproximación cuando se aleja de $x = a$?

	Función	*Valor de a*
83.	$f(x) = 2(\operatorname{sen} x + \cos x)$	$a = \dfrac{\pi}{4}$
84.	$f(x) = 2(\operatorname{sen} x + \cos x)$	$a = 0$
85.	$f(x) = \sqrt{1 - x}$	$a = 0$
86.	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$	$a = 2$

87. Utilizar una herramienta de graficación para representar $y = x\operatorname{sen}(1/x)$. Demostrar que la gráfica es cóncava hacia abajo hacia la derecha de $x = 1/\pi$.

88. Mostrar que el punto de inflexión de $f(x) = x(x - 6)^2$ se encuentra a medio camino entre los extremos relativos de f.

89. Comprobar que toda función cúbica con tres distintos ceros reales tiene un punto de inflexión cuya coordenada x es el promedio de los tres ceros.

90. Mostrar que el polinomio cúbico $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene exactamente un punto de inflexión (x_0, y_0), donde

$$x_0 = \frac{-b}{3a} \quad \text{y} \quad y_0 = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d.$$

Utilizar esta fórmula para determinar el punto de inflexión de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 91 a 94, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar la razón o proporcionar un contraejemplo.**

91. La gráfica de todo polinomio cúbico tiene precisamente un punto de inflexión.

92. La gráfica de $f(x) = 1/x$ es cóncava hacia abajo para $x < 0$ y cóncava hacia arriba para $x > 0$, y por ello tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

93. Si $f'(c) > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba en $x = c$.

94. Si $f''(2) = 0$, entonces la gráfica de f debe tener un punto de inflexión en $x = 2$.

En los ejercicios 95 y 96, considerar que f y g representan funciones derivables tales que $f'' \neq 0$ y $g'' \neq 0$.

95. Demostrar que si f y g son cóncavas hacia arriba en el intervalo (a, b), entonces $f + g$ es también cóncava hacia arriba en (a, b).

96. Demostrar que si f y g son positivas, crecientes y cóncavas hacia arriba en el intervalo (a, b), entonces fg es también cóncava hacia arriba en (a, b).

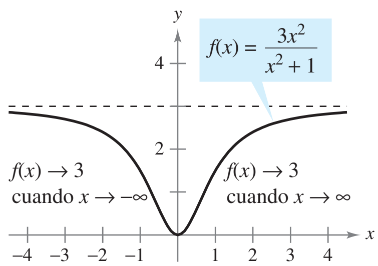
3.5 Límites al infinito

- Determinar límites (finitos) al infinito.
- Determinar las asíntotas horizontales, si las hay, de la gráfica de una función.
- Determinar límites infinitos en el infinito.

Límites en el infinito

Esta sección analiza el "comportamiento final (o asintótico)" de una función en un intervalo *infinito*. Considerar la gráfica de

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$$



El límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ o ∞ es 3
Figura 3.33

como se ilustra en la figura 3.33. Gráficamente, puede verse que los valores de $f(x)$ parecen aproximarse a 3 cuando x crece o decrece sin límite. Se puede llegar numéricamente a las mismas conclusiones, como se indica en la tabla.

x decrece sin límite. *x* crece sin límite.

x	$-\infty \leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\to \infty$
$f(x)$	$3 \leftarrow$	2.9997	2.97	1.5	0	1.5	2.97	2.9997	$\to 3$

f(*x*) se aproxima a 3. *f*(*x*) se aproxima a 3.

La tabla sugiere que el valor de $f(x)$ se aproxima a 3 cuando x crece sin límite $(x \to \infty)$. De manera similar, $f(x)$ tiende a 3 cuando x decrece sin límite $(x \to -\infty)$. Estos **límites en el infinito** se denotan mediante

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3 \qquad \text{Límite en infinito negativo.}$$

y

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3. \qquad \text{Límite en infinito positivo.}$$

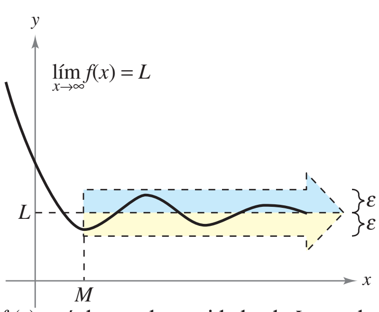
NOTA La afirmación $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que el límite existe *y* el límite es igual a L. ■

Decir que un enunciado es cierto cuando x crece *sin límite* significa que para algún número real (grande) M, el enunciado es verdadero para *todo* x en el intervalo $\{x: x > M\}$. La siguiente definición recurre a este concepto.

DEFINICIÓN DE LÍMITES AL INFINITO

Sea L un número real.

1. El enunciado $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x > M$.
2. El enunciado $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x < N$.



$f(x)$ está dentro de ε unidades de L cuando $x \to \infty$
Figura 3.34

La definición de un límite al infinito se muestra en la figura 3.34. En esta figura, se advierte que para un número positivo dado ε existe un número positivo M tal que, para $x > M$, la gráfica de f estará entre las rectas horizontales dadas por $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$.

Asíntotas horizontales

En la figura 3.34, la gráfica de f se aproxima a la recta $y = L$ cuando x crece sin límite. La recta $y = L$ recibe el nombre de **asíntota horizontal** de la gráfica de f.

DEFINICIÓN DE UNA ASÍNTOTA HORIZONTAL

La recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de f si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

Nótese que a partir de esta definición se concluye que la gráfica de una *función* de x puede tener a lo mucho dos asíntotas horizontales (una hacia la derecha y otra hacia la izquierda).

Los límites al infinito tienen muchas de las propiedades de los límites que se estudiaron en la sección 1.3. Por ejemplo, si existen tanto $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$$

y

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)g(x)] = \left[\lim_{x\to\infty} f(x)\right]\left[\lim_{x\to\infty} g(x)\right].$$

Se cumplen propiedades similares para límites en $-\infty$.

Cuando se evalúan límites al infinito, resulta de utilidad el siguiente teorema. (Una prueba de este teorema se da en el apéndice A.)

EXPLORACIÓN

Utilizar una herramienta de graficación para hacer la representación

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 6}{3x^2 + 2x - 16}.$$

Describir todas las características importantes de la gráfica. ¿Se puede encontrar una sola ventana de observación que muestre con claridad todas esas características? Explicar el razonamiento.

¿Cuáles son las asíntotas horizontales de la gráfica, de manera que ésta se encuentre dentro de 0.001 unidades de su asíntota horizontal? Explicar el razonamiento.

TEOREMA 3.10 LÍMITES AL INFINITO

Si r es un número racional positivo y c es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

Además, si x^r se define cuando $x < 0$, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

EJEMPLO 1 Determinación del límite al infinito

Encontrar el límite: $\lim_{x\to\infty} \left(5 - \frac{2}{x^2}\right)$.

Solución Utilizando el teorema 3.10, es posible escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \left(5 - \frac{2}{x^2}\right) &= \lim_{x\to\infty} 5 - \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} && \text{Propiedad de límites.}\\ &= 5 - 0\\ &= 5.\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Determinación de un límite al infinito

Determinar el límite: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1}$.

Solución Advertir que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} \quad \begin{array}{l} \nearrow \ \boxed{\displaystyle\lim_{x\to\infty} (2x-1) \to \infty} \\ \searrow \ \boxed{\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x+1) \to \infty} \end{array}$$

NOTA Cuando se encuentra una forma indeterminada tal como la del ejemplo 2, se debe dividir el numerador y el denominador entre la potencia más alta de x en el *denominador*.

Esto produce una **forma indeterminada** $\frac{\infty}{\infty}$. Para resolver este problema, es posible dividir tanto el numerador como el denominador entre x. Después de eso, el límite puede evaluarse como se muestra.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} \qquad \text{Dividir el numerador y el denominador entre } x.$$

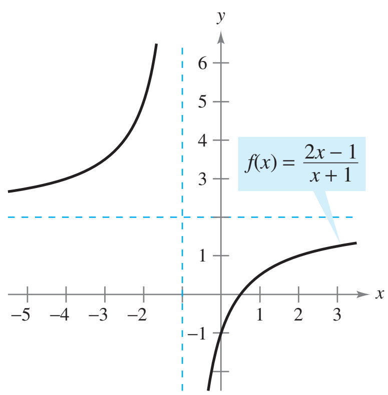
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}} \qquad \text{Tomar límites del numerador y el denominador.}$$

$$= \frac{2-0}{1+0} \qquad \text{Aplicar el teorema 3.10.}$$

$$= 2$$

De tal modo, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal a la derecha. Al tomar el límite cuando $x \to -\infty$, puede verse que $y = 2$ también es una asíntota horizontal hacia la izquierda. La gráfica de la función se ilustra en la figura 3.35.



$y = 2$ es una asíntota horizontal
Figura 3.35

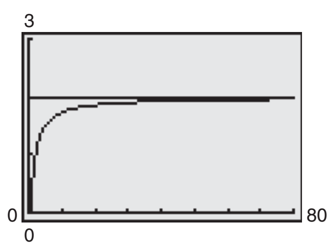
TECNOLOGÍA Se puede verificar que el límite del ejemplo 2 es razonable evaluando $f(x)$ para unos pocos valores positivos grandes de x. Por ejemplo,

$$f(100) \approx 1.9703, \quad f(1\,000) \approx 1.9970 \quad \text{y} \quad f(10\,000) \approx 1.9997.$$

Otra forma de verificar que el límite obtenido es razonable consiste en representar la gráfica con una herramienta de graficación. Por ejemplo, en la figura 3.36, la gráfica de

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

se muestra con la recta horizontal $y = 2$. Notar que cuando x crece, la gráfica de f se mueve más y más cerca de su asíntota horizontal.



Cuando x aumenta, la gráfica de f se mueve más y más cerca a la recta $y = 2$
Figura 3.36

The Granger Collection

MARIA GAETANA AGNESI (1718-1799)

Agnesi fue una de las pocas mujeres en recibir crédito por aportaciones importantes a las matemáticas antes del siglo XX. Casi al cumplir 20 años, escribió el primer texto que incluyó tanto cálculo diferencial como integral. Alrededor de los 30, fue miembro honorario de la facultad en la Universidad de Boloña.

Para mayor información sobre las contribuciones de las mujeres a las matemáticas, ver el artículo "Why Women Succeed in Mathematics" de Mona Fabricant, Sylvia Svitak y Patricia Clark Kenschaft en *Mathematics Teacher*.

EJEMPLO 3 Una comparación de tres funciones racionales

Determinar cada límite.

a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{3x^2+1}$ ***b***) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5}{3x^2+1}$ ***c***) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5}{3x^2+1}$

Solución En cada caso, el intento de evaluar el límite produce la forma indeterminada ∞/∞.

a) Dividir tanto el numerador como el denominador entre x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2/x)+(5/x^2)}{3+(1/x^2)} = \frac{0+0}{3+0} = \frac{0}{3} = 0$$

b) Dividir tanto el numerador como el denominador entre x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+(5/x^2)}{3+(1/x^2)} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

c) Dividir tanto el numerador como el denominador entre x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+(5/x^2)}{3+(1/x^2)} = \frac{\infty}{3}$$

Es posible concluir que el límite *no existe* porque el numerador aumenta sin límite mientras el denominador se aproxima a 3.

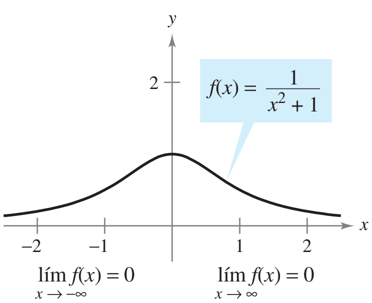
Estrategia para determinar límites en $\pm\infty$ de funciones racionales

1. Si el grado del numerador es *menor que* el grado de denominador, entonces el límite de la función racional es 0.
2. Si el grado del numerador es *igual al* grado de denominador, entonces el límite de la función racional es el cociente de los coeficientes dominantes.
3. Si el grado del numerador es *mayor que* el grado del denominador, entonces el límite de la función racional no existe.

Recurrir a esta estrategia para verificar los resultados del ejemplo 3. Estos límites parecen razonables cuando se considera que para grandes valores de x, el término de la potencia más alta de la función racional es lo que más "influye" en la determinación del límite. Por ejemplo, el límite cuando x tiende a infinito de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

es 0 porque el denominador supera al numerador cuando x aumenta o disminuye sin límite, como se muestra en la figura 3.37.



f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$
Figura 3.37

La función que se muestra en la figura 3.37 es un caso especial de un tipo de curva estudiado por la matemática italiana Maria Gaetana Agnesi. La fórmula general de esta función es

$$f(x) = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$$ Bruja de Agnesi.

y, a través de la traducción errónea de la palabra italiana *vertéré*, la curva ha llegado a conocerse como la bruja (o hechicera) de Agnesi. El trabajo de Agnesi con esta curva apareció por primera vez en un amplio libro de cálculo que se publicó en 1748.

En la figura 3.37 se puede observar que la función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ tiende a la misma asíntota horizontal hacia la derecha que hacia la izquierda. Esto siempre es cierto para las funciones racionales. Las funciones que no son racionales, sin embargo, pueden tender a diferentes asíntotas horizontales hacia la derecha y hacia la izquierda. Esto se demuestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Una función con dos asíntotas horizontales

Determinar cada límite.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}}$ ***b***) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

Solución

a) Para $x > 0$, es posible escribir $x = \sqrt{x^2}$. De tal modo, dividiendo tanto el numerador como el denominador entre x, se obtiene

$$\frac{3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{\dfrac{3x - 2}{x}}{\dfrac{\sqrt{2x^2 + 1}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{3 - \dfrac{2}{x}}{\sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{x^2}}} = \frac{3 - \dfrac{2}{x}}{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}$$

y se puede tomar el límite de la manera siguiente.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{2}{x}}{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}} = \frac{3 - 0}{\sqrt{2 + 0}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

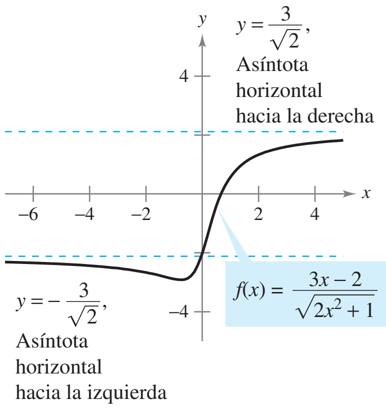
b) Para $x < 0$, puede escribirse $x = -\sqrt{x^2}$. De manera que al dividir tanto el denominador como el numerador entre x, se obtiene

$$\frac{3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{\dfrac{3x - 2}{x}}{\dfrac{\sqrt{2x^2 + 1}}{-\sqrt{x^2}}} = \frac{3 - \dfrac{2}{x}}{-\sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{x^2}}} = \frac{3 - \dfrac{2}{x}}{-\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}$$

y es posible tomar el límite de la manera siguiente.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3 - \dfrac{2}{x}}{-\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}} = \frac{3 - 0}{-\sqrt{2 + 0}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

La gráfica de $f(x) = (3x - 2)/\sqrt{2x^2 + 1}$ se presenta en la figura 3.38.

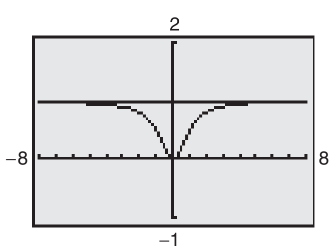


Las funciones que no son racionales pueden tener diferentes asíntotas horizontales derecha e izquierda
Figura 3.38

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Si se utiliza una herramienta de graficación para auxiliarse en la estimación de un límite, cerciorarse de confirmar también la estimación en forma analítica (las imágenes que muestra una herramienta de graficación pueden ser erróneas). Por ejemplo, la figura 3.39 muestra una vista de la gráfica de

$$y = \frac{2x^3 + 1\,000x^2 + x}{x^3 + 1\,000x^2 + x + 1\,000}.$$

De acuerdo con esta imagen, sería convincente pensar que la gráfica tiene a $y = 1$ como una asíntota horizontal. Un enfoque analítico indica que la asíntota horizontal es en realidad $y = 2$. Confirmar lo anterior agrandando la ventana de la observación de la herramienta de graficación.



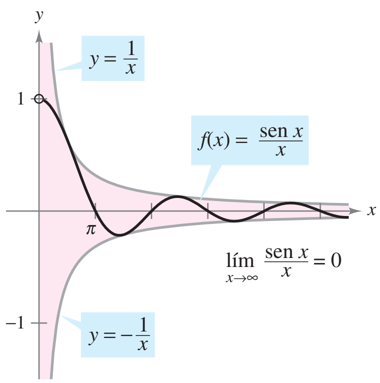
La asíntota horizontal parece ser la recta $y = 1$ pero en realidad es la recta $y = 2$
Figura 3.39

En la sección 1.3 (ejemplo 9) se vio cómo el teorema del encaje se puede utilizar para evaluar límites que incluyen funciones trigonométricas. Este teorema también es válido para límites al infinito.

EJEMPLO 5 Límites que implican funciones trigonométricas

Encontrar cada límite.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$



Cuando x aumenta sin límite $f(x)$ tiende a cero
Figura 3.40

Solución

a) Cuando x tiende a infinito, la función seno oscila entre 1 y -1. De tal manera, este límite no existe.

b) Como $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$, se concluye que para $x > 0$,

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le \frac{1}{x}$$

donde $\lim\limits_{x\to\infty} (-1/x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} (1/x) = 0$. De tal modo, por el teorema del encaje, es posible obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

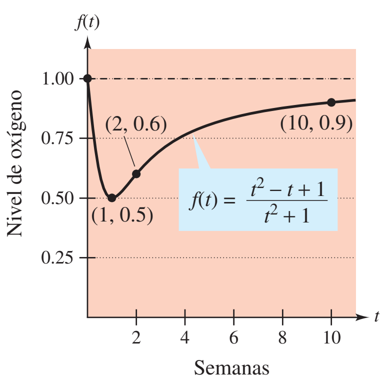
como se muestra en la figura 3.40.

EJEMPLO 6 Nivel de oxígeno en un estanque

Suponga que $f(t)$ mide el nivel de oxígeno en un estanque, donde $f(t) = 1$ es el nivel normal (no contaminado) y el tiempo t se mide en semanas. Cuando $t = 0$, se descarga desperdicio orgánico en el estanque, y como el material de desperdicio se oxida, el nivel de oxígeno en el estanque es

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}.$$

¿Qué porcentaje del nivel normal de oxígeno existe en el estanque después de una semana? ¿Después de dos semanas? ¿Después de 10 semanas? ¿Cuál es el límite cuando t tiende a infinito?



El nivel de oxígeno en el estanque se aproxima a nivel normal de 1 cuando t tiende a ∞
Figura 3.41

Solución Cuando $t = 1$, 2 y 10, los niveles de oxígeno son como se muestra.

$$f(1) = \frac{1^2 - 1 + 1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} = 50\% \qquad \text{1 semana.}$$

$$f(2) = \frac{2^2 - 2 + 1}{2^2 + 1} = \frac{3}{5} = 60\% \qquad \text{2 semanas.}$$

$$f(10) = \frac{10^2 - 10 + 1}{10^2 + 1} = \frac{91}{101} \approx 90.1\% \qquad \text{10 semanas.}$$

Para encontrar el límite cuando t tiende a infinito, dividir el numerador y el denominador entre t^2 con el fin de obtener

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1} = \lim_{t\to\infty} \frac{1 - (1/t) + (1/t^2)}{1 + (1/t^2)} = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0} = 1 = 100\%.$$

Ver la figura 3.41.

Límites infinitos al infinito

Muchas funciones no tienden a un límite finito cuando x crece (o decrece) sin límite. Por ejemplo, ninguna función polinómica tiene un límite finito en infinito. La siguiente definición se usa para describir el comportamiento de funciones polinomiales y de otras funciones al infinito.

NOTA La determinación de si una función tiene un límite infinito al infinito es útil al analizar el "comportamiento asintótico" de la gráfica. Se verán ejemplos de esto en la sección 3.6 sobre dibujo de curvas.

DEFINICIÓN DE LÍMITES INFINITOS AL INFINITO

Sea f una función definida en el intervalo (a, ∞).

1. El enunciado $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ significa que para cada número positivo M, existe un número correspondiente $N > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $x > N$.
2. El enunciado $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ significa que para cada número negativo M, existe un número correspondiente $N > 0$ tal que $f(x) < M$ siempre que $x > N$.

Pueden darse definiciones similares para los enunciados $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

EJEMPLO 7 Determinación de límites infinitos al infinito

Determinar cada límite.

a) $\lim_{x\to\infty} x^3$ *b)* $\lim_{x\to-\infty} x^3$

Solución

a) Cuando x crece sin límite, x^3 también crece sin límite. De tal modo, es posible escribir $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

b) Cuando x decrece sin límite, x^3 también decrece sin límite. En consecuencia, se puede escribir $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

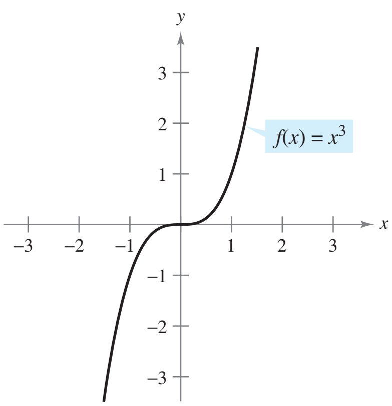


Figura 3.42

La gráfica de $f(x) = x^3$ en la figura 3.42 ilustra estos dos resultados, los cuales concuerdan con el criterio del coeficiente dominante para las funciones polinomiales que se describen en la sección P.3.

EJEMPLO 8 Determinación de límites infinitos al infinito

Encontrar cada límite.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 4x}{x + 1}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 4x}{x + 1}$

Solución Una manera de evaluar cada uno de estos límites consiste en utilizar una división larga para rescribir la función racional impropia como la suma de un polinomio y de una función racional.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 4x}{x + 1} = \lim_{x\to\infty} \left(2x - 6 + \frac{6}{x + 1}\right) = \infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 4x}{x + 1} = \lim_{x\to-\infty} \left(2x - 6 + \frac{6}{x + 1}\right) = -\infty$

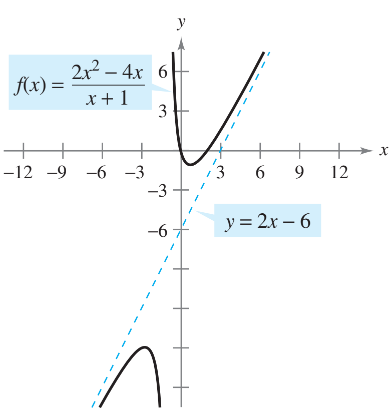


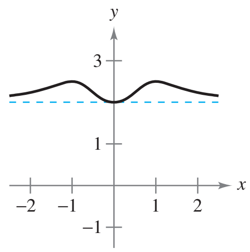
Figura 3.43

Los enunciados anteriores pueden interpretarse diciendo que cuando x tiende a $\pm\infty$, la función $f(x) = (2x^2 - 4x)/(x + 1)$ se comporta como la función $g(x) = 2x - 6$. En la sección 3.6 esto se describe en forma gráfica afirmando que la recta $y = 2x - 6$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f, como se muestra en la figura 3.43.

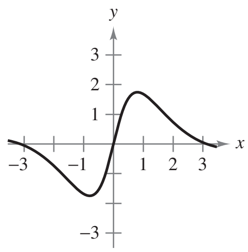
3.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, hacer que corresponda la función con una de las gráficas [*a*), *b*), *c*), *d*), *e*) o *f*)] utilizando como ayuda asíntotas horizontales.

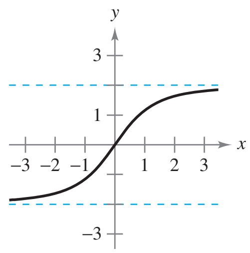
a)



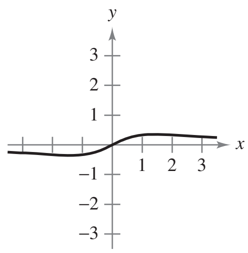
b)



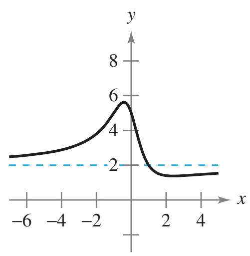
c)



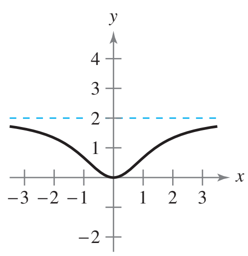
d)



e)



f)



1. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 2}$

2. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

4. $f(x) = 2 + \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

5. $f(x) = \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$

6. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + 1}$

Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 7 a 12, utilizar una herramienta de graficación para completar la tabla y estimar el límite cuando x tiende a infinito. Utilizar después una herramienta de graficación para representar la función y estimar gráficamente el límite.**

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$							

7. $f(x) = \dfrac{4x + 3}{2x - 1}$

8. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x + 1}$

9. $f(x) = \dfrac{-6x}{\sqrt{4x^2 + 5}}$

10. $f(x) = \dfrac{20x}{\sqrt{9x^2 - 1}}$

11. $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x^2 + 1}$

12. $f(x) = 4 + \dfrac{3}{x^2 + 2}$

En los ejercicios 13 y 14, determinar $\lim\limits_{x \to \infty} h(x)$, si es posible.

13. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10x$

a) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ *b*) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$

c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^4}$

14. $f(x) = -4x^2 + 2x - 5$

a) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ *b*) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$

c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$

En los ejercicios 15 a 18, encontrar cada límite, si es posible.

15. *a*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2}{x^3 - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2}{x - 1}$

16. *a*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - 2x}{3x^3 - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - 2x}{3x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - 2x^2}{3x - 1}$

17. *a*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 - 2x^{3/2}}{3x^2 - 4}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 - 2x^{3/2}}{3x^{3/2} - 4}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 - 2x^{3/2}}{3x - 4}$

18. *a*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^{3/2}}{4x^2 + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^{3/2}}{4x^{3/2} + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^{3/2}}{4\sqrt{x} + 1}$

En los ejercicios 19 a 38, encontrar el límite.

19. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(4 + \dfrac{3}{x}\right)$

20. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{5}{x} - \dfrac{x}{3}\right)$

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 1}{3x + 2}$

22. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3}{2x^2 - 1}$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - 1}$

24. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 + 1}{10x^3 - 3x^2 + 7}$

25. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^2}{x + 3}$

26. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{4}{x^2}\right)$

27. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$

28. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

29. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - x}}$

30. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 + x}}$

31. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x - 1}$

32. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4 - 1}}{x^3 - 1}$

33. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 1}{(x^2 + 1)^{1/3}}$

34. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{(x^6 - 1)^{1/3}}$

35. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2x + \operatorname{sen} x}$

36. $\lim\limits_{x \to \infty} \cos \dfrac{1}{x}$

37. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

38. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \cos x}{x}$

En los ejercicios 39 a 42, utilizar una herramienta de graficación para representar la función e identificar cualquier asíntota horizontal.

39. $f(x) = \dfrac{|x|}{x + 1}$ **40.** $f(x) = \dfrac{|3x + 2|}{x - 2}$

41. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 2}}$ **42.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^2 - 2}}{2x + 1}$

En los ejercicios 43 y 44, determinar el límite. (*Sugerencia*: Sea $x = 1/t$ y encontrar el límite cuando $t \to 0^+$.)

43. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ **44.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \tan \frac{1}{x}$

En los ejercicios 45 a 48, encontrar el límite. (*Sugerencia*: Tratar la expresión como una fracción cuyo denominador es 1 y racionalizar el numerador.) Utilizar una herramienta de graficación para verificar su resultado.

45. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 3}\right)$ **46.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x}\right)$

47. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(3x + \sqrt{9x^2 - x}\right)$ **48.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(4x - \sqrt{16x^2 - x}\right)$

Análisis numérico, gráfico y analítico **En los ejercicios 49 a 52, utilizar una herramienta de graficación para completar la tabla y estimar el límite cuando x tiende a infinito. Emplear después una herramienta de graficación para representar la función y estimar el límite. Por último, encontrar el límite analíticamente y comparar los resultados con las estimaciones.**

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$							

49. $f(x) = x - \sqrt{x(x - 1)}$ **50.** $f(x) = x^2 - x\sqrt{x(x - 1)}$

51. $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{2x}$ **52.** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x\sqrt{x}}$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 53 y 54, describir en sus propias palabras el significado de los siguientes enunciados.

53. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$ **54.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

55. Dibujar una gráfica de una función derivable que satisfaga las siguientes condiciones y tenga $x = 2$ como su único punto crítico.

$f'(x) < 0$ para $x < 2$ $\qquad f'(x) > 0$ para $x > 2$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 6$

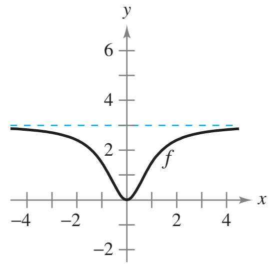
56. ¿Es posible dibujar una gráfica de una función que satisface las condiciones del ejercicio 55 y que *no* tiene puntos de inflexión? Explicar.

57. Si f es una función continua tal que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$, determinar, si es posible, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ para cada condición especificada.

a) La gráfica de f es simétrica al eje y.
b) La gráfica de f es simétrica al origen.

Para discusión

58. La gráfica de una función se muestra a continuación.



a) Dibujar f'.
b) Utilizar las gráficas para estimar $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)$.
c) Explicar las respuestas que se obtuvieron en el apartado *b*).

En los ejercicios 59 a 76, dibujar la gráfica de la función utilizando extremos, intersecciones, simetría y asíntotas. Emplear después una herramienta de graficación para verificar el resultado.

59. $y = \dfrac{x}{1 - x}$ **60.** $y = \dfrac{x - 4}{x - 3}$

61. $y = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$ **62.** $y = \dfrac{2x}{9 - x^2}$

63. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 16}$ **64.** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 16}$

65. $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}$ **66.** $y = \dfrac{2x^2}{x^2 + 4}$

67. $xy^2 = 9$ **68.** $x^2y = 9$

69. $y = \dfrac{3x}{1 - x}$ **70.** $y = \dfrac{3x}{1 - x^2}$

71. $y = 2 - \dfrac{3}{x^2}$ **72.** $y = 1 + \dfrac{1}{x}$

73. $y = 3 + \dfrac{2}{x}$ **74.** $y = 4\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

75. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}}$ **76.** $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

En los ejercicios 77 a 84, utilizar un sistema algebraico por computadora para analizar la gráfica de la función. Marcar cualquier extremo y/o asíntota que existan.

77. $f(x) = 9 - \dfrac{5}{x^2}$ **78.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$

79. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4x + 3}$ **80.** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + x + 1}$

81. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$ **82.** $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

83. $g(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - 2}\right), \quad x > 3$ **84.** $f(x) = \dfrac{2 \operatorname{sen} 2x}{x}$

En los ejercicios 85 y 86, *a*) emplear una herramienta de graficación para representar *f* y *g* en la misma ventana de observación, *b*) verificar algebraicamente que *f* y *g* representan la misma función y *c*) hacer un acercamiento suficiente para que la gráfica aparezca como una recta. ¿Qué ecuación parece tener esta recta? (Notar que todos los puntos en los cuales la función no es continua no se observan con facilidad cuando se realiza el acercamiento.)

85. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x(x-3)}$

$g(x) = x + \dfrac{2}{x(x-3)}$

86. $f(x) = -\dfrac{x^3 - 2x^2 + 2}{2x^2}$

$g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{1}{x^2}$

87. ***Eficiencia de un motor*** La eficiencia de un motor de combustión interna es

$$\text{Eficiencia } (\%) = 100\left[1 - \frac{1}{(v_1/v_2)^c}\right]$$

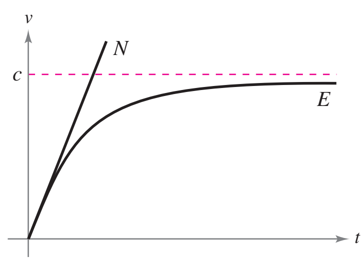
donde v_1/v_2 es la razón entre el gas no comprimido y el gas comprimido y c es una constante positiva que depende del diseño del motor. Encontrar el límite de la eficiencia cuando la razón de compresión se acerca a infinito.

88. ***Costo promedio*** Un negocio tiene un costo de $C = 0.5x + 500$ para producir x unidades. El costo promedio por unidad es

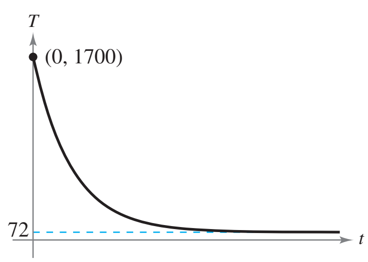
$\overline{C} = \dfrac{C}{x}.$

Encontrar el límite de $\overline{C}$ cuando x tiende a infinito.

89. ***Física*** La primera ley de movimiento de Newton y la teoría especial de la relatividad de Einstein difieren en lo que respecta al comportamiento de las partículas cuando su velocidad se acerca a la velocidad de la luz, c. Las funciones N y E representan la velocidad predicha, v, con respecto al tiempo, t, para una partícula acelerada por una fuerza constante como lo predijeron Newton y Einstein. Desarrollar una condición límite que describa a cada teoría.



90. ***Temperatura*** La gráfica muestra la temperatura T, en grados Fahrenheit, de un pastel de manzana t segundos después de que se saca del horno y se pone en una repisa de enfriamiento.



a) Determinar $\lim\limits_{t \to 0^+} T$. ¿Qué representa este límite?

b) Encontrar $\lim\limits_{t \to \infty} T$. ¿Qué representa este límite?

c) ¿La temperatura del vidrio alcanzará en algún momento la temperatura del cuarto? ¿Por qué?

91. ***Modelado matemático*** La tabla muestra los tiempos del récord mundial para la carrera de una milla, donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 1900 y y es el tiempo en minutos y segundos.

t	23	33	45	54	58	66	79	85	99
y	4:10.4	4:07.6	4:01.3	3:59.4	3:54.5	3:51.3	3:48.9	3:46.3	3:43.1

Un modelo para los datos es

$$y = \frac{3.351t^2 + 42.461t - 543.730}{t^2}$$

donde los segundos se han cambiado a partes decimales de un minuto.

a) Emplear una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

b) ¿Parece haber un tiempo límite para la carrera de una milla? Explicar la respuesta.

92. ***Modelado matemático*** La tabla muestra la velocidad media S a la que un estudiante de mecanografía teclea t semanas después de iniciar su aprendizaje.

t	5	10	15	20	25	30
S	28	56	79	90	93	94

Un modelo para los datos es $S = \dfrac{100t^2}{65 + t^2},\quad t > 0.$

a) Recurrir a una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

b) ¿Parece haber alguna velocidad para mecanografiar límite? Explicar.

93. ***Modelado matemático*** Una zona de calor se une a un intercambiador de calor de un sistema calefactor. La temperatura T (grados Celsius) se registra t segundos después de que el horno empieza su operación. Los resultados para los primeros dos minutos se registran en la tabla.

t	0	15	30	45	60	75	90	105	120
T	25.2°	36.9°	45.5°	51.4°	56.0°	59.6°	62.0°	64.0°	65.2°

a) Utilizar los programas para el cálculo de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $T_1 = at^2 + bt + c$ para los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar T_1.

c) Un modelo racional para los datos es $T_2 = \dfrac{1\,451 + 86t}{58 + t}$. Emplear una herramienta de graficación para representar el modelo T_2.

d) Determinar $T_1(0)$ y $T_2(0)$.

e) Encontrar $\lim\limits_{t \to \infty} T_2$.

f) Interpretar el resultado del apartado *e*) en el contexto del problema. ¿Es posible efectuar este tipo de análisis utilizando T_1? Explicar.

94. ***Modelado matemático*** Un recipiente contiene 5 litros de una solución salina al 25%. La tabla muestra las concentraciones C de la mezcla después de agregar x litros de una solución salina al 75% al recipiente.

x	0	0.5	1	1.5	2
C	0.25	0.295	0.333	0.365	0.393

x	2.5	3	3.5	4
C	0.417	0.438	0.456	0.472

a) Utilizar las características de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $C_1 = ax^2 + bx + c$ para los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar C_1.

c) Un modelo racional para estos datos es $C_2 = \dfrac{5 + 3x}{20 + 4x}$. Utilizar una herramienta de graficación para representar C_2.

d) Determinar $\lim\limits_{x\to\infty} C_1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} C_2$. ¿Qué modelo representa mejor la concentración de la mezcla? Explicar.

e) ¿Cuál es la concentración límite?

95. Una recta con una pendiente m pasa por el punto (0, 4).

a) Escribir la distancia d entre la recta y el punto (3, 1) como una función de m.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la ecuación del apartado *a*).

c) Determinar $\lim\limits_{m\to\infty} d(m)$ y $\lim\limits_{m\to-\infty} d(m)$. Interpretar geométricamente los resultados.

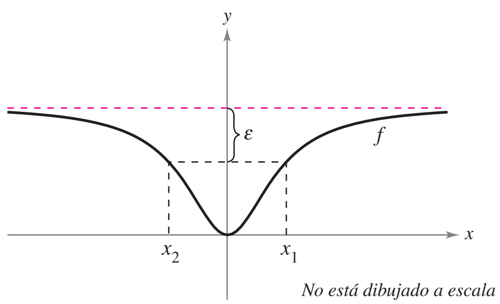
96. Una recta con pendiente m pasa por el punto (0, –2).

a) Escribir la distancia d entre la recta y el punto (4, 2) como una función de m.

b) Emplear una herramienta de graficación para representar la ecuación del apartado *a*).

c) Determinar $\lim\limits_{m\to\infty} d(m)$ y $\lim\limits_{m\to-\infty} d(m)$. Interpretar geométricamente los resultados.

97. Se muestra la gráfica de $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 2}$.



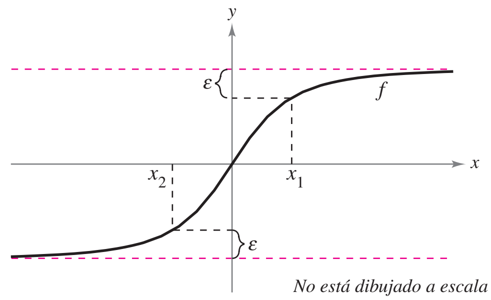
a) Determinar $L = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Determinar x_1 y x_2 en términos de ε.

c) Determinar M, donde $M > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para $x > M$.

d) Determinar N, donde $N < 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para $x < N$.

98. Se muestra la gráfica de $f(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{x^2 + 2}}$.



a) Encontrar $L = \lim\limits_{m\to\infty} f(x)$ y $K \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determinar x_1 y x_2 en términos de ε.

c) Determinar M, donde $M > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para $x > M$

d) Determinar N, donde $N < 0$, tal que $|f(x) - K| < \varepsilon$ para $x < N$.

99. Considerar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$. Utilizar la definición de límites al infinito para encontrar los valores de M que corresponden a *a*) $\varepsilon = 0.5$ y *b*) $\varepsilon = 0.1$.

100. Considerar $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$. Utilizar la definición de límites al infinito para encontrar los valores de N que correspondan a *a*) $\varepsilon = 0.5$ y *b*) $\varepsilon = 0.1$.

En los ejercicios 101 a 104, usar la definición de límites al infinito para comprobar el límite.

101. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

102. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$

103. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$

104. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x - 2} = 0$

105. Demostrar que si $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ $(a_n \neq 0,\ b_m \neq 0)$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0, & n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & n = m. \\ \pm\infty, & n > m \end{cases}$$

106. Utilizar la definición de límites infinitos al infinito para demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 107 y 108, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre dicha falsedad.**

107. Si $f'(x) > 0$ para todo número real x, entonces f es creciente sin límite.

108. Si $f''(x) < 0$ para todo número real x, entonces f es decreciente sin límite.

3.6 Análisis de gráficas

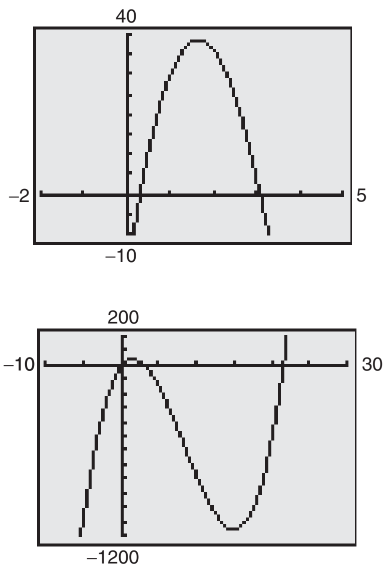
- **Analizar y trazar la gráfica de una función.**

Análisis de la gráfica de una función

Sería difícil exagerar la importancia de usar gráficas en matemáticas. La introducción de la geometría analítica por parte de Descartes contribuyó de manera significativa a los rápidos avances en el cálculo que se iniciaron durante la mitad del siglo XVII. En palabras de Lagrange: "Mientras el álgebra y la geometría recorrieron caminos independientes, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Sin embargo, cuando estas dos ciencias se juntaron, extrajeron una de la otra una fresca vitalidad y a partir de ahí marcharon a gran velocidad hacia la perfección."

Hasta ahora, se han estudiado varios conceptos que son útiles al analizar la gráfica de una función.

- Intersecciones con los ejes *x* y *y* (sección P.1)
- Simetría (sección P.1)
- Dominio y rango o recorrido (sección P.3)
- Continuidad (sección 1.4)
- Asíntotas verticales (sección 1.5)
- Derivabilidad (sección 2.1)
- Extremos relativos (sección 3.1)
- Concavidad (sección 3.4)
- Puntos de inflexión (sección 3.4)
- Asíntotas horizontales (sección 3.5)
- Límites infinitos al infinito (sección 3.5)



Diferentes ventanas de observación para la gráfica de $f(x) = x^3 - 25x^2 + 74x - 20$
Figura 3.44

Al dibujar la gráfica de una función, ya sea en forma manual o por medio de una herramienta gráfica, recordar que normalmente no es posible mostrar la gráfica *entera*. La decisión en cuanto a la parte de la gráfica que se decide mostrar es muchas veces crucial. Por ejemplo, ¿cuál de las ventanas de observación en la figura 3.44 representa mejor a la gráfica de

$$f(x) = x^3 - 25x^2 + 74x - 20?$$

Al ver ambas imágenes, es claro que la segunda ventana de observación proporciona una representación más completa de la gráfica. Sin embargo, ¿una tercera ventana de observación revelaría otras porciones interesantes de la gráfica? Para responder a esta pregunta, es necesario utilizar el cálculo para interpretar la primera y la segunda derivadas. A continuación se presentan unas estrategias para determinar una buena ventana de observación de la gráfica de una función.

Estrategia para analizar la gráfica de una función

1. Determinar el dominio y el rango de la función.
2. Determinar las intersecciones, asíntotas y simetría de la gráfica.
3. Localizar los valores de x para los cuales $f'(x)$ y $f''(x)$ son cero o no existen. Usar los resultados para determinar extremos relativos y puntos de inflexión.

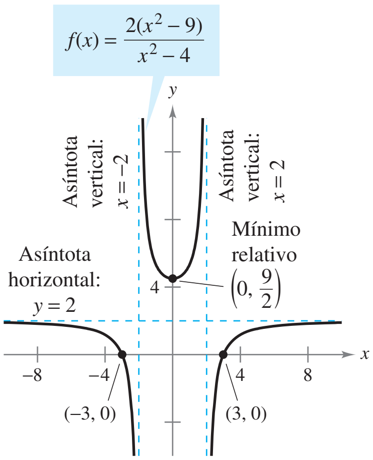
NOTA En estas estrategias, advertir la importancia del *álgebra* (así como del cálculo) para resolver las ecuaciones $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ y $f''(x) = 0$.

EJEMPLO 1 Dibujo de la gráfica de una función racional

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = \dfrac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$.

Solución

Primera derivada:	$f'(x) = \dfrac{20x}{(x^2 - 4)^2}$
Segunda derivada:	$f''(x) = \dfrac{-20(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$
Intersecciones en x:	$(-3, 0), (3, 0)$
Intersección en y:	$\left(0, \frac{9}{2}\right)$
Asíntotas verticales:	$x = -2, x = 2$
Asíntota horizontal:	$y = 2$
Punto crítico:	$x = 0$
Posibles puntos de inflexión:	Ninguno
Dominio:	Todos los números reales excepto $x = \pm 2$
Simetría:	Con respecto al eje y
Intervalos de prueba:	$(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, \infty)$



Empleando el cálculo, se puede tener la certeza de que se han determinado todas las características de la gráfica de *f*
Figura 3.45

La tabla muestra cómo se usan los intervalos de prueba para determinar varias características de la gráfica. La gráfica de f se ilustra en la figura 3.45.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Característica de la gráfica
$-\infty < x < -2$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = -2$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$-2 < x < 0$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 0$	$\frac{9}{2}$	0	$+$	Mínimo relativo
$0 < x < 2$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 2$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$2 < x < \infty$		$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo

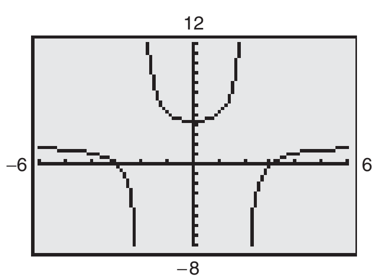
PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información del uso de tecnología para representar funciones racionales, consultar el artículo “Graphs of Rational Functions for Computer Assisted Calculus” de Stan Bird y Terry Walters en *The College Mathematics Journal*.

Asegurarse de entender todas las indicaciones de la creación de una tabla tal como la que se muestra en el ejemplo 1. Debido al uso del cálculo, se debe *estar seguro* de que la gráfica no tiene extremos relativos o puntos de inflexión aparte de los que se muestran en la figura 3.45.

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Sin utilizar el tipo de análisis que se describe en el ejemplo 1, es fácil obtener una visión incompleta de las características básicas de la gráfica. Por ejemplo, la figura 3.46 muestra una imagen de la gráfica de

$$g(x) = \frac{2(x^2 - 9)(x - 20)}{(x^2 - 4)(x - 21)}.$$

De acuerdo con esta imagen, parece que la gráfica de g es casi la misma que la gráfica de f que se muestra en la figura 3.45. Sin embargo, las gráficas de estas dos funciones difieren bastante. Tratar de agrandar la ventana de observación para ver las diferencias.



Al no usar el cálculo se puede pasar por alto importantes características de la gráfica de *g*
Figura 3.46

EJEMPLO 2 Dibujo de la gráfica de una función racional

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$.

Solución

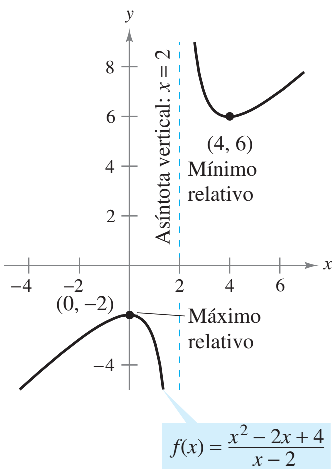


Figura 3.47

Primera derivada: $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

Segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{8}{(x-2)^3}$

Intersecciones en x: Ninguna

Intersección en y: $(0, -2)$

Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntotas horizontales: Ninguna

Comportamiento final o asintótico: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Puntos críticos: $x = 0, x = 4$

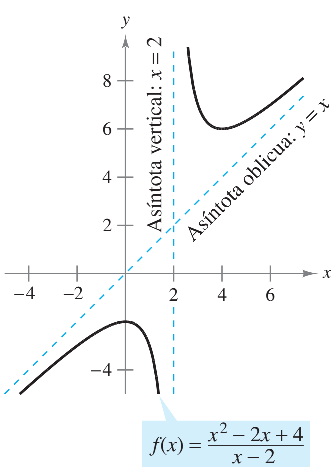
Posibles puntos de inflexión: Ninguno

Dominio: Todos los números reales excepto $x = 2$

Intervalos de prueba: $(-\infty, 0), (0, 2), (2, 4), (4, \infty)$

El análisis de la gráfica de f se muestra en la tabla, y la gráfica se ilustra en la figura 3.47.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$-\infty < x < 0$		$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	-2	0	$-$	Máximo relativo
$0 < x < 2$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 2$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$2 < x < 4$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 4$	6	0	$+$	Mínimo relativo
$4 < x < \infty$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba



Una asíntota oblicua
Figura 3.48

Aunque la gráfica de la función en el ejemplo 2 no tiene asíntota horizontal, tiene una asíntota oblicua. La gráfica de una función racional (que no tiene factores comunes y cuyo denominador es de grado 1 o mayor) tiene una **asíntota oblicua** si el grado del numerador excede al grado del denominador exactamente en 1. Para determinar la asíntota oblicua, usar la división larga para describir la función racional como la suma de un polinomio de primer grado y otra función racional.

$$f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2} \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$= x + \frac{4}{x-2} \qquad \text{Reescribir utilizando la división larga.}$$

En la figura 3.48, advertir que la gráfica de f se acerca a la asíntota oblicua $y = x$ cuando x tiende a $-\infty$ o ∞.

EJEMPLO 3 Dibujo de la gráfica de una función radical

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

Solución

$$f'(x) = \frac{2}{(x^2+2)^{3/2}} \qquad f''(x) = -\frac{6x}{(x^2+2)^{5/2}}$$

La gráfica sólo tiene una intersección, (0, 0). No tiene asíntotas verticales, pero cuenta con dos asíntotas horizontales: $y = 1$ (a la derecha) y $y = -1$ (a la izquierda). La función no tiene puntos críticos y sólo un posible punto de inflexión ($x = 0$). El dominio de la función son todos los números reales, y la gráfica es simétrica con respecto al origen. El análisis de la gráfica de f se muestra en la tabla, y la gráfica se presenta en la figura 3.49.

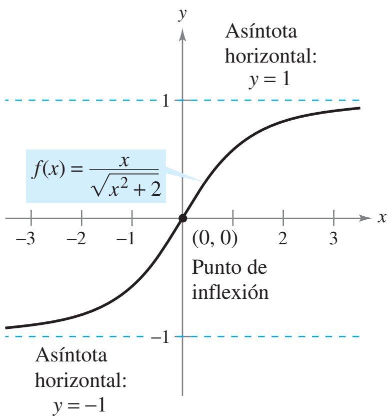


Figura 3.49

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$-\infty < x < 0$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 0$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	Punto de inflexión
$0 < x < \infty$		+	−	Creciente, cóncava hacia abajo

EJEMPLO 4 Dibujo de la gráfica de una función radical

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}$.

Solución

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{1/3}(x^{1/3} - 2) \qquad f''(x) = \frac{20(x^{1/3} - 1)}{9x^{2/3}}$$

La función tiene dos intersecciones: (0, 0) y $\left(\frac{125}{8}, 0\right)$. No hay asíntotas horizontales o verticales. La función tiene dos puntos críticos ($x = 0$ y $x = 8$) y dos posibles puntos de inflexión ($x = 0$ y $x = 1$). El dominio son todos los números reales. El análisis de la gráfica de f se presenta en la tabla, y la gráfica se ilustra en la figura 3.50.

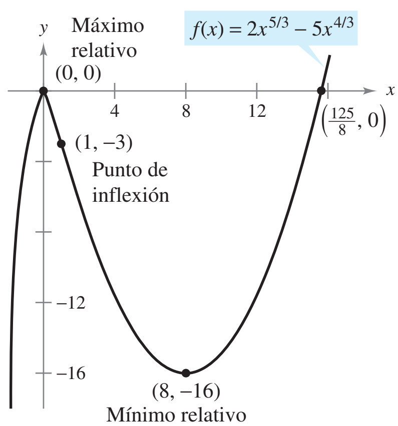


Figura 3.50

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$-\infty < x < 0$		+	−	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	0	Indef.	Máximo relativo
$0 < x < 1$		−	−	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 1$	−3	−	0	Punto de inflexión
$1 < x < 8$		−	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 8$	−16	0	+	Mínimo relativo
$8 < x < \infty$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba

EJEMPLO 5 Dibujo de la gráfica de una función polinomial

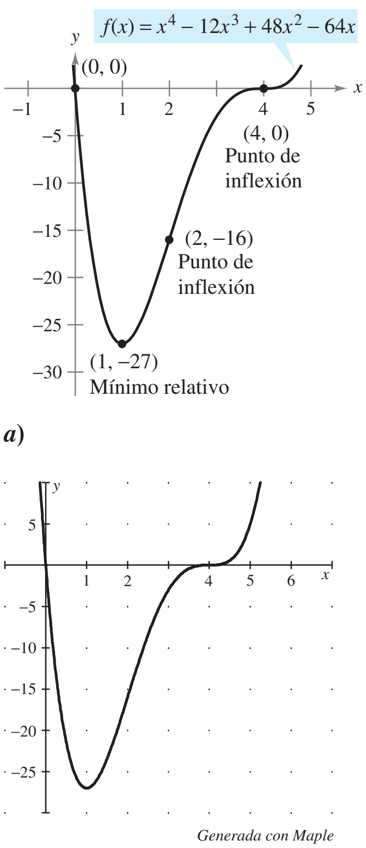
Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$.

Solución Se inicia factorizando para obtener

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x \\ &= x(x-4)^3. \end{aligned}$$

Luego, utilizando la forma factorizada de $f(x)$, se puede efectuar el siguiente análisis.

Primera derivada:	$f'(x) = 4(x-1)(x-4)^2$
Segunda derivada:	$f''(x) = 12(x-4)(x-2)$
Intersecciones en x:	$(0, 0), (4, 0)$
Intersección en y:	$(0, 0)$
Asíntotas verticales:	Ninguna
Asíntotas horizontales:	Ninguna
Comportamiento final o asintótico:	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
Puntos críticos:	$x = 1, x = 4$
Posibles puntos de inflexión:	$x = 2, x = 4$
Dominio:	Todos los números reales
Intervalos de prueba:	$(-\infty, 1), (1, 2), (2, 4), (4, \infty)$



a)

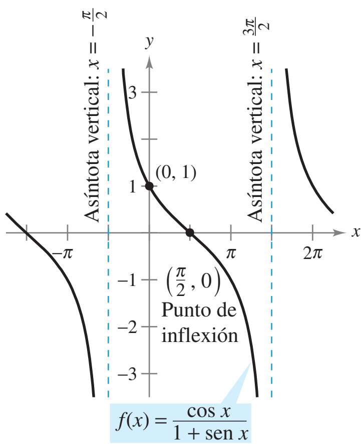
b)
Una función polinomial de grado par debe tener al menos un extremo relativo
Figura 3.51

El análisis de la gráfica de f se muestra en la tabla, y la gráfica se presenta en la figura 3.51*a*. El uso de un sistema de álgebra por computadora como *Maple* (ver la figura 3.51*b*) puede resultar de utilidad para verificar el análisis.

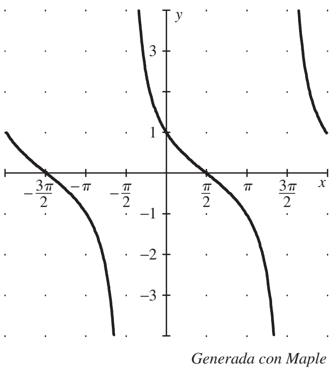
	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Característica de la gráfica
$-\infty < x < 1$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 1$	-27	0	$+$	Mínimo relativo
$1 < x < 2$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 2$	-16	$+$	0	Punto de inflexión
$2 < x < 4$		$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 4$	0	0	0	Punto de inflexión
$4 < x < \infty$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba

La función polinomial de cuarto grado del ejemplo 5 tiene un mínimo relativo y ningún máximo relativo. En general, una función polinomial de grado n puede tener *a lo más* $n - 1$ extremos relativos, y *cuando mucho* $n - 2$ puntos de inflexión. Además, las funciones polinomiales de grado par deben tener *al menos* un extremo relativo.

Recordemos del criterio del coeficiente adelantado o dominante que se describió en la sección P.3 que el "comportamiento final" o asintótico de la gráfica de una función polinomial se determina mediante su coeficiente dominante y por su grado. Por ejemplo, debido a que el polinomio en el ejercicio 5 tiene un coeficiente dominante positivo, la gráfica crece hacia la derecha. Además, como el grado es par, la gráfica también crece hacia la izquierda.



a)



b)
Figura 3.52

EJEMPLO 6 Dibujo de la gráfica de una función trigonométrica

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$.

Solución Debido a que la función tiene un periodo de 2π, se puede restringir el análisis de la gráfica a cualquier intervalo de longitud 2π. Por conveniencia, utilizar $(-\pi/2, 3\pi/2)$.

Primera derivada: $f'(x) = -\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$

Segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}$

Periodo: 2π

Intersección en x: $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

Intersección en y: $(0, 1)$

Asíntotas verticales: $x = -\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{3\pi}{2}$ Véase nota anterior.

Asíntotas horizontales: Ninguna

Puntos críticos: Ninguno

Posibles puntos de inflexión: $x = \dfrac{\pi}{2}$

Dominio: Todos los números reales excepto $x = \dfrac{3 + 4n}{2}\pi$

Intervalos de prueba: $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

El análisis de la gráfica de f en el intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$ se muestra en la tabla, y la gráfica se presenta en la figura 3.52*a*. Comparar esto con la gráfica generada por el sistema algebraico por computadora *Maple* en la figura 3.52*b*.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$x = -\dfrac{\pi}{2}$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = \dfrac{\pi}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	0	Punto de inflexión
$\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = \dfrac{3\pi}{2}$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical

NOTA Sustituyendo $-\pi/2$ o $3\pi/2$ en la función, se obtiene la forma $0/0$. Ésta recibe el nombre de forma indeterminada y se estudiará en la sección 8.7. Para determinar si la función tiene asíntotas verticales en estos dos valores, es posible rescribir las funciones como sigue.

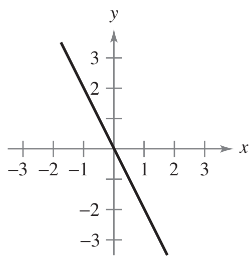
$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{(\cos x)(1 - \operatorname{sen} x)}{(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{(\cos x)(1 - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

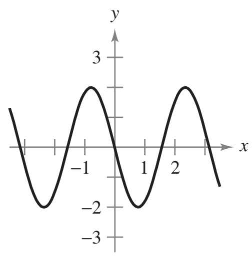
En esta forma, es claro que la gráfica de f tiene asíntotas verticales cuando $x = -\pi/2$ y $3\pi/2$. ■

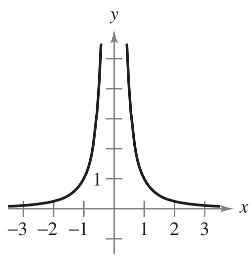
3.6 Ejercicios

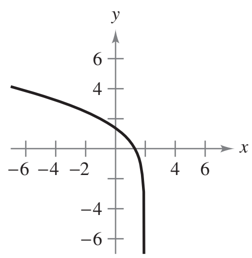
En los ejercicios 1 a 4, hacer que corresponda la gráfica de f en la columna izquierda con la de su derivada en la columna derecha.

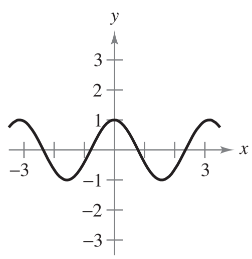
Gráfica de f *Gráfica de f'*

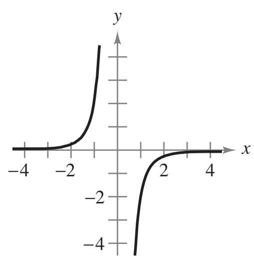
1.


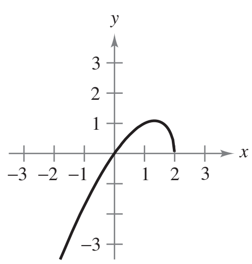
a)


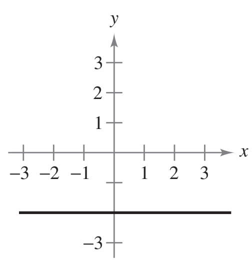
2.


b)


3.


c)


4.


d)


En los ejercicios 5 a 32, analizar y dibujar una gráfica de la función. Indicar todas las intersecciones, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Utilizar una herramienta de graficación para verificar los resultados.

5. $y = \dfrac{1}{x - 2} - 3$

6. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

7. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

8. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$

9. $y = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$

10. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x}$

11. $g(x) = x - \dfrac{8}{x^2}$

12. $f(x) = x + \dfrac{32}{x^2}$

13. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

14. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$

15. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 12}{x - 4}$

16. $y = \dfrac{2x^2 - 5x + 5}{x - 2}$

17. $y = x\sqrt{4 - x}$

18. $g(x) = x\sqrt{9 - x}$

19. $h(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

20. $g(x) = x\sqrt{9 - x^2}$

21. $y = 3x^{2/3} - 2x$

22. $y = 3(x - 1)^{2/3} - (x - 1)^2$

23. $y = x^3 - 3x^2 + 3$

24. $y = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x + 2)$

25. $y = 2 - x - x^3$

26. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 1)^3 + 2$

27. $y = 3x^4 + 4x^3$

28. $y = 3x^4 - 6x^2 + \frac{5}{3}$

29. $y = x^5 - 5x$

30. $y = (x - 1)^5$

31. $y = |2x - 3|$

32. $y = |x^2 - 6x + 5|$

CAS **En los ejercicios 33 a 36, utilizar un sistema algebraico por computadora para analizar y representar gráficamente la función. Identificar todos los extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas.**

33. $f(x) = \dfrac{20x}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{x}$

34. $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2 + 1}$

35. $f(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2 + 7}}$

36. $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + 15}}$

En los ejercicios 37 a 46, dibujar una gráfica de la función sobre el intervalo dado. Utilizar una herramienta de graficación para verificar la gráfica.

37. $f(x) = 2x - 4\operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

38. $f(x) = -x + 2\cos x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

39. $y = \operatorname{sen} x - \frac{1}{18}\operatorname{sen} 3x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

40. $y = \cos x - \frac{1}{4}\cos 2x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

41. $y = 2x - \tan x, \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

42. $y = 2(x - 2) + \cot x, \quad 0 < x < \pi$

43. $y = 2(\csc x + \sec x), \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

44. $y = \sec^2\left(\dfrac{\pi x}{8}\right) - 2\tan\left(\dfrac{\pi x}{8}\right) - 1, \quad -3 < x < 3$

45. $g(x) = x\tan x, \quad -\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$

46. $g(x) = x\cot x, \quad -2\pi < x < 2\pi$

Desarrollo de conceptos

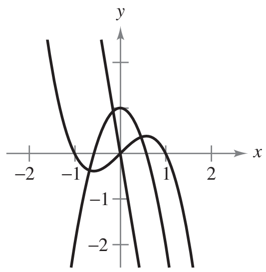
47. Suponer que $f'(t) < 0$ para todo t en el intervalo $(2, 8)$. Explicar por qué $f(3) > f(5)$.

48. Suponer que $f(0) = 3$ y $2 \le f'(x) \le 4$ para todo x en el intervalo $[-5, 5]$. Determinar los valores más grande y más pequeño posibles de $f(2)$.

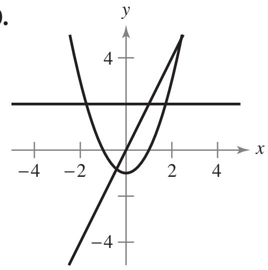
Desarrollo de conceptos (*continuación*)

En los ejercicios 49 y 50, las gráficas de f, f' y f'' se muestran sobre el mismo conjunto de ejes de coordenadas. ¿Cuál es cuál? Explicar el razonamiento.

49.



50.



En los ejercicios 51 a 54, utilizar una herramienta de graficación para representar la función. Emplear la gráfica para determinar, si es posible, que la gráfica de la función cruce su asíntota horizontal. ¿Es posible que la gráfica de una función cruce su asíntota vertical? ¿Por qué sí o por qué no?

51. $f(x) = \dfrac{4(x-1)^2}{x^2 - 4x + 5}$ **52.** $g(x) = \dfrac{3x^4 - 5x + 3}{x^4 + 1}$

53. $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ **54.** $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{4x}$

En los ejercicios 55 y 56, emplear una herramienta de graficación para representar la función. Explicar por qué no hay asíntota vertical cuando una inspección superficial de la función quizá indique que debería haber una.

55. $h(x) = \dfrac{6 - 2x}{3 - x}$ **56.** $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

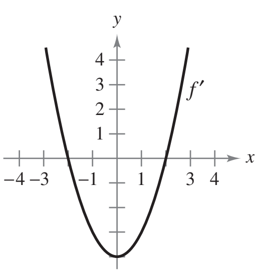
En los ejercicios 57 a 60, utilizar una herramienta de graficación para representar la función y determinar la asíntota oblicua de la gráfica. Realizar acercamientos repetidos y describir cómo parece cambiar la gráfica que se exhibe. ¿Por qué ocurre lo anterior?

57. $f(x) = -\dfrac{x^2 - 3x - 1}{x - 2}$ **58.** $g(x) = \dfrac{2x^2 - 8x - 15}{x - 5}$

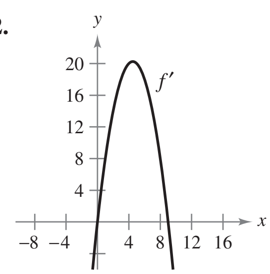
59. $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$ **60.** $h(x) = \dfrac{-x^3 + x^2 + 4}{x^2}$

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 61 a 64, utilizar la gráfica de f' para dibujar la gráfica de f y la gráfica de f''.**

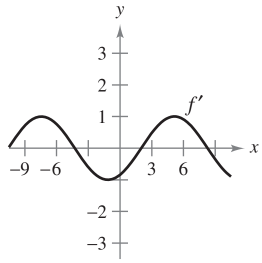
61.



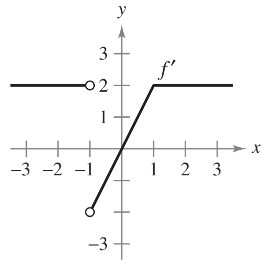
62.



63.



64.



(*Proporcionado por Big Fox, Moverly Area Community College, Moverly MO*)

CAS **65.** ***Razonamiento gráfico*** Considerar la función

$$f(x) = \frac{\cos^2 \pi x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad 0 < x < 4.$$

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar la función y emplear la gráfica para aproximar en forma visual los puntos críticos.

b) Emplear un sistema algebraico por computadora para determinar f' y aproximar los puntos críticos. ¿Los resultados son los mismos que los de la aproximación visual del apartado *a*)? Explicar.

66. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la función

$f(x) = \tan(\operatorname{sen} \pi x)$.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función.

b) Identificar toda simetría de la gráfica.

c) ¿Es periódica la función? Si es así, ¿cuál es el periodo?

d) Identificar todos los extremos en $(-1, 1)$.

e) Utilizar una herramienta de graficación para determinar la concavidad de la gráfica en $(0, 1)$.

Para pensar **En los ejercicios 67 a 70, crear una función cuya gráfica tiene las características indicadas. (Hay más de una respuesta correcta.)**

67. Asíntota vertical: $x = 3$

Asíntota horizontal: $y = 0$

68. Asíntota vertical: $x = -5$

Asíntota horizontal: ninguna

69. Asíntota vertical: $x = 3$

Asíntota oblicua: $y = 3x + 2$

70. Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota oblicua: $y = -x$

71. ***Razonamiento gráfico*** A continuación se muestra la gráfica de la función f.

a) ¿Para cuáles valores de x es $f'(x)$ cero, positiva y negativa?

b) ¿Para cuáles valores de x es $f''(x)$ cero, positiva y negativa?

c) ¿Sobre qué intervalo la función f' es creciente?

d) ¿Para qué valor de x la función $f'(x)$ tiene un mínimo? Para este valor de x, ¿cómo se comporta la razón de cambio de f en comparación con la razón de cambio para otros valores? Explicar.

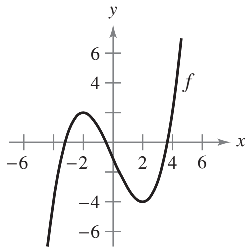


Figura para 71

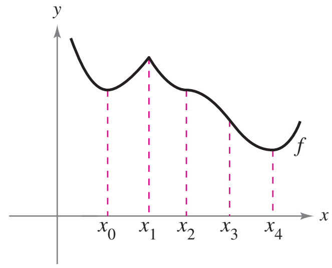


Figura para 72

Para discusión

72. ***Razonamiento gráfico*** Identificar en la figura los números reales x_0, x_1, x_2, x_3 y x_4 de tal manera que los siguientes enunciados sean verdaderos.

a) $f'(x) = 0$ *b)* $f''(x) = 0$

c) $f'(x)$ no existe. *d)* f tiene un máximo relativo.

e) f tiene un punto de inflexión.

73. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la función

$$f(x) = \frac{ax}{(x - b)^2}.$$

Determinar el efecto sobre la gráfica de f si a y b cambian. Considerar casos en los que a y b son ambos positivos o ambos negativos, y casos en los que a y b tienen signos opuestos.

74. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{2}(ax)^2 - (ax)$, $a \neq 0$.

a) Determinar los cambios (si los hay) en las intersecciones, los extremos y la concavidad de la gráfica f cuando varía a.

b) En la misma ventana de observación, utilizar una herramienta de graficación para representar la función relativa a 4 valores diferentes de a.

75. ***Investigación*** Considerar la función

$$f(x) = \frac{2x^n}{x^4 + 1}$$

para valores enteros no negativos de n.

a) Analizar la relación entre el valor de n y la simetría de la gráfica.

b) ¿Para qué valores de n el eje x será la asíntota horizontal?

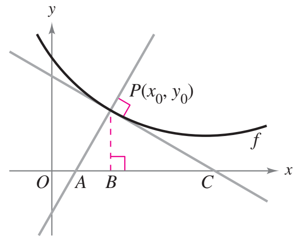
c) ¿Para qué valor de n será $y = 2$ la asíntota horizontal?

d) ¿Cuál es la asíntota de la gráfica cuando $n = 5$?

e) Representar f en una herramienta de graficación para cada valor de n indicado en la tabla. Emplear la gráfica para determinar el número M de extremos y el número N de puntos de inflexión de la gráfica.

n	0	1	2	3	4	5
M						
N						

76. ***Investigación*** Sea $P(x_0, y_0)$ un punto arbitrario sobre la gráfica de f tal que $f'(x_0) \neq 0$, como se indica en la figura. Verificar cada afirmación.



a) La intersección con el eje x de la recta tangente es

$$\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right).$$

b) La intersección con el eje y de la recta tangente es

$$(0, f(x_0) - x_0 f'(x_0)).$$

c) La intersección con el eje x de la recta normal es

$$(x_0 + f(x_0) f'(x_0), 0).$$

d) La intersección con el eje y de la recta normal es

$$\left(0, y_0 + \frac{x_0}{f'(x_0)}\right).$$

e) $|BC| = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|$ *f)* $|PC| = \left|\frac{f(x_0)\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}}{f'(x_0)}\right|$

g) $|AB| = |f(x_0) f'(x_0)|$

h) $|AP| = |f(x_0)|\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}$

77. ***Modelado matemático*** Los datos en la tabla muestran el número N de bacterias en un cultivo en el tiempo t, donde t se mide en días.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
N	25	200	804	1 756	2 296	2 434	2 467	2 473

Un modelo para estos datos está dado por

$$N = \frac{24\,670 - 35\,153t + 13\,250t^2}{100 - 39t + 7t^2}, \quad 1 \leq t \leq 8.$$

a) Utilizar una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

b) Recurrir al modelo para estimar el número de bacterias cuando $t = 10$.

c) Aproximar el día cuando el número de bacterias es más grande.

CAS *d)* Utilizar un sistema algebraico por computadora para determinar el tiempo en que la tasa de incremento en el número de bacterias es más grande.

e) Calcular $\lim_{t \to \infty} N(t)$.

Asíntotas oblicuas **En los ejercicios 78 y 79, la gráfica de la función tiene dos asíntotas oblicuas. Identificar cada asíntota oblicua. Después representar gráficamente la función y sus asíntotas.**

78. $y = \sqrt{4 + 16x^2}$ **79.** $y = \sqrt{x^2 + 6x}$

Preparación del examen Putnam

80. Considerar que $f(x)$ está definida en $a \leq x \leq b$. Suponiendo propiedades apropiadas de continuidad y derivabilidad, demostrar para $a < x < b$ que

$$\frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}{x - b} = \frac{1}{2} f''(\beta)$$

donde β es algún número entre a y b.