



Una **progresión geométrica** es una sucesión en que cada término (menos el primero) se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad fija **r**, llamada **razón** de la progresión. Este número **r**, se obtiene dividiendo el término posterior entre el anterior, es decir: $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Por ejemplo (1) en la progresión geométrica : 2,4,8,16,32,...

Tenemos que: $r = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$

Ahora observemos, además que esta misma progresión podemos escribirla de esta forma:

$$2(1), 2(2^1), 2(2^2), 2(2^3), 2(2^3), \dots,$$

$$\Rightarrow 2(2^0), 2(2^1), 2(2^2), 2(2^3), 2(2^3), \dots, \dots 2(2^{n-1})$$

en general

$$\Rightarrow ar^0, ar^1, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5, ar^6, \dots, \dots ar^{n-1}$$

$$a_1 = ar^0$$

$$a_2 = ar^1$$

$$a_3 = ar^2$$

$$a_4 = ar^3$$

$$a_5 = ar^4$$

$$a_6 = ar^5$$

$$a_7 = ar^6$$

$$\vdots$$

$$a_n = ar^{n-1}$$

Es decir que:

Entonces nuestro **n-ésimo** término se calcula:

$$[a_n = ar^{n-1}]^*$$

Suma de los n-ésimo términos

Llamemos S_n la suma de los n –ésimos de una progresión geométrica, esto es:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots, +ar^{n-1}$$

y luego multiplicamos ésta misma expresión por la razón **r**

$$r \cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 \dots, +ar^n$$

y calculamos la diferencia

$$S_n - r \cdot S_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a - ar^n \text{ (factorizando por } S_n)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \quad r < 1 \quad *$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \quad r > 1 \quad **$$

Ejemplos:

1. Determine el décimo término y la suma de 10 primeros términos de la progresión geométrica:
4,8,16, 32,

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$a = 4, \quad r = \frac{8}{4} = 2, \quad n = 10$$

$$a_{10} = 4(2)^{10-1} = 4(2^9) = 4(512) = 2048$$

Y la suma

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \quad r > 1$$

$$S_{10} = \frac{4(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{4(2^9 - 1)}{1} = \frac{4(512 - 1)}{1} = 4(511) = 2044,$$

2. Determine el 12° término y la suma de 8 primeros términos de la progresión geométrica:

$$1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, \dots$$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$a = 1, \quad r = \frac{-\frac{1}{4}}{1} = -\frac{1}{4}, \quad n = 12$$

$$a_{12} = 1 \left(-\frac{1}{4}\right)^{12-1} = 1 \left(-\frac{1}{4}\right)^{11} = -\frac{1}{4^{11}} = -\frac{1}{4194304}$$

Y la suma

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \quad r < 1$$

$$S_8 = \frac{1 \left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^8\right)}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{1}{65536}\right)}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{65536 - 1}{65536}}{\frac{4 + 1}{4}} = \frac{\frac{65535}{65536}}{\frac{5}{4}} = \frac{65535}{65536} \times \frac{4}{5} = \frac{13107}{16384} \approx 0.79999$$

Ejercicios:

1. Encontrar el 8° término y la suma de los 8 primeros términos de la progresión geométrica 1,3,9, 27, $\Rightarrow a_8 = 2187$ y $S_8 = 3280$
2. Hallar la suma de los 15 primeros términos de la progresión geométrica 1, (1.03), (1.03)², (1.03)³, ... $\Rightarrow S_{15} \approx 18,60$
3. Determine la suma de los 12 primeros términos de la progresión geométrica (1.04)⁻¹, (1.04)⁻², (1.04)⁻³, ... (1.04)⁻¹², ... $\Rightarrow S_{12} \approx 9.39$

4. Una máquina costó \$2000. La depreciación mensual al final de cualquier mes es calculada en 5% del valor al comienzo del mes. ¿Qué valor tendrá la máquina al cabo de 24 meses de usos?
 (Use: $V_s = C_0(1 - d)^t$) donde V_s es el valor de salvamento, C_0 el costo original, d la tasa de depreciación y t el tiempo) $\Rightarrow a_{24} = \$583,99$
5. Una máquina nueva cuesta \$3150 y se deprecia hasta \$650, en 8 años. Hallar:
- La tasa de depreciación anual. $\Rightarrow d = 17,90 \%$
 - El valor contable al final de los 5 años. $\Rightarrow V_5 = \$1174,70$
6. Un motor con costo inicial de \$1050 se deprecia a la tasa de 7.5% anual. Determine su valor contable al final del 7° año $\Rightarrow V_7 = 608,39$
7. A una locomotora con costo de \$150 000 se le ha estimado un valor de salvamento de \$5000 y una vida útil de 30 años. Determine:
- La tasa de depreciación anual $\Rightarrow 10,718\%$
 - El valor en libros al final del 20° año $\Rightarrow \$15 536$
 - El cargo por depreciación del 25° año $\Rightarrow \$ 1058,10$
8. Determine la suma infinita de las progresiones geométricas siguientes:
- $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8} \dots \Rightarrow \frac{2}{3}$
 - $0.4, 0.04, 0.004, 0.0004 \dots \Rightarrow \frac{4}{9}$
 - $\frac{1}{1+i}, \frac{1}{(1+i)^2}, \frac{1}{(1+i)^3}, \frac{1}{(1+i)^4}, \dots \Rightarrow \frac{1}{i}$