Anualidad: es una serie de pagos iguales efectuados a intervalos iguales de tiempo. Ejemplos de anualidades son: abonos semanales, pago de renta mensuales, dividendos trimestrales sobre acciones, pagos semestrales de interés sobre bonos, primas anuales en pólizas de seguro de vida, etc.

El tiempo transcurrido entre cada pago sucesivo de la anualidad se conoce como ***intervalo de pago.***

El tiempo contado desde el principio del primer intervalo de pago hasta el final del ultimo intervalo de pago se conoce como ***plazo*** de la anualidad. La suma de todos los pagos hechos en un año, se conoce como ***renta anual***. Así, por ejemplo: una renta anual de $2000 pagadero trimestralmente significa el pago de $500 cada 3 meses.

Una ***anualidad cierta*** es una anualidad en la cual los pagos principian y terminan en fechas fijas.

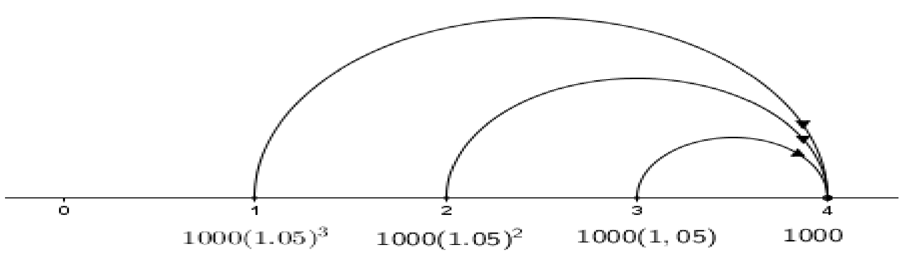
Una ***anualidad contingente*** es aquella en la cual el plazo depende de algún suceso cuya realización no puede fijarse. Por ejemplo, los seguros de vida.

Una anualidad cierta ordinaria es aquella en la cual los pagos son efectuados al final de cada intervalo de pago, es decir que el primer pago se hace al final del primer intervalo de pago, el segundo al final del segundo intervalo de pago y, así sucesivamente.

<u>MONTO DE UNA ANUALIDAD</u>.

Consideremos una anualidad ordinaria de $1000 anuales, durante 4 años, al 5%.

El ***monto S*** de una anualidad es la suma de los montos compuesto de los distintos pagos, cada uno acumulado hasta el término del plazo.



Los montos correspondientes en cada año, serian:

$S_4 = 1000$

$S_3 = 1000 + 1000(1.05)^1$

$S_2 = 1000 + 1000(1.05)^1 + 1000(1.05)^2$

$S_1 = 1000 + 1000(1.05)^1 + 1000(1.05)^2 + 1000(1.05)^3$

$\quad = 1000[1 + (1.05) + (1.05)^2 + (1.05)^3] \quad r > 1$

Notemos que $[1 + (1.05) + (1.05)^2 + (1.05)^3]$ es una suma de una progresión geométrica cuya razón es 1.05, por tanto usemos $S_p = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$.

En efecto:

$$S_p = \frac{1000\,[1((1.05)^4 - 1)]}{1.05 - 1} = \frac{1000[1.21550625 - 1]}{0.05}$$

$$= 1000\frac{[0.21550625]}{0.05} = 1000 \cdot S_p = 1000(4.310125) = \$4310.12$$

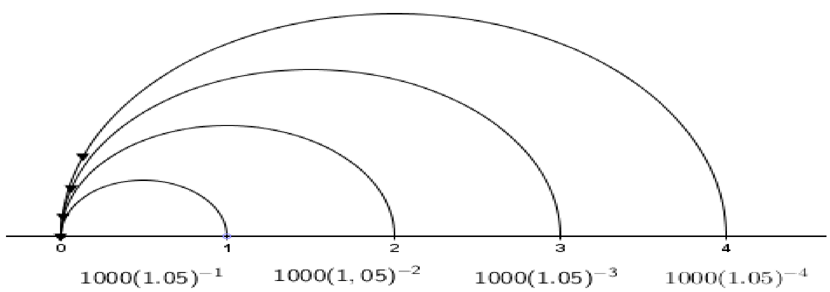
En general el monto de las anualidades lo podemos calcular usando resultados de las progresiones geométricas, lo cual nos genera la fórmula:

$$\boldsymbol{S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}} \;*$$

Donde R es el pago periódico de la anualidad ciertas.

<u>VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD</u>

El valor presente A de una anualidad es la suma de los valores presentes de los distintos pagos, cada uno descontado al principio del plazo.



La suma de los valores presentes de cada anualidad, serian:

$A_1 = 1000(1.05)^{-1}$

$A_2 = 1000(1.05)^{-1} + 1000(1.05)^{-2}$

$A_3 = 1000(1.05)^{-1} + 1000(1.05)^{-2} + 1000(1.05)^{-3}$

$A_4 = 1000(1.05)^{-1} + 1000(1.05)^{-2} + 1000(1.05)^{-3} + 1000(1.05)^{-4}$

$= 1000[(1.05)^{-1} + (1.05)^{-2} + (1.05)^{-3} + (1.05)^{-4}] = 1000\left[\frac{1}{(1.05)} + \frac{1}{(1.05)^2} + \frac{1}{(1.05)^3} + \frac{1}{(1.05)^4}\right]$

En forma análoga observamos que $\left[\frac{1}{(1.05)}+\frac{1}{(1.05)^2}+\frac{1}{(1.05)^3}+\frac{1}{(1.05)^4}\right]$ es la suma de una progresión geométrica, cuya razón es $r=\frac{1}{(1.05)}<1$ y el primer término es $a=\frac{1}{(1.05)}$, entonces aplicando la suma de una progresión geométrica $S_p=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$, se obtiene:

$$S_p=\frac{\frac{1}{(1.05)}\left(1-\left[\frac{1}{(1.05)}\right]^4\right)}{1-\frac{1}{(1.05)}}=\frac{\frac{1}{(1.05)}(1-[1.05]^{-4})}{\frac{1.05-1}{(1.05)}}=\frac{1}{(1.05)}(1-[1.05]^{-4})\cdot\frac{(1.05)}{1.05-1}$$

$$S_p=\frac{(1-[1.05]^{-4})}{0.05}=\frac{1-0.82270247}{0.05}=\frac{0.1772975252}{0.05}=3.5459505042$$

Finalmente tenemos que la suma de los valores presentes de la anualidad es:

$$A_4=1000\cdot S_p=1000(3.5459505042)=\$3{,}545.95$$

En general:

$$\boldsymbol{A=R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Ejemplo: Hallar el monto y el valor presente de una anualidad de $150 mensuales durante 3 años 6 meses al 6% convertible mensualmente.

Solución:

Tenemos que: $R=150$; $n=3\frac{1}{2}\,años\ \Rightarrow\frac{7}{2}\times 12=42\ meses$; $i=\frac{6\%}{12}=\frac{0.06}{12}=0{,}005$, luego usamos:

$$S=R\,\frac{(1+i)^n-1}{i}=150\,\frac{(1+0{,}005)^{42}}{0{,}005}=150(46{,}60654)=\$6990.^{98}$$

El monto de los valores presente:

$$A=R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=150\,\frac{1-(1+0{,}005)^{-42}}{0{,}005}=150(37{,}79830)=\$5669.^{74}$$

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
FACULTAD DE ECONOMÍA
CURSO DE MATEMÁTICA FINANCIERA MAT.202.a
Practica Sobre Anualidades ciertas ordinarias

Fórmulas de Anualidades ciertas ordinarias

1. El pago periódico de una anualidad: → R
2. La tasa de interés por período de interés → $j = \frac{i}{f}$
3. El número de intervalos de pago (el número de período de interés)→ n
4. El monto de la anualidad → S
5. El valor presente de la anualidad → A

Fórmulas básicas de Anualidades

1. $S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i} = R \cdot s_{\overline{n}|i}$
2. $A = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R \cdot a_{\overline{n}|i}$

Ejercicios propuestos

1. Hallar el monto y el valor presente de una anualidad de $ 150 mensual durante 3 años y 6 meses al 6% convertible mensualmente. (respuesta: $S = \$6990.98$ y $A = \$5669.74$)
2. Hallar el monto y el valor presente de una anualidad de $2275 cada 6 meses durante 8 años y 6 meses al 5.4% convertible semestralmente. (respuesta: $S = \$48272.$ y $A = \$30689$)
3. En los ultimos 10 años, X ha depositado $500 al final de cada año en una cuenta de ahorro, la cual paga el $3\frac{1}{2}$% efectivo.¿Cuánto havía en la cuenta inmediatamente después de haber hecho el décimo depósito? (respuesta: $S = \$5865.70.$)
4. El día de hoy, M compra una anualidad de $2500 anuales durante 15 años, en una compañía de seguros que utiliza el 3% anual. Si el primer pago vence en un año, ¿cuál fue el costo de la anualidad? (respuesta: $A = \$29844.84$)
5. La compañía de televisión XYZ tiene en oferta una máquina, con $200 de cuota inicial y $25 mensuales por los proxímos 12 meses. Si se carga un interés de 9% convertible mensualmente, hallar el valor de contado equivalente al inicio.(respuesta: $C = \$485.87$)
6. Hallar el monto y el valor presente de las siguientes anualidades ordinarias:
   a. $400 anuales durante 12 años al $2\frac{1}{2}$%. (respuesta: $5,518.22 y $ 4,103.10)
   b. $ 150 mensuales durante 6 años 3 meses al 6% convertible mensualmente ($13,608.98 y $9362,05)
   c. $500 trimestralmente durante 8 años 9 meses al 6% convertible trimestralmente (res:$22,796.04 y 13, 537.80)
7. B ahorra $600 cada mendio año y los invierte al 3% convertible semestralmente. Hallar el importe de sus ahorros despúes de 10 años. (res:$13, 874.20)
8. Hallar el valor efectivo equivalente a una anualidad de $100 al final de cada 3 meses durante 15 años, suponiendo un interés de 5% convertible trimestralmente. (res: $4,203,46)
9. ¿ Qué es más conveniente, comprar un automovil en $4750 al contado o pagar $500 iniciales y $ 200 al final de cada mes por los próximos 12 meses, suponiendo intereses calculados al 6% convertible mensualmente?
10. M depositó cada 6 meses $100 en una cuenta de ahorros, la cual le producía intereses al 3% convertible semestralmente. El primer depósito se hiszo cuando el hijo de M tenía 6 meses de edad y el último cuando cumplió 21 años. El dinero permaneció en la cuenta y fue entregado al hijo cuando cumplió 25 años. ¿ Cuánto recibió? (res: $6525.00)
