Proyecto MaTEX

Determinantes

Fco Javier González Ortiz

Directorio

11 de junio de 2004

Versin 1.00

Tabla de Contenido

1. Introducción

Los determinantes históricamente son previos a las matrices. Si bien su importancia en un principio fué mayor en la actualidad el concepto de matriz ha resultado más fértil.

En el capítulo de sistemas hemos aprendido a resolver sistemas por el método de Gauss. La idea de expresar las soluciones en función de los coeficientes y los términos independientes llevó a Leibnitz en el siglo XVII, a la teoría de los determinantes.

El uso de determinantes nos permitirá

- Calcular la inversa de una matriz
- Expresar la solución de un sistema de ecuaciones y
- Determinar el rango de una matriz.

2. Determinantes

Definición 2.1 *Sea A una matriz de orden 2, llamamos determinante de la matriz A y lo representamos como $|A|$, al número*

$$\boxed{|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c} \tag{1}$$

2.1. Propiedades

D1 El determinante es una función lineal de cualquiera de sus filas o columnas. Como las operaciones lineales con vectores son la suma y producto por un escalar, en realidad esta propiedad expresa dos reglas:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (D1a)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (D1b)$$

D2 El determinante cambia de signo cuando se intercambian dos líneas consecutivas,

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = c\,b - a\,d = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (D2)$$

D3 El determinante de la matriz identidad es 1,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (D3)$$

D4 Si dos líneas paralelas de A son iguales, el determinante es nulo,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = a\,b - b\,a = 0 \qquad (D4)$$

D5 Si sumamos a una linea de A un múltiplo de otra linea paralela, el determinante no varia,

$$\begin{vmatrix} a+k\,c & b+k\,d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (D5)$$

D6 Si A tiene una linea nula, el determinante es nulo,

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (D6)$$

D7 Si A es una matriz triangular, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = a\,d \qquad (D7)$$

D8 El determinante de A y de A^T son iguales,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \qquad (D8)$$

D9 Si una linea es múltiplo de otra linea paralela, el determinante es nulo,

$$\begin{vmatrix} a & \lambda\,a \\ c & \lambda\,c \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} = 0 \qquad (D9)$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Test. Hallar $\star$ para que se cumpla $\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \star \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

(a) 1 (b) 3 (c) 2 (d) 4

Ejercicio 1. Expresa como sumas los determinantes

$a)$ $\begin{vmatrix} a+1 & 4 \\ a+2 & 7 \end{vmatrix}$ $b)$ $\begin{vmatrix} a-1 & 2a+4 \\ 1+a & a \end{vmatrix}$

Inicio del Test A partir de $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3$, hallar :

1. El valor de $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 6 ☐ -6 ☐ 0 ☐ 2

2. El valor de $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ -4 ☐ 4 ☐ 0 ☐ 5

3. El valor de $\begin{vmatrix} m+p & n+q \\ p & q \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 1 ☐ 6 ☐ 0 ☐ 3

Final del Test Puntos: Correctas

Inicio del Test A partir de $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$, hallar :

1. El valor de $\begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 0 ☐ 4 ☐ 2 ☐ 8

2. El valor de $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 0 ☐ 4 ☐ -4 ☐ -1

3. El valor de $\begin{vmatrix} a+3b & c+3d \\ b & d \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 0 ☐ 4 ☐ 7 ☐ 12

4. El valor de $\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ -4 ☐ 4 ☐ 0 ☐ 1

5. El valor de $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ -c & -d \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 3 ☐ 4 ☐ 0 ☐ -12

Final del Test

Puntos: Correctas

Ejemplo 2.1. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$

Solución: En efecto, $|A| = 1$ y $|B| = 2$, sin embargo

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A + B| = 9 \neq |A| + |B| = 3$$

□

Ejemplo 2.2. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que se verifica

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Solución: En efecto, $|A| = 1$ y $|B| = 2$, y se verifica que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A \cdot B| = 2 = |A| \cdot |B| = 2$$

□

Teorema 2.1. Regla de Laplace Si A y B son dos matrices cuadradas se cumple

$$\boxed{\text{Regla de Laplace } |A \cdot B| = |A| \cdot |B|}$$

2.2. Cálculo de determinantes con las propiedades

Las propiedades expuestas para determinantes de orden 2 son válidas para determinantes de orden superior. En las siguientes cuestiones y ejercicios se aplican a determinantes de orden 3.

La idea consiste en aplicar las propiedades y transformar el determinante hasta conseguir uno de forma triangular para aplicar la propiedad D7.

Ejemplo 2.3. Demostrar que: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$

Solución: Usando las propiedades:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & b+c+a & c+a \\ 1 & c+a+b & a+b \end{vmatrix} = \qquad (D5)$$

$$\overset{(2)}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix} = \qquad (D1)$$

$$= 0 \qquad (D4)$$

(1) Sumamos a la c_2 la columna c_3.
(2) Factor común $a+b+c$ en la c_2.

□

Ejemplo 2.4. Calcular con las propiedades: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

Solución: $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 9 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(3)}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 7 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -30$$

(1) Cambiamos c_2 con c_1. (2) Reducimos con $f_2 + f_1$ y $f_3 + 3\,f_1$.
(3) Factor común 2 en la f_2. (4) Reducimos con $f_3 - 3\,f_2$

$\square$

Ejercicio 2. Indicar qué propiedad hemos aplicado en las igualdades:

$a)$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $b)$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

EJERCICIO 3. Calcular los determinantes con las propiedades.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$. $\qquad$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

3. Determinantes de orden superior

3.1. Adjunto de un elemento

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ se llama **adjunto** del elemento a_{ij}, y se denota A_{ij} al determinante de orden $n-1$ que resulta de eliminar su fila y su columna afectado del signo $+$ o $-$ según $i+j$ sea par o impar,

$$\text{Adjunto de } a_{ij} = A_{ij}$$

Por ejemplo en la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 \quad , A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad , A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{22} = 0 \qquad A_{23} = -9 \qquad A_{31} = -4$$

siendo la matriz adjunta $Adj(A)$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -20 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -9 \\ -4 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

3.2. Desarrollo de un determinante por adjuntos

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ el determinante de A, es la suma de los productos de los elementos de una linea por sus respectivos adjuntos,

$$\boxed{|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} \qquad \text{(fila } i)} \tag{2}$$

Sea por ejemplo el determinante de una matriz de orden 3×3
Desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -36$$

Desarrollamos por la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -36$$

Desarrollando en primer lugar por la primera fila y en segundo lugar por la tercera columna. Y así para cualquier otra linea.

Ejemplo 3.1. Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución:
Lo habitual es hacer ceros en alguna línea y después desarrollar por adjuntos. En este caso hemos elegido hacer ceros en la fila 3ª.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 1 \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -8 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -6 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -1 \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

(1) Reducimos con $c_2 - 3\,c_1$, $c_3 - c_1$ y $c_4 - 2\,c_1$.
(2) Desarrollamos con adjuntos por la f_3 .
(3) Reducimos con $c_1 - 2c_3$.
(4) Desarrollamos por la f_1

□

Ejemplo 3.2. Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Solución:
Vamos a hacer ceros en la primera columna usando como pivote el elemento $a_{11} = 1$, obteniendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 1 \begin{vmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -7 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 11 & 4 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ -19 & 6 & 0 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -1 \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ -19 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{-142}$$

(1) Efectuamos $f_2 - 2\,f_1$, $f_3 - 3\,f_1$ y $f_4 + f_1$.
(2) Desarrollamos por la c_1.
(3) Efectuamos $f_1 - 2\,f_2$ y $f_3 + 3\,f_2$,.
(4) Desarrollamos por la columna tercera.

□

Ejercicio 4. Calcular los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 5. Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 6. Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

Ejercicio 7. Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 21 & 23 & 25 & 27 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix}$$

4. Aplicaciones de los determinantes

Teorema 4.1. Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ se cumple que la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de otra línea paralela es 0,

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{jn} = 0 \qquad i \neq j \tag{3}$$

4.1. Inversa de una matriz

La construcción de la inversa de una matriz A se efectúa por los adjuntos. De las ECUACIONES 2 y 3 se sigue

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}}^{Adj(A)^T} = \overbrace{\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}}^{|A|\,\mathbf{I_d}}$$

Siendo $Adj(A)$ la matriz adjunta de A. Como $A \cdot Adj(A)^T = |A| \cdot I_d$, dividiendo por $|A|$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^T} \tag{4}$$

De la EXPRESIÓN 4 se sigue que hay inversa cuando $|A|$ no es cero.

$$\boxed{\exists A^{-1} \Longleftrightarrow |A| \neq 0} \tag{5}$$

• Inversa de una matriz 2×2

Ejemplo 4.1. Hallar la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-4)(-2) = -5 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$

b) Se calculan los adjuntos de los elementos de A

$$A_{11} = 1 \quad A_{12} = -(-4) = 4 \quad A_{21} = -(-2) = 2 \quad A_{22} = 3$$

Matriz adjunta es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

La inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

□

- **Inversa de una matriz** 3×3

Ejemplo 4.2. Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Se calcula $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

b) Calculamos los adjuntos:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow Adj(A)^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$\square$

Ejercicio 8. Calcula las matrices inversas de:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ *b*) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ *d*) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 9. Con las matrices A y B del ejercicio anterior resuelve las ecuaciones matriciales:

a) $A\,X = B$ *b*) $X\,A = B$

c) $A\,X\,B = I$ *d*) $B\,X\,A = I$

Ejercicio 10. Responder a las siguientes cuestiones

a) ¿Es cierto que toda matriz cuadrada admite inversa?

b) Si $|A| = 3$, ¿es cierto que $|A^{-1}| = \dfrac{1}{3}$?

c) Sabiendo que $|A| = -\dfrac{1}{2}$ y $|B| = -\dfrac{2}{3}$, siendo A y B del mismo orden, hallar $|A^{-1}\,B^{-1}|$.

EJERCICIO 11. Sea A_n una matriz cuadrada de orden n:

(a) Demostrar que $|\lambda\,A_n| = \lambda^n\,|A_n|$

(b) Expresar $|Adj(A_n)|$ en función de $|A_n|$ para cualquier valor de n.

Ejercicio 12. Es posible encontrar una matriz A regular de orden 3 tal que su adjunta $Adj(A)$ sea nula. ¿Verdadero o falso?.

4.2. Cálculo del rango de una matriz

En el capítulo de matrices ya hemos estudiado el concepto de **rango**. Los determinantes se pueden utilizar para determinar el rango de una matriz, basándonos en que el determinante de una matriz con una linea combinación lineal de otras paralelas es cero.

- **Menores de una matriz**

De una matriz A se pueden extraer submatrices cuadradas. A los determinantes de dichas submatrices los llamamos menores.
Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

menores de orden 2 son por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = 1$$

También podemos extraer menores de orden 3, que en este caso son todos nulos. En este caso, el rango como hicimos en el capítulo de matrices por reducción es,

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

pues es el número de filas no nulas de la matriz reducida. Este coincide con el mayor menor que se puede extraer de A, que es de orden 2. Si hay un menor no nulo, su orden indica el rango de la matriz. En este caso $r(A) = 2$. En general se tiene:

El mayor menor no nulo da el rango de la matriz

- **Método práctico**

Resaltamos a continuación dos indicaciones para el estudio del rango:

a) Cuando la matriz consta solo de números se aconseja utilizar el método de reducción.

b) Cuando la matriz consta de algún parámetro se aconseja analizar en primer lugar el mayor determinante que se pueda extraer de la matriz.

En el siguiente ejemplo ilustramos el cálculo del rango por menores, pero como hemos dicho antes se recomienda utilizar el método de reducción si la matriz no tiene parámetros.

Ejemplo 4.3. Utilizando el método de los menores, hallar el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, el $rg(A) \geq 2$. Se añade una fila y columna $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$, Se prueba con la misma fila y otra columna $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$, luego la tercera fila es combinación lineal de las filas primera y segunda. Ahora probamos con la cuarta fila, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, luego $rg(A) = 3$. $\square$

Ejemplo 4.4. Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Analizamos en primer lugar el mayor determinante que se pueda extraer de la matriz y que contenga a k, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & k & -1 \end{vmatrix} = -7 - 7\,k = 0 \Longrightarrow k = -1$$

Si $\mathbf{k = -1}$, sustituyendo en A y reduciendo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim^{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim^{2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(A) = 2$$

Si $\mathbf{k \neq -1}$, entonces $r(A) = 3$. □

[1] $(f_2 - 2f_1), (f_3 - 4f_1)$
[2] $(f_3 - f_2)$

Ejercicio 13. Utilizando el método de los menores, hallar el rango de las matrices

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *b*) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Ejercicio 14. Hallar el valor de k para que el rango de la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$$

sea 2.

Ejercicio 15. Discutir en función del parámetro el rango de:

(a) $M \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $N \begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 2 & 2 & c+1 \\ 4 & 2c+2 & c^2+3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 16. Discutir en función del parámetro el rango de:

(a) $P \begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 2 \\ 2 & b & b^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $Q = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 17. Hallar las raíces del polinomio en función de a:

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 18. Hallar x para que A no tenga inversa, siendo

$$A = \begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19. Hallar los valores de k para los cuales la matriz no tenga inversa:

$$A = \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 20. Determinar para que valores de α, tiene solución la ecuación matricial: $A^2\,X + A\,X = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 21. Resolver la ecuación matricial:

$$B(2A+I) = AXA + B$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 22. Si a, b y c son no nulos, estudiar el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 23. Estudiar según los valores de a, b y c el rango de la matriz

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

Ejercicio 24. Hallar a para que $r(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & a-1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & a^2 & -1 \\ 3 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 25. Hallar si es posible, un valor de a para que $r(B) = 2$ y otro para que $r(B) = 3$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 2\alpha \\ \alpha^2 & -1 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & \alpha+1 & 2\alpha-2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 26. Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 12 \quad \text{hallar} \quad \begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix}$$

Ejercicio 27. Resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

a) Aplicando la propiedad D1a a la primera columna,

$$\begin{vmatrix} a+1 & 4 \\ a+2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 4 \\ a & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

b) Aplicando la propiedad D1a dos veces

$$\begin{vmatrix} a-1 & 2a+4 \\ 1+a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2a \\ 1+a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1+a & a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & 2a \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 2a \\ a & 0 \end{vmatrix} + + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ a & 0 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1

Ejercicio 2.

a) Si en un determinante una línea es múltiplo de otra paralela, el determinante es nulo. D9

b) Si en un determinante se intercambian dos líneas paralelas consecutivas, el determinante cambia de signo.

Se produce un cambio de signo por cada permutación: Propiedad D2

Contamos los cambios por columnas:

$$\begin{array}{cc} (c_1, c_2, c_3) & \text{inicio} \\ (c_1, c_3, c_2) & - \\ (c_3, c_1, c_2) & + \\ (c_3, c_2, c_1) & - \end{array}$$

Ejercicio 2

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 3(a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} =$$
$$\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

1. Reducimos con $f_3 - a\, f_2$ y con $f_2 - a\, f_1$.
2. Reducimos con $f_3 - b\, f_2$.

□

Ejercicio 3(b) Utilizamos propiedades para que el alumno las aprenda

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{D3}{=} 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{D2}{=}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{7\,f_3 - f_2}{=} -\frac{2}{7} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 31 \end{vmatrix} = 62$$

1. Reducimos con $f_2 - 2\,f_1$ y $f_3 + f_1$

□

Ejercicio 4. Obtenemos ceros usando la primera fila:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -48$$

(1) Reducimos con $f_2 - 4\,f_1$ y $f_3 - \,f_1$.
(2) Desarrollamos por adjuntos en la primera columna

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & -2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 22$$

(1) Reducimos con $f_2 - 2\,f_1$ y $f_3 - 3\,f_1$.
(2) Desarrollamos por adjuntos en la primera columna

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -12$$

(1) Reducimos con $f_2 - 3\,f_1$ y $f_3 - 4\,f_1$.
(2) Desarrollamos por adjuntos en la primera columna

Ejercicio 4

Ejercicio 5(a) Obtenemos ceros en la tercera fila usando como pivote el elemento $a_{31} = -1$.

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 10 & 5 \\ 2 & 4 & 11 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 4 & 11 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 4 \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = -45$$

(1) Reducimos con $c_2 + c_1$ y $c_3 + 2\,c_1$.
(2) Desarrollamos por adjuntos en la tercera fila.
(3) Desarrollamos por adjuntos en la primera columna.

$\square$

Ejercicio 5(b) Obtenemos ceros en la segunda columna usando como pivote el elemento $a_{12} = 1$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=} - \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ -5 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & 17 \\ 24 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -44$$

(1) Reducimos con $f_2 - f_1$, $f_3 - 2\,f_1$ y $f_4 - 3\,f_1$.
(2) Desarrollamos por adjuntos en la segunda columna.
(3) Reducimos con $c_1 + 5\,c_2$ y $c_3 + 5\,c_2$.
(4) Desarrollamos por adjuntos en la tercera fila.

$\square$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6(a)

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} a+4 & 1 & 1 & 1 \\ a+4 & a+1 & 1 & 1 \\ a+4 & 1 & a+1 & 1 \\ a+4 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{D1}{=} (a+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} (a+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= a^3(a+4)$$

(1) Reducimos sumando a la c_1 las restantes $c_2 + c_3 + c_4$.
(2) Reducimos restando a todas las filas la primera f_1

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 6(b)

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \stackrel{(1/a)\, c_1}{=} a \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & b & c & c \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{(1)}{=} a \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

1. Reducimos con $f_4 - f_3$ y con $f_3 - f_2$.

$\square$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 7(a)

$$\left|\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 21 & 23 & 25 & 27 \end{array}\right| \begin{array}{c} c_2 - c_1 \\ = \\ c_4 - c_3 \end{array} \left|\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 10 & 2 & 14 & 2 \\ 21 & 2 & 25 & 2 \end{array}\right| \overset{D4}{=} 0$$

$\square$

Ejercicio 7(b)

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -1+3x & x & x & x \\ -1+3x & -1 & x & x \\ -1+3x & x & -1 & x \\ -1+3x & x & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{D1}{=} (-1+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & -1 & x & x \\ 1 & x & -1 & x \\ 1 & x & x & -1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (-1+3x)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (-1+3x)\,(-1-x)^3$$

1. Reducimos sumando a la c_1 las restantes $c_2 + c_3 + c_4$.
2. Reducimos restando a todas las filas la primera f_1.

Doc Doc Volver Cerrar

Prueba del Teorema 4.1. Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ se cumple que la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de otra línea paralela es 0,

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{jn} = 0 \qquad i \neq j$$

Obsérvese que la expresión anterior equivale al desarrollo por la fila f_j del siguiente determinante, donde las filas f_i y $f_j$son iguales.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ fila\, i \\ \\ fila\, j \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Esta propiedad nos permitirá construir la matriz inversa de una matriz.

◀

Ejercicio 8.

a) $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -38 & 6 & 22 \\ 6 & -1 & -3 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

d) $D^{-1} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 20 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 8

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 9.

a) $A\,X = B \Longrightarrow A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,B \Longrightarrow \boxed{X = A^{-1}\,B}$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $X\,A = B \Longrightarrow X\,A\,A^{-1} = B\,A^{-1} \Longrightarrow \boxed{X = B\,A^{-1}}$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $A\,X\,B = I \Longrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}B^{-1} \Longrightarrow \boxed{X = A^{-1}B^{-1}}$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -11 \end{pmatrix}$$

d) $B\,X\,A = I \Longrightarrow B^{-1}BXAA^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Longrightarrow \boxed{X = B^{-1}A^{-1}}$

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 10.

a) Falso. Ya hemos visto que es necesario y suficiente que su determinante sea distinto de cero. CONDICIÓN 5

b) Verdadero pues

$$|A \cdot A^{-1}| = |I_d| = 1 = |A|\,|A^{-1}| \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{3}$$

Propiedad D9

c) Como

$$\left\{ \begin{array}{lcl} |A| = -\dfrac{1}{2} & \Longrightarrow & |A^{-1}| = -2 \\ |B| = -\dfrac{2}{3} & \Longrightarrow & |B^{-1}| = -\dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

luego por la regla de Laplace

$$|A^{-1}\,B^{-1}| = |A^{-1}| \cdot |B^{-1}| = (-2)(-\frac{3}{2}) = \mathbf{3}$$

Ejercicio 10

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 11(a) Lo vemos para $n = 3$:

$$\lambda A_3 = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

De la propiedad D1b, se tiene

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

luego

$$|\lambda A_3| = \lambda^3 \, |A_3|$$

y para el caso n,

$$|\lambda A_n| = \lambda^n \, |A_n|$$

□

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 11(b) De la expresión de la inversa, se tiene que:

$$A \cdot Adj(A^T) = |A|\, I_n$$

Tomando determinantes

$$\begin{aligned}
|A \cdot Adj(A^T)| =& \Big| |A|\, I_n \Big| && \\
|A| \cdot |Adj(A^T)| =& \Big| |A|\, I_n \Big| && \text{(Regla de Laplace)} \\
|A| \cdot |Adj(A)| =& \Big| |A|\, I_n \Big| && (|A| = |A^T|) \\
|A| \cdot |Adj(A)| =& |A|^n \, |I_n| && \text{(apartado anterior)} \\
|A| \cdot |Adj(A)| =& |A|^n && (|I_n| = 1) \\
|Adj(A)| =& |A|^{n-1} && \text{(simplificando)}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 12.

Falso, pues si $Adj(A)$ es nula todos los menores de orden 2 de A son cero. Si desarrollamos el determinante de A por adjuntos también valdrá cero, y por tanto no puede ser regular.

Ejercicio 12

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 13.

a) Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, el $rg(A) = 2$ pues no hay menores de orden 3.

b) Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, el $rg(B) \geq 2$.

Por otra parte como el único menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

se tiene $rg(B) = 2$.

Ejercicio 13

Ejercicio 14. Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, el $rg(B) \geq 2$. Para que no pueda ser 3 es necesario que su determinante sea nulo, $|C| = 0$,

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{vmatrix} = 11\,k^2 - k - 12$$

Para que $11\,k^2 - k - 12 = 0$ es necesario que $k = 12/11$ ó $k = -1$.

Ejercicio 14

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 15(a) Elegimos de $M \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ un menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -a + 3 = 0 \Longrightarrow a = -3$$

Si $a \neq -3 \Longrightarrow r(M) = 3$, y para $a = -3$ sustituimos en M y reducimos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim^{1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(M) = 3$$

para todo valor de a se tiene $r(M) = 3$

□

[1] $(f_2 - 2f_1), (f_3 - f_1)$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 15(b) Calculamos

$$|N| = -2c(c-1)^2 = 0 \Longrightarrow c = 0 \vee 1$$

- $c = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(N) = 1$$

- $c = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim^{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(N) = 2$$

□

[1] $(f_2 - 2f_1), (f_3 - 4f_1)$

Ejercicio 16(a) Elegimos de P un menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 2 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (b-1)(2b-1) = 0 \Longrightarrow b = 1 \vee b = 1/2$$

$$\bullet\, b \neq 1 \wedge b \neq 1/2 \Longrightarrow r(P) = 3$$

Si $\bullet\, b = 1$ sustituimos en P y reducimos la matriz, $r(P) = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\bullet\, b = 1/2$ sustituimos en P y reducimos la matriz, $r(P) = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1/4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -14 & -15 & -28 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) $f_2 - 2f_1,\ f_3 - f_1$.
(2) $2f_1$ y $4f_2$.
(3) $f_2 - 8f_1$ y $f_3 - f_1$.

$\square$

Ejercicio 16(b) Elegimos de Q un menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1)^2(k+2) = 0 \Longrightarrow k = 1 \vee k = -2$$

$$\bullet\, k \neq 1 \wedge k \neq -2 \Longrightarrow r(Q) = 3$$

Si $\bullet\, k = 1$ sustituimos en Q y reducimos la matriz, $r(Q) = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\bullet\, k = -2$ sustituimos en Q y reducimos la matriz, $r(Q) = 3$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(1) $f_2 - f_1,\ f_3 - f_1$.
(2) $2f_2 + f_1$ y $2f_3 + f_1$.
(3) $f_3 + f_2$.

□

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 17.

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} x^2+3a & a & a & a \\ x^2+3a & x^2 & a & a \\ x^2+3a & a & x^2 & a \\ x^2+3a & a & a & x^2 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} (x^2+3a) & a & a & a \\ 0 & x^2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-a \end{vmatrix}$$

$$=(x^2+3a)(x^2-a)^3 = 0$$

- Si $a > 0$, las raíces son $x = \pm\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, las raíces son $x = \pm\sqrt{-3\,a}$.
- Si $a = 0$, la única raíz es $x = 0$.

(1) $c_1+(c_2+c_3+c_4)$ (2) $f_2-f_1, f_3-f_1, f_4-f_1$

Ejercicio 17

Ejercicio 18. Para que A no tenga inversa es necesario y suficiente que $|A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{vmatrix} = 2|x| - |x-2| = 0$$

Dependiendo de x tenemos las tres ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x \leq 0 & -2x + (x-2) = 0 & \Longrightarrow \boxed{\text{x=-2}} \\ 0 < x \leq 2 & 2x + (x-2) = 0 & \Longrightarrow \boxed{\text{x=2/3}} \\ 2 < x & 2x - (x-2) = 0 & \Longrightarrow x = -2 (\text{no vale}) \end{array} \right.$$

Ejercicio 18

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 19. Para que A no tenga inversa su determinante debe ser nulo, $|A| = 0$. Restamos a todas las filas la primera:

$$\begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -k \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} \overset{f_3 - f_2}{=} -k \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -k^2 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -k-4 & -7 \end{vmatrix} = 3\,k^2\,(k-3)$$

Para $k = 0 \vee 3$ no existe la inversa de A.

Ejercicio 19

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 20. $A^2\ X + A\ X = B \Rightarrow (A^2 + A)\, X = B$. Para que tenga solución debe existir la inversa de $A^2 + A$ y por tanto $|A^2 + A| \neq 0$. Calculamos su expresión:

$$A^2 + A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha + 2 & 2\alpha + 4 \\ \alpha + 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Como $|A^2 + A| = 2\,\alpha^2 - 4\,\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = 2$.
Concluimos que existe solución si $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 2$

Ejercicio 20

Ejercicio 21. En primer lugar despejamos la matriz X,

$$B(2A+I)=AXA+B \quad\Rightarrow\quad 2\,B\,A+\,B=AXA+B$$

$$\Rightarrow\quad 2\,B\,A=AXA\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 2\,A^{-1}\,B\,A\,A^{-1}=A^{-1}AXAA^{-1}\Rightarrow\quad X=2\,A^{-1}\,B$$

Calculamos A^{-1}: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$Adj(A^T)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$X=2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 21

Ejercicio 22. Hallamos $|A|$,

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} \stackrel{f_2+f_1}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 0 & 4c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = 0$$

Luego $r(A) < 3$ para cualquier valor de a, b y c. Tomemos ahora un menor de orden 2, el más cómodo es

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 3a & 0 \end{vmatrix} = -3ab \neq 0 \text{ pues } a \neq 0 \wedge b \neq 0$$

luego el rango $r(A) = 2$ para cualquier valor de a, b y c.

Ejercicio 22

Ejercicio 23. Hallamos $|A|$,

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \overset{f_3+f_2}{=} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = 0$$

Luego $r(A) < 3$ para cualquier valor de a, b y c. Tomemos ahora un menor de orden 2, el más cómodo es

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} = 5(a-b) = 0 \Longrightarrow a = b$$

luego se ven dos casos

- $a = b = c \Longrightarrow r(L) = r \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & a & a \\ 2a & 2a & 2a \end{pmatrix} = 1$
- $(a \neq b) \vee (a \neq c)$ con algún menor de orden 2 no nulo, luego $r(L) = 2$.

Ejercicio 23

Ejercicio 24. Todos los menores de orden 3 deben ser nulos. Elegimos uno cómodo, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & a-1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -(2a-6) = 0 \Longrightarrow a = 3$$

Es necesario que $a = 3$. Veamos si es suficiente

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & -1 \\ 3 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 19 & -2 \\ 0 & 3 & 19 & -2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 19 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego si $a = 3$, el rango $r(A) = 2$.

(1) $f_2 - f_1$, $2f_3 - f_1$ y $2f_4 - 3\,f_1$.
(2) $f_4 - f_3$.

Ejercicio 24

MaTEX
DETERMINANTES
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 25. Si $r(B) = 3$, el menor de orden 4 debe ser nulo. Hallamos $|B| = 0$:

$$|B| = -(2\alpha - 6)(2\alpha^2 - \alpha - 15) = 0 \Longrightarrow \alpha = 3 \vee \alpha = -5/2$$

Estudiamos $a = 3$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 6 \\ 9 & -1 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 20 & 28 \\ 0 & -1 & 20 & 28 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 20 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego si $\alpha = 3$, el rango $r(B) = 2$.
Estudiamos $a = -5/2$. Escogemos un menor de orden 3

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow r(B) = 3$$

(1) $f_2 - 2f_1$, $2f_3 + 9f_1$ y $f_4 + 8\,f_1$
(2) $f_4 - f_3$

Ejercicio 25

Ejercicio 26.

$$\begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & c & b \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2d & 2f & 2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(2)}{=} -3\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} d & f & e \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(3)}{=} -3(-12) - 6(0) = \mathbf{36}$$

(1) Propiedad $D1a$
(2) Propiedad $D1b$
(3) Propiedad $D2$ y $D4$

Ejercicio 26

Ejercicio 27. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 27

Soluciones a los Tests

Solución al Test: Por la propiedad D1b, el número buscado es $\star = 3$, pues

$$\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Final del Test

Índice alfabético