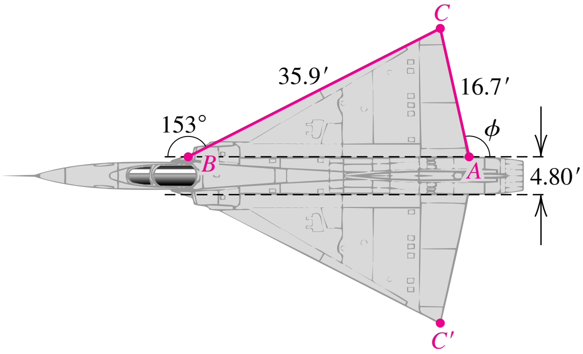
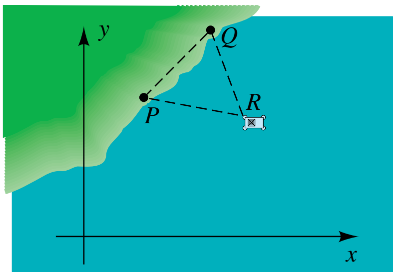
Ejercicio 30



31 Software para topógrafos El software para topógrafos hace uso de sistemas de coordenadas para localizar posiciones geográficas. Un pozo petrolífero situado frente a la costa se ve desde los puntos P y Q y se encuentra que $\angle QPR$ y $\angle RQP$ son de $55°50'$ y $65°22'$, respectivamente. Si los puntos P y Q tienen coordenadas $(1487.7, 3452.8)$ y $(3145.8, 5127.5)$, respectivamente, calcule las coordenadas de R.

Ejercicio 31



8.2 *La ley de los cosenos*

En la sección precedente expresamos que la ley de los senos no se puede aplicar directamente para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuo cuando se da cualquiera de lo siguiente:

(1) dos lados y el ángulo *entre* ellos (LAL)

(2) tres lados (LLL)

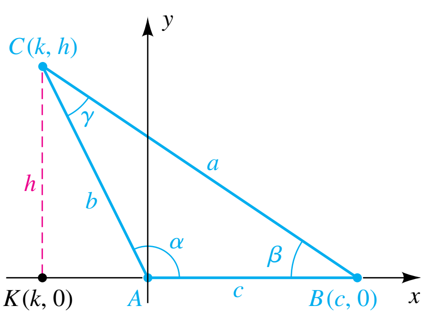
Para estos casos podemos aplicar la *ley de los cosenos,* que sigue:

La ley de los cosenos

Si ABC es un triángulo marcado en la forma acostumbrada (como en la figura 1), entonces

$$\textbf{(1)}\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$\textbf{(2)}\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$\textbf{(3)}\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Figura 1



DEMOSTRACIÓN Demostremos la primera fórmula. Dado el triángulo ABC, ponga α en posición estándar, como se ilustra en la figura 1. Hemos dibujado α como obtuso, pero nuestra exposición también es válida si α es agudo. Considere la línea interrumpida que pasa por C, paralela al eje y y que cruza el eje x en el punto $K(k, 0)$. Si hacemos $d(C, K) = h$, entonces C tiene coordenadas (k, h). Por la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo,

$$\cos\alpha = \frac{k}{b} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b}.$$

Al despejar k y h tendremos

$$k = b\cos\alpha \qquad \text{y} \qquad h = b\operatorname{sen}\alpha.$$

Como el segmento AB tiene longitud c, las coordenadas de B son $(c, 0)$ y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} a^2 &= [d(B, C)]^2 = (k - c)^2 + (h - 0)^2 && \text{fórmula de la distancia} \\ &= (b \cos \alpha - c)^2 + (b \operatorname{sen} \alpha)^2 && \text{sustituya por } k \text{ y } h \\ &= b^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha + c^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha && \text{eleve al cuadrado} \\ &= b^2(\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha && \text{factorice los términos primero y último} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha && \text{identidad de Pitágoras} \end{aligned}$$

Nuestro resultado es la primera fórmula expresada en la ley de los cosenos. Las fórmulas segunda y tercera se pueden obtener al poner β y γ, respectivamente, en posición estándar en un sistema de coordenadas.

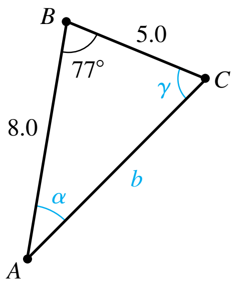
Nótese que si $\alpha = 90°$ en la figura 1, entonces $\cos \alpha = 0$ y la ley de los cosenos se reduce a $a^2 = b^2 + c^2$. Esto demuestra que el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos.

En lugar de memorizar cada una de las tres fórmulas de la ley de los cosenos, es más cómodo recordar el siguiente enunciado, que toma todos ellos en cuenta.

La ley de los cosenos (forma general)	El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de los otros dos lados y el coseno del ángulo entre ellos.

Dados dos lados y el ángulo incluido de un triángulo, podemos usar la ley de los cosenos para hallar el tercer lado. Entonces podemos usar la ley de los senos para hallar otro ángulo del triángulo. Siempre que se siga este procedimiento, es mejor hallar el ángulo opuesto al lado más corto puesto que ese ángulo es siempre agudo. En esta forma, evitamos la posibilidad de obtener dos soluciones cuando resolvamos una ecuación trigonométrica que contenga ese ángulo, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Figura 2



EJEMPLO 1 **Usar la ley de cosenos (LAL)**

Resuelva el $\triangle ABC$, dados $a = 5.0$, $c = 8.0$ y $\beta = 77°$.

SOLUCIÓN El triángulo se encuentra en la figura 2. Como β es el ángulo *entre* los lados a y c, empezamos por calcular b (el lado opuesto a β) como sigue:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta && \text{ley de los cosenos} \\ &= (5.0)^2 + (8.0)^2 - 2(5.0)(8.0) \cos 77° && \text{sustituya } a, c, \text{ y } \beta \\ &= 89 - 80 \cos 77° \approx 71.0 && \text{simplifique y calcule} \\ b &\approx \sqrt{71.0} \approx 8.4 && \text{tome la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

(continúa)

Primero encontremos otro ángulo del triángulo usando la ley de los senos. De acuerdo con las observaciones que preceden a este ejemplo, aplicaremos la ley de los senos y hallaremos α porque es el ángulo opuesto al lado más corto a.

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \text{despeje sen } \alpha$$

$$\approx \frac{5.0\operatorname{sen}77^\circ}{\sqrt{71.0}} \approx 0.5782 \qquad \text{sustituya y calcule}$$

Como α es agudo,

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(0.5782) \approx 35.3^\circ \approx 35^\circ.$$

Por último, como $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, tenemos

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 180^\circ - 35^\circ - 77^\circ = 68^\circ.$$

Dados los tres lados de un triángulo, podemos usar la ley de los cosenos para hallar *cualquiera* de los tres ángulos. Siempre encontraremos primero el ángulo más grande, es decir, *el ángulo opuesto al lado más largo* porque esta práctica garantiza que los ángulos restantes sean agudos. A continuación podemos hallar otro ángulo del triángulo al usar ya sea la ley de los senos o la ley de los cosenos. Observe que cuando un ángulo se encuentra por medio de la ley de los cosenos, no hay caso ambiguo porque siempre obtenemos un ángulo único entre 0° y 180°.

EJEMPLO 2 Usar la ley de los cosenos (LLL)

Si el triángulo ABC tiene lados $a = 90$, $b = 70$ y $c = 40$, calcule los ángulos α, β y γ al grado más cercano.

SOLUCIÓN De acuerdo con las observaciones que preceden a este ejemplo, primero hallamos al ángulo opuesto al lado más largo a. Así, escogemos la forma de la ley de los cosenos que contiene α y procedemos como sigue:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \text{despeje cos } \alpha$$

$$= \frac{70^2 + 40^2 - 90^2}{2(70)(40)} = -\frac{2}{7} \qquad \text{sustituya y simplifique}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\tfrac{2}{7}\right) \approx 106.6^\circ \approx 107^\circ \qquad \text{calcule } \alpha$$

Ahora podemos usar ya sea la ley de los senos o la ley de los cosenos para hallar β. Usemos la ley de los cosenos en este caso:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \text{despeje cos } \beta$$

$$= \frac{90^2 + 40^2 - 70^2}{2(90)(40)} = \frac{2}{3} \qquad \text{sustituya y simplifique}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\tfrac{2}{3}\right) \approx 48.2° \approx 48° \qquad \text{calcule } \beta$$

En este punto en la solución, podríamos hallar γ si usamos la relación $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Pero si α o β se calculan de manera incorrecta, entonces γ sería incorrecta. Alternativamente, podemos calcular γ y luego comprobar que la suma de los tres ángulos sea 180°. Así,

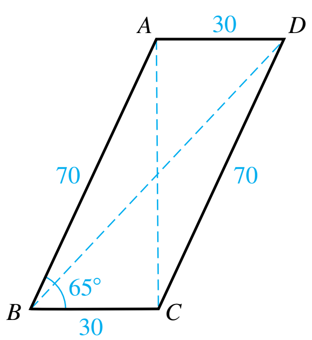
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \text{de modo que} \quad \gamma = \cos^{-1}\frac{90^2 + 70^2 - 40^2}{2(90)(70)} \approx 25°.$$

Nótese que $\alpha + \beta + \gamma = 107° + 48° + 25° = 180°$.

EJEMPLO 3 Calcular las diagonales de un paralelogramo

Un paralelogramo tiene lados de longitudes de 30 centímetros y 70 centímetros y un ángulo de 65°. Calcule la longitud de cada diagonal al centímetro más cercano.

Figura 3



SOLUCIÓN El paralelogramo *ABCD* y sus diagonales *AC* y *BD* se muestran en la figura 3. Usando el triángulo *ABC* con $\angle ABC = 65°$, podemos calcular *AC* como sigue:

$$(AC)^2 = 30^2 + 70^2 - 2(30)(70)\cos 65° \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$\approx 900 + 4900 - 1775 = 4025 \qquad \text{calcule}$$

$$AC \approx \sqrt{4025} \approx 63 \text{ cm} \qquad \text{tome la raíz cuadrada}$$

Del mismo modo, usando el triángulo *BAD* y $\angle BAD = 180° - 65° = 115°$ podemos calcular *BD* como sigue:

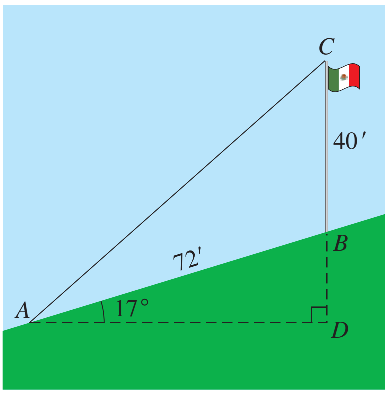
$$(BD)^2 = 30^2 + 70^2 - 2(30)(70)\cos 115° \approx 7575 \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$BD \approx \sqrt{7575} \approx 87 \text{ cm} \qquad \text{tome la raíz cuadrada}$$

EJEMPLO 4 Hallar la longitud de un cable

Un poste vertical de 40 pies de altura se encuentra sobre una ladera que forma un ángulo de 17° con la horizontal. Calcule la longitud mínima de cable que llegará de lo alto del poste a un punto situado a 72 pies colina abajo desde la base del mismo.

Figura 4



SOLUCIÓN El trazo de la figura 4 describe la información dada. Deseamos hallar *AC*. Por consulta de la figura, vemos que

$$\angle ABD = 90° - 17° = 73° \quad \text{y} \quad \angle ABC = 180° - 73° = 107°.$$

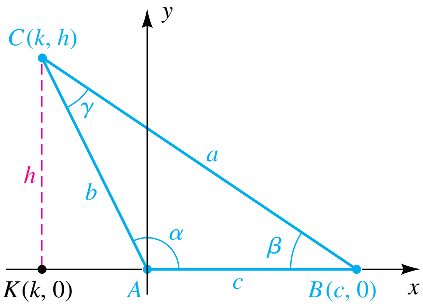
Usando el triángulo *ABC*, podemos calcular *AC* como sigue:

$$(AC)^2 = 72^2 + 40^2 - 2(72)(40)\cos 107° \approx 8468 \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$AC \approx \sqrt{8468} \approx 92 \text{ ft} \qquad \text{tome la raíz cuadrada}$$

La ley de los cosenos se puede usar para deducir una fórmula para el área de un triángulo. Primero demostremos un resultado preliminar.

Figura 5



Dado el triángulo ABC, ponga el ángulo α en posición estándar (vea la figura 5). Como se ve en la demostración de la ley de los cosenos, la altitud h del vértice C es $h = b \operatorname{sen} \alpha$. Como el área $\mathscr{A}$ del triángulo está dada por $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ch$, vemos que

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha.$$

Nuestro argumento es independiente del ángulo específico que está en posición estándar. Al tomar β y γ en posición estándar, obtenemos las fórmulas

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2}ac \operatorname{sen} \beta \quad \text{y} \quad \mathscr{A} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma.$$

Las tres fórmulas están cubiertas en el siguiente enunciado.

Área de un triángulo	El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de cualesquier dos lados y el seno del ángulo entre ellos.

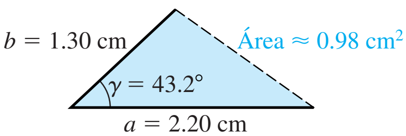
Los dos ejemplos siguientes ilustran usos de este resultado.

EJEMPLO 5 **Calcular el área de un triángulo**

Calcule el área del triángulo ABC si $a = 2.20$ cm, $b = 1.30$ cm y $\gamma = 43.2°$.

SOLUCIÓN Como γ es el ángulo entre los lados a y b como se muestra en la figura 6, podemos usar directamente el resultado precedente, como sigue:

Figura 6



$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma && \text{fórmula del área de un triángulo} \\ &= \tfrac{1}{2}(2.20)(1.30) \operatorname{sen} 43.2° \approx 0.98 \text{ cm}^2 && \text{sustituya y calcule} \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 **Calcular el área de un triángulo**

Calcule el área del triángulo ABC si $a = 5.0$ cm, $b = 3.0$ cm y $\alpha = 37°$.

SOLUCIÓN Para aplicar la fórmula del área de un triángulo, debemos hallar el ángulo γ entre lados conocidos a y b. Como nos dan a, b y α, primero encontremos β como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} && \text{ley de los senos} \\ \operatorname{sen} \beta &= \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a} && \text{despeje sen } \beta \\ &= \frac{3.0 \operatorname{sen} 37°}{5.0} && \text{sustituya por } b,\ \alpha \text{ y } a \\ \beta_R &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3.0 \operatorname{sen} 37°}{5.0}\right) \approx 21° && \text{ángulo de referencia para } \beta \\ \beta \approx 21° \quad &\text{o} \quad \beta \approx 159° && \beta_R \text{ o } 180° - \beta_R \end{aligned}$$

Rechazamos $\beta \approx 159°$, porque entonces $\alpha + \beta = 196° \geq 180°$. En consecuencia, $\beta \approx 21°$ y

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 37° - 21° = 122°.$$

Por último calculamos el área del triángulo como sigue:

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma \qquad \text{fórmula del área de un triángulo}$$

$$\approx \tfrac{1}{2}(5.0)(3.0) \operatorname{sen} 122° \approx 6.4 \text{ cm}^2 \qquad \text{sustituya y calcule}$$

Usaremos el resultado anterior para el área de un triángulo y deduciremos la *fórmula de Herón*, que expresa el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados.

Fórmula de Herón

El área $\mathcal{A}$ de un triángulo de lados a, b y c está dada por

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde s es la mitad del perímetro, es decir, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

DEMOSTRACIÓN Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha \\
&= \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \\
&= \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2c^2(1 - \cos^2 \alpha)} \\
&= \sqrt{\tfrac{1}{2}bc(1 + \cos \alpha) \cdot \tfrac{1}{2}bc(1 - \cos \alpha)}
\end{aligned}$$

Obtendremos la fórmula de Herón al sustituir las expresiones bajo el signo final de radical por expresiones que contengan sólo a, b y c. De la fórmula 1 de la ley de los cosenos despejamos $\cos \alpha$ y luego sustituimos, como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}bc(1 + \cos \alpha) &= \frac{1}{2}bc\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \\
&= \frac{1}{2}bc\left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \\
&= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4} \\
&= \frac{(b + c)^2 - a^2}{4} \\
&= \frac{(b + c) + a}{2} \cdot \frac{(b + c) - a}{2}
\end{aligned}$$

(continúa)

Usamos el mismo tipo de manipulaciones en la segunda expresión bajo el signo de radical:

$$\frac{1}{2}bc(1 - \cos\alpha) = \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}$$

Si ahora sustituimos por las expresiones bajo el signo de radical, obtenemos

$$\mathscr{A} = \sqrt{\frac{b + c + a}{2} \cdot \frac{b + c - a}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}}.$$

Haciendo $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, vemos que

$$s - a = \frac{b + c - a}{2}, \quad s - b = \frac{a - b + c}{2}, \quad s - c = \frac{a + b - c}{2}.$$

La sustitución en la fórmula de arriba por $\mathscr{A}$ nos da la fórmula de Herón.

EJEMPLO 7 **Usar la fórmula de Herón**

Un campo triangular tiene lados de longitudes 125 yardas, 160 yardas y 225 yardas. Calcule el número de acres en el campo. (Un acre es equivalente a 4840 yardas cuadradas.)

SOLUCIÓN Primero hallamos la mitad del perímetro del campo con $a = 125$, $b = 160$ y $c = 225$, así como los valores de $s - a$, $s - b$ y $s - c$:

$$\begin{aligned} s &= \tfrac{1}{2}(125 + 160 + 225) = \tfrac{1}{2}(510) = 255 \\ s - a &= 255 - 125 = 130 \\ s - b &= 255 - 160 = 95 \\ s - c &= 255 - 225 = 30 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula de Herón nos da

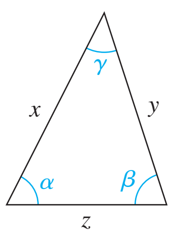
$$\mathscr{A} = \sqrt{(255)(130)(95)(30)} \approx 9720 \text{ yd}^2.$$

Como hay 4840 yardas cuadradas en un acre, el número de acres es $\frac{9720}{4840}$, o aproximadamente 2.

8.2 Ejercicios

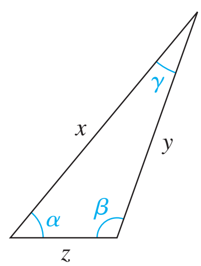
Ejer. 1-2: Use sentido común para relacionar las variables y los valores. (Los triángulos están trazados a escala y los ángulos se miden en radianes.)

1



(a) α	(A) 12.60
(b) β	(B) 1.10
(c) γ	(C) 10
(d) x	(D) 0.79
(e) y	(E) 13.45
(f) z	(F) 1.26

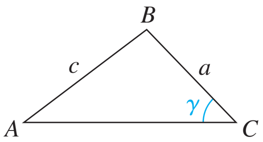
2



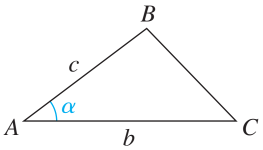
(a) α	(A) 3
(b) β	(B) 0.87
(c) γ	(C) 8.24
(d) x	(D) 1.92
(e) y	(E) 6.72
(f) z	(F) 0.35

Ejer. 3-4: Dadas las partes indicadas del $\triangle ABC$, ¿qué ángulo (α, β o γ) o lado (a, b o c) encontraría el lector a continuación y qué usaría para hallarlo?

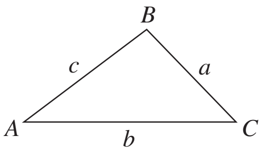
3 (a)



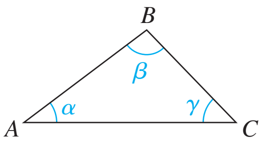
(b)



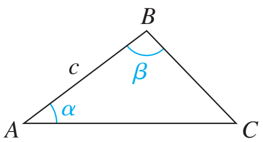
(c)



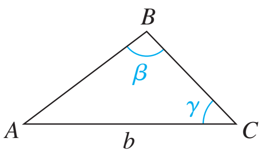
(d)



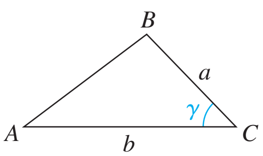
(e)



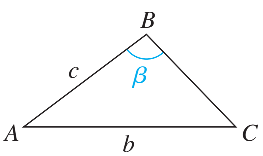
(f)



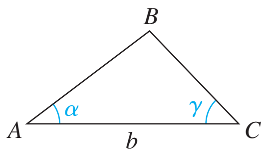
4 (a)



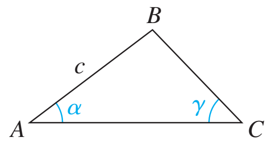
(b)



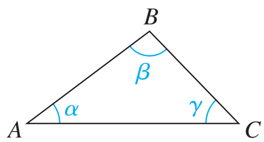
(c)



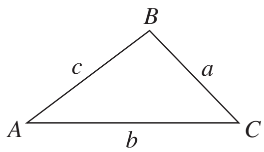
(d)



(e)



(f)



Ejer. 5–14: Resuelva al $\triangle ABC$.

5 $\alpha = 60°$, $b = 20$, $c = 30$

6 $\gamma = 45°$, $b = 10.0$, $a = 15.0$

7 $\beta = 150°$, $a = 150$, $c = 30$

8 $\beta = 73°50'$, $c = 14.0$, $a = 87.0$

9 $\gamma = 115°10'$, $a = 1.10$, $b = 2.10$

10 $\alpha = 23°40'$, $c = 4.30$, $b = 70.0$

11 $a = 2.0$, $b = 3.0$, $c = 4.0$

12 $a = 10$, $b = 15$, $c = 12$

13 $a = 25.0$, $b = 80.0$, $c = 60.0$

14 $a = 20.0$, $b = 20.0$, $c = 10.0$

15 **Dimensiones de un terreno triangular** El ángulo en una esquina de un terreno triangular es $73°40'$ y los lados que se encuentran en esta esquina miden 175 pies y 150 pies de largo. Calcule la longitud del tercer lado.

16 Topografía Para hallar la distancia entre dos puntos A y B, un topógrafo selecciona un punto C que está a 420 yardas de A y a 540 yardas de B. Si el ángulo ACB mide $63°10'$, calcule la distancia entre A y B.

17 Distancia entre automóviles Dos automóviles salen de una ciudad al mismo tiempo y viajan a lo largo de carreteras rectas que difieren en dirección en 84°. Si las magnitudes de rapidez de ambos son 60 mi/h y 45 mi/h, respectivamente, ¿aproximadamente a qué distancia están uno de otro al término de 20 minutos?

18 Ángulos de un terreno triangular Un terrero triangular tiene lados de longitudes 420 pies, 350 pies y 180 pies. Calcule el mínimo ángulo entre los lados.

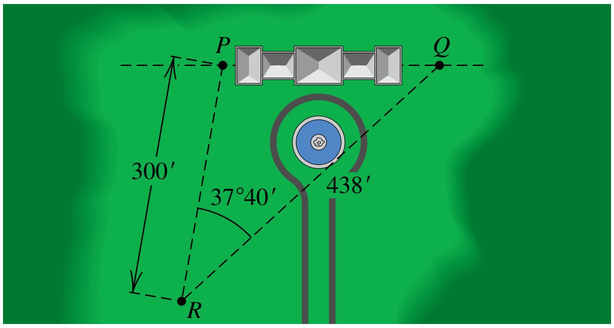
19 Distancia entre barcos Un barco sale de puerto a la 1:00 p.m. y navega al S35°E a razón de 24 mi/h. Otro barco sale del mismo puerto a la 1:30 p.m. y navega al S20°W a 18 mi/h. ¿Aproximadamente a qué distancia están uno del otro a las 3:00 p.m.?

20 Distancia de vuelo Un avión vuela 165 millas desde el punto A en la dirección 130° y luego en la dirección 245° otras 80 millas. ¿Aproximadamente a qué distancia está el avión desde A?

21 Rumbo de un corredor Un deportista corre con rapidez constante de una milla cada 8 minutos en dirección S40°E durante 20 minutos y luego en dirección N20°E los siguientes 16 minutos. Calcule, al décimo de milla más cercano, la distancia en línea recta de la meta al punto de partida del rumbo del corredor.

22 Topografía Dos puntos P y Q al nivel del terreno están en lados opuestos de un edificio. Para hallar la distancia entre los puntos, un topógrafo selecciona un punto R que está a 300 pies de P y a 438 de Q y luego determina que el ángulo PRQ mide $37°40'$ (vea la figura). Calcule la distancia entre P y Q.

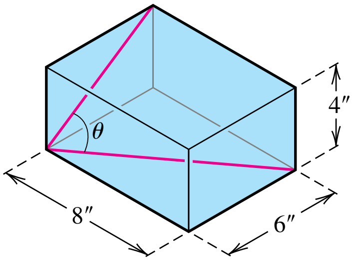
Ejercicio 22



23 Curso de un bote de motor Un bote de motor se desplaza a lo largo de un curso triangular que tiene lados de longitudes 2 kilómetros, 4 kilómetros y 3 kilómetros, respectivamente. El primer lado fue recorrido en la dirección N20°W y el segundo en una dirección Sθ°W, donde θ° es la medida en grados de un ángulo agudo. Calcule, al minuto más cercano, la dirección en la que se recorrió el tercer lado.

24 Ángulo de una caja La caja rectangular que se ilustra en la figura tiene dimensiones de $8'' \times 6'' \times 4''$. Calcule el ángulo θ formado por una diagonal de la base y una diagonal del lado de $6'' \times 4''$.

Ejercicio 24



25 Distancias en un diamante de beisbol Un diamante de beisbol tiene cuatro bases (que forman un cuadro) que están a 90 pies entre sí; el montículo del pítcher está a 60.5 pies de la placa del *home*. Calcule la distancia del montículo del pítcher a cada una de las otras tres bases.

26 Un rombo tiene lados de 100 centímetros de longitud y el ángulo a uno de los vértices es 70°. Calcule las longitudes de las diagonales al décimo de centímetro más cercano.

27 Reconocimiento Un avión de reconocimiento P, que vuela a 10,000 pies sobre un punto R en la superficie del agua, localiza un submarino S a un ángulo de depresión de 37° y a un buque-tanque T a un ángulo de depresión de 21°, como se muestra en la figura. Además, se encuentra que $\angle SPT$ es 110°. Calcule la distancia entre el submarino y el buque-tanque.

Ejercicio 27