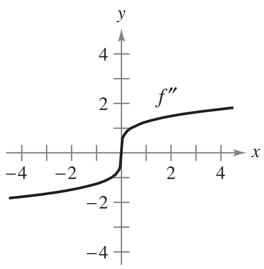
Desarrollo de conceptos

67. ¿Cuál es la diferencia, si existe, entre encontrar la antiderivada de $f(x)$ y evaluar la integral $\int f(x)\, dx$?

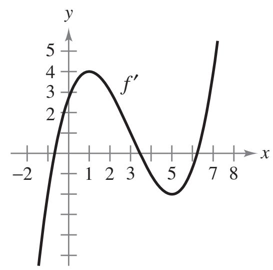
68. Considerar $f(x) = \tan^2 x$ y $g(x) = \sec^2 x$. ¿Qué se nota acerca de las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$? ¿Qué se puede concluir acerca de la relación entre $f(x)$ y $g(x)$?

69. Las gráficas de f y f' pasan a través del origen. Usar la gráfica de f'' mostrada en la figura para bosquejar la gráfica de f y f'.



Para discusión

70. Usar la gráfica de f' que se muestra en la figura para responder lo siguiente, dado que $f(0) = -4$.



a) Aproximar la pendiente de f en $x = 4$. Explicar.

b) ¿Es posible que $f(2) = -1$? Explicar.

c) ¿Es $f(5) - f(4) > 0$? Explicar.

d) Aproximar el valor de x donde f es máxima. Explicar.

e) Aproximar cualquier intervalo en el que la gráfica de f es cóncava hacia arriba y cualquier intervalo en el cual es cóncava hacia abajo. Aproximar la coordenada x a cualquier punto de inflexión.

f) Aproximar la coordenada x del mínimo de $f''(x)$.

g) Dibujar una gráfica aproximada de f.

Movimiento vertical **En los ejercicios 71 a 74, utilizar $a(t) = -32$ pies/s² como la aceleración debida a la gravedad. (Ignorar la resistencia al aire.)**

71. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde una altura de 6 pies con una velocidad inicial de 60 pies por segundo. ¿Qué altura alcanzará la pelota?

72. Mostrar que la altura a la que llega un objeto lanzado hacia arriba desde un punto s_0 pies a una velocidad inicial de v_0 por segundo está dada por la función

$$f(t) = -16t^2 + v_0 t + s_0.$$

73. ¿Con qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde el nivel del suelo) para alcanzar la parte superior del monumento a Washington (cerca de 550 pies)?

74. Un globo aerostático, que asciende verticalmente con una velocidad de 16 pies por segundo, deja caer una bolsa de arena en el instante en el que está a 64 pies sobre el suelo.

a) ¿En cuántos segundos llegará la bolsa al suelo?

b) ¿A qué velocidad hará contacto con el suelo?

Movimiento vertical **En los ejercicios 75 a 78, emplear $a(t) = -9.8$ m/s² como aceleración de la gravedad. (Ignorar la resistencia al aire.)**

75. Mostrar que la altura sobre el suelo de un objeto que se lanza hacia arriba desde un punto s_0 metros sobre el suelo a una velocidad inicial de v_0 metros por segundo está dada por la función

$$f(t) = -4.9t^2 + v_0 t + s_0.$$

76. El Gran Cañón tiene una profundidad de 1 800 metros en su punto más profundo. Se deja caer una roca desde el borde sobre ese punto. Escribir la altura de la roca como una función del tiempo t en segundos. ¿Cuánto tardará la roca en llegar al suelo del cañón?

77. Una pelota de beisbol es lanzada hacia arriba desde una altura de 2 metros con una velocidad inicial de 10 metros por segundo. Determinar su altura máxima.

78. ¿A qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde una altura de 2 metros) para que alcance una altura máxima de 200 metros?

79. ***Gravedad lunar*** Sobre la Luna, la aceleración de la gravedad es de -1.6 m/s². En la Luna se deja caer una piedra desde un peñasco y golpea la superficie de esta misma 20 segundos después. ¿Desde qué altura cayó? ¿Cuál era su velocidad en el momento del impacto?

80. ***Velocidad de escape*** La velocidad mínima que se requiere para que un objeto escape de su atracción gravitatoria se obtiene a partir de la solución de la ecuación

$$\int v\, dv = -GM \int \frac{1}{y^2}\, dy$$

donde v es la velocidad del objeto lanzado desde la Tierra, y es la distancia desde el centro terrestre, G es la constante de la gravitación y M es la masa de la Tierra. Demostrar que v y y están relacionados por la ecuación

$$v^2 = v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)$$

donde v_0 es la velocidad inicial del objeto y R es el radio terrestre.

Movimiento rectilíneo **En los ejercicios 81 a 84, considerar una partícula que se mueve a lo largo del eje x, donde $x(t)$ es la posición de la partícula en el tiempo t, $x'(t)$ su velocidad y $x''(t)$ su aceleración.**

81. $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 2, \quad 0 \leq t \leq 5$

a) Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula.

b) Encontrar los intervalos abiertos de t en los cuales la partícula se mueve hacia la derecha.

c) Encontrar la velocidad de la partícula cuando la aceleración es 0.

82. Repetir el ejercicio 81 para la función posición

$x(t) = (t - 1)(t - 3)^2, \quad 0 \leq t \leq 5$

83. Una partícula se mueve a lo largo del eje x a una velocidad de $v(t) = 1/\sqrt{t}$, $t > 0$. En el tiempo $t = 1$, su posición es $x = 4$. Encontrar las funciones posición y la aceleración de la partícula.

84. Una partícula, inicialmente en reposo, se mueve a lo largo del eje x de manera que su aceleración en el tiempo $t > 0$ está dada por $a(t) = \cos t$. En el tiempo $t = 0$, su posición es $x = 3$.

a) Determinar las funciones velocidad y la posición de la partícula.

b) Encontrar los valores de t para los cuales la partícula está en reposo.

85. ***Aceleración*** El fabricante de un automóvil indica en su publicidad que el vehículo tarda 13 segundos en acelerar desde 25 kilómetros por hora hasta 80 kilómetros por hora. Suponiendo aceleración constante, calcular lo siguiente.

a) La aceleración en m/s^2.

b) La distancia que recorre el automóvil durante los 13 segundos.

86. ***Desaceleración*** Un automóvil que viaja a 45 millas por hora recorre 132 pies, a desaceleración constante, luego de que se aplican los frenos para detenerlo.

a) ¿Qué distancia recorre el automóvil cuando su velocidad se reduce a 30 millas por hora?

b) ¿Qué distancia recorre el automóvil cuando su velocidad se reduce a 15 millas por hora?

c) Dibujar la recta de números reales desde 0 hasta 132 y hacer la gráfica de los puntos que se encontraron en los apartados *a*) y *b*). ¿Qué se puede concluir?

87. ***Aceleración*** En el instante en que la luz de un semáforo se pone en verde, un automóvil que ha estado esperando en un crucero empieza a moverse con una aceleración constante de 6 pies/s^2. En el mismo instante, un camión que viaja a una velocidad constante de 30 pies por segundo rebasa al automóvil.

a) ¿A qué distancia del punto de inicio el automóvil rebasará al camión?

b) ¿A qué velocidad circulará el automóvil cuando rebase al camión?

88. ***Aceleración*** Suponer que un avión totalmente cargado que parte desde el reposo tiene una aceleración constante mientras se mueve por la pista. El avión requiere 0.7 millas de pista y una velocidad de 160 millas por hora para despegar. ¿Cuál es la aceleración del avión?

89. ***Separación de aviones*** Dos aviones están en un patrón de aterrizaje de línea recta y, de acuerdo con las regulaciones de la FAA, debe mantener por lo menos una separación de 3 millas. El avión A está a 10 millas de su descenso y gradualmente reduce su velocidad desde 150 millas por hora hasta la velocidad de aterrizaje de 100 millas por hora. El avión B se encuentra a 17 millas del descenso y reduce su velocidad de manera gradual desde 250 millas por hora hasta una velocidad de aterrizaje de 115 millas por hora.

a) Asumiendo que la desaceleración de cada avión es constante, determinar las condiciones de la posición s_A y s_B para el avión A y el avión B. Dejar que $t = 0$ represente los tiempos en los que los aviones están a 10 y 17 millas del aeropuerto.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar las funciones de la posición.

c) Encontrar una fórmula para la magnitud de la distancia d entre los dos aviones como una función de t. Utilizar una herramienta de graficación para representar d. ¿Es $d < 3$ durante algún momento previo al aterrizaje del avión A? Si es así, determinar ese tiempo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 90 a 95, determinar si el enunciado es falso o verdadero. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

90. Cada antiderivada o primitiva de una función polinomial de n grados es una función polinomial de grado $(n + 1)$.

91. Si $p(x)$ es una función polinomial, entonces p tiene exactamente una antiderivada o primitiva cuya gráfica contiene al origen.

92. Si $F(x)$ y $G(x)$ son antiderivadas o primitivas de $f(x)$, entonces $F(x) = G(x) + C$.

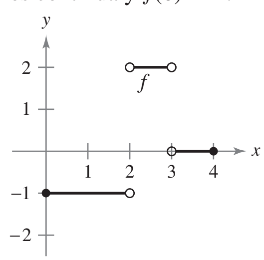
93. Si $f'(x) = g(x)$ entonces $\int g(x)\,dx = f(x) + C$.

94. $\int f(x)g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \int g(x)\,dx$.

95. La antiderivada o primitiva de $f(x)$ es única.

96. Encontrar una función f tal que la gráfica de ésta tenga una tangente horizontal en $(2, 0)$ y $f''(x) = 2x$.

97. Se muestra la gráfica de f'. Dibujar la gráfica de f dado que f es continua y $f(0) = 1$.



98. Si $f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 2 \\ 3x, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$, f es continua y $f(1) = 3$, determinar f. ¿Es f diferenciable en $x = 2$?

99. Sean $s(x)$ y $c(x)$ dos funciones que satisfacen $s'(x) = c(x)$ y $c'(x) = -s(x)$ para todo x. Si $s(0) = 0$ y $c(0) = 1$, demostrar que $[s(x)]^2 + [c(x)]^2 = 1$.

Preparación del examen Putnam

100. Suponer que f y g son funciones no constantes, derivables y de valores reales en R. Además, suponer que para cada par de números reales x y y, $f(x + y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$ y $g(x + y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$. Si $f'(0) = 0$, probar que $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ para todo x.

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.

4.2 Área

- Emplear la notación sigma para escribir y calcular una suma.
- Entender el concepto de área.
- Aproximar el área de una región plana.
- Determinar el área de una región plana usando límites.

Notación sigma

En la sección anterior, se estudió la antiderivación. En ésta se considerará en forma adicional un problema que se presentó en la sección 1.1: el de encontrar el área de una región en el plano. A primera vista, estas dos ideas parecen no relacionarse, aunque se descubrirá en la sección 4.4 que se relacionan de manera estrecha por medio de un teorema muy importante conocido como el teorema fundamental del cálculo.

Esta sección se inicia introduciendo una notación concisa para sumas. Esta notación recibe el nombre de **notación sigma** debido a que utiliza la letra griega mayúscula sigma, Σ.

NOTACIÓN SIGMA

La suma de n términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se escribe como

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

donde i es el **índice de suma**, a_i es el ***i*-ésimo término** de la suma y los **límites superior e inferior de la suma** son n y 1.

NOTA Los límites superior e inferior de la suma han de ser constantes respecto al índice de suma. Sin embargo, el límite inferior no tiene por qué ser 1. Cualquier entero menor o igual al límite superior es legítimo.

EJEMPLO 1 Ejemplos con la notación sigma

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{5} (i + 1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

c) $\displaystyle\sum_{j=3}^{7} j^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(k^2 + 1) = \frac{1}{n}(1^2 + 1) + \frac{1}{n}(2^2 + 1) + \cdots + \frac{1}{n}(n^2 + 1)$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$

En los apartados *a*) y *b*), obsérvese que la misma suma puede representarse de maneras diferentes utilizando la notación sigma.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para una interpretación geométrica de las fórmulas de suma, ver el artículo "Looking at $\sum_{k=1}^{n} k$ y $\sum_{k=1}^{n} k^2$ Geometrically" de Eric Hegblom en *Mathematics Teacher*.

Aunque puede utilizarse cualquier variable como índice de suma, suele preferirse i, j y k. Nótese en el ejemplo 1 que el índice de suma no aparece en los términos de la suma desarrollada.

La suma de los primeros cien enteros

El maestro de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) pidió a sus alumnos que sumaran todos los enteros desde 1 hasta 100. Cuando Gauss regresó con la respuesta correcta muy poco tiempo después, el maestro no pudo evitar mirarle atónito. Lo siguiente fue lo que hizo Gauss:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 \end{array}$$

$$\frac{100 \times 101}{2} = 5\,050$$

Esto se generaliza por medio del teorema 4.2, donde

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100(101)}{2} = 5\,050.$$

Las siguientes propiedades de la suma empleando la notación sigma se deducen de las propiedades asociativa y conmutativa de la suma y de la propiedad distributiva de la adición sobre la multiplicación. (En la primera propiedad, k es una constante.)

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

El siguiente teorema lista algunas fórmulas útiles para la suma de potencias. Una demostración de este teorema se incluye en el apéndice A.

TEOREMA 4.2 FÓRMULAS DE SUMA EMPLEANDO LA NOTACIÓN SIGMA

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = cn$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

EJEMPLO 2 Evaluación de una suma

Hallar $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2}$ para $n = 10$, 100, 1 000 y 10 000.

Solución Al aplicar el teorema 4.2, es posible escribir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i+1) && \text{Factor constante } 1/n^2 \text{ fuera de la suma.} \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) && \text{Escribir como dos sumas.} \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + n\right] && \text{Aplicar el teorema 4.2.} \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n^2+3n}{2}\right] && \text{Simplificar.} \\
&= \frac{n+3}{2n}. && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

Después de esto se puede encontrar la suma sustituyendo los valores apropiados de n, como se muestra en la tabla de la izquierda.

n	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} = \frac{n+3}{2n}$
10	0.65000
100	0.51500
1 000	0.50150
10 000	0.50015

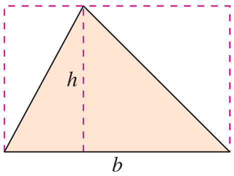
En la tabla, las sumas parecen tender a un límite conforme n aumenta. Aunque la discusión de límites en el infinito en la sección 3.5 se aplica a una variable de x, donde x puede ser cualquier número real, muchos de los resultados siguen siendo válidos cuando una variable n se restringe a valores enteros positivos. Así, para encontrar el límite de $(n+3)/2n$ cuando n tiende a infinito, se puede escribir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n} + \frac{3}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2n}\right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

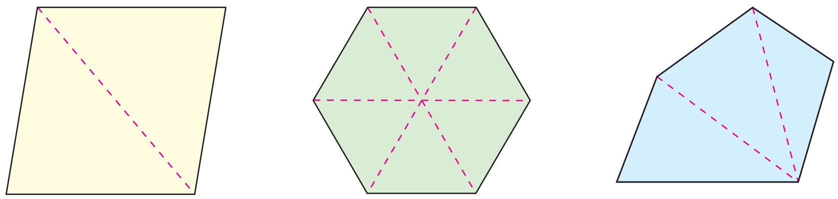
Área

En la geometría euclideana, el tipo más simple de región plana es un rectángulo. Aunque la gente a menudo afirma que la *fórmula* para el área de un rectángulo es $A = bh$, resulta más apropiado decir que ésta es la *definición* del **área de un rectángulo**.

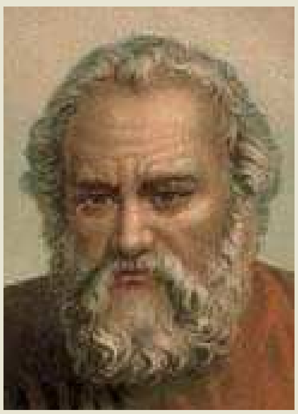
De esta definición, se pueden deducir fórmulas para áreas de muchas otras regiones planas. Por ejemplo, para determinar el área de un triángulo, se puede formar un rectángulo cuya área es dos veces la del triángulo, como se indica en la figura 4.5. Una vez que se sabe cómo encontrar el área de un triángulo, se puede determinar el área de cualquier polígono subdividiéndolo en regiones triangulares, como se ilustra en la figura 4.6.



Triángulo: $A = \frac{1}{2}bh$
Figura 4.5



Paralelogramo Hexágono Polígono
Figura 4.6



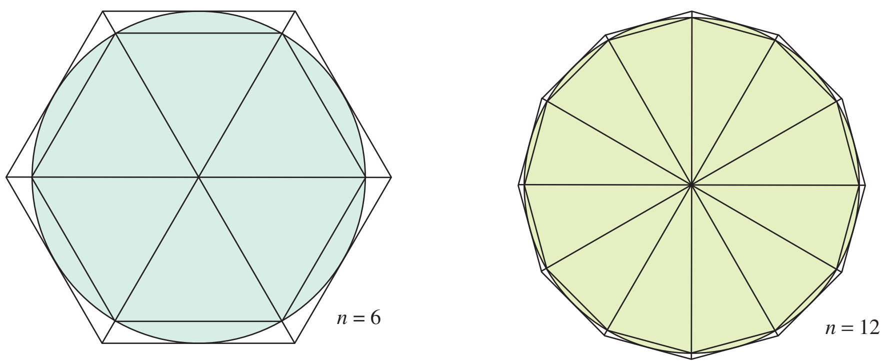
Mary Evans Picture Library

Arquímedes (287-212 a.C.)

Arquímedes utilizó el método de exhaución para deducir fórmulas para las áreas de elipses, segmentos parabólicos y sectores de una espiral. Se le considera como el más grande matemático aplicado de la antigüedad.

Hallar las áreas de regiones diferentes a las de los polígonos es más difícil. Los antiguos griegos fueron capaces de determinar fórmulas para las áreas de algunas regiones generales (principalmente aquellas delimitadas por cónicas) mediante el método de *exhaución*. La descripción más clara de este método la hizo Arquímedes. En esencia, el método es un proceso de límite en el que el área se encierra entre dos polígonos (uno inscrito en la región y otro circunscrito alrededor de la región).

Por ejemplo, en la figura 4.7 el área de una región circular se aproxima mediante un polígono inscrito de n lados y un polígono circunscrito de n lados. Para cada valor de n el área del polígono inscrito es menor que el área del círculo, y el área del polígono circunscrito es mayor que el área del círculo. Además, a medida que n aumenta, las áreas de ambos polígonos van siendo cada vez mejores aproximaciones al área del círculo.



El método de exhaución para determinar el área de una región circular
Figura 4.7

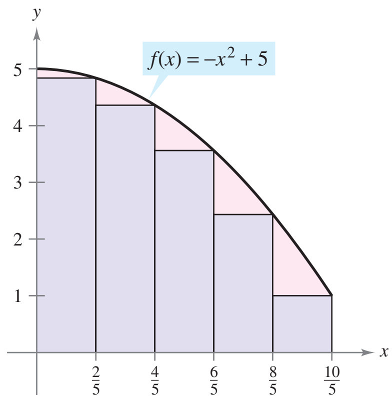
PARA MAYOR INFORMACIÓN Para un desarrollo alternativo de la fórmula para el área de un círculo, ver el artículo "Proof Whitout Words: Area of a Disk is πR^2" de Russell Jay Hendel en *Mathematics Magazine*.

Un proceso similar al que usó Arquímedes para determinar el área de una región plana se usa en los ejemplos restantes en esta sección.

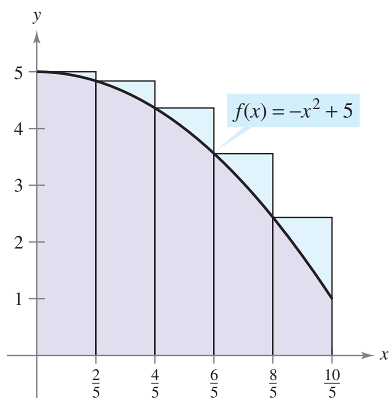
El área de una región plana

Recordar de la sección 1.1 que los orígenes del cálculo están relacionados con dos problemas clásicos: el problema de la recta tangente y el problema del área. En el ejemplo 3 se inicia la investigación del problema del área.

EJEMPLO 3 Aproximación del área de una región plana



a) El área de una región parabólica es mayor que el área de los rectángulos



b) El área de la región parabólica es menor que el área de los rectángulos

Figura 4.8

Emplear los cinco rectángulos de la figura 4.8*a*) y *b*) para determinar *dos* aproximaciones del área de la región que se encuentra entre la gráfica de

$$f(x) = -x^2 + 5$$

y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.

Solución

a) Los puntos terminales de la derecha de los cinco intervalos son $\frac{2}{5}i$, donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. El ancho de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$, y la altura de cada rectángulo se puede obtener al hallar f en el punto terminal derecho de cada intervalo.

$$\left[0, \frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right], \left[\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right], \left[\frac{8}{5}, \frac{10}{5}\right]$$

Evaluar f en los puntos terminales de la derecha de estos intervalos.

La suma de las áreas de los cinco rectángulos es

$$\sum_{i=1}^{5} \overbrace{f\left(\frac{2i}{5}\right)}^{\text{Altura}} \overbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}^{\text{Ancho}} = \sum_{i=1}^{5}\left[-\left(\frac{2i}{5}\right)^2 + 5\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{162}{25} = 6.48.$$

Como cada uno de los cinco rectángulos se encuentra dentro de la región parabólica, se concluye que el área de la región parabólica es mayor que 6.48.

b) Los puntos terminales izquierdos de los cinco intervalos son $\frac{2}{5}(i - 1)$, donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. La anchura de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$ y la altura de cada uno puede obtenerse evaluando f en el punto terminal izquierdo de cada intervalo. Por tanto, la suma es

$$\sum_{i=1}^{5} \overbrace{f\left(\frac{2i-2}{5}\right)}^{\text{Altura}} \overbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}^{\text{Ancho}} = \sum_{i=1}^{5}\left[-\left(\frac{2i-2}{5}\right)^2 + 5\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{202}{25} = 8.08.$$

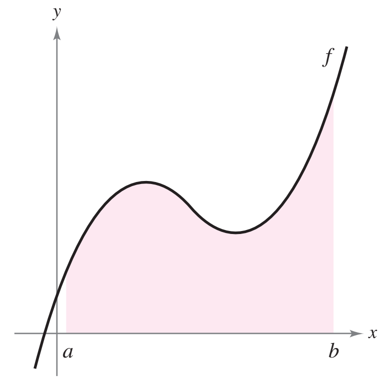
Debido a que la región parabólica se encuentra contenida en la unión de las cinco regiones rectangulares, es posible concluir que el área de la región parabólica es menor que 8.08.

Combinando los resultados de los apartados *a*) y *b*), es posible concluir que

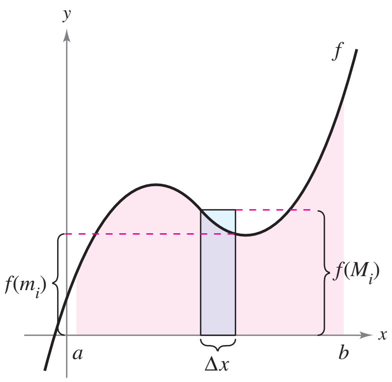
$$6.48 < (\text{Área de la región}) < 8.08.$$

NOTA Al incrementar el número de rectángulos utilizados en el ejemplo 3, se pueden obtener aproximaciones más y más cercanas al área de la región. Por ejemplo, al utilizar 25 rectángulos, cada uno de ancho $\frac{2}{25}$, puede concluirse que

$$7.17 < (\text{Área de la región}) < 7.49.$$



La región bajo una curva
Figura 4.9



El intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos de ancho $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$
Figura 4.10

Sumas superior e inferior

El procedimiento utilizado en el ejemplo 3 puede generalizarse de la manera siguiente. Considerar una región plana limitada en su parte superior por la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, como se muestra en la figura 4.9. La región está limitada en su parte inferior por el eje x y las fronteras izquierda y derecha por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Para aproximar el área de la región, se empieza subdividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = (b - a)/n$ como se muestra en la figura 4.10. Los puntos terminales de los intervalos son los siguientes.

$$\overbrace{a + 0(\Delta x)}^{a\,=\,x_0} < \overbrace{a + 1(\Delta x)}^{x_1} < \overbrace{a + 2(\Delta x)}^{x_2} < \cdot\cdot\cdot < \overbrace{a + n(\Delta x)}^{x_n\,=\,b}$$

Como f es continua, el teorema del valor extremo garantiza la existencia de un valor mínimo y uno máximo de $f(x)$ en *cada* subintervalo.

$f(m_i)$ = valor mínimo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo
$f(M_i)$ = valor máximo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo

A continuación, se define un **rectángulo inscrito** que se encuentra *dentro* de la i-ésima subregión y un **rectángulo circunscrito** que se extiende *fuera* de la i-ésima región. La altura del i-ésimo rectángulo inscrito es $f(m_i)$ y la altura del i-ésimo rectángulo circunscrito es $f(M_i)$. Para *cada* i, el área del rectángulo inscrito es menor que o igual que el área del rectángulo circunscrito.

$$\begin{pmatrix}\text{Área del rectángulo}\\ \text{inscrito}\end{pmatrix} = f(m_i)\,\Delta x \leq f(M_i)\,\Delta x = \begin{pmatrix}\text{Área del rectángulo}\\ \text{circunscrito}\end{pmatrix}$$

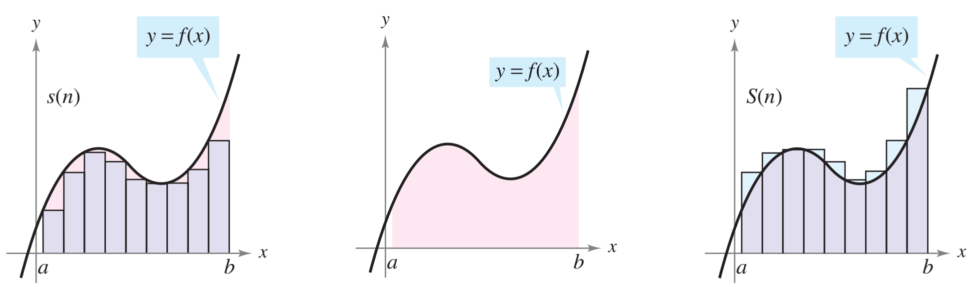
La suma de las áreas de los rectángulos inscritos recibe el nombre de **suma inferior**, y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos se conoce como **suma superior**.

$$\text{Suma inferior} = s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x \qquad \text{Área de rectángulos inscritos.}$$

$$\text{Suma superior} = S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x \qquad \text{Área de rectángulos circunscritos.}$$

En la figura 4.11, se puede observar que la suma inferior $s(n)$ es menor o igual que la suma superior $S(n)$. Además, el área real de la región se encuentra entre estas dos sumas.

$$s(n) \leq (\text{Área de región}) \leq S(n)$$

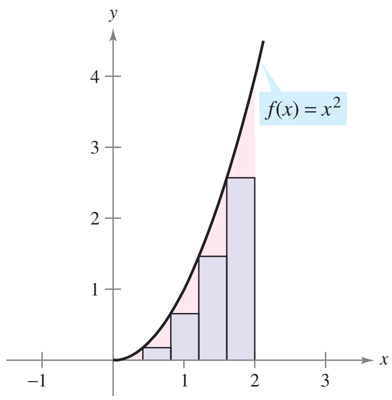


El área de los rectángulos inscritos es menor que el área de la región

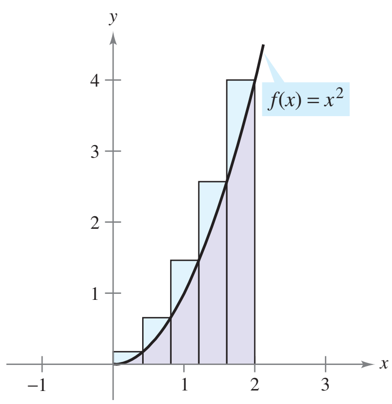
Área de la región

El área de los rectángulos circunscritos es mayor que el área de la región

Figura 4.11



Rectángulos inscritos



Rectángulos circunscritos
Figura 4.12

EJEMPLO 4 Hallar las sumas superior e inferior de una región

Determinar la suma superior e inferior de la región delimitada por la gráfica de $f(x) = x^2$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.

Solución Para empezar, se divide el intervalo [0, 2] en n subintervalos, cada uno de ancho

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}.$$

La figura 4.12 muestra los puntos terminales de los subintervalos y varios de los rectángulos inscritos y circunscritos. Como f es creciente en el intervalo [0, 2], el valor mínimo en cada subintervalo ocurre en el punto terminal izquierdo, y el valor máximo ocurre en el punto terminal derecho.

Puntos terminales izquierdos	*Puntos terminales derechos*
$m_i = 0 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2(i-1)}{n}$	$M_i = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n}$

Utilizando los puntos terminales izquierdos, la suma inferior es

$$\begin{aligned}
s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} f\left[\frac{2(i-1)}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{2(i-1)}{n}\right]^2\left(\frac{2}{n}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8}{n^3}\right)(i^2 - 2i + 1)\\
&= \frac{8}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)\\
&= \frac{8}{n^3}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n\right\}\\
&= \frac{4}{3n^3}(2n^3 - 3n^2 + n)\\
&= \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}. \qquad \text{Suma inferior.}
\end{aligned}$$

Empleando los puntos terminales derechos, la suma superior es

$$\begin{aligned}
S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8}{n^3}\right)i^2\\
&= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\\
&= \frac{4}{3n^3}(2n^3 + 3n^2 + n)\\
&= \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}. \qquad \text{Suma superior.}
\end{aligned}$$

EXPLORACIÓN

Para la región dada en el ejemplo 4, calcular la suma inferior

$$s(n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

y la suma superior

$$S(n) = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

para $n = 10$ 100 y 1 000. Utilizar los resultados para determinar el área de la región.

El ejemplo 4 ilustra algunos aspectos importantes acerca de las sumas inferior y superior. Primero, advertir que para cualquier valor de n, la suma inferior es menor (o igual) que la suma superior.

$$s(n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} < \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} = S(n)$$

Segundo, la diferencia entre estas dos sumas disminuye cuando n aumenta. De hecho, si se toman los límites cuando $n \to \infty$, tanto en la suma superior como en la suma inferior se aproximan a $\frac{8}{3}$.

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$ Límite de la suma inferior.

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$ Límite de la suma superior.

El siguiente teorema muestra que la equivalencia de los límites (cuando $n \to \infty$) de las sumas superior e inferior no es una mera coincidencia. Este teorema es válido para toda función continua no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$. La demostración de este teorema es más adecuada para un curso de cálculo avanzado.

TEOREMA 4.3 LÍMITES DE LAS SUMAS SUPERIOR E INFERIOR

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. Los límites cuando $n \to \infty$ de las sumas inferior y superior existen y son iguales entre sí. Esto es

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s(n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} S(n)\end{aligned}$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $f(m_i)$ y $f(M_i)$ son los valores mínimo y máximo de f en el subintervalo.

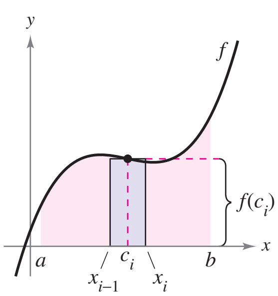
Debido a que se alcanza el mismo límite tanto con el valor mínimo $f(m_i)$ como con el valor máximo $f(M_i)$, se sigue a partir del teorema del encaje o del emparedado (teorema 1.8) que la elección de x en el i-ésimo intervalo no afecta al límite. Esto significa que se está en libertad de elegir cualquier valor de x *arbitrario* en el i-ésimo subintervalo, como en la siguiente *definición del área de una región en el plano*.

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL PLANO

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

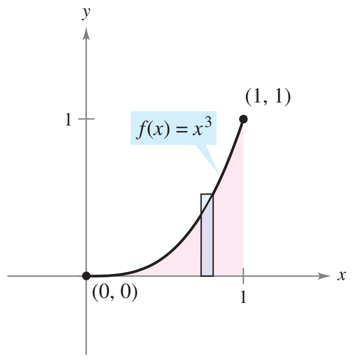
$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ (ver la figura 4.13).



El ancho del i-ésimo subintervalo es $\Delta x = x_i - x_{i-1}$

Figura 4.13



El área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = 0$ y $x = 1$ es $\frac{1}{4}$
Figura 4.14

EJEMPLO 5 Hallar el área mediante la definición de límite

Encontrar el área de la región limitada por la gráfica $f(x) = x^3$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$, como se muestra en la figura 4.14.

Solución Se empieza notando que f es continua y no negativa en el intervalo $[0, 1]$. Después, se divide el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = 1/n$. De acuerdo con la definición de área, elegir cualquier valor de x en el i-ésimo subintervalo. En este ejemplo, los puntos terminales derechos $c_i = i/n$ resultan adecuados.

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{Puntos terminales derechos: } c_i = \frac{i}{n}.$$

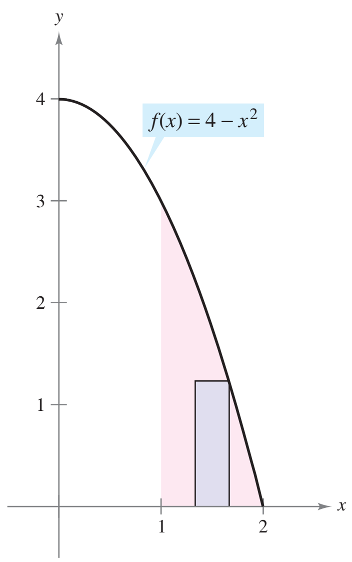
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

El área de la región es $\frac{1}{4}$.



El área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = 1$ y $x = 2$ es $\frac{5}{3}$
Figura 4.15

EJEMPLO 6 Hallar el área mediante la definición de límite

Determinar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$, el eje x y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$, como se indica en la figura 4.15.

Solución La función f es continua y no negativa en el intervalo $[1, 2]$, y de tal modo se empieza dividiendo el intervalo en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = 1/n$. Eligiendo el punto terminal derecho

$$c_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{i}{n} \qquad \text{Puntos terminales derechos.}$$

de cada subintervalo, se obtiene

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[4 - \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{2i}{n} - \frac{i^2}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 3 - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[3 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$

$$= 3 - 1 - \frac{1}{3}$$

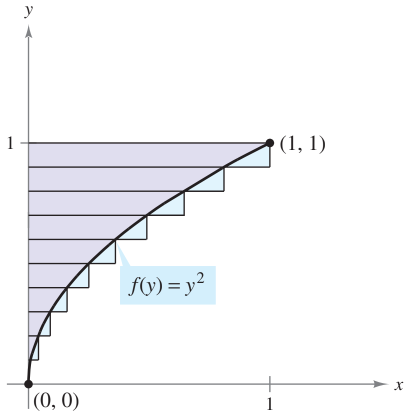
$$= \frac{5}{3}.$$

El área de la región es $\frac{5}{3}$.

El último ejemplo en esta sección considera una región limitada por el eje y (en vez del eje x).

EJEMPLO 7 Una región limitada por el eje y

Encontrar el área de la región limitada por la gráfica de $f(y) = y^2$ y el eje y para $0 \le y \le 1$, como se muestra en la figura 4.16.



El área de la región acotada por la gráfica de f, el eje y para $0 \le y \le 1$ es $\frac{1}{3}$
Figura 4.16

Solución Cuando f es una función continua y no negativa de y, puede seguirse utilizando el mismo procedimiento básico que se ilustró en los ejemplos 5 y 6. Se empieza dividiendo el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta y = 1/n$. Después utilizando los puntos terminales superiores $c_i = i/n$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta y &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) && \text{Puntos terminales superiores: } c_i = \frac{i}{n}. \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

El área de la región es $\frac{1}{3}$.

4.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, encontrar la suma. Usar la función de suma de la herramienta de graficación para verificar el resultado.

1. $\sum_{i=1}^{6} (3i + 2)$
2. $\sum_{k=5}^{8} k(k - 4)$
3. $\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k^2 + 1}$
4. $\sum_{j=4}^{7} \frac{2}{j}$
5. $\sum_{k=1}^{4} c$
6. $\sum_{i=1}^{4} [(i - 1)^2 + (i + 1)^3]$

En los ejercicios 7 a 14, utilizar la notación sigma para escribir la suma.

7. $\frac{1}{5(1)} + \frac{1}{5(2)} + \frac{1}{5(3)} + \cdots + \frac{1}{5(11)}$
8. $\frac{9}{1 + 1} + \frac{9}{1 + 2} + \frac{9}{1 + 3} + \cdots + \frac{9}{1 + 14}$
9. $\left[7\left(\frac{1}{6}\right) + 5\right] + \left[7\left(\frac{2}{6}\right) + 5\right] + \cdots + \left[7\left(\frac{6}{6}\right) + 5\right]$
10. $\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] + \left[1 - \left(\frac{2}{4}\right)^2\right] + \cdots + \left[1 - \left(\frac{4}{4}\right)^2\right]$
11. $\left[\left(\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{2}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left[\left(\frac{2n}{n}\right)^3 - \frac{2n}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right)$
12. $\left[1 - \left(\frac{2}{n} - 1\right)^2\right]\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left[1 - \left(\frac{2n}{n} - 1\right)^2\right]\left(\frac{2}{n}\right)$
13. $\left[2\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + \left[2\left(1 + \frac{3n}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right)$
14. $\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{0}{n}\right)^2} + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$

En los ejercicios 15 a 22, utilizar las propiedades de la notación sigma y el teorema 4.2 para calcular la suma. Utilizar la función de suma de la herramienta de graficación para verificar el resultado.

15. $\sum_{i=1}^{12} 7$
16. $\sum_{i=1}^{30} -18$
17. $\sum_{i=1}^{24} 4i$
18. $\sum_{i=1}^{16} (5i - 4)$
19. $\sum_{i=1}^{20} (i - 1)^2$
20. $\sum_{i=1}^{10} (i^2 - 1)$
21. $\sum_{i=1}^{15} i(i - 1)^2$
22. $\sum_{i=1}^{10} i(i^2 + 1)$

En los ejercicios 23 y 24, usar la función de suma de una herramienta de graficación para evaluar la suma. Después emplear las propiedades de la notación sigma y el teorema 4.2 para verificar la suma.

23. $\sum_{i=1}^{20} (i^2 + 3)$
24. $\sum_{i=1}^{15} (i^3 - 2i)$

25. Considerar la función $f(x) = 3x + 2$.

a) Estimar el área entre la gráfica de f y el eje x entre $x = 0$ y $x = 3$ usando seis rectángulos y puntos terminales derechos. Dibujar la gráfica y los rectángulos.

b) Repetir el apartado *a*) usando puntos terminales izquierdos.

26. Considerar la función $g(x) = x^2 + x - 4$.

a) Estimar el área entre la gráfica de g y el eje x entre $x = 2$ y $x = 4$, usando rectángulos y puntos terminales derechos. Bosquejar la gráfica y los rectángulos.

b) Repetir el apartado *a*) usando puntos terminales izquierdos.

En los ejercicios 27 a 32, usar los puntos terminales izquierdo y derecho y el número de rectángulos dado para encontrar dos aproximaciones del área de la región entre la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo dado.

27. $f(x) = 2x + 5$, $[0, 2]$, 4 rectángulos

28. $f(x) = 9 - x$, $[2, 4]$, 6 rectángulos

29. $g(x) = 2x^2 - x - 1$, $[2, 5]$, 6 rectángulos

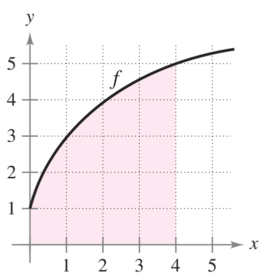
30. $g(x) = x^2 + 1$, $[1, 3]$, 8 rectángulos

31. $f(x) = \cos x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 4 rectángulos

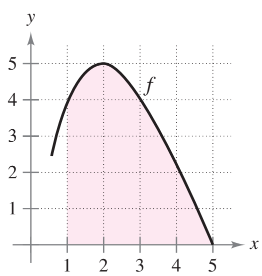
32. $g(x) = \operatorname{sen} x$, $[0, \pi]$, 6 rectángulos

En los ejercicios 33 a 36, delimitar el área de la región sombreada aproximando las sumas superior e inferior. Emplear rectángulos de ancho 1.

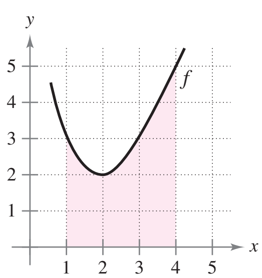
33.



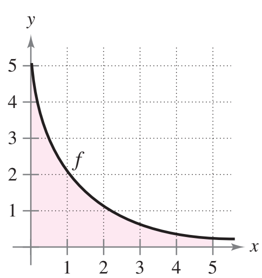
34.



35.



36.



En los ejercicios 37 a 40, encontrar el límite de $s(n)$ cuando $n \to \infty$.

37. $s(n) = \dfrac{81}{n^4}\left[\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

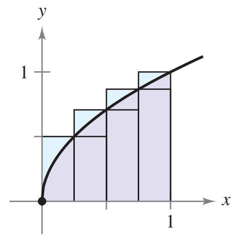
38. $s(n) = \dfrac{64}{n^3}\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

39. $s(n) = \dfrac{18}{n^2}\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

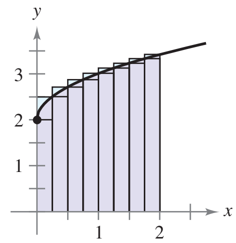
40. $s(n) = \dfrac{1}{n^2}\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

En los ejercicios 41 a 44, utilizar sumas superiores e inferiores para aproximar el área de la región empleando el número dado de subintervalos (de igual ancho).

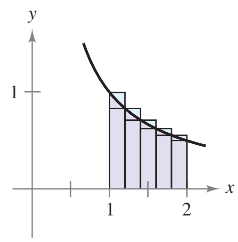
41. $y = \sqrt{x}$



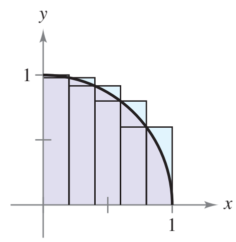
42. $y = \sqrt{x} + 2$



43. $y = \dfrac{1}{x}$



44. $y = \sqrt{1 - x^2}$



En los ejercicios 45 a 48, utilizar las fórmulas de suma con notación sigma para reescribir la expresión sin la notación sigma. Emplear el resultado para determinar la suma correspondiente a $n = 10$, 100, 1 000 y 10 000.

45. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{n^2}$

46. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{4j+3}{n^2}$

47. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6k(k-1)}{n^3}$

48. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2(i-1)}{n^4}$

En los ejercicios 49 a 54, encontrar una fórmula para la suma de los *n* términos. Emplear la fórmula para determinar el límite cuando $n \to \infty$.

49. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{24i}{n^2}$

50. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$

51. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3}(i-1)^2$

52. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$

53. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$

54. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}\right)$

55. ***Razonamiento numérico*** Considerar un triángulo de área 2 delimitado por las gráficas de $y = x$, $y = 0$ y $x = 2$.

a) Dibujar la región.

b) Dividir el intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos de igual ancho y demostrar que los puntos terminales son

$$0 < 1\left(\frac{2}{n}\right) < \cdots < (n-1)\left(\frac{2}{n}\right) < n\left(\frac{2}{n}\right).$$

c) Demostrar que $s(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[(i-1)\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$.

d) Demostrar que $S(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[i\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$.

e) Completar la tabla.

n	5	10	50	100
$s(n)$				
$S(n)$				

f) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} s(n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(n) = 2$.

56. ***Razonamiento numérico*** Considerar un trapezoide de área 4 delimitado por las gráficas de $y = x$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 3$.

a) Dibujar la región.

b) Dividir el intervalo $[1, 3]$ en n subintervalos de igual ancho y demostrar que los puntos terminales son

$$1 < 1 + 1\left(\frac{2}{n}\right) < \cdots < 1 + (n-1)\left(\frac{2}{n}\right) < 1 + n\left(\frac{2}{n}\right).$$

c) Demostrar que $s(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[1 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$.

d) Demostrar que $S(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[1 + i\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$.

e) Completar la tabla.

n	5	10	50	100
$s(n)$				
$S(n)$				

f) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} s(n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(n) = 4$.

En los ejercicios 57 a 66, utilizar el proceso de límite para encontrar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo indicado. Dibujar la región.

57. $y = -4x + 5$, $[0, 1]$

58. $y = 3x - 2$, $[2, 5]$

59. $y = x^2 + 2$, $[0, 1]$

60. $y = x^2 + 1$, $[0, 3]$

61. $y = 25 - x^2$, $[1, 4]$

62. $y = 4 - x^2$, $[-2, 2]$

63. $y = 27 - x^3$, $[1, 3]$

64. $y = 2x - x^3$, $[0, 1]$

65. $y = x^2 - x^3$, $[-1, 1]$

66. $y = x^2 - x^3$, $[-1, 0]$

En los ejercicios 67 a 72, emplear el proceso de límite para determinar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje *y* sobre el intervalo *y* indicado. Dibujar la región.

67. $f(y) = 4y, 0 \le y \le 2$

68. $g(y) = \frac{1}{2}y, 2 \le y \le 4$

69. $f(y) = y^2, 0 \le y \le 5$

70. $f(y) = 4y - y^2, 1 \le y \le 2$

71. $g(y) = 4y^2 - y^3, 1 \le y \le 3$

72. $h(y) = y^3 + 1, 1 \le y \le 2$

En los ejercicios 73 a 76, utilizar la *regla del punto medio*

$$\text{Área} \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x$$

con $n = 4$ para aproximar el área de la región limitada por la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo dado.

73. $f(x) = x^2 + 3$, $[0, 2]$

74. $f(x) = x^2 + 4x$, $[0, 4]$

75. $f(x) = \tan x$, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

76. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Programación **Escribir un programa para una herramienta de graficación con el fin de aproximar áreas utilizando la regla del punto medio. Suponer que la función es positiva sobre el intervalo dado y que los subintervalos son de igual ancho. En los ejercicios 77 a 80, emplear el programa para aproximar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo indicado, y completar la tabla.**

n	4	8	12	16	20
Área aproximada					

77. $f(x) = \sqrt{x}$, $[0, 4]$

78. $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 1}$, $[2, 6]$

79. $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi x}{8}\right)$, $[1, 3]$

80. $f(x) = \cos \sqrt{x}$, $[0, 2]$

Desarrollo de conceptos

Aproximación **En los ejercicios 81 y 82, determinar cuál es el mejor valor que aproxima el área de la región entre el eje *x* y la gráfica de la función sobre el intervalo indicado. (Realizar la elección con base en un dibujo de la región y no efectuando cálculos.)**

81. $f(x) = 4 - x^2$, $[0, 2]$

a) -2 *b*) 6 *c*) 10 *d*) 3 *e*) 8

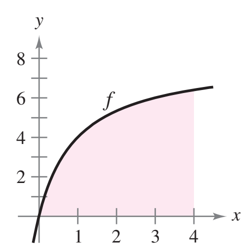
82. $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{4}$, $[0, 4]$

a) 3 *b*) 1 *c*) -2 *d*) 8 *e*) 6

83. Con sus propias palabras y utilizando las figuras adecuadas, describa los métodos de las sumas superior e inferior en la aproximación del área de una región.

84. Proporcionar la definición del área de una región en el plano.

85. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la región delimitada por la gráfica de $f(x) = \dfrac{8x}{x+1}$, $x = 0$, $x = 4$ y $y = 0$, como se muestra en la figura.



a) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos que representan a la suma inferior cuando $n = 4$. Encontrar esta suma inferior.

b) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos que representan la suma superior cuando $n = 4$. Determinar esta suma superior.

c) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos cuyas alturas se determinan mediante los valores funcionales en el punto medio de cada subintervalo cuando $n = 4$. Determinar esta suma utilizando la regla del punto medio.

d) Verificar las siguientes fórmulas al aproximar el área de la región utilizando n subintervalos de igual ancho.

Suma inferior: $s(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left[(i-1)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$

Suma superior: $S(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left[(i)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$

Regla del punto medio: $M(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$

e) Utilizar una herramienta de graficación y las fórmulas del apartado *d*) para completar la tabla.

n	4	8	20	100	200
$s(n)$					
$S(n)$					
$M(n)$					

f) Explicar por qué $s(n)$ aumenta y $S(n)$ disminuye para valores recientes de n, como se muestra en la tabla en el apartado *e*).

Para discusión

86. Considerar una función $f(x)$ que se incrementa en el intervalo [1, 4]. El intervalo [1, 4] está dividido en 12 subintervalos.

a) ¿Cuáles son los puntos terminales izquierdos del primer y último subintervalos?
b) ¿Cuáles son los puntos terminales derechos de los primeros dos subintervalos?
c) ¿Cuándo se usan los puntos terminales derechos, se trazan los rectángulos arriba o abajo de las gráficas de $f(x)$? Usar una gráfica para explicar su respuesta.
d) ¿Qué se puede concluir acerca de las alturas de los rectángulos si una función es constante en el intervalo dado?

***¿Verdadero o falso?* En los ejercicios 87 y 88, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

87. La suma de los primeros n enteros positivos es $n(n+1)/2$.

88. Si f es continua y no negativa en $[a, b]$, entonces los límites cuando $n \to \infty$ de su suma inferior $s(n)$ y de su suma superior $S(n)$ existen ambos y son iguales.

89. ***Comentario*** Utilizar la figura para escribir un pequeño párrafo donde se explique por qué la fórmula $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ es válida para todos los enteros positivos n.

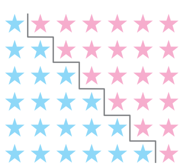


Figura para 89

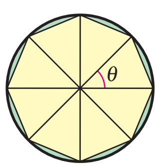


Figura para 90

90. ***Razonamiento gráfico*** Considerar un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio r. Unir los vértices del polígono al centro del círculo, formando n triángulos congruentes (ver la figura).

a) Determinar el ángulo central θ en términos de n.
b) Demostrar que el área de cada triángulo es $\frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen} \theta$.
c) Sea A_n la suma de las áreas de los n triángulos. Hallar $\lim_{n\to\infty} A_n$.

91. ***Modelado matemático*** La tabla lista las mediciones de un terreno delimitado por un río y dos caminos rectos que se unen en ángulo recto, donde x y y se miden en pies (ver la figura).

x	0	50	100	150	200	250	300
y	450	362	305	268	245	156	0

a) Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
b) Emplear una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.
c) Recurrir al modelo del apartado *a*) para estimar el área del terreno.

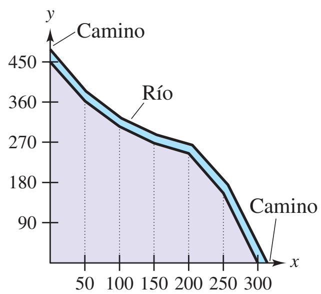


Figura para 91

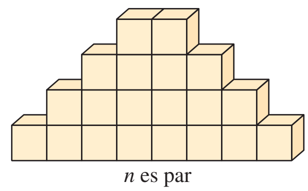


Figura para 92

92. ***Bloques de construcción*** Un niño coloca n bloques cúbicos de construcción en una hilera para formar la base de un diseño triangular (ver la figura). Cada hilera sucesiva contiene dos bloques menos que la hilera precedente. Encontrar una fórmula para el número de bloques utilizados en el diseño. (*Sugerencia:* El número de bloques constitutivos en el diseño depende de si n es par o impar.)

93. Demostrar cada fórmula mediante inducción matemática. (Quizá se necesite revisar el método de prueba por inducción en un texto de precálculo.)

a) $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$ *b*) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Preparación del examen Putnam

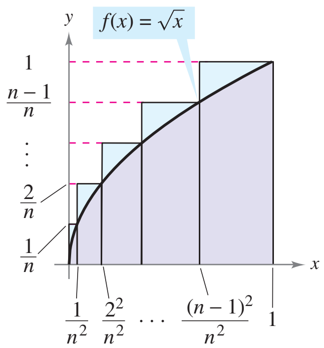
94. Un dardo, lanzado al azar, incide sobre un blanco cuadrado. Suponiendo que cualesquiera de las dos partes del blanco de igual área son igualmente probables de ser golpeadas por el dardo, encontrar la probabilidad de que el punto de incidencia sea más cercano al centro que a cualquier borde. Escribir la respuesta en la forma $(a\sqrt{b} + c)/d$, donde a, b, c y d son enteros positivos.

4.3 Sumas de Riemann e integrales definidas

- **Entender la definición de una suma de Riemann.**
- **Hallar una integral definida utilizando límites.**
- **Calcular una integral definida utilizando las propiedades de las integrales definidas.**

Sumas de Riemann

En la definición de área dada en la sección 4.2, las particiones tenían subintervalos de *igual ancho*. Esto se hizo sólo por conveniencia de cálculo. El siguiente ejemplo muestra que no es necesario tener subintervalos de igual ancho.



Los subintervalos no tienen anchos iguales
Figura 4.17

EJEMPLO 1 Una partición con subintervalos de anchos desiguales

Considerar la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ y el eje x para $0 \le x \le 1$, como se muestra en la figura 4.17. Hallar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

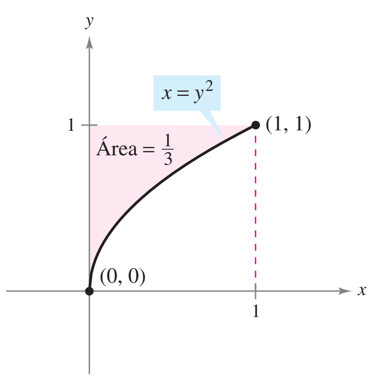
donde c_i es el punto terminal derecho de la partición dada por $c_i = i^2/n^2$ y Δx_i es el ancho del i-ésimo intervalo.

Solución El ancho del i-ésimo intervalo está dado por

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= \frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2}\\ &= \frac{i^2 - i^2 + 2i - 1}{n^2}\\ &= \frac{2i-1}{n^2}.\end{aligned}$$

De tal modo, el límite es

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i^2}{n^2}}\left(\frac{2i-1}{n^2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (2i^2 - i)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left[2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{n(n+1)}{2}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6n^3}\\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$



El área de la región acotada por la gráfica de $x = y^2$ y el eje y para $0 \le y \le 1$ es $\frac{1}{3}$
Figura 4.18

De acuerdo con el ejemplo 7 de la sección 4.2, se sabe que la región mostrada en la figura 4.18 tiene un área de $\frac{1}{3}$. Debido a que el cuadrado acotado por $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le 1$ tiene un área de 1, puede concluirse que el área de la región que se muestra en la figura 4.17 tiene un área de $\frac{2}{3}$. Esto concuerda con el límite que se encontró en el ejemplo 1, aun cuando en ese ejemplo se utilizó una partición con subintervalos de anchos desiguales. La razón por la que esta partición particular da el área apropiada es que cuando n crece, el *ancho del subintervalo más grande tiende a cero*. Ésta es la característica clave del desarrollo de las integrales definidas.

The Granger Collection

GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866)

Riemann, matemático alemán, realizó su trabajo más notable en las áreas de geometría no euclidiana, ecuaciones diferenciales y la teoría de los números. Fueron los resultados de Riemann en física y matemáticas los que conformaron la estructura en la que se basa la teoría de la relatividad general de Einstein.

En la sección precedente, el límite de una suma se utilizó para definir el área de una región en el plano. La determinación del área por este medio es sólo una de las *muchas* aplicaciones que involucran el límite de una suma. Un enfoque similar puede utilizarse para determinar cantidades tan diversas como longitudes de arco, valores medios, centroides, volúmenes, trabajo y áreas de superficies. La siguiente definición honra el nombre de Georg Friedrich Bernhard Riemann. Aunque la integral definida se había utilizado ya con anterioridad, fue Riemann quien generalizó el concepto para cubrir una categoría más amplia de funciones.

En la definición siguiente de una suma de Riemann, notar que la función f no tiene otra restricción que haber sido definida en el intervalo $[a, b]$. (En la sección precedente, la función f se supuso continua y no negativa debido a que se trabajó con un área bajo una curva.)

DEFINICIÓN DE UNA SUMA DE RIEMANN

Sea f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea Δ una partición de $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_{n-1} < x_n = b$$

donde Δx_i es el ancho del i-ésimo subintervalo. Si c_i es *cualquier* punto en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

se denomina una **suma de Riemann** de f para la partición Δ.

NOTA Las sumas vistas en la sección 4.2 son ejemplos de las sumas de Riemann, pero hay sumas de Riemann más grandes que las que se mostraron ahí.

El ancho del subintervalo más grande de la partición Δ es la **norma** de la partición y se denota por medio de $\|\Delta\|$. Si todos los intervalos tienen la misma anchura, la partición es **regular** y la norma se denota mediante

$$\|\Delta\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}. \qquad \text{Partición ordinaria.}$$

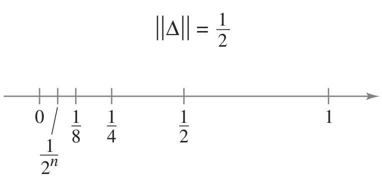
En una partición general, la norma se relaciona con el número de subintervalos en $[a, b]$ de la siguiente manera.

$$\frac{b-a}{\|\Delta\|} \le n \qquad \text{Partición general.}$$

De tal modo, el número de subintervalos en una partición tiende a infinito cuando la norma de la partición tiende a cero. Esto es $\|\Delta\| \to 0$ implica que $n \to \infty$.

La afirmación recíproca de este enunciado no es cierta. Por ejemplo, sea Δ_n la partición del intervalo $[0, 1]$ dado por

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}} < \cdot \cdot \cdot < \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1.$$



$n \to \infty$ no implica que $\|\Delta\| \to 0$
Figura 4.19

Como se muestra en la figura 4.19, para cualquier valor positivo de n, la norma de la partición Δ_n es $\frac{1}{2}$. De tal modo, como al dejar que n tienda a infinito no obliga a que $\|\Delta\|$ se aproxime a 0. En una partición regular, sin embargo, los enunciados $\|\Delta\| \to 0$ y $n \to \infty$ son equivalentes.

Integrales definidas

Para definir la integral definida, considerar el siguiente límite.

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = L$$

Afirmar que este límite existe, significa que hay un número real L, tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para toda partición de $\|\Delta\| < \delta$ se sigue que

$$\left| L - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \right| < \varepsilon$$

a pesar de cualquier elección de c_i en el i-ésimo subintervalo de cada partición de Δ.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para obtener más información acerca de la historia de la integral definida, ver el artículo "The Evolution of Integration", de A. Shenitzer y J. Steprāns en *The American Mathematical Monthly*.

DEFINICIÓN DE UNA INTEGRAL DEFINIDA

Si f se define en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el límite de las sumas de Riemann sobre las particiones Δ

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

existe (como se describió antes), entonces f es **integrable** en $[a, b]$ y el límite se denota por

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

El límite recibe el nombre de **integral definida** de f de a a b. El número a es el **límite inferior** de integración, y el número b es el **límite superior** de integración.

No es coincidencia que la notación para las integrales definidas sea similar a la que se utilizó para las integrales indefinidas. Se verá la razón en la siguiente sección cuando se introduzca el teorema fundamental del cálculo. Por ahora es importante observar que las integrales definidas y las integrales indefinidas son identidades diferentes. Una integral definida es un *número*, en tanto que una integral indefinida es una *familia de funciones*.

A pesar de que las sumas de Riemann estaban definidas por funciones con muy pocas restricciones, una condición suficiente para que una función f sea integrable en $[a, b]$ es que sea continua en $[a, b]$. Una demostración de este teorema está más allá del objetivo de este texto.

AYUDA DE ESTUDIO Posteriormente en este capítulo, el lector aprenderá métodos convenientes para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ para funciones continuas. Por ahora, se debe usar la definición de límite.

TEOREMA 4.4 LA CONTINUIDAD IMPLICA INTEGRABILIDAD

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. Es decir, $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

EXPLORACIÓN

Converso del teorema 4.4 ¿Es verdadero el converso del teorema 4.4 ? Esto es, si una función es integrable, ¿tiene que ser continua? Explicar el razonamiento y proporcionar ejemplos.

Describir las relaciones entre continuidad, derivabilidad e integrabilidad. ¿Cuál es la condición más fuerte? ¿Cuál es la más débil? ¿Qué condiciones implican otras condiciones?

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral definida como límite

Hallar la integral definida $\displaystyle\int_{-2}^{1} 2x\,dx.$

Solución La función $f(x) = 2x$ es integrable en el intervalo $[-2, 1]$ porque es continua en $[-2, 1]$. Además, la definición de integrabilidad implica que cualquier partición cuya norma tienda a 0 puede utilizarse para determinar el límite. Por conveniencia computacional, definir Δ, subdividiendo $[-2, 1]$ en n subintervalos de la misma anchura.

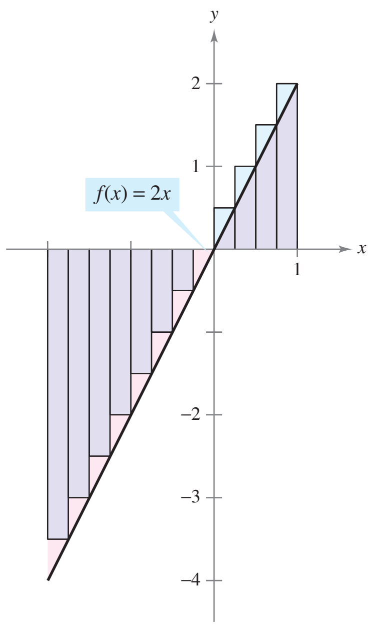
$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}.$$

Eligiendo c_i como el punto terminal derecho de cada subintervalo, se obtiene

$$c_i = a + i(\Delta x) = -2 + \frac{3i}{n}.$$

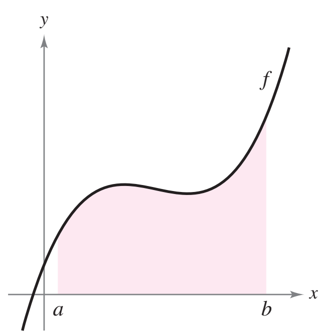
De este modo, la integral definida está dada por

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} 2x\,dx &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(-2 + \frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(-2 + \frac{3i}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left\{-2n + \frac{3}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(-12 + 9 + \frac{9}{n}\right) \\
&= -3.
\end{aligned}$$



Como la integral definida es negativa, no representa el área de la región
Figura 4.20

Debido a que la integral definida en el ejemplo 2 es negativa, ésta *no* representa el área de la región que se muestra en la figura 4.20. Las integrales definidas pueden ser positivas, negativas o cero. Para que una integral definida sea interpretada como un área (como se definió en la sección 4.2), la función f debe ser continua y no negativa en $[a, b]$, como se establece en el siguiente teorema. La demostración de este teorema es directa: utilizar simplemente la definición de área dada en la sección 4.2, porque es una suma de Riemann.



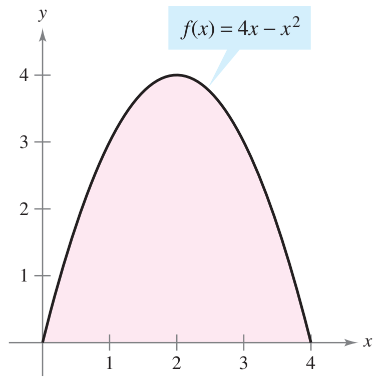
Se puede usar una integral definida para determinar el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = a$ y $x = b$
Figura 4.21

TEOREMA 4.5 LA INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA DE UNA REGIÓN

Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de f, del eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(Ver la figura 4.21.)



$$\text{Área} = \int_0^4 (4x - x^2)\, dx$$

Figura 4.22

Como un ejemplo del teorema 4.5, considerar la región delimitada por la gráfica de

$$f(x) = 4x - x^2$$

y el eje x, como se muestra en la figura 4.22. Debido a que f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[0, 4]$, el área de la región es

$$\text{Área} = \int_0^4 (4x - x^2)\, dx$$

Una técnica directa para hallar una integral definida como ésta se analizará en la sección 4.4. Por ahora se puede calcular una integral definida de dos maneras: usando la definición en términos de límites o verificando si la integral definida representa el área de una región geométrica común, tal como un rectángulo, triángulo o semicírculo.

EJEMPLO 3 Áreas de figuras geométricas comunes

Dibujar la región correspondiente a cada integral definida. Evaluar después cada integral utilizando una fórmula geométrica.

a) $\displaystyle\int_1^3 4\, dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^3 (x + 2)\, dx$ ***c)*** $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

Solución Un dibujo de cada región se muestra en la figura 4.23.

a) Esta región es un rectángulo de 4 de alto por 2 de ancho.

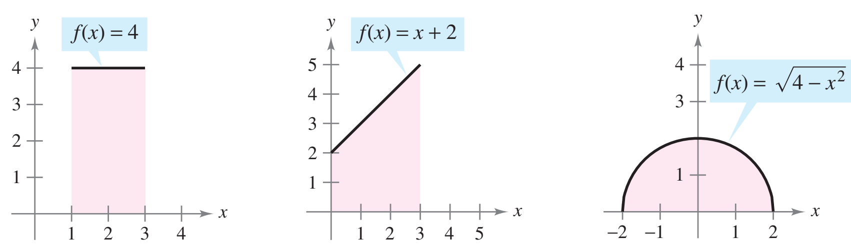
$$\int_1^3 4\, dx = (\text{Área del rectángulo}) = 4(2) = 8$$

b) Esta región es un trapezoide con una altura de 3 y bases paralelas de longitudes 2 y 5. La fórmula para el área de un trapezoide es $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

$$\int_0^3 (x + 2)\, dx = (\text{Área del trapezoide}) = \frac{1}{2}(3)(2 + 5) = \frac{21}{2}$$

c) Esta región es un semicírculo de radio 2. La fórmula para el área de un semicírculo es $\frac{1}{2}\pi r^2$.

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = (\text{Área del semicírculo}) = \frac{1}{2}\pi(2^2) = 2\pi$$



a) ***b)*** ***c)***

Figura 4.23

NOTA La variable de integración en una integral definida algunas veces se denomina como *variable muda* porque puede ser sustituida por cualquier otra variable sin cambiar el valor de la integral. Por ejemplo, las integrales definidas

$$\int_0^3 (x + 2)\, dx$$

y

$$\int_0^3 (t + 2)\, dt$$

tienen el mismo valor.

Propiedades de las integrales definidas

La definición de la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ especifica que $a < b$. Ahora, es conveniente, sin embargo, extender la definición para cubrir casos en los cuales $a = b$ o $a > b$. Geométricamente, las siguientes dos definiciones parecen razonables. Por ejemplo, tiene sentido definir el área de una región de ancho cero y altura finita igual a 0.

DEFINICIONES DE DOS INTEGRALES DEFINIDAS ESPECIALES

1. Si f está definida en $x = a$, entonces se define $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces se define $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

EJEMPLO 4 Cálculo de integrales definidas

***a*)** Debido a que la función seno se define en $x = \pi$, y los límites superior e inferior de integración son iguales, puede decirse que

$$\int_\pi^\pi \operatorname{sen} x\,dx = 0.$$

***b*)** La integral $\int_3^0 (x + 2)\,dx$ es la misma que la dada en el ejemplo 3*b* excepto por el hecho de que los límites superior e inferior se intercambian. Debido a que la integral en el ejemplo 3*b* tiene un valor de $\frac{21}{2}$, puede escribirse

$$\int_3^0 (x + 2)\,dx = -\int_0^3 (x + 2)\,dx = -\frac{21}{2}.$$

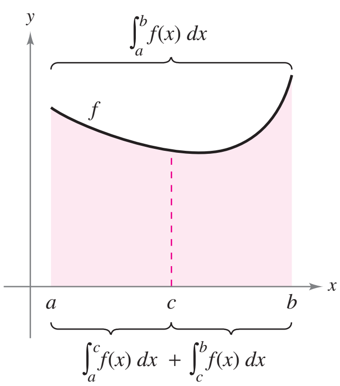


Figura 4.24

En la figura 4.24, la región más grande puede dividirse en $x = c$ en dos subregiones cuya intersección es un segmento de recta. Como el segmento de recta tiene área cero, se concluye que el área de la región más grande es igual a la suma de las áreas de las dos regiones más pequeñas.

TEOREMA 4.6 PROPIEDAD ADITIVA DE INTERVALOS

Si f es integrable en los tres intervalos cerrados determinados por a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

EJEMPLO 5 Empleo de la propiedad aditiva de intervalos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 |x|\,dx &= \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^1 x\,dx && \text{Teorema 4.6.}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} && \text{Área del triángulo.}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Debido a que la integral definida se describe como el límite de una suma, hereda las propiedades de la suma dadas en la parte superior de la página 260.

TEOREMA 4.7 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y k es una constante, entonces las funciones kf y $f \pm g$ son integrables en $[a, b]$, y

1. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx$

2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$

Observar que la propiedad 2 del teorema 4.7 puede extenderse a cualquier número finito de funciones. Por ejemplo,

$$\int_a^b [f(x) + g(x) + h(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx + \int_a^b h(x)\, dx.$$

EJEMPLO 6 Evaluación de una integral definida

Evaluar $\displaystyle\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\, dx$ utilizando los siguientes valores.

$$\int_1^3 x^2\, dx = \frac{26}{3}, \qquad \int_1^3 x\, dx = 4, \qquad \int_1^3 dx = 2$$

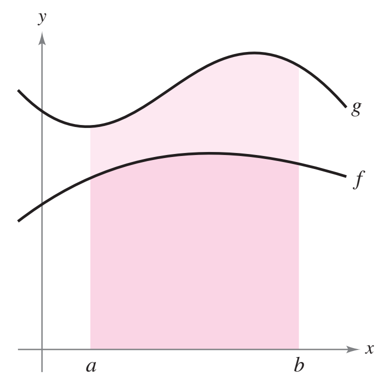
Solución

$$\begin{aligned}\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\, dx &= \int_1^3 (-x^2)\, dx + \int_1^3 4x\, dx + \int_1^3 (-3)\, dx \\ &= -\int_1^3 x^2\, dx + 4\int_1^3 x\, dx - 3\int_1^3 dx \\ &= -\left(\frac{26}{3}\right) + 4(4) - 3(2) \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Si f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y

$0 \leq f(x) \leq g(x)$

para $a \leq x \leq b$, las siguientes propiedades son ciertas. Primero, el área de la región acotada por la gráfica de f y el eje x (entre a y b) debe ser no negativa. Segundo, esta área debe ser menor o igual que el área de la región delimitada por la gráfica de g y el eje x (entre a y b), como se muestra en la figura 4.25. Estos dos resultados se generalizan en el teorema 4.8. (Una demostración de este teorema se presenta en el apéndice A.)



$\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

Figura 4.25

TEOREMA 4.8 CONSERVACIÓN DE DESIGUALDADES

1. Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$0 \leq \int_a^b f(x)\, dx.$$

2. Si f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

4.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, utilizar el ejemplo 1 como modelo para evaluar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i$$

sobre la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones.

1. $f(x) = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3$
(*Sugerencia:* Sea $c_i = 3i^2/n^2$.)
2. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$
(*Sugerencia:* Sea $c_i = i^3/n^3$.)

En los ejercicios 3 a 8, evaluar la integral definida mediante la definición de límite.

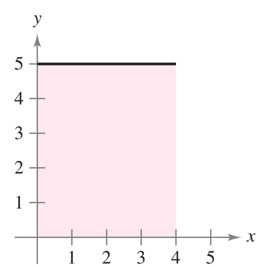
3. $\displaystyle\int_2^6 8\, dx$
4. $\displaystyle\int_{-2}^3 x\, dx$
5. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3\, dx$
6. $\displaystyle\int_1^4 4x^2\, dx$
7. $\displaystyle\int_1^2 (x^2 + 1)\, dx$
8. $\displaystyle\int_{-2}^1 (2x^2 + 3)\, dx$

En los ejercicios 9 a 12, escribir el límite como una integral definida en el intervalo $[a, b]$, donde c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo.

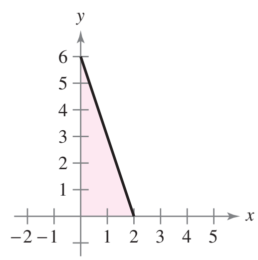
	Límite	*Intervalo*
9.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (3c_i + 10)\, \Delta x_i$	$[-1, 5]$
10.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 6c_i(4 - c_i)^2\, \Delta x_i$	$[0, 4]$
11.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_i^2 + 4}\, \Delta x_i$	$[0, 3]$
12.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{c_i^2}\right) \Delta x_i$	$[1, 3]$

En los ejercicios 13 a 22, formular una integral definida que produce el área de la región. (No evaluar la integral.)

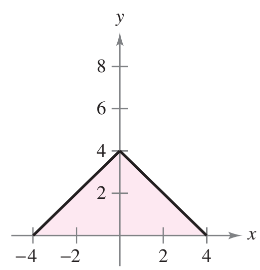
13. $f(x) = 5$



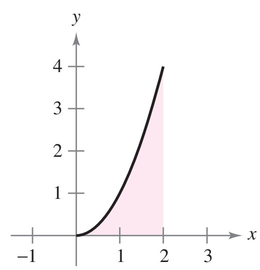
14. $f(x) = 6 - 3x$



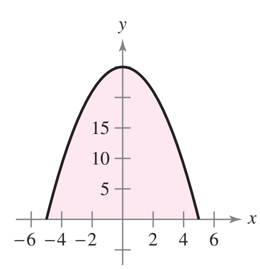
15. $f(x) = 4 - |x|$



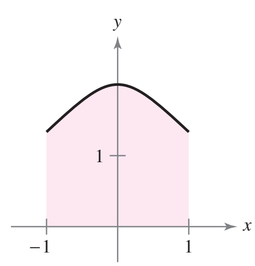
16. $f(x) = x^2$



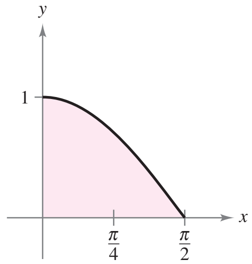
17. $f(x) = 25 - x^2$



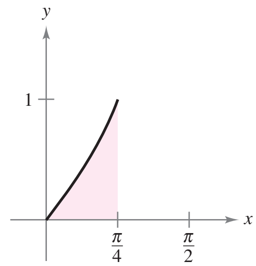
18. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 2}$



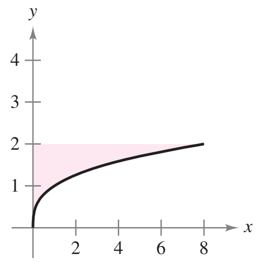
19. $f(x) = \cos x$



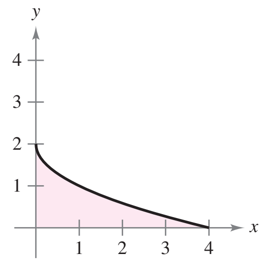
20. $f(x) = \tan x$



21. $g(y) = y^3$



22. $f(y) = (y - 2)^2$



En los ejercicios 23 a 32, dibujar la región cuya área está dada por la integral definida. Luego, usar una fórmula geométrica para evaluar la integral ($a > 0, r > 0$).

23. $\int_0^3 4\,dx$ **24.** $\int_{-a}^{a} 4\,dx$

25. $\int_0^4 x\,dx$ **26.** $\int_0^4 \frac{x}{2}\,dx$

27. $\int_0^2 (3x + 4)\,dx$ **28.** $\int_0^6 (6 - x)\,dx$

29. $\int_{-1}^{1} (1 - |x|)\,dx$ **30.** $\int_{-a}^{a} (a - |x|)\,dx$

31. $\int_{-7}^{7} \sqrt{49 - x^2}\,dx$ **32.** $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

En los ejercicios 33 a 40, evaluar la integral utilizando los siguientes valores.

$$\int_2^4 x^3\,dx = 60, \qquad \int_2^4 x\,dx = 6, \qquad \int_2^4 dx = 2$$

33. $\int_4^2 x\,dx$ **34.** $\int_2^2 x^3\,dx$

35. $\int_2^4 8x\,dx$ **36.** $\int_2^4 25\,dx$

37. $\int_2^4 (x - 9)\,dx$ **38.** $\int_2^4 (x^3 + 4)\,dx$

39. $\int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x + 2\right)dx$ **40.** $\int_2^4 (10 + 4x - 3x^3)\,dx$

41. Dadas $\int_0^5 f(x)\,dx = 10$ y $\int_5^7 f(x)\,dx = 3$, hallar

a) $\int_0^7 f(x)\,dx.$ *b)* $\int_5^0 f(x)\,dx.$

c) $\int_5^5 f(x)\,dx.$ *d)* $\int_0^5 3f(x)\,dx.$

42. Dadas $\int_0^3 f(x)\,dx = 4$ y $\int_3^6 f(x)\,dx = -1$, hallar

a) $\int_0^6 f(x)\,dx.$ *b)* $\int_6^3 f(x)\,dx.$

c) $\int_3^3 f(x)\,dx.$ *d)* $\int_3^6 -5f(x)\,dx.$

43. Dadas $\int_2^6 f(x)\,dx = 10$ y $\int_2^6 g(x)\,dx = -2$, hallar

a) $\int_2^6 [f(x) + g(x)]\,dx.$ *b)* $\int_2^6 [g(x) - f(x)]\,dx.$

c) $\int_2^6 2g(x)\,dx.$ *d)* $\int_2^6 3f(x)\,dx.$

44. Dadas $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ y $\int_0^1 f(x)\,dx = 5$, hallar

a) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx.$ *b)* $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_{-1}^{0} f(x)\,dx.$

c) $\int_{-1}^{1} 3f(x)\,dx.$ *d)* $\int_0^1 3f(x)\,dx.$

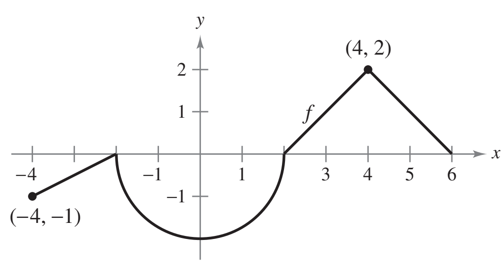
45. Utilizar la tabla de valores para determinar las estimaciones inferiores y superiores de $\int_0^{10} f(x)\,dx$. Suponer que f es una función decreciente.

x	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	32	24	12	−4	−20	−36

46. Utilizar la tabla de valores para estimar $\int_0^6 f(x)\,dx$. Utilizar tres subintervalos iguales y *a)* los puntos terminales izquierdos, *b)* los puntos terminales derechos y *c)* los puntos medios. Si f es una función creciente, ¿cómo se compara cada estimación con el valor real? Explicar el razonamiento.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	−6	0	8	18	30	50	80

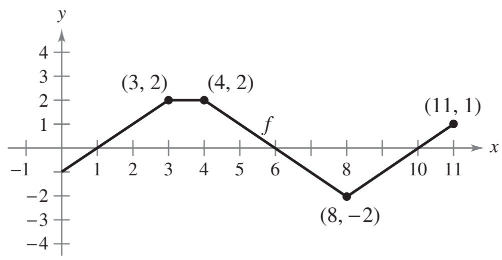
47. ***Para pensar*** La gráfica de f está compuesta por segmentos de recta y un semicírculo, como se muestra en la figura. Evaluar cada integral definida utilizando fórmulas geométricas.



a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ *b)* $\int_2^6 f(x)\,dx$ *c)* $\int_{-4}^{2} f(x)\,dx$

d) $\int_{-4}^{6} f(x)\,dx$ *e)* $\int_{-4}^{6} |f(x)|\,dx$ *f)* $\int_{-4}^{6} [f(x) + 2]\,dx$

48. ***Para pensar*** La gráfica de f consta de segmentos de recta, como se muestra en la figura. Evaluar cada integral definida utilizando fórmulas geométricas.



a) $\int_0^1 -f(x)\,dx$ *b)* $\int_3^4 3f(x)\,dx$

c) $\int_0^7 f(x)\,dx$ *d)* $\int_5^{11} f(x)\,dx$

e) $\int_0^{11} f(x)\,dx$ *f)* $\int_4^{10} f(x)\,dx$

49. ***Para pensar*** Considerar la función f que es continua en el intervalo $[-5, 5]$ y para la cual

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 4.$$

Evaluar cada integral.

a) $\int_0^5 [f(x) + 2]\,dx$ *b)* $\int_{-2}^3 f(x + 2)\,dx$

c) $\int_{-5}^5 f(x)\,dx$ (f es par) *d)* $\int_{-5}^5 f(x)\,dx$ (f es impar)

50. ***Para pensar*** Una función f se define como se indica a continuación. Usar fórmulas geométricas para encontrar $\int_0^8 f(x)\,dx$.

$$f(x) = \begin{cases} 4, & x < 4 \\ x, & x \geq 4 \end{cases}$$

51. ***Para pensar*** Abajo se define una función f. Usar fórmulas geométricas para encontrar $\int_0^{12} f(x)\,dx$.

$$f(x) = \begin{cases} 6, & x > 6 \\ -\frac{1}{2}x + 9, & x \leq 6 \end{cases}$$

Para discusión

52. Encontrar posibles valores de a y b que hagan el enunciado correcto. Si es posible, usar una gráfica para sustentar su respuesta. (Aquí puede haber más de una respuesta correcta.)

a) $\int_{-2}^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

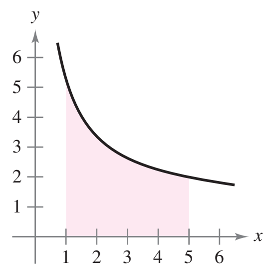
b) $\int_{-3}^3 f(x)\,dx + \int_3^6 f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^6 f(x)\,dx$

c) $\int_a^b \operatorname{sen} x\,dx < 0$

d) $\int_a^b \cos x\,dx = 0$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 53 y 54, utilizar la figura para llenar los espacios con el símbolo <, > o =.



53. El intervalo $[1, 5]$ se divide en n subintervalos de igual ancho Δx, y x_i es el punto terminal izquierdo del i-ésimo subintervalo.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\,\Delta x \quad \square \quad \int_1^5 f(x)\,dx$$

54. El intervalo $[1, 5]$ se divide en n subintervalos de igual ancho Δx, y x_i es el punto terminal derecho del i-ésimo subintervalo.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\,\Delta x \quad \square \quad \int_1^5 f(x)\,dx$$

55. Determinar si la función $f(x) = \dfrac{1}{x - 4}$ es integrable en el intervalo $[3, 5]$. Explicar.

56. Proporcionar un ejemplo de una función que sea integrable en el intervalo $[-1, 1]$, pero no continua en $[-1, 1]$.

En los ejercicios 57 a 60, determinar cuáles valores se aproximan mejor a la integral definida. Realizar la selección con base en un dibujo.

57. $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

a) 5 *b)* -3 *c)* 10 *d)* 2 *e)* 8

58. $\int_0^{1/2} 4 \cos \pi x\,dx$

a) 4 *b)* $\frac{4}{3}$ *c)* 16 *d)* 2π *e)* -6

59. $\int_0^1 2 \operatorname{sen} \pi x\,dx$

a) 6 *b)* $\frac{1}{2}$ *c)* 4 *d)* $\frac{5}{4}$

60. $\int_0^9 (1 + \sqrt{x})\,dx$

a) -3 *b)* 9 *c)* 27 *d)* 3

Programación **Escribir un programa en la herramienta de graficación con el fin de aproximar una integral definida utilizando la suma de Riemann**

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

donde los subintervalos sean de igual ancho. La salida debe proporcionar tres aproximaciones de la integral donde c_i es el punto terminal del lado izquierdo $I(n)$, el punto medio $M(n)$ y el punto terminal del lado derecho $D(n)$ de cada subintervalo. En los ejercicios 61 a 64, usar el programa para aproximar la integral definida y completar la tabla.

n	4	8	12	16	20
$I(n)$					
$M(n)$					
$D(n)$					

61. $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{3-x}\,dx$ **62.** $\displaystyle\int_0^3 \frac{5}{x^2+1}\,dx$

63. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$ **64.** $\displaystyle\int_0^3 x \operatorname{sen} x\,dx$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 65 a 70, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

65. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

66. $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\left[\int_a^b g(x)\,dx\right]$

67. Si la norma de una partición tiende a cero, entonces el número de subintervalos tiende a infinito.

68. Si f es creciente en $[a, b]$, entonces el valor mínimo de $f(x)$ en $[a, b]$ es $f(a)$.

69. El valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ debe ser positivo.

70. El valor de $\int_2^2 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ es cero.

71. Encontrar la suma de Riemann para $f(x) = x^2 + 3x$ en el intervalo $[0, 8]$, donde $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$ y $x_4 = 8$, y donde $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$ y $c_4 = 8$.

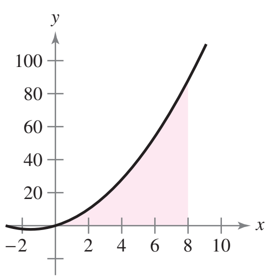


Figura para 71

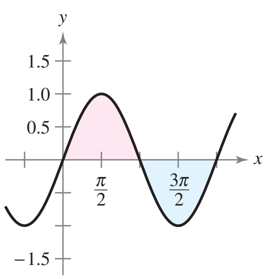


Figura para 72

72. Determinar la suma de Riemann para $f(x) = \operatorname{sen} x$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$, donde $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi$ y $x_4 = 2\pi$, y donde $c_1 = \pi/6$, $c_2 = \pi/3$, $c_3 = 2\pi/3$ y $c_4 = 3\pi/2$.

73. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

74. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$.

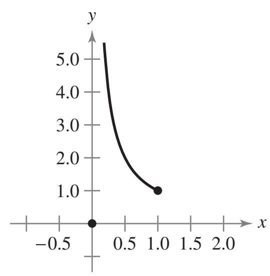
75. ***Para pensar*** Determinar si la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ es racional} \\ 0, & x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es integrable en el intervalo $[0, 1]$. Explicar.

75. Suponer que la función f se define en $[0, 1]$, como se muestra en la figura.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$



Demostrar que $\int_0^1 f(x)\,dx$ no existe. ¿Por qué lo anterior no contradice al teorema 4.4?

77. Encontrar las constantes a y b que maximizan el valor de

$$\int_a^b (1-x^2)\,dx.$$

Explicar el razonamiento.

78. Evaluar, si es posible, la integral $\displaystyle\int_0^2 [\![x]\!]\,dx$.

79. Determinar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right]$$

utilizando una suma de Riemann apropiada.

Preparación del examen Putnam

80. Para cada función continua $f\colon [0, 1] \to R$, sean $I(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx$ y $J(x) = \int_0^1 x(f(x))^2\,dx$. Encontrar el valor máximo de $I(f) - J(f)$ sobre todas las funciones f.

4.4 El teorema fundamental del cálculo

- Evaluar una integral definida utilizando el teorema fundamental del cálculo.
- Entender y utilizar el teorema del valor medio para integrales.
- Encontrar el valor medio de una función sobre un intervalo cerrado.
- Entender y utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo.
- Entender y utilizar el teorema del cambio neto.

EXPLORACIÓN

Integración y antiderivación
A lo largo de este capítulo, se ha estado utilizando el signo de integral para denotar una antiderivada o primitiva (una familia de funciones) y una integral definida (un número).

Antiderivación: $\int f(x)\,dx$

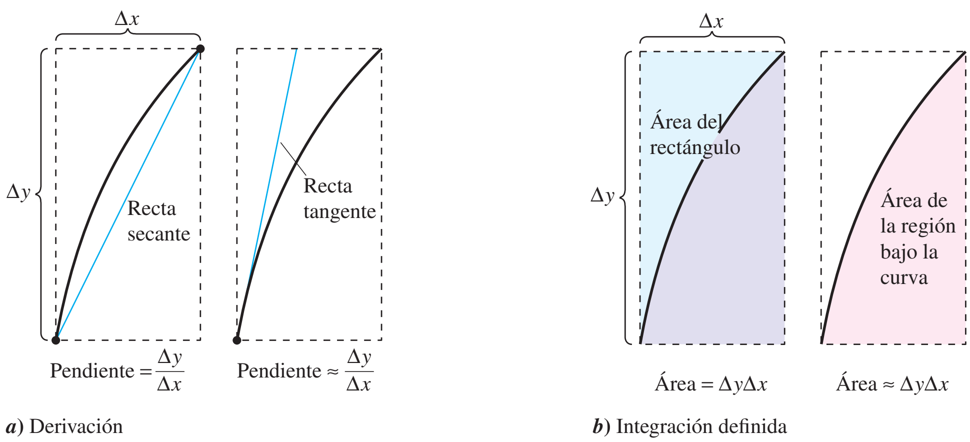
Integración definida: $\int_a^b f(x)\,dx$

El uso de este mismo símbolo para ambas operaciones hace parecer que estarán relacionadas. En los primeros trabajos con cálculo, sin embargo, no se sabía que las dos operaciones estaban relacionadas. ¿A qué se aplicó primero el símbolo $\int$: a la antiderivación o a la integración definida? Explicar el razonamiento. (*Sugerencia:* El símbolo fue utilizado primero por Leibniz y proviene de la letra *S*.)

El teorema fundamental del cálculo

Se han visto ya dos de las principales ramas del cálculo: el cálculo diferencial (presentado con el problema de la recta tangente) y el cálculo integral (presentado con el problema del área). En este punto, podría parecer que estos dos problemas no se relacionan, aunque tienen una conexión muy estrecha. La conexión fue descubierta independientemente por Isaac Newton y Gottfried Leibniz y está enunciada en un teorema que recibe el nombre de **teorema fundamental del cálculo**.

De manera informal, el teorema establece que la derivación y la integración (definida) son operaciones inversas, en el mismo sentido que lo son la división y la multiplicación. Para saber cómo Newton y Leibniz habrían pronosticado esta relación, considerar las aproximaciones que se muestran en la figura 4.26. La pendiente de la recta tangente se definió utilizando el *cociente* $\Delta y/\Delta x$ (la pendiente de la recta secante). De manera similar, el área de la región bajo una curva se definió utilizando el *producto* $\Delta y \Delta x$ (el área de un rectángulo). De tal modo, al menos en una etapa de aproximación primitiva, las operaciones de derivación y de integración definida parecen tener una relación inversa en el mismo sentido en el que son operaciones inversas la división y la multiplicación. El teorema fundamental del cálculo establece que los procesos de límite (utilizados para definir la derivada y la integral definida) preservan esta relación inversa.



La derivación y la integración definida tienen una relación "inversa"
Figura 4.26

TEOREMA 4.9 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

DEMOSTRACIÓN La clave para la demostración consiste en escribir la diferencia $F(b) - F(a)$ en una forma conveniente. Sea Δ la siguiente partición de $[a, b]$.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_{n-1} < x_n = b$$

Mediante la resta y suma de términos análogos, se obtiene

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdot \cdot \cdot - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema del valor medio, se sabe que existe un número c_i en el i-ésimo subintervalo tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Como $F'(c_i) = f(c_i)$, puede dejarse que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y obtenerse

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

Esta importante ecuación dice que al aplicar repetidamente el teorema del valor medio, se puede siempre encontrar una colección de c_i tal que la *constante* $F(b) - F(a)$ es una suma de Riemann de f en $[a, b]$ para cualquier partición. El teorema 4.4 garantiza que el límite de sumas de Riemann sobre las particiones con $\|\Delta\| \to 0$ existe. Así, al tomar el límite (cuando $\|\Delta\| \to 0$) produce

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La siguiente guía puede ayudar a comprender el uso del teorema fundamental del cálculo.

Estrategia para utilizar el teorema fundamental del cálculo

1. *Suponiendo que se conozca* una antiderivada o primitiva f, se dispone de una forma de calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma.
2. Cuando se aplica el teorema fundamental del cálculo, la siguiente notación resulta conveniente.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= F(x)\Big]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Por ejemplo, para calcular $\int_1^3 x^3\,dx$, es posible escribir

$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

3. No es necesario incluir una constante de integración C en la antiderivada o primitiva ya que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \Big[F(x) + C\Big]_a^b \\ &= [F(b) + C] - [F(a) + C] \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Cálculo de una integral definida

Evaluar cada integral definida.

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - 3)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$

Solución

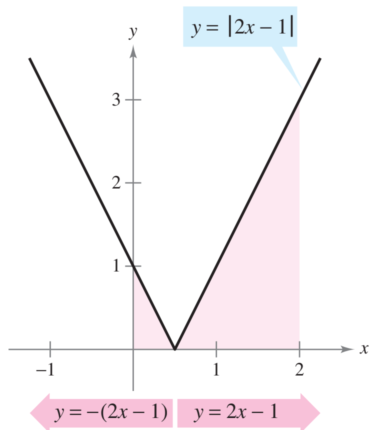
a) $$\int_1^2 (x^2 - 3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6\right) - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{3}$$

b) $$\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx = 3\int_1^4 x^{1/2}\,dx = 3\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = 2(4)^{3/2} - 2(1)^{3/2} = 14$$

c) $$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$$

EJEMPLO 2 Integral definida de un valor absoluto

Calcular $\displaystyle\int_0^2 |2x - 1|\,dx.$



La integral definida de y en $[0, 2]$ es $\frac{5}{2}$
Figura 4.27

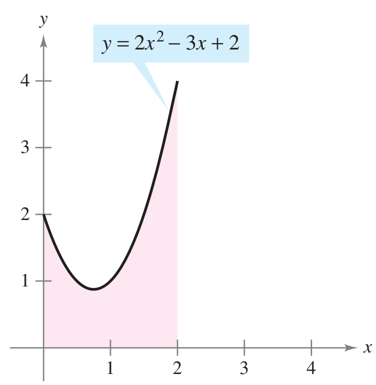
Solución Utilizando la figura 4.27 y la definición de valor absoluto, se puede reescribir el integrando como se indica.

$$|2x - 1| = \begin{cases} -(2x - 1), & x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

A partir de esto, es posible reescribir la integral en dos partes.

$$\begin{aligned}\int_0^2 |2x - 1|\,dx &= \int_0^{1/2} -(2x - 1)\,dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1)\,dx \\ &= \Big[-x^2 + x\Big]_0^{1/2} + \Big[x^2 - x\Big]_{1/2}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - (0 + 0) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Empleo del teorema fundamental para encontrar un área



El área de la región acotada por la gráfica de y, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$ es $\frac{10}{3}$
Figura 4.28

Encontrar el área de la región delimitada por la gráfica de $y = 2x^2 - 3x + 2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, como se muestra en la figura 4.28.

Solución Notar que $y > 0$ en el intervalo $[0, 2]$.

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)\,dx \qquad \text{Integrar entre } x = 0 \text{ y } x = 2.$$

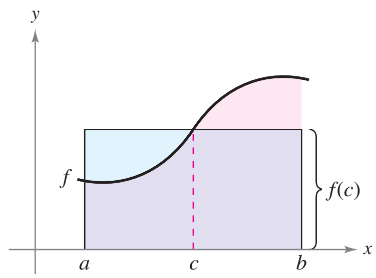
$$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^2 \qquad \text{Encontrar la antiderivada.}$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 6 + 4\right) - (0 - 0 + 0) \qquad \text{Aplicar el teorema fundamental del cálculo.}$$

$$= \frac{10}{3} \qquad \text{Simplificar.}$$

El teorema del valor medio para integrales

En la sección 4.2, se vio que el área de una región bajo una curva es mayor que el área de un rectángulo inscrito y menor que el área de un rectángulo circunscrito. El teorema del valor medio para integrales establece que en alguna parte "entre" los rectángulos inscrito y circunscrito hay un rectángulo cuya área es precisamente igual al área de la región bajo la curva, como se ilustra en la figura 4.29.



Rectángulo de valor medio:

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Figura 4.29

TEOREMA 4.10 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

DEMOSTRACIÓN

Caso 1: Si f es constante en el intervalo $[a, b]$, el teorema es claramente válido debido a que c puede ser cualquier punto en $[a, b]$.

Caso 2: Si f no es constante en $[a, b]$, entonces, por el teorema del valor extremo, pueden elegirse $f(m)$ y $f(M)$ como valores mínimo y máximo de f en $[a, b]$. Como $f(m) \le f(x) \le f(M)$ para todo x en $[a, b]$, se puede aplicar el teorema 4.8 para escribir

$$\int_a^b f(m)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f(M)\,dx$$

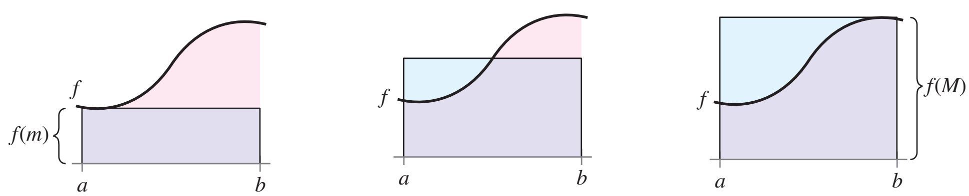
Ver la figura 4.30.

$$f(m)(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le f(M)(b-a)$$

$$f(m) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le f(M)$$

De acuerdo con la tercera desigualdad, puede aplicarse el teorema del valor medio para concluir que existe alguna c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{o} \quad f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$



Rectángulo inscrito (menor que el área real)

$$\int_a^b f(m)\,dx = f(m)(b-a)$$

Rectángulo del valor medio (igual al área real)

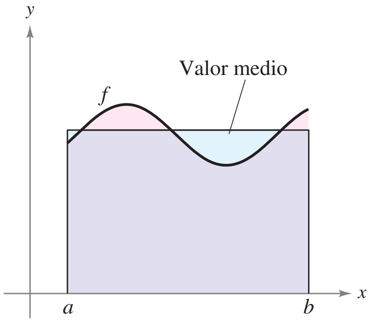
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Rectángulo circunscrito (mayor que el área real)

$$\int_a^b f(M)\,dx = f(M)(b-a)$$

Figura 4.30

NOTA Adviértase que el teorema 4.10 no especifica cómo determinar c. Sólo garantiza la existencia de al menos un número c en el intervalo.



$$\text{Valor medio} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Figura 4.31

Valor medio de una función

El valor de $f(c)$ dado en el teorema del valor medio para integrales recibe el nombre de **valor medio** de f en el intervalo $[a, b]$.

DEFINICIÓN DEL VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

Si f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el **valor medio** de f en el intervalo es

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

NOTA Obsérvese en la figura 4.31 que el área de la región bajo la gráfica f es igual al área del rectángulo cuya altura es el valor medio. ■

Para saber por qué el promedio de f se define de esta manera, supóngase que se divide $[a, b]$ en n subintervalos de igual anchura $\Delta x = (b - a)/n$. Si c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo, la media aritmética de los valores de la función en los c_i está dada por

$$a_n = \frac{1}{n}[f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)].$$

Porcentaje de $f(c_1), \ldots, f(c_n)$.

Al multiplicar y dividir entre $(b - a)$, puede escribirse la media como

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{b-a}\right) &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x. \end{aligned}$$

Por último, al tomar el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene el valor medio de f en el intervalo $[a, b]$, como se indicó en la definición anterior.

Este desarrollo del valor medio de una función en un intervalo es sólo uno de los muchos usos prácticos de las integrales definidas para representar procesos de suma. En el capítulo 7, se estudiarán otras aplicaciones, tales como volumen, longitud de arco, centros de masa y trabajo.

EJEMPLO 4 Determinación del valor medio de una función

Determinar el valor medio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1, 4]$.

Solución El valor medio está dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{4-1}\int_1^4 (3x^2 - 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\Big[x^3 - x^2\Big]_1^4 \\ &= \frac{1}{3}[64 - 16 - (1 - 1)] = \frac{48}{3} = 16. \end{aligned}$$

(Ver la figura 4.32.)

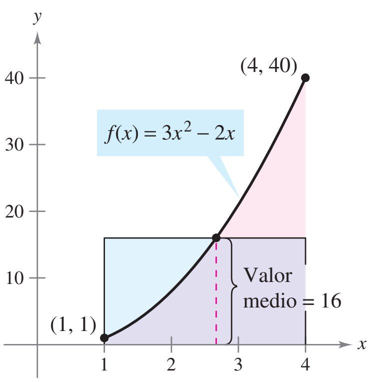
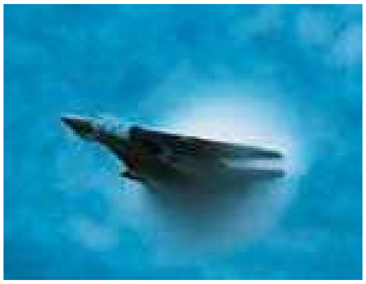


Figura 4.32



George Hall/Corbis

La primera persona en volar a una velocidad mayor que la del sonido fue Charles Yeager. El 14 de octubre de 1947, a una altura de 12.2 kilómetros, Yeager alcanzó 295.9 metros por segundo. Si Yeager hubiera volado a una altura menor que 11.275 kilómetros, su velocidad de 295.9 metros por segundo no hubiera "roto la barrera del sonido". La foto muestra un *Tomcat* F-14, un avión bimotor supersónico. Normalmente, el *Tomcat* puede alcanzar alturas de 15.24 km y velocidades que superan en más del doble la velocidad del sonido (707.78 m/s).

EJEMPLO 5 La velocidad del sonido

A diferentes alturas en la atmósfera de la Tierra, el sonido viaja a distintas velocidades. La velocidad del sonido $s(x)$ (en metros por segundo) puede modelarse mediante

$$s(x) = \begin{cases} -4x + 341, & 0 \le x < 11.5 \\ 295, & 11.5 \le x < 22 \\ \frac{3}{4}x + 278.5, & 22 \le x < 32 \\ \frac{3}{2}x + 254.5, & 32 \le x < 50 \\ -\frac{3}{2}x + 404.5, & 50 \le x \le 80 \end{cases}$$

donde x es la altura en kilómetros (ver la figura 4.33). ¿Cuál es la velocidad media del sonido sobre el intervalo [0, 80]?

Solución Se empieza con la integración $s(x)$ en el intervalo [0, 80]. Para hacer esto, se puede dividir la integral en cinco partes.

$$\int_0^{11.5} s(x)\,dx = \int_0^{11.5} (-4x + 341)\,dx = \Big[-2x^2 + 341x\Big]_0^{11.5} = 3\,657$$

$$\int_{11.5}^{22} s(x)\,dx = \int_{11.5}^{22} (295)\,dx = \Big[295x\Big]_{11.5}^{22} = 3\,097.5$$

$$\int_{22}^{32} s(x)\,dx = \int_{22}^{32} \left(\tfrac{3}{4}x + 278.5\right)dx = \Big[\tfrac{3}{8}x^2 + 278.5x\Big]_{22}^{32} = 2\,987.5$$

$$\int_{32}^{50} s(x)\,dx = \int_{32}^{50} \left(\tfrac{3}{2}x + 254.5\right)dx = \Big[\tfrac{3}{4}x^2 + 254.5x\Big]_{32}^{50} = 5\,688$$

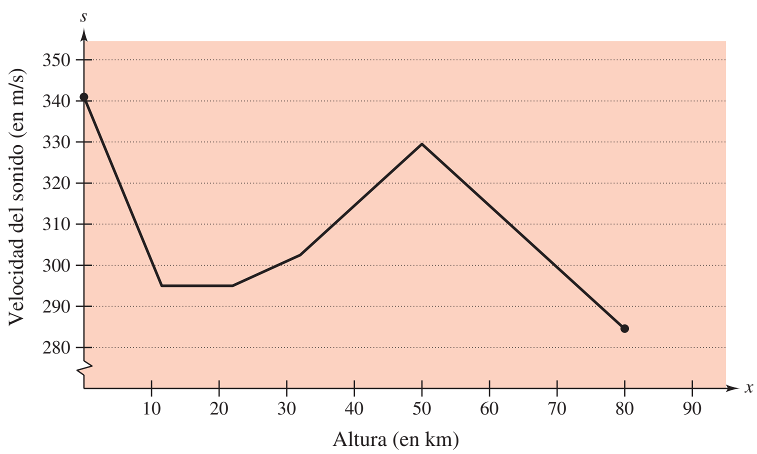
$$\int_{50}^{80} s(x)\,dx = \int_{50}^{80} \left(-\tfrac{3}{2}x + 404.5\right)dx = \Big[-\tfrac{3}{4}x^2 + 404.5x\Big]_{50}^{80} = 9\,210$$

Al sumar los valores de las cinco integrales, se obtiene

$$\int_0^{80} s(x)\,dx = 24\,640.$$

De tal modo, la velocidad media del sonido entre los 0 y los 80 km de altitud es

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{1}{80}\int_0^{80} s(x)\,dx = \frac{24\,640}{80} = 308 \text{ metros por segundo}$$



La velocidad del sonido depende de la altura
Figura 4.33

El segundo teorema fundamental del cálculo

Al introducir la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ se ha tomado como fijo el límite superior de integración b y x como la variable de integración. Sin embargo, es posible que surja una situación un poco diferente en la que la variable x se use como el límite superior de integración. Para evitar la confusión de utilizar x de dos maneras diferentes, se usa temporalmente t como la variable de integración. (Recordar que la integral definida *no* es una función de su variable de integración.)

La integral definida como un número

Constante

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Constante

f es una función de x

La integral definida como una función de x

F es una función de x

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Constante

f es una función de t

> **EXPLORACIÓN**
>
> Emplear una herramienta de graficación para representar la función
>
> $$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$$
>
> para $0 \leq x \leq \pi$. ¿Reconoce esta gráfica? Explicar.

EJEMPLO 6 La integral definida como función

Calcular la función

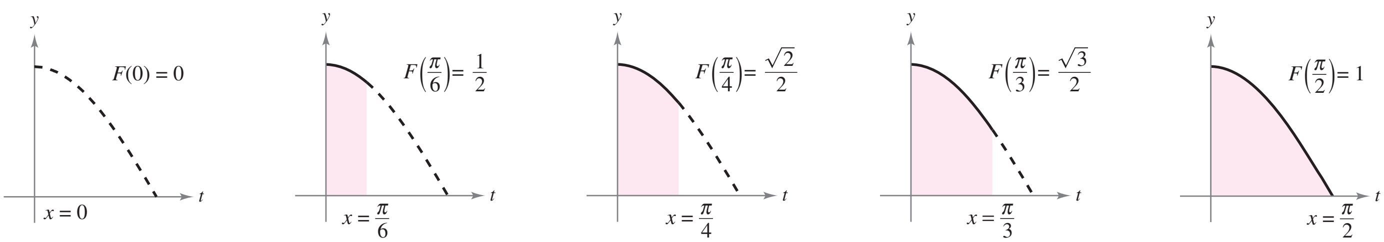
$$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$$

en $x = 0,\ \pi/6,\ \pi/4,\ \pi/3$ y $\pi/2$.

Solución Se podrían calcular cinco integrales definidas diferentes, una para cada uno de los límites superiores dados. Sin embargo, es mucho más simple fijar x (como una constante) por el momento para obtener

$$\int_0^x \cos t\,dt = \operatorname{sen} t\Big]_0^x = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} x.$$

Después de esto, utilizando $F(x) = \operatorname{sen} x$, es posible obtener los resultados que se muestran en la figura 4.34.



$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$ es el área bajo la curva $f(t) = \cos t$ desde 0 hasta x

Figura 4.34

Podría considerarse la función $F(x)$ como la *acumulación* del área bajo la curva $f(t) = \cos t$ desde $t = 0$ hasta $t = x$. Para $x = 0$, el área es 0 y $F(0) = 0$. Para $x = \pi/2$, $F(\pi/2) = 1$ produce el área acumulada bajo la curva coseno del intervalo completo $[0, \pi/2]$. Esta interpretación de una integral como una **función acumulación** se usa a menudo en aplicaciones de la integración.

En el ejemplo 6, advertir que la derivada de F es el integrando original (sólo que con la variable cambiada). Esto es,

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \cos t\, dt\right] = \cos x.$$

Este resultado se generaliza en el siguiente teorema, denominado el **segundo teorema fundamental del cálculo**.

TEOREMA 4.11 EL SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es continua en un intervalo abierto I que contiene a, entonces, para todo x en el intervalo,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\, dt\right] = f(x).$$

DEMOSTRACIÓN Empezar definiendo F como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

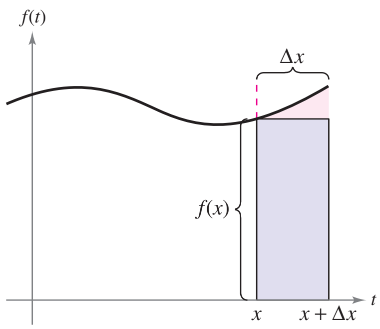
Luego, de acuerdo con la definición de la derivada, es posible escribir

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt + \int_x^a f(t)\, dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt\right]. \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio para integrales (suponiendo que $\Delta x > 0$), se sabe que existe un número c en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ tal que la integral en la expresión anterior es igual a $f(c)\,\Delta x$. Además, como $x \le c \le x + \Delta x$ se sigue que $c \to x$ cuando $\Delta x \to 0$. De tal modo, se obtiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{\Delta x} f(c)\,\Delta x\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Es posible plantear un argumento similar para $\Delta x < 0$.



$$f(x)\,\Delta x \approx \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$$

Figura 4.35

NOTA Utilizando el modelo del área para integrales definidas, considerar la aproximación

$$f(x)\,\Delta x \approx \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$$

se dice que el área del rectángulo de altura $f(x)$ y anchura Δx es aproximadamente igual al área de la región que se encuentra entre la gráfica de f y el eje x en el intervalo $[x, x + \Delta x]$, como se muestra en la figura 4.35.

Nótese que el segundo teorema del cálculo indica que toda f continua admite una antiderivada o primitiva. Sin embargo, ésta no necesita ser una función elemental. (Recordar la discusión de las funciones elementales en la sección P.3.)

EJEMPLO 7 Empleo del segundo teorema fundamental del cálculo

Calcular $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right]$.

Solución Advertir que $f(t) = \sqrt{t^2+1}$ es continua en toda la recta real. De tal modo, empleando el segundo teorema fundamental del cálculo, es posible escribir

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right] = \sqrt{x^2+1}.$$

La derivación que se muestra en el ejemplo 7 es una aplicación directa del segundo teorema fundamental del cálculo. El siguiente ejemplo muestra cómo puede combinarse este teorema con la regla de la cadena para encontrar la derivada de una función.

EJEMPLO 8 Empleo del segundo teorema fundamental del cálculo

Encontrar la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt$.

Solución Haciendo $u = x^3$, es factible aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo junto con la regla de la cadena como se ilustra.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} && \text{Regla de la cadena.}\\
&= \frac{d}{du}[F(x)]\frac{du}{dx} && \text{Definición de } \frac{dF}{du}.\\
&= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{x^3}\cos t\,dt\right]\frac{du}{dx} && \text{Sustituir } \int_{\pi/2}^{x^3}\cos t\,dt \text{ por } F(x).\\
&= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{u}\cos t\,dt\right]\frac{du}{dx} && \text{Sustituir } u \text{ por } x^3.\\
&= (\cos u)(3x^2) && \text{Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo.}\\
&= (\cos x^3)(3x^2) && \text{Reescribir como función de } x.
\end{aligned}$$

Debido a que la integral del ejemplo 8 se integra con facilidad, se puede verificar la derivada del modo siguiente.

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{x^3}\cos t\,dt = \operatorname{sen} t\Big]_{\pi/2}^{x^3} = \operatorname{sen} x^3 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = (\operatorname{sen} x^3) - 1$$

En esta forma, se tiene la posibilidad de aplicar la regla de las potencias para verificar que la derivada es la misma que la que se obtuvo en el ejemplo 8.

$$F'(x) = (\cos x^3)(3x^2)$$

Teorema del cambio neto

El teorema fundamental del cálculo (teorema 4.9) establece que si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Pero dado que $F'(x) = f(x)$, este enunciado se puede reescribir como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde la cantidad $F(b) - F(a)$ representa el *cambio neto de* F sobre el intervalo $[a, b]$.

TEOREMA 4.12 EL TEOREMA DEL CAMBIO NETO

La integral definida de la razón de cambio de una cantidad $F'(x)$ proporciona el cambio total, o **cambio neto**, en esa cantidad sobre el intervalo $[a, b]$.

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$ Cambio neto de F.

EJEMPLO 9 Uso del teorema del cambio neto

Una sustancia química fluye en un tanque de almacenamiento a una razón de $180 + 3t$ litros por minuto, donde $0 \le t \le 60$. Encontrar la cantidad de la sustancia química que fluye en el tanque durante los primeros 20 minutos.

Solución Sea $c(t)$ la cantidad de la sustancia química en el tanque en el tiempo t. Entonces $c'(t)$ representa la razón a la cual la sustancia química fluye dentro del tanque en el tiempo t. Durante los primeros 20 minutos, la cantidad que fluye dentro del tanque es

$$\begin{aligned}\int_0^{20} c'(t)\,dt &= \int_0^{20} (180 + 3t)\,dt \\ &= \left[180t + \frac{3}{2}t^2\right]_0^{20} \\ &= 3\,600 + 600 = 4\,200.\end{aligned}$$

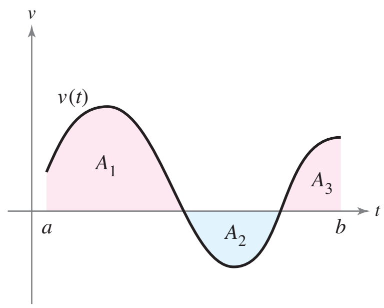
Así, la cantidad que fluye dentro del tanque durante los primeros 20 minutos es de 4 200 litros.

Otra forma de ilustrar el teorema del cambio neto es examinar la velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, donde $s(t)$ es la posición en el tiempo t. Entonces, su velocidad es $v(t) = s'(t)$ y

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a).$$

Esta integral definida representa el cambio neto en posición, o **desplazamiento**, de la partícula.

Cuando se calcula la distancia *total* recorrida por la partícula, se deben considerar los intervalos donde $v(t) \le 0$ y los intervalos donde $v(t) \ge 0$. Cuando $v(t) \le 0$, la partícula se mueve a la izquierda, y cuando $v(t) \ge 0$, la partícula se mueve hacia la derecha. Para calcular la distancia total recorrida, se integra el valor absoluto de la velocidad $|v(t)|$. Así, el



A_1, A_2 y A_3 son las áreas de las regiones sombreadas
Figura 4.36

desplazamiento de una partícula y la distancia total recorrida por una partícula sobre $[a, b]$, se puede escribir como

$$\textbf{Desplazamiento sobre } [a, b] = \int_a^b v(t)\, dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\textbf{Distancia total recorrida sobre } [a, b] = \int_a^b |v(t)|\, dt = A_1 + A_2 + A_3$$

(ver la figura 4.36).

EJEMPLO 10 Solución de un problema de movimiento de partícula

Una partícula está moviéndose a lo largo de una línea, así, su velocidad es $v(t) = t^3 - 10t^2 + 29t - 20$ pies por segundo en el tiempo t.

a) ¿Cuál es el desplazamiento de la partícula en el tiempo $1 \le t \le 5$?

b) ¿Cuál es la distancia total recorrida por la partícula en el tiempo $1 \le t \le 5$?

Solución

a) Por definición, se sabe que el desplazamiento es

$$\begin{aligned}\int_1^5 v(t)\, dt &= \int_1^5 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\, dt\\ &= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t\right]_1^5\\ &= \frac{25}{12} - \left(-\frac{103}{12}\right)\\ &= \frac{128}{12}\\ &= \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

Así, la partícula se mueve $\frac{32}{3}$ pies hacia la derecha.

b) Para encontrar la distancia total recorrida, calcular $\int_1^5 |v(t)|\, dt$. Usando la figura 4.37 y el hecho de que $v(t)$ pueda factorizarse como $(t - 1)(t - 4)(t - 5)$, se puede determinar que $v(t) \ge 0$ en $[1, 4]$ y $v(t) \le 0$ en $[4, 5]$. Así, la distancia total recorrida es

$$\begin{aligned}\int_1^5 |v(t)|\, dt &= \int_1^4 v(t)\, dt - \int_4^5 v(t)\, dt\\ &= \int_1^4 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\, dt - \int_4^5 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\, dt\\ &= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t\right]_1^4 - \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t\right]_4^5\\ &= \frac{45}{4} - \left(-\frac{7}{12}\right)\\ &= \frac{71}{6} \text{ pies.}\end{aligned}$$

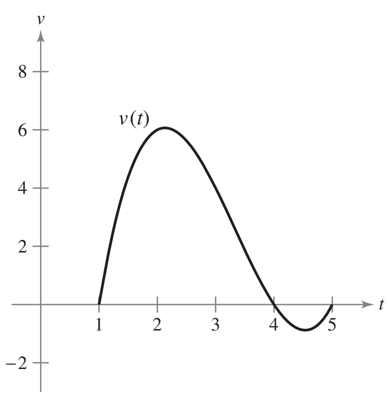


Figura 4.37

4.4 Ejercicios

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 1 a 4, utilizar una herramienta de graficación para representar el integrando. Emplear la gráfica para determinar si la integral definida es positiva, negativa o cero.**

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{4}{x^2+1}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$
4. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\sqrt{2-x}\,dx$

En los ejercicios 5 a 26, hallar la integral definida de la función algebraica. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

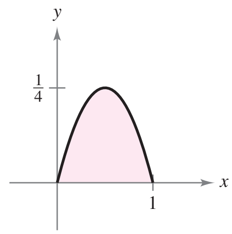
5. $\displaystyle\int_0^{2} 6x\,dx$
6. $\displaystyle\int_4^{9} 5\,dv$
7. $\displaystyle\int_{-1}^{0} (2x-1)\,dx$
8. $\displaystyle\int_2^{5} (-3v+4)\,dv$
9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2-2)\,dt$
10. $\displaystyle\int_1^{7} (6x^2+2x-3)\,dx$
11. $\displaystyle\int_0^{1} (2t-1)^2\,dt$
12. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3-9t)\,dt$
13. $\displaystyle\int_1^{2} \left(\frac{3}{x^2}-1\right)dx$
14. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(u-\frac{1}{u^2}\right)du$
15. $\displaystyle\int_1^{4} \frac{u-2}{\sqrt{u}}\,du$
16. $\displaystyle\int_{-3}^{3} v^{1/3}\,dv$
17. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\sqrt[3]{t}-2\right)dt$
18. $\displaystyle\int_1^{8} \sqrt{\frac{2}{x}}\,dx$
19. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x-\sqrt{x}}{3}\,dx$
20. $\displaystyle\int_0^{2} (2-t)\sqrt{t}\,dt$
21. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left(t^{1/3}-t^{2/3}\right)dt$
22. $\displaystyle\int_{-8}^{-1} \frac{x-x^2}{2\sqrt[3]{x}}\,dx$
23. $\displaystyle\int_0^{5} |2x-5|\,dx$
24. $\displaystyle\int_1^{4} (3-|x-3|)\,dx$
25. $\displaystyle\int_0^{3} |x^2-9|\,dx$
26. $\displaystyle\int_0^{4} |x^2-4x+3|\,dx$

En los ejercicios 27 a 34, hallar la integral definida de la función trigonométrica. Emplear una herramienta de graficación para verificar el resultado.

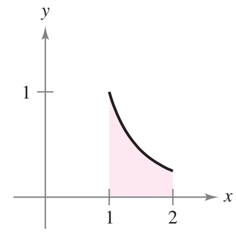
27. $\displaystyle\int_0^{\pi} (1+\operatorname{sen} x)\,dx$
28. $\displaystyle\int_0^{\pi} (2+\cos x)\,dx$
29. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$
30. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\,d\theta$
31. $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sec^2 x\,dx$
32. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} (2-\csc^2 x)\,dx$
33. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4\sec\theta\tan\theta\,d\theta$
34. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2t+\cos t)\,dt$

En los ejercicios 35 a 38, determinar el área de la región indicada.

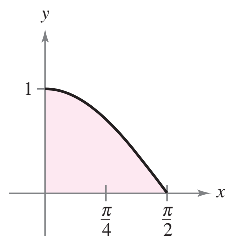
35. $y = x - x^2$



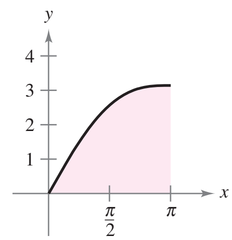
36. $y = \dfrac{1}{x^2}$



37. $y = \cos x$



38. $y = x + \operatorname{sen} x$



En los ejercicios 39 a 44, encontrar el área de la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones.

39. $y = 5x^2+2,\quad x=0,\quad x=2,\quad y=0$
40. $y = x^3+x,\quad x=2,\quad y=0$
41. $y = 1+\sqrt[3]{x},\quad x=0,\quad x=8,\quad y=0$
42. $y = (3-x)\sqrt{x},\quad y=0$
43. $y = -x^2+4x,\quad y=0$
44. $y = 1-x^4,\quad y=0$

En los ejercicios 45 a 50, determinar el (los) valor(es) de *c* cuya existencia es garantizada por el teorema del valor medio para integrales de la función en el intervalo indicado.

45. $f(x) = x^3,\quad [0, 3]$
46. $f(x) = \dfrac{9}{x^3},\quad [1, 3]$
47. $f(x) = \sqrt{x},\quad [4, 9]$
48. $f(x) = x - 2\sqrt{x},\quad [0, 2]$
49. $f(x) = 2\sec^2 x,\quad [-\pi/4, \pi/4]$
50. $f(x) = \cos x,\quad [-\pi/3, \pi/3]$

En los ejercicios 51 a 56, encontrar el valor medio de la función sobre el intervalo dado y todos los valores de *x* en el intervalo para los cuales la función sea igual a su valor promedio.

51. $f(x) = 9-x^2,\quad [-3, 3]$
52. $f(x) = \dfrac{4(x^2+1)}{x^2},\quad [1, 3]$
53. $f(x) = x^3,\quad [0, 1]$
54. $f(x) = 4x^3-3x^2,\quad [-1, 2]$
55. $f(x) = \operatorname{sen} x,\quad [0, \pi]$
56. $f(x) = \cos x,\quad [0, \pi/2]$

57. ***Velocidad*** La gráfica muestra la velocidad, en pies por segundo, de un automóvil que acelera desde el reposo. Emplear la gráfica para estimar la distancia que el automóvil recorre en 8 segundos.

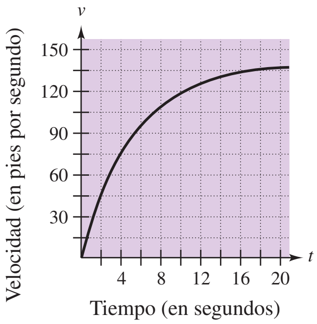


Figura para 57

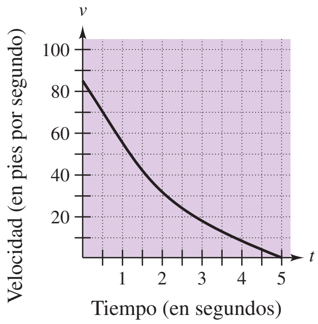
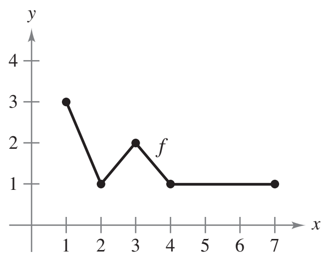


Figura para 58

58. ***Velocidad*** La gráfica muestra la velocidad de un automóvil tan pronto como el conductor aplica los frenos. Emplear la gráfica para estimar qué distancia recorre el auto antes de detenerse.

Desarrollo de conceptos

59. La gráfica de f se muestra en la figura.



a) Calcular $\int_1^7 f(x)\, dx$.

b) Determinar el valor medio de f en el intervalo $[1, 7]$.

c) Determinar las respuestas a los apartados *a*) y *b*) si la gráfica se desplaza dos unidades hacia arriba.

60. Si $r'(t)$ representa la razón de crecimiento de un perro en libras por año, ¿qué representa $r(t)$? ¿Qué representa $\int_2^6 r'(t)\, dt$ en el perro?

61. ***Fuerza*** La fuerza F (en newtons) de un cilindro hidráulico en una prensa es proporcional al cuadrado de sec x, donde x es la distancia (en metros) que el cilindro se desplaza en su ciclo. El dominio de F es $[0, \pi/3]$ y $F(0) = 500$.

a) Encontrar F como una función de x.

b) Determinar la fuerza media ejercida por la prensa sobre el intervalo $[0, \pi/3]$.

62. ***Flujo sanguíneo*** La velocidad v del flujo de sangre a una distancia r del eje central de cualquier arteria de radio R es

$$v = k(R^2 - r^2)$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Determinar el flujo medio de sangre a lo largo de un radio de la arteria. (Usar 0 y R como los límites de integración.)

63. ***Ciclo respiratorio*** El volumen V en litros de aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de cinco segundos se aproxima mediante el modelo $V = 0.1729t + 0.1522t^2 - 0.0374t^3$ donde t es el tiempo en segundos. Aproximar el volumen medio de aire en los pulmones durante un ciclo.

64. ***Promedio de ventas*** Una compañía ajusta un modelo a los datos de ventas mensuales de un producto de temporada. El modelo es

$$S(t) = \frac{t}{4} + 1.8 + 0.5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right), \qquad 0 \le t \le 24$$

donde S son las ventas (en miles) y t es el tiempo en meses.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar $f(t) = 0.5 \operatorname{sen}(\pi t/6)$ para $0 \le t \le 24$. Emplear la gráfica para explicar por qué el valor medio de $f(t)$ es cero sobre el intervalo.

b) Recurrir a una herramienta de graficación para representar $S(t)$ y la recta $g(t) = t/4 + 1.8$ en la misma ventana de observación. Utilizar la gráfica y el resultado del apartado *a*) para explicar por qué g recibe el nombre *recta de tendencia*.

65. ***Modelado matemático*** Se prueba un vehículo experimental en una pista recta. Parte del reposo y su velocidad v (metros por segundo) se registra en la tabla cada 10 segundos durante un minuto.

t	0	10	20	30	40	50	60
v	0	5	21	40	62	78	83

a) Emplear una herramienta de graficación para determinar un modelo de la forma $v = at^3 + bt^2 + ct + d$ para los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para dibujar los datos y hacer la gráfica del modelo.

c) Emplear el teorema fundamental del cálculo para aproximar la distancia recorrida por el vehículo durante la prueba.

Para discusión

66. La gráfica de f se muestra en la figura. La región sombreada A tiene un área de 1.5, y $\int_0^6 f(x)\, dx = 3.5$. Usar esta información para completar los espacios en blanco.

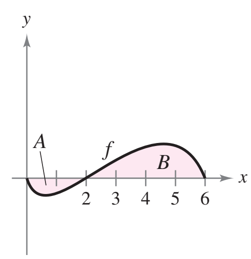
a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx =$ ▭

b) $\displaystyle\int_2^6 f(x)\, dx =$ ▭

c) $\displaystyle\int_0^6 |f(x)|\, dx =$ ▭

d) $\displaystyle\int_0^2 -2f(x)\, dx =$ ▭

e) $\displaystyle\int_0^6 [2 + f(x)]\, dx =$ ▭



f) El valor promedio de f sobre el intervalo $[0, 6]$ es ▭.

En los ejercicios 67 a 72, encontrar F como una función de x y evaluar en $x = 2$, $x = 5$ y $x = 8$.

67. $F(x) = \displaystyle\int_0^x (4t - 7)\, dt$

68. $F(x) = \displaystyle\int_2^x (t^3 + 2t - 2)\, dt$

69. $F(x) = \int_1^x \frac{20}{v^2}\, dv$ **70.** $F(x) = \int_2^x -\frac{2}{t^3}\, dt$

71. $F(x) = \int_1^x \cos\theta\, d\theta$ **72.** $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

73. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra en la figura.

a) Estimar $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$ y $g(8)$.
b) Determinar el intervalo abierto más grande en el cual g está creciendo. Encontrar el intervalo abierto más grande en el que g decrezca.
c) Identificar cualesquiera extremos de g.
d) Dibujar una gráfica sencilla de g.

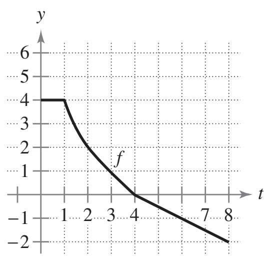


Figura para 73

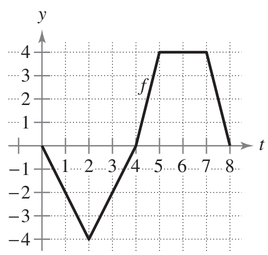


Figura para 74

74. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es una función cuya gráfica se muestra en la figura.

a) Estimar $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$ y $g(8)$.
b) Encontrar el intervalo abierto más grande en el cual g esté creciendo. Determinar el intervalo abierto más grande en el que g decrezca.
c) Identificar cualesquiera extremos de g.
d) Dibujar una gráfica sencilla de g.

En los ejercicios 75 a 80, *a*) integrar para determinar *F* como una función de *x* y *b*) demostrar el segundo teorema fundamental del cálculo derivando el resultado del apartado *a*).

75. $F(x) = \int_0^x (t+2)\, dt$ **76.** $F(x) = \int_0^x t(t^2+1)\, dt$

77. $F(x) = \int_8^x \sqrt[3]{t}\, dt$ **78.** $F(x) = \int_4^x \sqrt{t}\, dt$

79. $F(x) = \int_{\pi/4}^x \sec^2 t\, dt$ **80.** $F(x) = \int_{\pi/3}^x \sec t \tan t\, dt$

En los ejercicios 81 a 86, utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo para encontrar $F'(x)$.

81. $F(x) = \int_{-2}^x (t^2 - 2t)\, dt$ **82.** $F(x) = \int_1^x \frac{t^2}{t^2+1}\, dt$

83. $F(x) = \int_{-1}^x \sqrt{t^4+1}\, dt$ **84.** $F(x) = \int_1^x \sqrt[4]{t}\, dt$

85. $F(x) = \int_0^x t\cos t\, dt$ **86.** $F(x) = \int_0^x \sec^3 t\, dt$

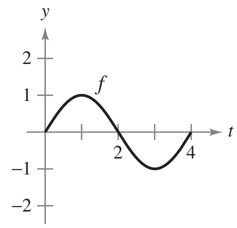
En los ejercicios 87 a 92, encontrar $F'(x)$.

87. $F(x) = \int_x^{x+2} (4t+1)\, dt$ **88.** $F(x) = \int_{-x}^x t^3\, dt$

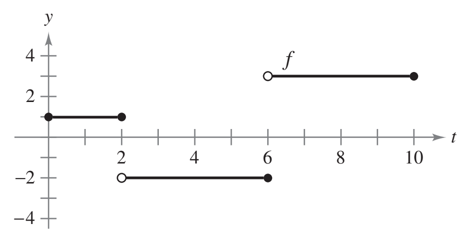
89. $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{t}\, dt$ **90.** $F(x) = \int_2^{x^2} \frac{1}{t^3}\, dt$

91. $F(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen} t^2\, dt$ **92.** $F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}\theta^2\, d\theta$

93. ***Análisis gráfico*** Aproximar la gráfica de g en el intervalo $0 \le x \le 4$, donde $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Identificar la coordenada x de un extremo de g.



94. Utilizar la gráfica de la función f que se muestra en la figura y la función g definida por $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.



a) Completar la tabla.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(x)$										

b) Dibujar los puntos de la tabla en el apartado *a*) y graficar g.
c) ¿Dónde tiene g un mínimo? Explicar.
d) ¿Dónde tiene g un máximo? Explicar.
e) ¿En qué intervalo g crece a la mayor velocidad? Explicar.
f) Identificar los ceros de g.

95. ***Costo*** El costo total C (en dólares) de compra y mantenimiento de una pieza de equipo durante x años es

$$C(x) = 5\,000\left(25 + 3\int_0^x t^{1/4}\, dt\right).$$

a) Efectuar la integración para escribir C como una función de x.
b) Encontrar $C(1)$, $C(5)$ y $C(10)$.

96. ***Área*** El área A entre la gráfica de la función $g(t) = 4 - 4/t^2$ y el eje t sobre el intervalo $[1, x]$ es

$$A(x) = \int_1^x \left(4 - \frac{4}{t^2}\right) dt.$$

a) Determinar la asíntota horizontal de la gráfica de g.
b) Integrar para encontrar A como una función de x. ¿La gráfica de A tiene una asíntota horizontal? Explicar.

En los ejercicios 97 a 102, la función velocidad, en pies por segundo, está dada para una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta. Encontrar *a*) el desplazamiento y *b*) la distancia total que la partícula recorre en el intervalo dado.

97. $v(t) = 5t - 7, \quad 0 \leq t \leq 3$

98. $v(t) = t^2 - t - 12, \quad 1 \leq t \leq 5$

99. $v(t) = t^3 - 10t^2 + 27t - 18, \quad 1 \leq t \leq 7$

100. $v(t) = t^3 - 8t^2 + 15t, \quad 0 \leq t \leq 5$

101. $v(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}, \quad 1 \leq t \leq 4$ **102.** $v(t) = \cos t, \quad 0 \leq t \leq 3\pi$

103. Una partícula se mueve a lo largo del eje x. La posición de la partícula en el tiempo t está dada por $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 2$, $0 \leq t \leq 5$. Encontrar el desplazamiento total que la partícula recorre en 5 unidades de tiempo.

104. Repetir el ejercicio 103 para la función posición dada por $x(t) = (t-1)(t-3)^2$, $0 \leq t \leq 5$.

105. ***Flujo de agua*** Fluye agua a través de un tanque de almacenamiento a una razón de $500 - 5t$ litros por minuto. Encontrar la cantidad de agua que fluye hacia afuera del tanque durante los primeros 18 minutos.

106. ***Filtración de aceite*** A la 1:00 p.m., empieza a filtrarse aceite desde un tanque a razón de $4 + 0.75t$ galones por hora.

a) ¿Cuánto aceite se pierde desde la 1:00 p.m. hasta las 4:00 p.m.?

b) ¿Cuánto aceite se pierde desde las 4:00 p.m. hasta las 7:00 p.m.?

c) Comparar los resultados de los apartados *a*) y *b*). ¿Qué se observa?

En los ejercicios 107 a 110, describir por qué el enunciado es incorrecto.

107. $\cancel{\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \Big[-x^{-1}\Big]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2}$

108. $\cancel{\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{2}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_{-2}^{1} = -\frac{3}{4}}$

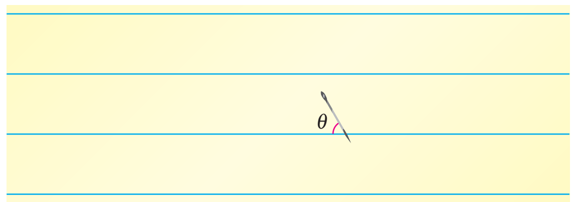
109. $\cancel{\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sec^2 x\,dx = \Big[\tan x\Big]_{\pi/4}^{3\pi/4} = -2}$

110. $\cancel{\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \csc x \cot x\,dx = \Big[-\csc x\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = 2}$

111. ***Experimento de la aguja de Buffon*** Sobre un plano horizontal se trazan rectas paralelas separadas por una distancia de 2 pulgadas. Una aguja de 2 pulgadas se lanza aleatoriamente sobre el plano. La probabilidad de que la aguja toque una recta es

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta\, d\theta$$

donde θ es el ángulo agudo entre la aguja y cualquiera de las rectas paralelas. Determinar esta probabilidad.



112. Demostrar que $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right] = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 113 y 114, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

113. Si $F'(x) = G'(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

114. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

115. Demostrar que la función

$$f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^{x} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

es constante para $x > 0$.

116. Encontrar la función $f(x)$ y todos los valores de c, tal que

$$\int_c^x f(t)\,dt = x^2 + x - 2.$$

117. Sea $G(x) = \displaystyle\int_0^x \left[s\int_0^s f(t)dt\right] ds$, donde f es continua para todo t real. Determinar *a*) $G(0)$, *b*) $G'(0)$, *c*) $G''(x)$ y *d*) $G''(0)$.

PROYECTO DE TRABAJO

Demostración del teorema fundamental

Utilizar una herramienta de graficación para representar la función $y_1 = \operatorname{sen}^2 t$ en el intervalo $0 \leq t \leq \pi$. Sea $F(x)$ la siguiente función de x.

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}^2 t\,dt$$

a) Completar la tabla. Explicar por qué los valores de f están creciendo.

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
$F(x)$							

b) Utilizar las funciones de integración de una herramienta de graficación para representar F.

c) Emplear las funciones de derivación de una herramienta de graficación para hacer la gráfica de $F'(x)$. ¿Cómo se relaciona esta gráfica con la gráfica de la parte *b*)?

d) Verificar que la derivada de $y = (1/2)t - (\operatorname{sen} 2t)/4$ es $\operatorname{sen}^2 t$. Graficar y y escribir un pequeño párrafo acerca de cómo esta gráfica se relaciona con las de los apartados *b*) y *c*).

4.5 Integración por sustitución

- **Utilizar el reconocimiento de patrones para encontrar una integral indefinida.**
- **Emplear un cambio de variable para determinar una integral indefinida.**
- **Utilizar la regla general de las potencias para la integración con el fin de determinar una integral indefinida.**
- **Utilizar un cambio de variable para calcular una integral definida.**
- **Calcular una integral definida que incluya una función par o impar.**

Reconocimiento de patrones

En esta sección se estudiarán técnicas para integrar funciones compuestas. La discusión se divide en dos partes: *reconocimiento de patrones* y *cambio de variables*. Ambas técnicas implican una ***u*-sustitución**. Con el reconocimiento de patrones se efectúa la sustitución mentalmente, y con el cambio de variable se escriben los pasos de la sustitución.

El papel de la sustitución en la integración es comparable al de la regla de la cadena en la derivación. Recordar que para funciones derivables dadas por $y = F(u)$ y $u = g(x)$, la regla de la cadena establece que

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x).$$

De acuerdo con la definición de una antiderivada o primitiva, se sigue

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Estos resultados se resumen en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.13 ANTIDERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Sea g una función cuyo recorrido o rango es un intervalo I, y sea f una función continua en I. Si g es derivable en su dominio y F es una antiderivada o primitiva de f en I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$ y

$$\int f(u)\,du = F(u) + C.$$

NOTA El enunciado del teorema 4.13 no dice cómo distinguir entre $f(g(x))$ y $g'(x)$ en el integrando. A medida que se tenga más experiencia en la integración, la habilidad para efectuar esta operación aumentará. Desde luego, parte de la clave es la familiaridad con las derivadas. ■

Los ejemplos 1 y 2 muestran cómo aplicar *directamente* el teorema 4.13, reconociendo la presencia de $f(g(x))$ y $g'(x)$. Notar que la función compuesta en el integrando tiene una *función exterior* f y una *función interior* g. Además, la derivada $g'(x)$ está presente como un factor del integrando.

Función exterior

$$\int f(g(x))\underbrace{g'(x)}_{\text{Derivada de la función interior}}\,dx = F(g(x)) + C$$

Función interior

EJEMPLO 1 Reconocimiento del patrón de $f(g(x))g'(x)$

Determinar $\int (x^2 + 1)^2(2x)\, dx$.

Solución Tomando $g(x) = x^2 + 1$, se obtiene

$$g'(x) = 2x$$

y

$$f(g(x)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2.$$

A partir de esto, se puede reconocer que el integrando sigue el patrón $f(g(x))g'(x)$. Utilizando la regla de la potencia para la integración y el teorema 4.13, es posible escribir

$$\int \overbrace{(x^2 + 1)^2}^{f(g(x))}\overbrace{(2x)}^{g'(x)}\, dx = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C.$$

Es fácil comprobar, mediante la regla de la cadena, que la derivada de $\frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C$ es, en efecto, el integrando de la integral original.

EJEMPLO 2 Reconocimiento del patrón $f(g(x))g'(x)$

Determinar $\int 5 \cos 5x\, dx$.

Solución Tomando $g(x) = 5x$, se obtiene

$$g'(x) = 5$$

y

$$f(g(x)) = f(5x) = \cos 5x.$$

A partir de esto, se puede reconocer que el integrando sigue el patrón $f(g(x))g'(x)$. Utilizando la regla del coseno para la integración y el teorema 4.13, puede escribirse

$$\int \overbrace{(\cos (5x))}^{f(g(x))}\overbrace{(5)}^{g'(x)}\, dx = \text{sen } 5x + C.$$

Lo anterior se verifica derivando sen $5x + C$ para obtener el integrando original.

TECNOLOGÍA Usar un sistema algebraico computarizado, tal como *Maple, Mathematica* o *TI-89*, para resolver las integrales dadas en los ejemplos 1 y 2. ¿Se obtienen las mismas antiderivadas o primitivas que las que se citan en los ejemplos?

EXPLORACIÓN

Reconocimiento de patrones El integrando en cada una de las siguientes integrales corresponde al patrón $f(g(x))g'(x)$. Identificar el patrón y utilizar el resultado para calcular la integral.

a) $\int 2x(x^2 + 1)^4\, dx$ ***b)*** $\int 3x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx$ ***c)*** $\int \sec^2 x(\tan x + 3)\, dx$

Las siguientes tres integrales son similares a las primeras tres. Mostrar cómo se puede multiplicar y dividir por una constante para calcular estas integrales.

d) $\int x(x^2 + 1)^4\, dx$ ***e)*** $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx$ ***f)*** $\int 2 \sec^2 x(\tan x + 3)\, dx$

Los integrandos en los ejemplos 1 y 2 corresponden exactamente al patrón $f(g(x))$ $g'(x)$ (sólo se tiene que reconocer el patrón). Es posible extender esta técnica de manera considerable utilizando la regla del múltiplo constante.

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

Muchos integrandos contienen la parte esencial (la parte variable) de $g'(x)$, aunque está faltando un múltiplo constante. En tales casos, es posible multiplicar y dividir por el múltiplo constante necesario, como se muestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Multiplicar y dividir por una constante

Determinar $\displaystyle\int x(x^2+1)^2\,dx.$

Solución Esto es similar a la integral dada en el ejemplo 1, salvo porque al integrando le falta un factor 2. Al reconocer que $2x$ es la derivada de $x^2 + 1$, se toma $g(x) = x^2 + 1$ y se incluye el término $2x$ de la manera siguiente.

$$\int x(x^2+1)^2\,dx = \int (x^2+1)^2\left(\frac{1}{2}\right)(2x)\,dx \qquad \text{Multiplicar y dividir entre 2.}$$

$$= \frac{1}{2}\int \overbrace{(x^2+1)^2}^{f(g(x))}\;\overbrace{(2x)}^{g'(x)}\,dx \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^3}{3}\right] + C \qquad \text{Integrar.}$$

$$= \frac{1}{6}(x^2+1)^3 + C \qquad \text{Simplificar.}$$

En la práctica, la mayoría de la gente no escribiría tantos pasos como los que se muestran en el ejemplo 3. Por ejemplo, podría calcularse la integral escribiendo simplemente

$$\int x(x^2+1)^2\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^2\,2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^3}{3}\right] + C$$

$$= \frac{1}{6}(x^2+1)^3 + C.$$

NOTA Asegurarse de ver que la regla del múltiplo constante se aplica sólo a *constantes*. No se puede multiplicar y dividir por una variable y después mover la variable fuera del signo integral. Por ejemplo,

$$\int (x^2+1)^2\,dx \neq \frac{1}{2x}\int (x^2+1)^2(2x)\,dx.$$

Después de todo, si fuera legítimo mover cantidades variables fuera del signo de la integral, se podría sacar el integrando completo y simplificar el proceso completo. Sin embargo, el resultado sería incorrecto. ■

Cambio de variables

Con un **cambio de variables** formal se puede reescribir por completo la integral en términos de u y du (o cualquier otra variable conveniente). Aunque este procedimiento puede implicar más pasos escritos que el reconocimiento de patrones ilustrado en los ejemplos 1 a 3, resulta útil para integrandos complicados. La técnica del cambio de variable utiliza la notación de Leibniz para la diferencial. Esto es, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$, y la integral en el teorema 4.13 toma la forma

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C.$$

EJEMPLO 4 Cambio de variable

Encontrar $\displaystyle\int \sqrt{2x - 1}\,dx$.

Solución Primero, sea u la función interior, $u = 2x - 1$. Calcular después la diferencial du de manera que $du = 2\,dx$. Ahora, utilizando $\sqrt{2x-1} = \sqrt{u}$ y $dx = du/2$, sustituir para obtener

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2x-1}\,dx &= \int \sqrt{u}\left(\frac{du}{2}\right) && \text{Integrar en términos de } u. \\
&= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du && \text{Regla del múltiplo constante.} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C && \text{Antiderivada en términos de } u. \\
&= \frac{1}{3}u^{3/2} + C && \text{Simplificar.} \\
&= \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C. && \text{Antiderivada en términos de } x.
\end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO Como la integración suele ser más difícil que la derivación, verificar la respuesta en un problema de integración mediante la derivación. Así, en el ejemplo 4 debe derivarse $\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C$ para verificar que se obtiene el integrando original.

EJEMPLO 5 Cambio de variables

Encontrar $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$.

Solución Como en el ejemplo previo, considerar que $u = 2x - 1$ para obtener $dx = du/2$. Como el integrando contiene un factor de x, se tiene que despejar x en términos de u, como se muestra.

$$u = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad x = (u+1)/2 \qquad \text{Resolver para } x \text{ en términos de } u.$$

Después de esto, utilizando la sustitución, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{2x-1}\,dx &= \int \left(\frac{u+1}{2}\right)u^{1/2}\left(\frac{du}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\int (u^{3/2} + u^{1/2})\,du \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C \\
&= \frac{1}{10}(2x-1)^{5/2} + \frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

Para completar el cambio de variable en el ejemplo 5, debe resolverse para x en términos de u. Algunas veces esto es muy difícil. Por fortuna no siempre es necesario, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Cambio de variables

Determinar $\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\, dx$.

Solución Debido a que $\operatorname{sen}^2 3x = (\operatorname{sen} 3x)^2$, podemos tomar $u = \operatorname{sen} 3x$. Entonces

$$du = (\cos 3x)(3)\, dx.$$

Luego, debido a que $\cos 3x\, dx$ es parte de la integral original, puede escribirse

$$\frac{du}{3} = \cos 3x\, dx.$$

AYUDA DE ESTUDIO Cuando se realiza un cambio de variable, cerciorarse de que la respuesta se escriba utilizando las mismas variables que en el integrando original. Así, en el ejemplo 6, no debe dejarse la respuesta como

$$\tfrac{1}{9}u^3 + C$$

sino más bien, reemplazar u por $\operatorname{sen} 3x$.

Sustituyendo u y $du/3$ en la integral original, se obtiene

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\, dx &= \int u^2 \frac{du}{3}\\ &= \frac{1}{3}\int u^2\, du\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{u^3}{3}\right) + C\\ &= \frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x + C.\end{aligned}$$

Es posible verificar lo anterior derivando.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x\right] &= \left(\frac{1}{9}\right)(3)(\operatorname{sen} 3x)^2(\cos 3x)(3)\\ &= \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\end{aligned}$$

Como la derivación produce el integrando original, se ha obtenido la antiderivada o primitiva correcta.

Los pasos que se utilizan para la integración por sustitución se resumen en la siguiente guía.

Estrategia para realizar un cambio de variable

1. Elegir una sustitución $u = g(x)$. Usualmente, es mejor elegir la parte *interna* de una función compuesta, tal como una cantidad elevada a una potencia.
2. Calcular $du = g'(x)dx$.
3. Reescribir la integral en términos de la variable u.
4. Encontrar la integral resultante en términos de u.
5. Reemplazar u por $g(x)$ para obtener una antiderivada o primitiva en términos de x.
6. Verificar la respuesta por derivación.

La regla general de la potencia para integrales

Una de las sustituciones de u más comunes incluye cantidades en el integrando que se elevan a una potencia. Debido a la importancia de este tipo de sustitución, se le da un nombre especial: la **regla general de la potencia para integrales**. Una prueba de esta regla sigue directamente de la regla (simple) de la potencia para la integración, junto con el teorema 4.13.

TEOREMA 4.14 LA REGLA GENERAL DE LA POTENCIA PARA INTEGRALES

Si g es una función derivable de x, entonces

$$\int [g(x)]^n g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

De manera equivalente, si $u = g(x)$, entonces

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

EJEMPLO 7 Sustitución y regla general de la potencia

a) $$\int 3(3x-1)^4\,dx = \int \overbrace{(3x-1)^4}^{u^4}\overbrace{(3)\,dx}^{du} = \overbrace{\frac{(3x-1)^5}{5}}^{u^5/5} + C$$

b) $$\int (2x+1)(x^2+x)\,dx = \int \overbrace{(x^2+x)^1}^{u^1}\overbrace{(2x+1)\,dx}^{du} = \overbrace{\frac{(x^2+x)^2}{2}}^{u^2/2} + C$$

c) $$\int 3x^2\sqrt{x^3-2}\,dx = \int \overbrace{(x^3-2)^{1/2}}^{u^{1/2}}\overbrace{(3x^2)\,dx}^{du} = \overbrace{\frac{(x^3-2)^{3/2}}{3/2}}^{u^{3/2}/(3/2)} + C = \frac{2}{3}(x^3-2)^{3/2} + C$$

d) $$\int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2}\,dx = \int \overbrace{(1-2x^2)^{-2}}^{u^{-2}}\overbrace{(-4x)\,dx}^{du} = \overbrace{\frac{(1-2x^2)^{-1}}{-1}}^{u^{-1}/(-1)} + C = -\frac{1}{1-2x^2} + C$$

e) $$\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx = -\int \overbrace{(\cos x)^2}^{u^2}\overbrace{(-\operatorname{sen} x)\,dx}^{du} = -\overbrace{\frac{(\cos x)^3}{3}}^{u^3/3} + C$$

Algunas integrales cuyos integrandos incluyen cantidades elevadas a potencias no pueden determinarse mediante la regla general de la potencia. Considerar las dos integrales

$$\int x(x^2+1)^2\,dx \quad \text{y} \quad \int (x^2+1)^2\,dx.$$

La sustitución $u = x^2 + 1$ funciona en la primera integral pero no en la segunda. En la segunda, la sustitución falla porque al integrando le falta el factor x necesario para formar du. Por fortuna, *esta integral particular* puede hacerse desarrollando el integrando como $(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$ y utilizando la regla (simple) de la potencia para integrar cada término.

EXPLORACIÓN

Suponer que se pide encontrar una de las siguientes integrales. ¿Cuál elegiría? Explicar la respuesta.

a) $\int \sqrt{x^3+1}\,dx$ o

$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

b) $\int \tan(3x)\sec^2(3x)\,dx$ o

$\int \tan(3x)\,dx$

Cambio de variable para integrales definidas

Cuando se usa la sustitución de u en una integral definida, muchas veces es conveniente determinar los límites de integración para la variable u en vez de convertir la antiderivada o primitiva de nuevo a la variable x y calcularla en los límites originales. Este cambio de variable se establece explícitamente en el siguiente teorema. La demostración sigue del teorema 4.13 en combinación con el teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA 4.15 CAMBIO DE VARIABLE PARA INTEGRALES DEFINIDAS

Si la función $u = g(x)$ tiene una derivada continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y f es continua en el recorrido o rango de g, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

EJEMPLO 8 Cambio de variables

Calcular $\displaystyle\int_0^1 x(x^2 + 1)^3\,dx$.

Solución Para calcular esta integral, sea $u = x^2 + 1$. Después,

$$u = x^2 + 1 \implies du = 2x\,dx.$$

Antes de sustituir, determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = 0$, $u = 0^2 + 1 = 1$.	Cuando $x = 1$, $u = 1^2 + 1 = 2$.

Ahora, es posible sustituir para obtener

$$\int_0^1 x(x^2 + 1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 + 1)^3(2x)\,dx$$

Límites de integración para x.

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\,du$$

Límites de integración para u.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{15}{8}.
\end{aligned}$$

Intentar reescribir la antiderivada o primitiva $\frac{1}{2}(u^4/4)$ en términos de la variable x y calcular la integral definida en los límites originales de integración, como se muestra.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 &= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2 + 1)^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

Notar que se obtiene el mismo resultado.

EJEMPLO 9 Cambio de variables

Calcular $A = \displaystyle\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx.$

Solución Para calcular esta integral, considerar que $u = \sqrt{2x-1}$. Después, obtener

$$\begin{aligned} u^2 &= 2x - 1 \\ u^2 + 1 &= 2x \\ \frac{u^2+1}{2} &= x \\ u\,du &= dx. \end{aligned}$$

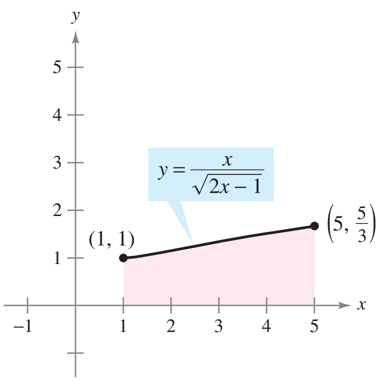
Diferenciar cada lado.

Antes de sustituir, determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.

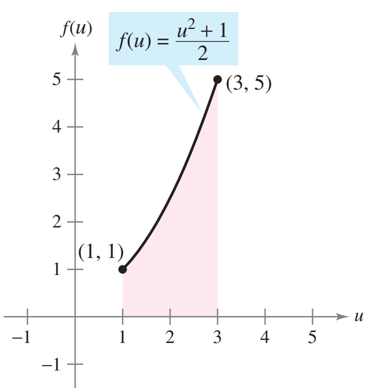
Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = 1,\ u = \sqrt{2-1} = 1.$	Cuando $x = 5,\ u = \sqrt{10-1} = 3.$

Ahora, sustituir para obtener

$$\begin{aligned} \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx &= \int_1^3 \frac{1}{u}\left(\frac{u^2+1}{2}\right) u\,du \\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 (u^2+1)\,du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3} + u\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2}\left(9 + 3 - \frac{1}{3} - 1\right) \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$



La región antes de la sustitución tiene un área de $\frac{16}{3}$
Figura 4.38



La región después de la sustitución tiene un área de $\frac{16}{3}$
Figura 4.39

Geométricamente, es posible interpretar la ecuación

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \int_1^3 \frac{u^2+1}{2}\,du$$

en el sentido de que las dos regiones *diferentes* que se ilustran en las figuras 4.38 y 4.39 tienen la *misma* área.

Al calcular integrales definidas por cambio de variable (sustitución), es posible que el límite superior de integración correspondiente a la nueva variable u sea más pequeño que el límite inferior. Si esto ocurre, no hay que reordenar los límites. Simplemente se calcula la integral de la manera usual. Por ejemplo, después de sustituir $u = \sqrt{1-x}$ en la integral

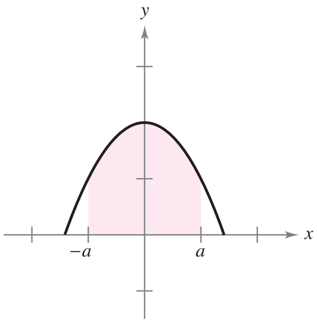
$$\int_0^1 x^2(1-x)^{1/2}\,dx$$

se obtiene $u = \sqrt{1-1} = 0$ cuando $x = 1$, y $u = \sqrt{1-0} = 1$ cuando $x = 0$. De tal modo, la forma correcta de esta integral en la variable u es

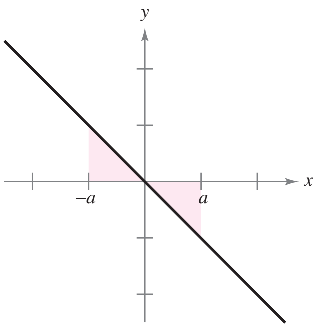
$$-2\int_1^0 (1-u^2)^2 u^2\,du.$$

Integración de funciones pares e impares

Incluso con un cambio de variable, la integración puede ser difícil. En ocasiones se puede simplificar el cálculo de una integral definida (en un intervalo que es simétrico respecto al eje y o respecto al origen) reconociendo que el integrando es una función par o impar (ver la figura 4.40).



Función par



Función impar
Figura 4.40

TEOREMA 4.16 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES PARES E IMPARES

Sea f integrable en el intervalo cerrado $[-a, a]$.

1. Si f es una función *par*, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

2. Si f es una función *impar*, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

DEMOSTRACIÓN Como f es par, se sabe que $f(x) = f(-x)$. Utilizando el teorema 4.13 con la sustitución $u = -x$, se obtiene

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = -\int_{a}^{0} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Por último, utilizando el teorema 4.6, se llega a

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Esto demuestra la primera propiedad. La demostración de la segunda propiedad se deja al lector (ver el ejercicio 137).

EJEMPLO 10 Integración de una función impar

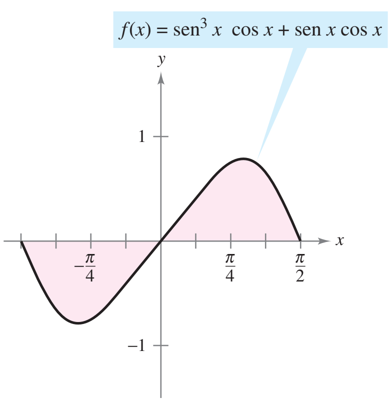
Calcular $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x)\,dx.$

Solución Haciendo $f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x$ se obtiene

$$\begin{aligned}f(-x) &= \operatorname{sen}^3(-x)\cos(-x) + \operatorname{sen}(-x)\cos(-x)\\ &= -\operatorname{sen}^3 x \cos x - \operatorname{sen} x \cos x = -f(x).\end{aligned}$$

De tal modo, f es una función impar, y debido a que f es simétrica respecto al origen en $[-\pi/2, \pi/2]$, es posible aplicar el teorema 4.16 para concluir que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x)\,dx = 0.$$



Como f es una función impar,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx = 0$$

Figura 4.41

NOTA De acuerdo con la figura 4.41 puede verse que las dos regiones a cualquier lado del eje tienen la misma área. Sin embargo, como una se encuentra por debajo del eje x y otra está por encima del mismo, la integración produce un efecto de cancelación. (Se verá más al respecto en la sección 7.1.)

4.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, completar la tabla identificando u y du para la integral.

	$\int f(g(x))g'(x)\,dx$	$u = g(x)$	$du = g'(x)\,dx$
1.	$\int (8x^2+1)^2(16x)\,dx$		
2.	$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$		
3.	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$		
4.	$\int \sec 2x \tan 2x\,dx$		
5.	$\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx$		
6.	$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$		

En los ejercicios 7 a 10, determinar qué se necesita para usar sustitución para calcular la integral. (No calcular la integral.)

7. $\int \sqrt{x}(6-x)\,dx$

8. $\int x\sqrt{x+4}\,dx$

9. $\int x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

10. $\int x\cos x^2\,dx$

En los ejercicios 11 a 38, encontrar la integral indefinida y verificar el resultado por derivación.

11. $\int (1+6x)^4(6)\,dx$

12. $\int (x^2-9)^3(2x)\,dx$

13. $\int \sqrt{25-x^2}\,(-2x)\,dx$

14. $\int \sqrt[3]{3-4x^2}(-8x)\,dx$

15. $\int x^3(x^4+3)^2\,dx$

16. $\int x^2(x^3+5)^4\,dx$

17. $\int x^2(x^3-1)^4\,dx$

18. $\int x(5x^2+4)^3\,dx$

19. $\int t\sqrt{t^2+2}\,dt$

20. $\int t^3\sqrt{t^4+5}\,dt$

21. $\int 5x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$

22. $\int u^2\sqrt{u^3+2}\,du$

23. $\int \frac{x}{(1-x^2)^3}\,dx$

24. $\int \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,dx$

25. $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$

26. $\int \frac{x^2}{(16-x^3)^2}\,dx$

27. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

28. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$

29. $\int \left(1+\frac{1}{t}\right)^3\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$

30 $\int \left[x^2+\frac{1}{(3x)^2}\right]dx$

31. $\int \frac{1}{\sqrt{2x}}\,dx$

32. $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

33. $\int \frac{x^2+5x-8}{\sqrt{x}}\,dx$

34. $\int \frac{t-9t^2}{\sqrt{t}}\,dt$

35. $\int t^2\left(t-\frac{8}{t}\right)dt$

36. $\int \left(\frac{t^3}{3}+\frac{1}{4t^2}\right)dt$

37. $\int (9-y)\sqrt{y}\,dy$

38. $\int 4\pi y(6+y^{3/2})\,dy$

En los ejercicios 39 a 42, resolver la ecuación diferencial.

39. $\frac{dy}{dx} = 4x + \frac{4x}{\sqrt{16-x^2}}$

40. $\frac{dy}{dx} = \frac{10x^2}{\sqrt{1+x^3}}$

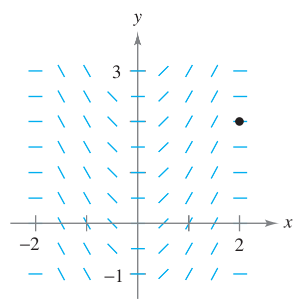
41. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}$

42. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+1}}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 43 a 46, se indican una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. Un *campo de pendientes* consiste en segmentos de recta con pendientes dadas por la ecuación diferencial. Estos segmentos de recta proporcionan una perspectiva visual de las direcciones de las soluciones de la ecuación diferencial. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto dado. *b*) Utilizar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representar la solución. Comparar el resultado con los dibujos del apartado *a*).**

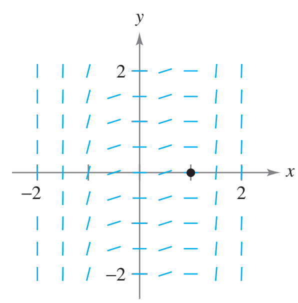
43. $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{4-x^2}$

$(2, 2)$



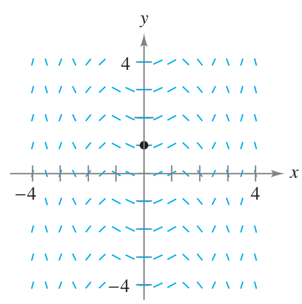
44. $\frac{dy}{dx} = x^2(x^3-1)^2$

$(1, 0)$



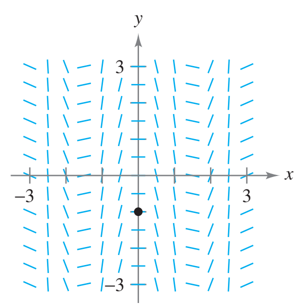
45. $\frac{dy}{dx} = x\cos x^2$

$(0, 1)$



46. $\frac{dy}{dx} = -2\sec(2x)\tan(2x)$

$(0, -1)$



En los ejercicios 47 a 60, encontrar la integral indefinida.

47. $\int \pi \operatorname{sen} \pi x \, dx$

48. $\int 4x^3 \operatorname{sen} x^4 \, dx$

49. $\int \operatorname{sen} 4x \, dx$

50. $\int \cos 8x \, dx$

51. $\int \frac{1}{\theta^2} \cos \frac{1}{\theta} \, d\theta$

52. $\int x \operatorname{sen} x^2 \, dx$

53. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x \, dx$

54. $\int \sec(1 - x) \tan(1 - x) \, dx$

55. $\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$

56. $\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x \, dx$

57. $\int \frac{\csc^2 x}{\cot^3 x} \, dx$

58. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \, dx$

59. $\int \cot^2 x \, dx$

60. $\int \csc^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

En los ejercicios 61 a 66, encontrar una ecuación para la función *f* que tiene la derivada dada y cuya gráfica pasa por el punto indicado.

	Derivada	*Punto*
61.	$f'(x) = -\operatorname{sen} \frac{x}{2}$	$(0, 6)$
62.	$f'(x) = \pi \sec \pi x \tan \pi x$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
63.	$f'(x) = 2 \operatorname{sen} 4x$	$\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right)$
64.	$f'(x) = \sec^2(2x)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$
65.	$f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2$	$(2, 10)$
66.	$f'(x) = -2x\sqrt{8 - x^2}$	$(2, 7)$

En los ejercicios 67 a 74, encontrar la integral indefinida mediante el método que se muestra en el ejemplo 5.

67. $\int x\sqrt{x + 6} \, dx$

68. $\int x\sqrt{4x + 1} \, dx$

69. $\int x^2\sqrt{1 - x} \, dx$

70. $\int (x + 1)\sqrt{2 - x} \, dx$

71. $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2x - 1}} \, dx$

72. $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 4}} \, dx$

73. $\int \frac{-x}{(x + 1) - \sqrt{x + 1}} \, dx$

74. $\int t \sqrt[3]{t + 10} \, dt$

En los ejercicios 75 a 86, calcular la integral definida. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

75. $\int_{-1}^{1} x(x^2 + 1)^3 \, dx$

76. $\int_{-2}^{4} x^2(x^3 + 8)^2 \, dx$

77. $\int_{1}^{2} 2x^2\sqrt{x^3 + 1} \, dx$

78. $\int_{0}^{1} x\sqrt{1 - x^2} \, dx$

79. $\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} \, dx$

80. $\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{1 + 2x^2}} \, dx$

81. $\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}\left(1 + \sqrt{x}\right)^2} \, dx$

82. $\int_{0}^{2} x \sqrt[3]{4 + x^2} \, dx$

83. $\int_{1}^{2} (x - 1)\sqrt{2 - x} \, dx$

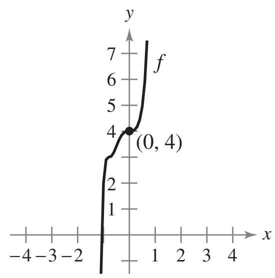
84. $\int_{1}^{5} \frac{x}{\sqrt{2x - 1}} \, dx$

85. $\int_{0}^{\pi/2} \cos\left(\frac{2x}{3}\right) dx$

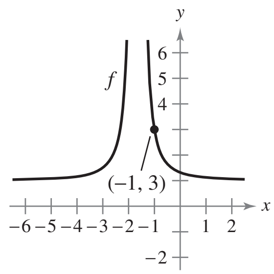
86. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} (x + \cos x) \, dx$

Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 87 a 90, se muestra la gráfica de una función *f*. Emplear la ecuación diferencial y el punto dado para determinar una ecuación de la función.**

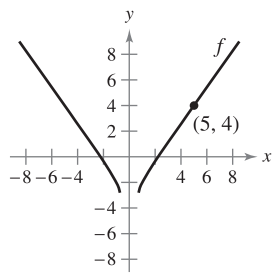
87. $\frac{dy}{dx} = 18x^2(2x^3 + 1)^2$



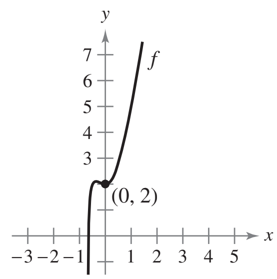
88. $\frac{dy}{dx} = \frac{-48}{(3x + 5)^3}$



89. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - 1}}$

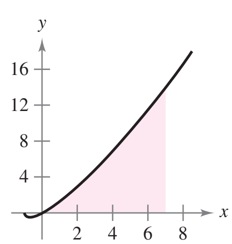


90. $\frac{dy}{dx} = 4x + \frac{9x^2}{(3x^3 + 1)^{(3/2)}}$

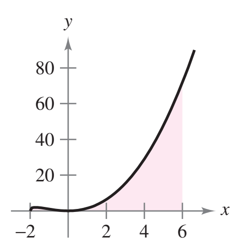


En los ejercicios 91 a 96, encontrar el área de la región. Emplear una herramienta de graficación para verificar el resultado.

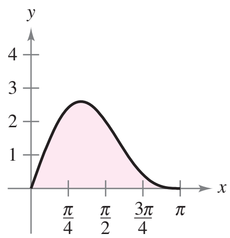
91. $\int_{0}^{7} x \sqrt[3]{x + 1} \, dx$



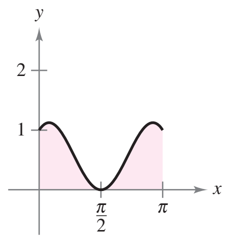
92. $\int_{-2}^{6} x^2 \sqrt[3]{x + 2} \, dx$



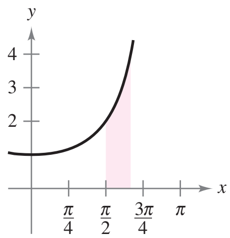
93. $y = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$



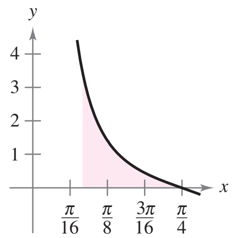
94. $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$



95. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$



96. $\displaystyle\int_{\pi/12}^{\pi/4} \csc 2x \cot 2x \, dx$



En los ejercicios 97 a 102, utilizar una herramienta de graficación para evaluar la integral. Hacer la gráfica de la región cuya área está dada por la integral definida.

97. $\displaystyle\int_0^6 \frac{x}{\sqrt{4x+1}} \, dx$

98. $\displaystyle\int_0^2 x^3\sqrt{2x+3} \, dx$

99. $\displaystyle\int_3^7 x\sqrt{x-3} \, dx$

100. $\displaystyle\int_1^5 x^2\sqrt{x-1} \, dx$

101. $\displaystyle\int_1^4 \left(\theta + \operatorname{sen}\frac{\theta}{4}\right) d\theta$

102. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos 3x \, dx$

En los ejercicios 103 a 106, calcular la integral utilizando las propiedades de las funciones pares e impares como una ayuda.

103. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2(x^2+1) \, dx$

104. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x(x^2+1)^3 \, dx$

105. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx$

106. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x \, dx$

107. Usar $\int_0^4 x^2 \, dx = \frac{64}{3}$ para calcular cada integral indefinida sin usar el teorema fundamental del cálculo.

a) $\displaystyle\int_{-4}^{0} x^2 \, dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-4}^{4} x^2 \, dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{4} -x^2 \, dx$ *d)* $\displaystyle\int_{-4}^{0} 3x^2 \, dx$

108. Emplear la simetría de las gráficas de las funciones seno y coseno como ayuda para el cálculo de cada integral definida.

a) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{sen} x \, dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x \, dx$

c) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$ *d)* $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x \, dx$

En los ejercicios 109 y 110, escribir la integral como la suma de la integral de una función impar y la integral de una función par. Utilizar esta simplificación para calcular la integral.

109. $\displaystyle\int_{-3}^{3} (x^3 + 4x^2 - 3x - 6) \, dx$

110. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen} 4x + \cos 4x) \, dx$

Desarrollo de conceptos

111. Describir por qué

$$\int x(5-x^2)^3 \, dx \neq \int u^3 \, du$$

donde $u = 5 - x^2$.

112. Sin integrar, explicar por qué

$$\int_{-2}^{2} x(x^2+1)^2 \, dx = 0.$$

113. Si f es continua y $\displaystyle\int_0^8 f(x) \, dx = 32$, encontrar $\displaystyle\int_0^4 f(2x) \, dx$.

Para discusión

114. ***Escribir*** Encontrar la integral indefinida en dos formas. Explicar alguna diferencia en las formas de la respuesta.

a) $\displaystyle\int (2x-1)^2 \, dx$ *b)* $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$

c) $\displaystyle\int \tan x \sec^2 x \, dx$

115. ***Flujo de efectivo*** La tasa de desembolso de dQ/dt de una donación federal de 2 millones de dólares es proporcional al cuadrado de $100 - t$. El tiempo t se mide en días $(0 \le t \le 100)$ y Q es la cantidad que queda para ser desembolsada. Determinar la cantidad que queda para desembolsarse después de 50 días. Suponer que todo el dinero se gastará en 100 días.

116. ***Depreciación*** La tasa de depreciación dV/dt de una máquina es inversamente proporcional al cuadrado de $t + 1$, donde V es el valor de la máquina t años después de que se compró. El valor inicial de la máquina fue de 500 000 dólares, y su valor decreció 100 000 dólares en el primer año. Estimar su valor después de 4 años.

117. ***Precipitación*** La precipitación mensual normal en el aeropuerto de Seattle-Tacoma puede aproximarse mediante el modelo

$$R = 2.876 + 2.202 \operatorname{sen}(0.576t + 0.847)$$

donde R se mide en pulgadas y t es el tiempo en meses, con $t = 0$ correspondiente al 1 de enero. (*Fuente: U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration*)

a) Determinar los extremos de la función en el periodo de un año.

b) Emplear integración para aproximar la precipitación anual normal. (*Sugerencia:* Integrar sobre el intervalo [0, 12].)

c) Aproximar el promedio de la precipitación mensual durante los meses de octubre, noviembre y diciembre.

118. ***Ventas*** Las ventas S (en miles de unidades) de un producto de temporada están dadas por el modelo

$$S = 74.50 + 43.75 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{6}$$

donde t es el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiente a enero. Determinar las ventas medias para cada periodo.

a) El primer trimestre $(0 \leq t \leq 3)$
b) El segundo trimestre $(3 \leq t \leq 6)$
c) El año completo $(0 \leq t \leq 12)$

119. ***Suministro de agua*** Un modelo para la tasa de flujo de agua en una estación de bombeo en un día determinado es

$$R(t) = 53 + 7 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + 3.6\right) + 9 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + 8.9\right)$$

donde $0 \leq t \leq 24$. R es la tasa de flujo en miles de galones por hora y t es el tiempo en horas.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función de la tasa de flujo y aproximar la tasa de flujo máximo en la estación de bombeo.
b) Aproximar el volumen total del agua bombeada en un día.

120. ***Electricidad*** La intensidad de corriente alterna en un circuito eléctrico es

$$I = 2 \operatorname{sen}(60\pi t) + \cos(120\pi t)$$

donde I se mide en amperes y t se mide en segundos. Determinar la intensidad media para cada intervalo de tiempo.

a) $0 \leq t \leq \frac{1}{60}$
b) $0 \leq t \leq \frac{1}{240}$
c) $0 \leq t \leq \frac{1}{30}$

Probabilidad **En los ejercicios 121 y 122, la función**

$$f(x) = kx^n(1 - x)^m, \quad 0 \leq x \leq 1$$

donde $n > 0$, $m > 0$ y k es una constante, puede utilizarse para representar diversas distribuciones de probabilidad. Si k se elige de manera tal que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1$$

la probabilidad de que x caerá entre a y b $(0 \leq a \leq b \leq 1)$ es

$$P_{a,b} = \int_a^b f(x)\, dx.$$

121. La probabilidad de que una persona recuerde entre $100a\%$ y $100b\%$ del material aprendido en un experimento es

$$P_{a,\,b} = \int_a^b \frac{15}{4} x\sqrt{1 - x}\, dx$$

donde x representa el porcentaje recordado. (Ver la figura.)

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo elegido al azar recuerde entre 50 y 75% del material?
b) ¿Cuál es el porcentaje medio de lo que se recuerda? Esto es, ¿para qué valor de b es cierto que la probabilidad de recordar de 0 a b es 0.5?

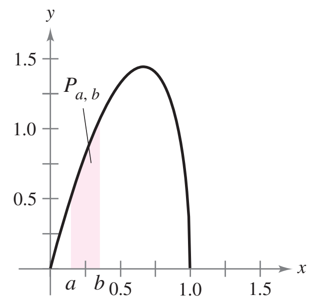


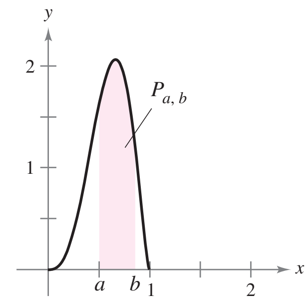
Figura para 121

122. La probabilidad de que se tomen muestras de un mineral de una región que contiene entre $100a\%$ y $100b\%$ de hierro es

$$P_{a,\,b} = \int_a^b \frac{1\,155}{32} x^3(1 - x)^{3/2}\, dx$$

donde x representa el porcentaje de hierro. (Ver la figura.) ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contendrá entre

a) 0 y 25% de hierro?
b) 50 y 100% de hierro?



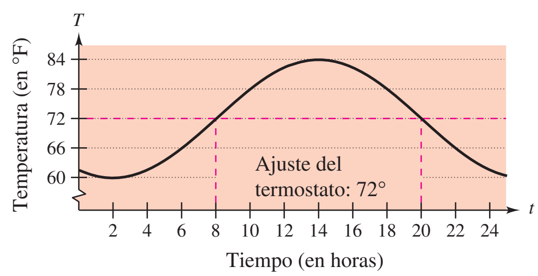
123. ***Temperatura*** La temperatura en grados Fahrenheit en una casa es

$$T = 72 + 12 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi(t - 8)}{12}\right]$$

donde t es el tiempo en horas, con $t = 0$ representando la media noche. El costo horario de refrigeración de una casa es de 0.10 dólares por grado.

a) Encontrar el costo C de refrigeración de la casa si el termostato se ajusta en 72°F calculando la integral

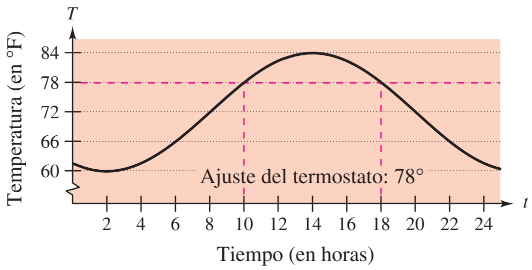
$$C = 0.1\int_8^{20}\left[72 + 12 \operatorname{sen}\frac{\pi(t - 8)}{12} - 72\right] dt. \text{ (Ver la figura.)}$$



b) Encontrar el ahorro al reajustar el termostato en 78 °F calculando la integral

$$C = 0.1\int_{10}^{18}\left[72 + 12\ \text{sen}\ \frac{\pi(t-8)}{12} - 78\right]dt.$$

(Ver la figura.)



124. ***Manufactura*** Un fabricante de fertilizantes encuentra que las ventas nacionales de fertilizantes siguen el patrón estacional

$$F = 100\,000\left[1 + \text{sen}\ \frac{2\pi(t-60)}{365}\right]$$

donde F se mide en libras y t representa el tiempo en días, con $t = 1$ correspondiente al 1 de enero. El fabricante desea establecer un programa para producir una cantidad uniforme de fertilizante cada día. ¿Cuál debe ser esta cantidad?

125. ***Análisis gráfico*** Considerar las funciones f y g, donde

$$f(x) = 6\ \text{sen}\ x\cos^2 x \quad \text{y} \quad g(t) = \int_0^t f(x)\,dx.$$

a) Emplear una herramienta de graficación para representar f y g en la misma ventana de observación.

b) Explicar por qué g es no negativa.

c) Identificar los puntos sobre la gráfica de g que corresponden a los extremos de f.

d) ¿Cada uno de los ceros de f corresponden a un extremo de g? Explicar.

e) Considerar la función

$$h(t) = \int_{\pi/2}^{t} f(x)\,dx.$$

Utilizar una herramienta de graficación para representar h. ¿Cuál es la relación entre g y h? Verificar la suposición.

126. Determinar $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\text{sen}(i\pi/n)}{n}$ evaluando una integral definida apropiada sobre el intervalo [0, 1].

127. *a*) Demostrar que $\int_0^1 x^2(1-x)^5\,dx = \int_0^1 x^5(1-x)^2\,dx$.

b) Demostrar que $\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$.

128. *a*) Demostrar que $\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx$.

b) Demostrar que $\int_0^{\pi/2}\text{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$, donde n es un entero positivo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 129 a 134, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

129. $\int(2x+1)^2\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)^3 + C$

130. $\int x(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right) + C$

131. $\int_{-10}^{10}(ax^3 + bx^2 + cx + d)\,dx = 2\int_0^{10}(bx^2 + d)\,dx$

132. $\int_a^b \text{sen}\ x\,dx = \int_a^{b+2\pi}\text{sen}\ x\,dx$

133. $4\int \text{sen}\ x\cos x\,dx = -\cos 2x + C$

134. $\int \text{sen}^2 2x\cos 2x\,dx = \frac{1}{3}\text{sen}^3 2x + C$

135. Suponer que f es continua en todos lados y que c es una constante. Demostrar que

$$\int_{ca}^{cb} f(x)\,dx = c\int_a^b f(cx)\,dx.$$

136. *a*) Verificar que $\text{sen}\ u - u\cos u + C = \int u\ \text{sen}\ u\,du$.

b) Utilizar el apartado *a*) para demostrar que $\int_0^{\pi^2}\text{sen}\sqrt{x}\,dx = 2\pi$.

137. Completar la prueba del teorema 4.16.

138. Demostrar que si f es continua en la recta numérica real completa, entonces

$$\int_a^b f(x+h)\,dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x)\,dx.$$

Preparación del examen Putnam

139. Si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales que satisfacen

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

demostrar que la ecuación $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ tiene al menos un cero real.

140. Encontrar todas las funciones continuas positivas $f(x)$, para $0 \le x \le 1$, tales que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^1 f(x)x\,dx = \alpha$$

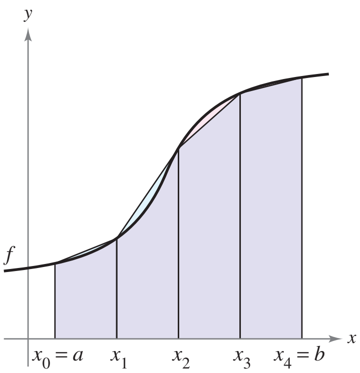
$$\int_0^1 f(x)x^2\,dx = \alpha^2$$

donde α es un número real.

4.6 Integración numérica

- **Aproximar una integral definida utilizando la regla de los trapecios.**
- **Aproximar una integral definida utilizando la regla de Simpson.**
- **Analizar los errores de aproximación en la regla de los trapecios y en la regla de Simpson.**

La regla de los trapecios



El área de la región puede aproximarse utilizando cuatro trapecios
Figura 4.42

Algunas funciones elementales simplemente no tienen antiderivadas o primitivas que sean funciones elementales. Por ejemplo, no hay función elemental que tenga alguna de las siguientes funciones como su derivada.

$$\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}, \qquad \sqrt{x}\cos x, \qquad \frac{\cos x}{x}, \qquad \sqrt{1-x^3}, \qquad \operatorname{sen} x^2$$

Si se ha de calcular una integral definida cuyo integrando no admite primitiva (antiderivada), el teorema fundamental del cálculo no es de utilidad y hay que recurrir a una técnica de aproximación. Dos de estas técnicas se describen en esta sección.

Una forma de aproximar una integral definida consiste en utilizar n trapecios, como se muestra en la figura 4.42. En la formulación de este método, se supone que f es continua y positiva en el intervalo $[a, b]$. De tal modo, la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

representa el área de la región delimitada por la gráfica de f y el eje x, desde $x = a$ hasta $x = b$. Primero, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = (b-a)/n$, de modo tal que

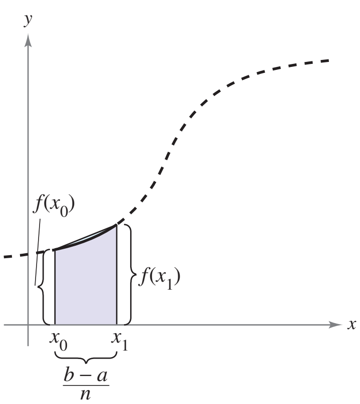
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_n = b.$$

Luego se forma un trapecio para cada subintervalo (ver la figura 4.43). El área del i-ésimo trapecio es

$$\text{Área del } i\text{-ésimo trapecio} = \left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Esto implica que la suma de las áreas de los n trapecios es

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]\\
&= \left(\frac{b-a}{2n}\right)\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \cdot \cdot \cdot + f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]\\
&= \left(\frac{b-a}{2n}\right)\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdot \cdot \cdot + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].
\end{aligned}$$



El área del primer trapecio es

$$\left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Figura 4.43

Haciendo $\Delta x = (b-a)/n$, puede tomarse el límite cuando $n \to \infty$ para obtener

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{2n}\right)&\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdot \cdot \cdot + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{[f(a) - f(b)]\,\Delta x}{2} + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right]\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{[f(a) - f(b)](b-a)}{2n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\\
&= 0 + \int_a^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

El resultado se resume en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.17 LA REGLA DE LOS TRAPECIOS

Sea f continua en $[a, b]$. La regla de los trapecios para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

Además, como $n \to \infty$, el lado derecho se aproxima a $\int_a^b f(x)\,dx$.

NOTA Observar que los coeficientes en la regla de los trapecios siguen el siguiente patrón.

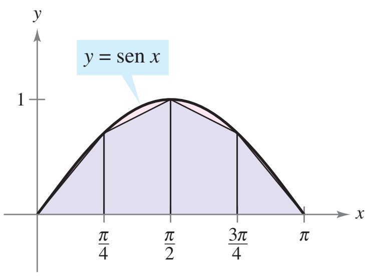
1 2 2 2 . . . 2 2 1

EJEMPLO 1 Aproximación con la regla de los trapecios

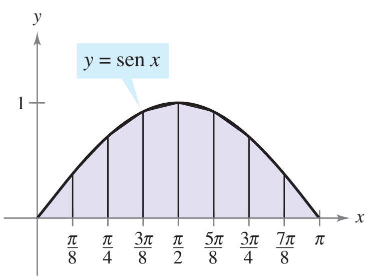
Utilizar la regla de los trapecios para aproximar

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx.$$

Comparar los resultados para $n = 4$ y $n = 8$, como se muestra en la figura 4.44.



Cuatro subintervalos



Ocho subintervalos

Aproximaciones trapezoidales
Figura 4.44

Solución Cuando $n = 4$, $\Delta x = \pi/4$, y se obtiene

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\pi}{8}\left(\operatorname{sen} 0 + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(0 + \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 0\right) = \frac{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)}{4} \approx 1.896.$$

Cuando $n = 8$, $\Delta x = \pi/8$, y se obtiene

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\pi}{16}\left(\operatorname{sen} 0 + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right.$$

$$\left. + 2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{7\pi}{8} + \operatorname{sen}\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{16}\left(2 + 2\sqrt{2} + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + 4\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}\right) \approx 1.974.$$

Para esta integral particular, se podría haber encontrado una antiderivada y determinado que el área exacta de la región es 2.

TECNOLOGÍA La mayoría de las herramientas de graficación y de los sistemas algebraicos computarizados cuenta con programas incorporados que es posible utilizar para aproximar el valor de una integral definida. Utilizar un programa de este tipo para aproximar la integral del ejemplo 1. ¿Qué tan precisa es su aproximación?

Cuando se usa uno de estos programas, debe tenerse cuidado con sus limitaciones. Muchas veces, no se le da una indicación del grado de exactitud de la aproximación. Otras, se le puede dar una aproximación por completo equivocada. Por ejemplo, utilizar un programa de integración numérica incorporada para calcular

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

La herramienta de graficación producirá un mensaje de error, ¿no es así?

Es interesante comparar la regla de los trapecios con la regla del punto medio que se dio en la sección 4.2 (ejercicios 73 a 76). En la regla de los trapecios, se promedian los valores de la función en los puntos extremos de los subintervalos, pero la regla del punto medio toma los valores de la función de los puntos medios de los subintervalos.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x \qquad \text{Regla del punto medio.}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}\right)\Delta x \qquad \text{Regla de los trapecios.}$$

NOTA Hay dos puntos importantes que deben señalarse respecto a la regla de los trapecios (o a la regla del punto medio). Primero, la aproximación tiende a volverse más exacta a medida que n aumenta. Así, en el ejemplo 1, si $n = 16$, la regla de los trapecios produce una aproximación de 1.994. Segundo, aunque podría utilizarse el teorema fundamental para calcular la integral en el ejemplo 1, este teorema no puede utilizarse para calcular una integral tan simple como $\int_0^\pi \operatorname{sen} x^2 dx$ debido a que $\operatorname{sen} x^2$ no tiene una antiderivada elemental. Sin embargo, es posible aplicar con facilidad la regla de los trapecios a esta integral. ■

Regla de Simpson

Una manera de ver la aproximación que permite la regla de trapecios de una integral definida consiste en decir que en cada subintervalo se aproxima f por medio de un polinomio de *primer* grado. En la regla de Simpson, que recibe ese nombre en honor del matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761), se lleva este procedimiento un paso adelante y aproxima f mediante polinomios de *segundo* grado.

Antes de presentar la regla de Simpson, enunciamos un teorema sobre las integrales de polinomios de grado 2 (o menor).

TEOREMA 4.18 INTEGRAL DE $p(x) = Ax^2 + Bx + C$

Si $p(x) = Ax^2 + Bx + C$, entonces

$$\int_a^b p(x)\,dx = \left(\frac{b-a}{6}\right)\left[p(a) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) + p(b)\right].$$

DEMOSTRACIÓN

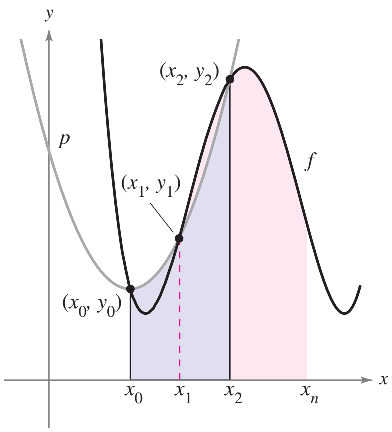
$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)\,dx &= \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx \\ &= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_a^b \\ &= \frac{A(b^3 - a^3)}{3} + \frac{B(b^2 - a^2)}{2} + C(b - a) \\ &= \left(\frac{b-a}{6}\right)[2A(a^2 + ab + b^2) + 3B(b + a) + 6C]\end{aligned}$$

Mediante la expansión y la agrupación de términos, la expresión dentro de los corchetes se convierte en

$$\underbrace{(Aa^2 + Ba + C)}_{p(a)} + \underbrace{4\left[A\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + B\left(\frac{b+a}{2}\right) + C\right]}_{4p\left(\frac{a+b}{2}\right)} + \underbrace{(Ab^2 + Bb + C)}_{p(b)}$$

y puede escribirse

$$\int_a^b p(x)\,dx = \left(\frac{b-a}{6}\right)\left[p(a) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) + p(b)\right].$$



$$\int_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx$$

Figura 4.45

Para formular la regla de Simpson con el fin de aproximar una integral definida, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Esta vez, sin embargo, se requiere que n sea par, y los subintervalos se agrupan en pares tales que

$$a = \underbrace{x_0 < x_1 < x_2}_{[x_0,\, x_2]} < \underbrace{x_3 < x_4}_{[x_2,\, x_4]} < \cdots < \underbrace{x_{n-2} < x_{n-1} < x_n}_{[x_{n-2},\, x_n]} = b.$$

En cada subintervalo (doble) $[x_{i-2}, x_i]$ puede aproximarse f por medio de un polinomio p de grado menor que o igual a 2. (Ver el ejercicio 56.) Por ejemplo, en el subintervalo $[x_0, x_2]$, elegir el polinomio de menor grado que pasa a través de los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) como se muestra en la figura 4.45. Ahora, utilizando p como una aproximación de f en este subintervalo, se tiene, por el teorema 4.18,

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx &= \frac{x_2 - x_0}{6}\left[p(x_0) + 4p\left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right) + p(x_2)\right] \\
&= \frac{2[(b-a)/n]}{6}\left[p(x_0) + 4p(x_1) + p(x_2)\right] \\
&= \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right].
\end{aligned}$$

Repitiendo este procedimiento en el intervalo completo $[a, b]$ se produce el siguiente teorema.

TEOREMA 4.19 LA REGLA DE SIMPSON

Sea f continua en $[a, b]$ y sea n un entero par. La regla de Simpson para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ es

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

Además, cuando $n \to \infty$, el lado derecho tiende a $\int_a^b f(x)\,dx$.

NOTA Observar que los coeficientes en la regla de Simpson tienen el siguiente patrón.

1 4 2 4 2 4 . . . 4 2 4 1

En el ejemplo 1, la regla de los trapecios se utilizó para estimar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$. En el siguiente ejemplo, se aplica la regla de Simpson a la misma integral.

NOTA En el ejemplo 1, la regla de los trapecios con $n = 8$ aproxima $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ como 1.974. En el ejemplo 2, la regla de Simpson con $n = 8$ produjo una aproximación de 2.0003. La antiderivada o primitiva produciría el valor verdadero de 2.

EJEMPLO 2 Aproximación con la regla de Simpson

Emplear la regla de Simpson para aproximar

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx.$$

Comparar los resultados para $n = 4$ y $n = 8$.

Solución Cuando $n = 4$, se tiene

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\pi}{12}\left(\operatorname{sen} 0 + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\pi\right) \approx 2.005.$$

Cuando $n = 8$, se tiene $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx 2.0003.$

Análisis de errores

Al usar una técnica de aproximación, es importante conocer la precisión del resultado. El siguiente teorema, que se enuncia sin demostración, proporciona las fórmulas para estimar los errores que implican en el uso de la regla de Simpson y de la regla de los trapecios. En general, cuando se realiza una aproximación se piensa en el error E como la diferencia entre $\int_a^b f(x)\,dx$ y la aproximación.

TEOREMA 4.20 ERRORES EN LA REGLA DE LOS TRAPECIOS Y EN LA DE SIMPSON

Si f tiene una segunda derivada continua en $[a, b]$, entonces el error E al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ por medio de la regla de los trapecios es

$$|E| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\left[\text{máx}\,|f''(x)|\right], \quad a \le x \le b. \qquad \text{Regla de los trapecios.}$$

Además, si tiene cuarta derivada continua en $[a, b]$, entonces el error E al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la regla de Simpson es

$$|E| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4}\left[\text{máx}\,|f^{(4)}(x)|\right], \quad a \le x \le b. \qquad \text{Regla de Simpson.}$$

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un sistema algebraico por computadora, utilizarlo para calcular la integral definida del ejemplo 3. Obtener un valor de

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] \approx 1.14779.$$

("ln" representa la función logarítmica natural, la cual se estudiará en la sección 5.1.)

El teorema 4.20 establece que los errores generados por la regla de los trapecios y la regla de Simpson tienen cotas superiores dependientes de los valores extremos de $f''(x)$ y $f^{(4)}(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Además, estos errores pueden hacerse arbitrariamente pequeños *incrementando* n, siempre que f'' y $f^{(4)}$ sean continuas y, en consecuencia, acotadas en $[a, b]$.

EJEMPLO 3 El error aproximado en la regla de los trapecios

Determinar un valor de n tal que la regla de los trapecios se aproximará al valor de $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ con un error menor que 0.01.

Solución Primero se hace $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ y se halla la segunda derivada de f.

$$f'(x) = x(1+x^2)^{-1/2} \qquad \text{y} \qquad f''(x) = (1+x^2)^{-3/2}$$

El valor máximo de $|f''(x)|$ en el intervalo $[0, 1]$ es $|f''(0)| = 1$. De tal modo, por el teorema 4.20, puede escribirse

$$|E| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(0)| = \frac{1}{12n^2}(1) = \frac{1}{12n^2}.$$

Para obtener un error E menor que 0.01, debe elegirse n tal que $1/(12n^2) \le 1/100$.

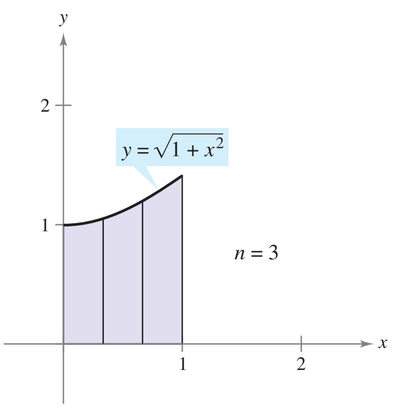
$$100 \le 12n^2 \quad \Longrightarrow \quad n \ge \sqrt{\tfrac{100}{12}} \approx 2.89$$

Así, basta tomar $n = 3$ (debido a que n debe ser mayor o igual a 2.89) y aplicar la regla de los trapecios, como se ilustra en la figura 4.46, para obtener

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{6}\left[\sqrt{1+0^2} + 2\sqrt{1+\left(\tfrac{1}{3}\right)^2} + 2\sqrt{1+\left(\tfrac{2}{3}\right)^2} + \sqrt{1+1^2}\right]$$
$$\approx 1.154.$$

De tal modo que, al sumar y restar el error de esta estimación se sabe que

$$1.144 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \le 1.164.$$



$$1.144 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \le 1.164$$

Figura 4.46

4.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, usar la regla de los trapecios y la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral definida para un valor dado de n. Redondear la respuesta hasta cuatro decimales y comparar los resultados con el valor exacto de la integral definida.

1. $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx,\quad n = 4$

2. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^2}{4} + 1\right) dx,\quad n = 4$

3. $\displaystyle\int_0^2 x^3\,dx,\quad n = 4$

4. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{x^2}\,dx,\quad n = 4$

5. $\displaystyle\int_1^3 x^3\,dx,\quad n = 6$

6. $\displaystyle\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx,\quad n = 8$

7. $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}\,dx,\quad n = 8$

8. $\displaystyle\int_1^4 (4 - x^2)\,dx,\quad n = 6$

9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(x + 2)^2}\,dx,\quad n = 4$

10. $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{x^2 + 1}\,dx,\quad n = 4$

En los ejercicios 11 a 20, aproximar la integral definida utilizando la regla de los trapecios y la regla de Simpson con $n = 4$. Comparar estos resultados con la aproximación de la integral utilizando una herramienta de graficación.

11. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 + x^3}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 + x^3}}\,dx$

13. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\sqrt{1 - x}\,dx$

14. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{x}\,\operatorname{sen} x\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \operatorname{sen} x^2\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \tan x^2\,dx$

17. $\displaystyle\int_3^{3.1} \cos x^2\,dx$

18. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

19. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x \tan x\,dx$

20. $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx,\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Desarrollo de conceptos

21. La regla de los trapecios y la regla de Simpson producen aproximaciones de una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ basadas en aproximaciones polinomiales de f. ¿Qué grado de polinomio se usa para cada una?

22. Describir la dimensión del error cuando la regla de los trapecios se utiliza para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando $f(x)$ es una función lineal. Explicar el resultado con una gráfica.

En los ejercicios 23 a 28, utilizar las fórmulas de error del teorema 4.20 para estimar el error en la aproximación de la integral, con $n = 4$, utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.

23. $\displaystyle\int_1^3 2x^3\,dx$

24. $\displaystyle\int_3^5 (5x + 2)\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x + 1}\,dx$

26. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{(x - 1)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)\,dx$

En los ejercicios 29 a 34, utilizar las fórmulas del error en el teorema 4.20 con el fin de encontrar n tal que el error en la aproximación de la integral definida sea menor que 0.00001 utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.

29. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x}\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x + 2}\,dx$

32. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^1 \cos(\pi x)\,dx$

34. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

CAS **En los ejercicios 35 a 38, emplear un sistema algebraico por computadora y las fórmulas del error para determinar n de manera tal que el error en la aproximación de la integral definida sea menor que 0.00001 utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.**

35. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 + x}\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^2 (x + 1)^{2/3}\,dx$

37. $\displaystyle\int_0^1 \tan x^2\,dx$

38. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$

39. Aproximar el área de la región sombreada utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson con $n = 4$.

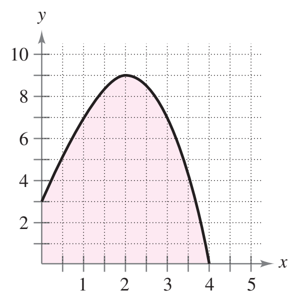


Figura para 39

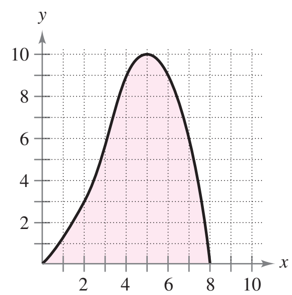


Figura para 40

40. Aproximar el área de la región sombreada utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson con $n = 8$.

41. ***Programación*** Escribir un programa para una herramienta de graficación con el fin de aproximar una integral definida utilizando la regla de los trapecios y la regla de Simpson. Empezar con el programa escrito en la sección 4.3, ejercicios 61 a 64, y advertir que la regla de los trapecios puede escribirse como $T(n) = \frac{1}{2}[I(n) + D(n)]$ y la regla de Simpson, como

$$S(n) = \tfrac{1}{3}[T(n/2) + 2M(n/2)].$$

[Recordar que $I(n)$, $M(n)$ y $D(n)$ representan las sumas de Riemann utilizando los puntos terminales del lado izquierdo, los puntos medios y los puntos terminales del lado derecho de subintervalos con igual ancho.]

Programación **En los ejercicios 42 a 44, emplear el programa en el ejercicio 41 para aproximar la integral definida y completar la tabla.**

n	$I(n)$	$M(n)$	$D(n)$	$T(n)$	$S(n)$
4					
8					
10					
12					
16					
20					

42. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2 + 3x^2}\, dx$ **43.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ **44.** $\displaystyle\int_0^4 \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx$

45. ***Área*** Emplear la regla de Simpson con $n = 14$ para aproximar el área de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x} \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi/2$.

Para discusión

46. Considerar una función $f(x)$ que es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $[0, 2]$ y la función $g(x)$ que es cóncava hacia abajo sobre $[0, 2]$.

a) Usando la regla trapezoidal, ¿qué integral sería sobreestimada? ¿Qué integral sería subestimada? Suponer $n = 4$. Usar gráficas para explicar su respuesta.

b) ¿Qué regla se usaría para mayor aproximación precisa de $\int_0^2 f(x)\, dx$ y $\int_0^2 g(x)\, dx$, la regla trapezoidal o la regla de Simpson? Explicar su razón.

47. ***Circunferencia*** La **integral elíptica**

$$8\sqrt{3} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \tfrac{2}{3} \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta$$

proporciona la circunferencia de una elipse. Emplear la regla de Simpson con $n = 8$ para aproximar la circunferencia.

48. ***Trabajo*** Para determinar el tamaño del motor requerido en la operación de una prensa, una compañía debe conocer la cantidad de trabajo realizado cuando la prensa mueve un objeto linealmente 5 pies. La fuerza variable para desplazar el objeto es $F(x) = 100x\sqrt{125 - x^3}$, donde F está dada en libras y x produce la posición de la unidad en pies. Emplear la regla de Simpson con $n = 12$ para aproximar el trabajo W (en pies-libras) realizado a través de un ciclo si $W = \int_0^5 F(x)\, dx$.

49. La tabla presenta varias mediciones recopiladas en un experimento para aproximar una función continua desconocida $y = f(x)$.

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y	4.32	4.36	4.58	5.79	6.14

x	1.25	1.50	1.75	2.00
y	7.25	7.64	8.08	8.14

a) Aproximar la integral $\int_0^2 f(x)\, dx$ utilizando la regla de los trapecios y la regla de Simpson.

b) Utilizar una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para los datos. Integrar el polinomio resultante en $[0, 2]$ y comparar el resultado con el apartado *a*).

Aproximación de Pi **En los ejercicios 50 y 51, utilizar la regla de Simpson con $n = 6$ para aproximar π utilizando la ecuación dada. (En la sección 5.7, se podrán calcular las integrales utilizando funciones trigonométricas inversas.)**

50. $\displaystyle\pi = \int_0^{1/2} \frac{6}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ **51.** $\displaystyle\pi = \int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}\, dx$

Área **En los ejercicios 52 y 53, utilizar la regla de los trapecios para estimar el número de metros cuadrados de tierra en un lote donde x y y se miden en metros, como se muestra en las figuras. La tierra es acotada por un río y dos caminos rectos que se juntan en ángulos rectos.**

52.

x	0	100	200	300	400	500
y	125	125	120	112	90	90

x	600	700	800	900	1 000
y	95	88	75	35	0

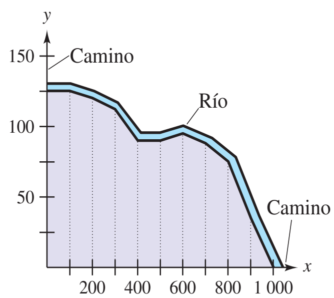


Figura para 52

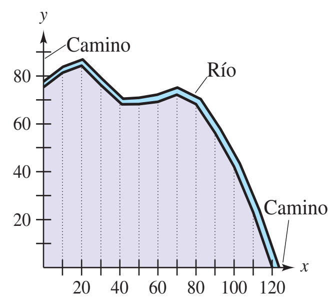


Figura para 53

53.

x	0	10	20	30	40	50	60
y	75	81	84	76	67	68	69

x	70	80	90	100	110	120
y	72	68	56	42	23	0

54. Demostrar que la regla de Simpson es exacta cuando aproxima la integral de una función polinomial cúbica, y demostrar el resultado para $\int_0^1 x^3\, dx$, $n = 2$.

CAS **55.** Usar la regla de Simpson con $n = 10$ y un sistema algebraico por computadora para aproximar t en la ecuación integral

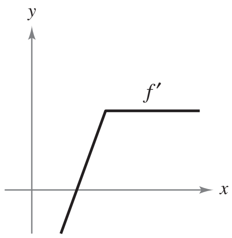
$$\int_0^t \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx = 2.$$

56. Demostrar que se puede encontrar un polinomio $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ que pasa por cualesquiera tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), donde las x_i son distintas.

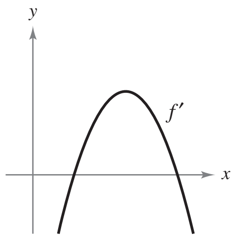
4 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica de f' para dibujar una gráfica de f.

1.



2.



En los ejercicios 3 a 8, encontrar la integral indefinida.

3. $\int (4x^2 + x + 3)\, dx$

4. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{3x}}\, dx$

5. $\int \frac{x^4 + 8}{x^3}\, dx$

6. $\int \frac{x^4 - 4x^2 + 1}{x^2}\, dx$

7. $\int (2x - 9 \operatorname{sen} x)\, dx$

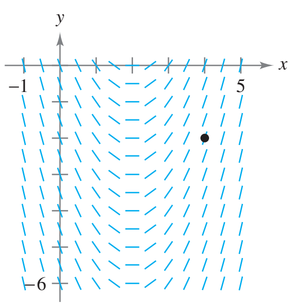
8. $\int (5 \cos x - 2 \sec^2 x)\, dx$

9. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial $f'(x) = -6x$ cuya gráfica pasa por el punto $(1, -2)$.

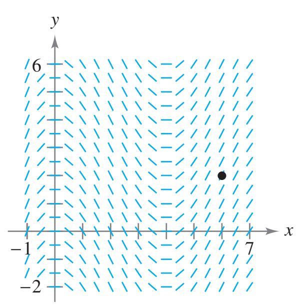
10. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial $f''(x) = 6(x - 1)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2, 1)$ y es tangente a la recta $3x - y - 5 = 0$ en ese punto.

Campos de pendientes **En los ejercicios 11 y 12 se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendiente, una de las cuales pase a través del punto indicado. *b*) Utilizar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y utilizar una herramienta de graficación para representar la solución.**

11. $\frac{dy}{dx} = 2x - 4, \quad (4, -2)$



12. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 - 2x, \quad (6, 2)$



13. ***Velocidad y aceleración*** Un avión que está despegando de una pista recorre 3 600 pies antes de elevarse. El avión parte desde el reposo, se desplaza con aceleración constante y efectúa el recorrido en 30 segundos. ¿A qué velocidad despega?

14. ***Velocidad y aceleración*** La velocidad de un automóvil que viaja en línea recta se reduce de 45 a 30 millas por hora en una distancia de 264 pies. Encontrar la distancia en la cual el automóvil puede llegar al reposo a partir de una velocidad de 30 millas por hora, suponiendo la misma desaceleración constante.

15. ***Velocidad y aceleración*** Se lanza una pelota hacia arriba verticalmente desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 96 pies por segundo.

a) ¿Cuánto tardará la pelota en alcanzar su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

b) ¿Cuándo la velocidad de la pelota es la mitad de la velocidad inicial?

c) ¿A qué altura está la pelota cuando su velocidad es la mitad de la velocidad inicial?

16. ***Modelado matemático*** La tabla muestra las velocidades (en millas por hora) de dos carros sobre una rampa de acceso a una carretera interestatal. El tiempo t está en segundos.

t	0	5	10	15	20	25	30
v_1	0	2.5	7	16	29	45	65
v_2	0	21	38	51	60	64	65

a) Reescribir las velocidades en pies por segundo.

b) Usar las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para encontrar los modelos cuadráticos para los datos en el apartado *a*).

c) Aproximar la distancia recorrida por cada carro durante los 30 segundos. Explicar la diferencia en las distancias.

En los ejercicios 17 y 18, utilizar la notación sigma para escribir la suma.

17. $\frac{1}{3(1)} + \frac{1}{3(2)} + \frac{1}{3(3)} + \cdots + \frac{1}{3(10)}$

18. $\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{1+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{2+1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$

En los ejercicios 19 a 22, utilizar las propiedades de las sumas y el teorema 4.2 para calcular las sumas.

19. $\sum_{i=1}^{20} 2i$

20. $\sum_{i=1}^{20} (4i - 1)$

21. $\sum_{i=1}^{20} (i + 1)^2$

22. $\sum_{i=1}^{12} i(i^2 - 1)$

23. Escribir en notación sigma *a*) la suma de los primeros diez enteros impares positivos, *b*) la suma de los cubos de los primeros n enteros positivos y *c*) $6 + 10 + 14 + 18 + \cdots + 42$.

24. Calcular cada suma para $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 3$ y $x_5 = 7$.

a) $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i$

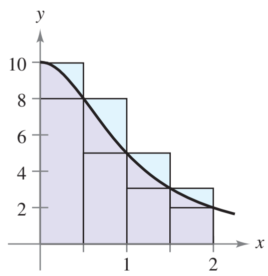
b) $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i}$

c) $\sum_{i=1}^{5} (2x_i - x_i^2)$

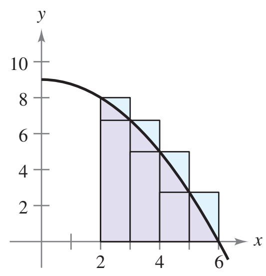
d) $\sum_{i=2}^{5} (x_i - x_{i-1})$

En los ejercicios 25 y 26, utilizar sumas superiores e inferiores para aproximar el área de la región utilizando el número indicado de subintervalos de igual ancho.

25. $y = \dfrac{10}{x^2 + 1}$



26. $y = 9 - \frac{1}{4}x^2$



En los ejercicios 27 a 30, recurrir al proceso de límite para determinar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje x sobre el intervalo dado. Dibujar la región.

27. $y = 8 - 2x, \quad [0, 3]$

28. $y = x^2 + 3, \quad [0, 2]$

29. $y = 5 - x^2, \quad [-2, 1]$

30. $y = \frac{1}{4}x^3, \quad [2, 4]$

31. Emplear el proceso de límite para encontrar el área de la región acotada por $x = 5y - y^2$, $x = 0$, $y = 2$ y $y = 5$.

32. Considerar la región acotada por $y = mx$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$.

a) Determinar la suma superior e inferior para aproximar el área de la región cuando $\Delta x = b/4$.

b) Determinar la suma superior e inferior para aproximar el área de la región cuando $\Delta x = b/n$.

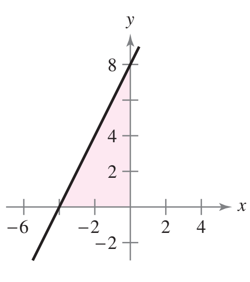
c) Encontrar el área de la región dejando que n tienda a infinito en ambas sumas en el apartado *b*). Demostrar que en cada caso se obtiene la fórmula para el área de un triángulo.

En los ejercicios 33 y 34, escribir el límite común integral definido en el intervalo $[a, b]$, donde c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo.

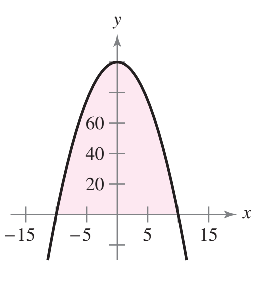
	Límite	*Intervalo*
33.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (2c_i - 3)\,\Delta x_i$	$[4, 6]$
34.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 3c_i(9 - c_i^2)\,\Delta x_i$	$[1, 3]$

En los ejercicios 35 y 36, formular una integral definida que produzca el área de la región. (No calcular la integral.)

35. $f(x) = 2x + 8$



36. $f(x) = 100 - x^2$



En los ejercicios 37 y 38, dibujar la región cuya área está dada por la integral definida. Utilizar después una fórmula geométrica para calcular la integral.

37. $\displaystyle\int_0^5 (5 - |x - 5|)\,dx$

38. $\displaystyle\int_{-6}^{6} \sqrt{36 - x^2}\,dx$

39. Dadas $\displaystyle\int_4^8 f(x)\,dx = 12$ y $\displaystyle\int_4^8 g(x)\,dx = 5$, evaluar

a) $\displaystyle\int_4^8 [f(x) + g(x)]\,dx.$

b) $\displaystyle\int_4^8 [f(x) - g(x)]\,dx.$

c) $\displaystyle\int_4^8 [2f(x) - 3g(x)]\,dx.$

d) $\displaystyle\int_4^8 7f(x)\,dx.$

40. Dadas $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = 4$ y $\displaystyle\int_3^6 f(x)\,dx = -1$, calcular

a) $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx.$

b) $\displaystyle\int_6^3 f(x)\,dx.$

c) $\displaystyle\int_4^4 f(x)\,dx.$

d) $\displaystyle\int_3^6 -10f(x)\,dx.$

En los ejercicios 41 a 48, emplear el teorema fundamental del cálculo para calcular la integral definida.

41. $\displaystyle\int_0^8 (3 + x)\,dx$

42. $\displaystyle\int_{-3}^{3} (t^2 + 1)\,dt$

43. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (4t^3 - 2t)\,dt$

44. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} (x^4 + 3x^2 - 4)\,dx$

45. $\displaystyle\int_4^9 x\sqrt{x}\,dx$

46. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$

47. $\displaystyle\int_0^{3\pi/4} \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

48. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 t\,dt$

En los ejercicios 49 a 54, dibujar la gráfica de la región cuya área está dada por la integral, y encontrar el área.

49. $\displaystyle\int_2^4 (3x - 4)\,dx$

50. $\displaystyle\int_0^6 (8 - x)\,dx$

51. $\displaystyle\int_3^4 (x^2 - 9)\,dx$

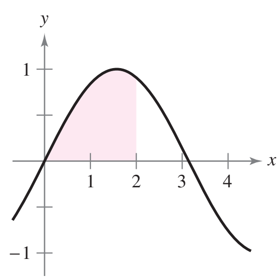
52. $\displaystyle\int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 (x - x^3)\,dx$

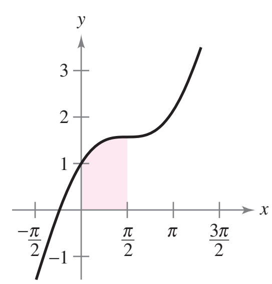
54. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,(1 - x)\,dx$

En los ejercicios 55 y 56, determinar el área de la región dada.

55. $y = \operatorname{sen} x$



56. $y = x + \cos x$



En los ejercicios 57 y 58, dibujar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y determinar su área.

57. $y = \dfrac{4}{\sqrt{x}}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 9$

58. $y = \sec^2 x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{3}$

En los ejercicios 59 y 60, encontrar el valor medio de la función sobre el intervalo indicado. Determinar los valores de *x* a los cuales la función toma su valor medio, y graficar la función.

59. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad [4, 9]$

60. $f(x) = x^3, \quad [0, 2]$

En los ejercicios 61 a 64, emplear el segundo teorema fundamental del cálculo para encontrar $F'(x)$.

61. $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\sqrt{1 + t^3}\, dt$

62. $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt$

63. $F(x) = \displaystyle\int_{-3}^x (t^2 + 3t + 2)\, dt$

64. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \csc^2 t\, dt$

En los ejercicios 65 a 76, encontrar la integral definida.

65. $\displaystyle\int (3 - x^2)^3\, dx$

66. $\displaystyle\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

67. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 3}}\, dx$

68. $\displaystyle\int 3x^2\sqrt{2x^3 - 5}\, dx$

69. $\displaystyle\int x(1 - 3x^2)^4\, dx$

70. $\displaystyle\int \frac{x + 4}{(x^2 + 8x - 7)^2}\, dx$

71. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$

72. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} 3x^2\, dx$

73. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}\theta}}\, d\theta$

74. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$

75. $\displaystyle\int (1 + \sec \pi x)^2 \sec \pi x \tan \pi x\, dx$

76. $\displaystyle\int \sec 2x \tan 2x\, dx$

En los ejercicios 77 a 84, calcular la integral definida. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

77. $\displaystyle\int_{-2}^{1} x(x^2 - 6)\, dx$

78. $\displaystyle\int_0^1 x^2(x^3 - 2)^3\, dx$

79. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1 + x}}\, dx$

80. $\displaystyle\int_3^6 \frac{x}{3\sqrt{x^2 - 8}}\, dx$

81. $2\pi\displaystyle\int_0^1 (y + 1)\sqrt{1 - y}\, dy$

82. $2\pi\displaystyle\int_{-1}^0 x^2\sqrt{x + 1}\, dx$

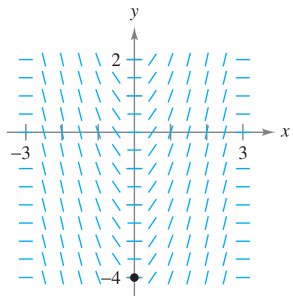
83. $\displaystyle\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\, dx$

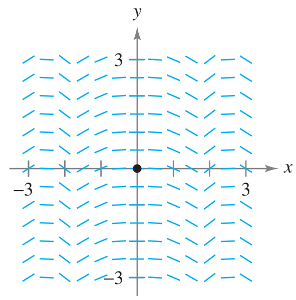
84. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{sen} 2x\, dx$

Campos de pendientes **En los ejercicios 85 y 86, se dan una ecuación diferencial y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Utilizar la integración para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y emplear una herramienta de graficación para representar la solución.**

85. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{9 - x^2}, \quad (0, -4)$

86. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}x \operatorname{sen}(x^2), \quad (0, 0)$

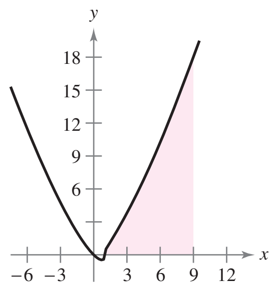


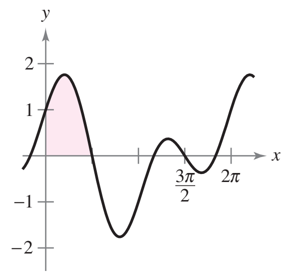


En los ejercicios 87 y 88, encontrar el área de la región. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

87. $\displaystyle\int_1^9 x\sqrt[3]{x - 1}\, dx$

88. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} [\cos x + \operatorname{sen}(2x)]\, dx$





89. ***Precipitación*** La precipitación normal mensual en Portland, Oregón, puede aproximarse mediante el modelo

$$R = 2.880 + 2.125 \operatorname{sen}(0.578t + 0.745)$$

donde R está medida en pulgadas y t es el tiempo en meses, con $t = 0$ correspondiendo al 1 de enero. (*Fuente:* U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration)

a) Escribir una integral y aproximar la precipitación normal anual.

b) Aproximar la precipitación promedio mensual durante los meses de septiembre y octubre.

90. ***Ciclo respiratorio*** Después de ejercitarse durante unos minutos, una persona tiene un ciclo respiratorio para el cual la tasa de admisión de aire es

$$v = 1.75 \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}.$$

Determinar el volumen, en litros, del aire inhalado durante un ciclo, integrando la función sobre el intervalo $[0, 2]$.

En los ejercicios 91 a 94, emplear la regla de los trapecios y la regla de Simpson con $n = 4$, y utilizar las capacidades de integración de una herramienta de graficación, para aproximar la integral definida. Comparar los resultados.

91. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{1 + x^2}\, dx$

92. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{3 - x^2}\, dx$

93. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{x}\cos x\, dx$

94. $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

SP Solución de problemas

1. Sea$(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \ x > 0.$

a) Encontrar $L(1)$.
b) Encontrar $L'(x)$ y $L'(1)$.
c) Utilizar una herramienta de graficación para aproximar el valor de x (hasta tres lugares decimales) para el cual $L(x) = 1$.
d) Demostrar que $L(x_1\ x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ para todos los valores positivos de x_1 y x_2.

2. Sea $(x) = \int_2^x \operatorname{sen} t^2\, dt.$

a) Utilizar una herramienta de graficación para completar la tabla.

x	0	1.0	1.5	1.9	2.0
$F(x)$					

x	2.1	2.5	3.0	4.0	5.0
$F(x)$					

b) Sea $G(x) = \frac{1}{x-2}F(x) = \frac{1}{x-2}\int_2^x \operatorname{sen} t^2\, dt$. Utilizar una herramienta de graficacón para completar la tabla y estimar $\lim\limits_{x\to 2} G(x)$.

x	1.9	1.95	1.99	2.01	2.1
$G(x)$					

c) Utilizar la definición de la derivada para encontrar el valor exacto del límite $\lim\limits_{x\to 2} G(x)$.

En los ejercicios 3 y 4, *a*) escribir el área bajo la gráfica de la función dada definida sobre el intervalo indicado como un límite. Después *b*) calcular la suma del apartado *a*) y *c*) calcular el límite utilizando el resultado del apartado *b*).

3. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2, \quad [0, 2]$

$\left(\textit{Sugerencia:}\ \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\right)$

4. $y = \frac{1}{2}x^5 + 2x^3, \quad [0, 2]$

$\left(\textit{Sugerencia:}\ \sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}\right)$

5. La **función de Fresnel *S*** se define mediante la integral

$$x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$$

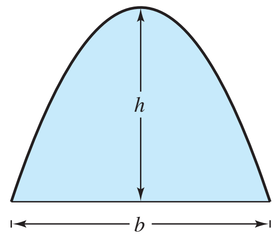
a) Hacer la gráfica de la función $= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dt$ sobre el intervalo $[0, 3]$.
b) Utilizar la gráfica del apartado *a*) para dibujar la gráfica de S en el intervalo $[0, 3]$.
c) Ubicar todos los extremos relativos de S en el intervalo $(0, 3)$.
d) Localizar todos los puntos de inflexión de S en el intervalo $(0, 3)$.

6. La **aproximación gaussiana de dos puntos** para f es

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

a) Utilizar esta fórmula para aproximar $\int_{-1}^{1} \cos x\, dx$. Encontrar el error de la aproximación.
b) Utilizar esta fórmula para aproximar $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx$.
c) Probar que la aproximación gaussiana de dos puntos es exacta para todos los polinomios de grado 3 o menor.

7. Arquímedes demostró que el área de un arco parabólico es igual a $\frac{2}{3}$ del producto de la base y la altura (ver la figura).



a) Graficar el arco parabólico delimitado por $y = 9 - x^2$ y el eje x. Utilizar una integral apropiada para encontrar el área A.
b) Encontrar la base y la altura del arco y verificar la fórmula de Arquímedes.
c) Demostrar la fórmula de Arquímedes para una parábola general.

8. Galileo Galilei (1564-1642) enunció la siguiente proposición relativa a los objetos en caída libre:

> *El tiempo en cualquier espacio que se recorre por un cuerpo acelerado uniformemente es igual al tiempo en el cual ese mismo espacio se recorrería por el mismo cuerpo moviéndose a una velocidad uniforme cuyo valor es la media de la velocidad más alta del cuerpo acelerado y la velocidad justo antes de que empiece la aceleración.*

Utilizar las técnicas de este capítulo para verificar esta proposición.

9. La gráfica de una función f consta de tres segmentos de recta que unen a los puntos $(0, 0)$, $(2, -2)$, $(6, 2)$ y $(8, 3)$. La función F se define por medio de la integral.

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

a) Dibujar la gráfica de f.
b) Completar la tabla.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x)$									

c) Encontrar los extremos de F en el intervalo $[0, 8]$.
d) Determinar todos los puntos de inflexión de F en el intervalo $(0, 8)$.

10. Un automóvil se desplaza en línea recta durante una hora. Su velocidad v en millas por hora en intervalos de seis minutos se muestra en la tabla.

t **(horas)**	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
v **(mi/h)**	0	10	20	40	60	50

t **(horas)**	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
v **(mi/h)**	40	35	40	50	65

a) Elaborar una gráfica razonable de la función de velocidad v graficando estos puntos y conectándolos con una curva uniforme.

b) Encontrar los intervalos abiertos sobre los cuales la aceleración a es positiva.

c) Encontrar la aceleración media del automóvil (en millas por hora cuadrada) sobre el intervalo [0, 0.4].

d) ¿Qué significa la integral $\int_0^1 v(t)\,dt$? Aproximar esta integral utilizando la regla de los trapecios con cinco subintervalos.

e) Aproximar la aceleración en $t = 0.8$.

11. Demostrar que $\displaystyle\int_0^x f(t)(x-t)\,dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(v)\,dv\right) dt.$

12. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = \tfrac{1}{2}([f(b)]^2 - [f(a)]^2).$

13. Utilizar una suma de Riemann apropiada para calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$

14. Utilizar una suma de Riemann apropiada para calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5}{n^6}.$$

15. Suponer que f es integrable en $[a, b]$ y $0 < m \le f(x) \le M$ para todo x en el intervalo $[a, b]$. Demostrar que

$$m(a-b) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Utilizar este resultado para estimar $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$.

16. Sea f continua en el intervalo $[0, b]$ donde $f(x) + f(b-x) \ne 0$ en $[0, b]$.

a) Demostrar que $\displaystyle\int_0^b \frac{f(x)}{f(x) + f(b-x)}\,dx = \frac{b}{2}.$

b) Utilizar el resultado del apartado *a*) para calcular

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(1-x) + \operatorname{sen} x}\,dx.$$

c) Utilizar el resultado del apartado *a*) para calcular

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{3-x}}\,dx.$$

17. Verificar que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

demostrando lo siguiente.

a) $(1+i)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$

b) $(n+1)^3 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (3i^2 + 3i + 1) + 1$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

18. Demostrar que si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \quad \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

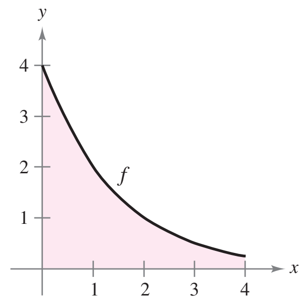
19. Sea

$$I = \int_0^4 f(x)\,dx$$

donde f se muestra en la figura. Considerar que $I(n)$ y $D(n)$ representan las sumas de Riemann utilizando los puntos extremos del lado izquierdo y los puntos terminales del lado derecho de n subintervalos de igual ancho. (Suponer que n es par.) Sean $T(n)$ y $S(n)$ los valores correspondientes de la regla de los trapecios y la regla de Simpson.

a) Para cualquier n, listar $I(n)$, $D(n)$, $T(n)$ e I en orden creciente.

b) Aproximar $S(4)$.



20. La **función integral seno**

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

se utiliza a menudo en la ingeniería. La función $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ no está definida en $t = 0$, pero su límite es 1 cuando $t \to 0$. De tal modo, definir $f(0) = 1$. En ese caso f es continua en todos lados.

a) Emplear una herramienta de graficación para representar $\mathrm{Si}(x)$.

b) ¿En qué valores de x $\mathrm{Si}(x)$ tiene máximos relativos?

c) Encontrar las coordenadas del primer punto de inflexión donde $x > 0$.

d) Decidir si $\mathrm{Si}(x)$ tiene alguna asíntota horizontal. Si es así, identificar cada una.

21. Determinar los límites de integración donde $a \le b$, tal que

$$\int_a^b (x^2 - 16)\,dx$$

tiene valor mínimo.

5 Funciones logarítmica, exponencial y otras funciones trascendentes

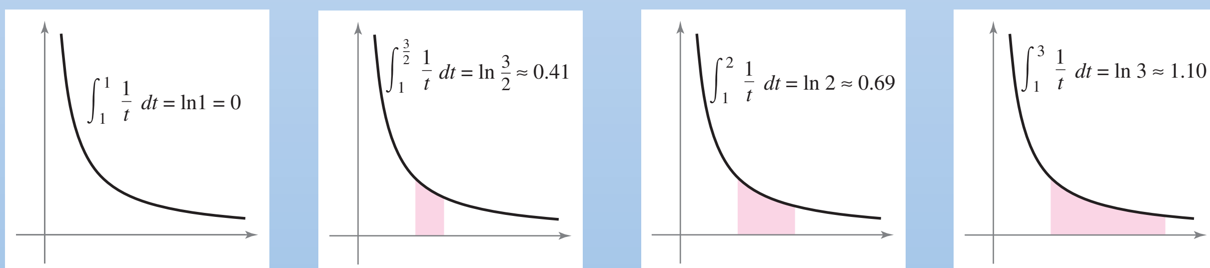
Hasta ahora en este texto, se han estudiado dos tipos de funciones elementales: funciones algebraicas y funciones trigonométricas. Este capítulo concluye la introducción de funciones elementales. Como cuando se introduce un nuevo tipo, se estudiarán sus propiedades, su derivada y su antiderivada.

En este capítulo, se aprenderá:

- Las propiedades de la función logaritmo natural. Cómo encontrar la derivada y antiderivada de la función logaritmo natural. (**5.1, 5.2**)
- Cómo determinar si una función tiene una función inversa. (**5.3**)
- Las propiedades de la función exponencial natural. Cómo encontrar la derivada y antiderivada de la función exponencial natural. (**5.4**)
- Las propiedades, derivadas y antiderivadas de las funciones logarítmica y exponencial con base diferente de *e*. (**5.5**)
- Las propiedades de las funciones trigonométricas inversas. Cómo encontrar derivadas y antiderivadas de funciones trigonométricas inversas. (**5.6, 5.7**)
- Las propiedades de las funciones hiperbólicas. Cómo encontrar derivadas y antiderivadas de funciones hiperbólicas. (**5.8**)

Owaki-Kulla/Photolibrary

El arco de entrada en San Luis, Missouri, tiene más de 600 pies de alto y está cubierto con 886 toneladas de acero inoxidable de un cuarto de pulgada. ¿Qué función se involucra en la ecuación matemática usada para construir el arco? (Ver la sección 5.8, Proyecto de trabajo.)



En la sección 5.1 se verá cómo la función $f(x) = 1/x$ puede usarse para definir la función logaritmo natural. Para hacer esto, considerar la integral definida $\int_1^x 1/t\,dt$. Cuando $x < 1$, el valor de esta integral definida es negativa. Cuando $x = 1$, el valor es cero. Cuando $x > 1$, el valor es positivo.

5.1 La función logaritmo natural: derivación

- Desarrollar y usar propiedades de la función logaritmo natural.
- Comprender la definición del número *e*.
- Derivar funciones que involucran la función logaritmo natural.

The Granger Collection

JOHN NAPIER (1550-1617)
El matemático escocés John Napier inventó los logaritmos. Napier formó el término *logaritmo* con dos palabras griegas: *logos* (razón) y *arithmos* (número), para denominar la teoría que desarrolló a lo largo de veinte años y que apareció por primera vez en el libro *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio* (Una descripción de la maravillosa regla de los algoritmos). Aunque no introdujo la función logaritmo natural, algunas veces se llama función logaritmo napieriana.

La función logaritmo natural

Recordar que en la regla general de la potencia

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad \text{Regla general de la potencia.}$$

tiene una restricción importante, no se aplica al caso $n = -1$. De hecho, todavía no se ha encontrado una antiderivada o primitiva para la función $f(x) = 1/x$. En esta sección se usará el segundo teorema fundamental del cálculo para *definir* esa antiderivada o primitiva. Ésta es una función que no ha aparecido previamente en este libro. No es algebraica ni trigonométrica, sino que está incluida en una nueva clase de funciones, llamadas *funciones logarítmicas*. Esta función particular es la **función logaritmo natural**.

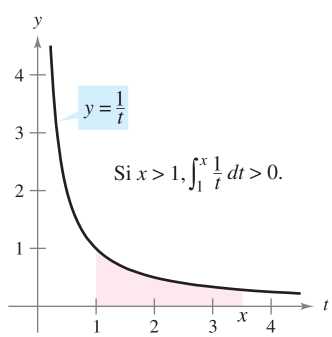
DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

La **función logaritmo natural** se define como

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0.$$

El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de todos los números reales positivos.

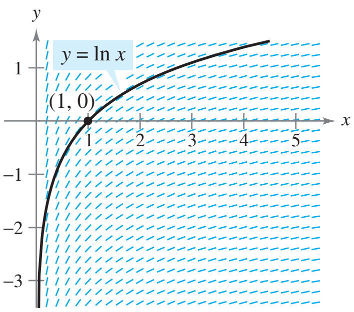
A partir de la definición se deduce que $\ln x$ es positiva para $x > 1$ y negativa para $0 < x < 1$ (figura 5.1). Además, $\ln(1) = 0$, ya que los límites inferior y superior de integración son iguales cuando $x = 1$.



Si $x > 1$, entonces $\ln x > 0$ Si $0 < x < 1$, entonces $\ln x < 0$
Figura 5.1

EXPLORACIÓN

Representación de la función logaritmo natural Usando *sólo* la definición de la función logaritmo natural, trazar una gráfica. Explicar el razonamiento.



Cada pequeño segmento recto tiene una pendiente de $1/x$
Figura 5.2

Para dibujar la gráfica de $y = \ln x$, se puede pensar en la función logaritmo natural como una *antiderivada* o primitiva dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

La figura 5.2 es una gráfica generada por computadora; llamada *campo de pendientes* o *campo de direcciones*, que consta de pequeños segmentos de pendiente $1/x$. La gráfica de $y = \ln x$ es la solución que pasa por el punto $(1, 0)$. Se estudiarán campos de pendientes en la sección 6.1.

El siguiente teorema resume varias propiedades básicas de la función logaritmo natural.

TEOREMA 5.1 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

La función logaritmo natural tiene las siguientes propiedades.

1. El dominio es $(0, \infty)$ y el recorrido o rango es $(-\infty, \infty)$.
2. La función es continua, creciente e inyectiva.
3. La gráfica es cóncava hacia abajo.

DEMOSTRACIÓN El dominio de $f(x) = \ln x$ es $(0, \infty)$ por definición. Además, la función es continua, por ser derivable. Y es creciente porque su derivada

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{Primera derivada.}$$

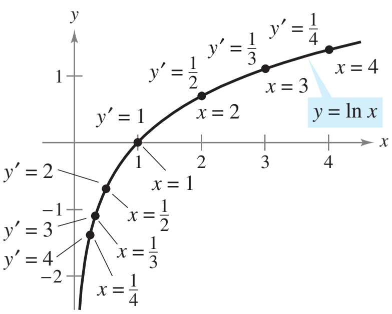
es positiva para $x > 0$, como se muestra en la figura 5.3. Es cóncava hacia abajo porque

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{Segunda derivada.}$$

es negativa para $x > 0$. La prueba de que f es inyectiva se presenta en el apéndice A. Los siguientes límites implican que el recorrido o rango es toda la recta real.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

La justificación de ambos límites se encuentra en el apéndice A.



La función logaritmo natural es creciente, y su gráfica es cóncava hacia abajo
Figura 5.3

Utilizando la definición de la función logaritmo natural, se pueden probar importantes propiedades de las operaciones con logaritmos naturales. Si ya está familiarizado con los logaritmos, el lector reconocerá que estas propiedades son características de todos los logaritmos.

TEOREMA 5.2 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Si a y b son números positivos y n es racional, se satisfacen las siguientes propiedades.

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$
4. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

DEMOSTRACIÓN La primera propiedad ya se ha discutido. La segunda se deduce del hecho de que dos antiderivadas o primitivas de una misma función difieren en una constante. Del segundo teorema fundamental del cálculo y la definición de la función logaritmo natural, se sabe que

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{d}{dx}\left[\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right] = \frac{1}{x}.$$

Así pues, se consideran las dos derivadas

$$\frac{d}{dx}[\ln(ax)] = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$$

y

$$\frac{d}{dx}[\ln a + \ln x] = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Como $\ln(ax)$ y $(\ln a + \ln x)$ son antiderivadas o primitivas de $1/x$, deben diferir a lo más en una constante.

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x + C$$

Tomando $x = 1$, se puede ver que $C = 0$. La tercera propiedad se demuestra de manera análoga comparando las derivadas de $\ln(x^n)$ y $n \ln x$. Por último, al utilizar la segunda y tercera propiedades, se puede comprobar la cuarta.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln[a(b^{-1})] = \ln a + \ln(b^{-1}) = \ln a - \ln b$$

El ejemplo 1 muestra cómo usar propiedades de los logaritmos para desarrollar expresiones logarítmicas.

EJEMPLO 1 Desarrollo de expresiones logarítmicas

a) $\ln\dfrac{10}{9} = \ln 10 - \ln 9$ Propiedad 4.

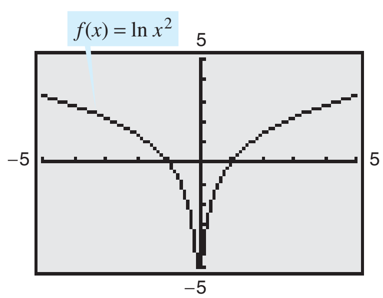
b) $\ln\sqrt{3x+2} = \ln(3x+2)^{1/2}$ Reescribir con exponente racional.

$= \dfrac{1}{2}\ln(3x+2)$ Propiedad 3.

c) $\ln\dfrac{6x}{5} = \ln(6x) - \ln 5$ Propiedad 4.

$= \ln 6 + \ln x - \ln 5$ Propiedad 2.

d)
$$\begin{aligned}\ln\frac{(x^2+3)^2}{x\sqrt[3]{x^2+1}} &= \ln(x^2+3)^2 - \ln\left(x\sqrt[3]{x^2+1}\right)\\ &= 2\ln(x^2+3) - [\ln x + \ln(x^2+1)^{1/3}]\\ &= 2\ln(x^2+3) - \ln x - \ln(x^2+1)^{1/3}\\ &= 2\ln(x^2+3) - \ln x - \frac{1}{3}\ln(x^2+1)\end{aligned}$$



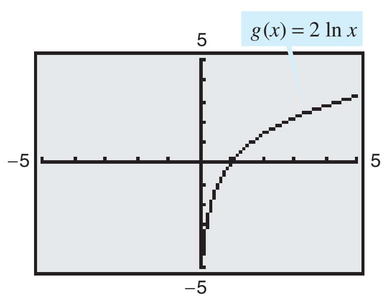
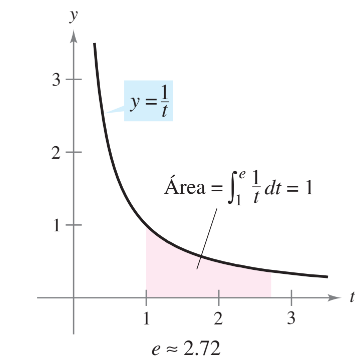


Figura 5.4

Cuando se usan las propiedades de los logaritmos para reexpresar funciones logarítmicas, hay que analizar si el dominio de la función reescrita es el mismo que el de la función original. Así, el dominio de $f(x) = \ln x^2$ son todos los números reales salvo $x = 0$, mientras que el de $g(x) = 2\ln x$ son todos los números reales positivos (ver la figura 5.4).

El número *e*



e es la base de los logaritmos naturales porque $\ln e = 1$
Figura 5.5

Es muy probable que ya se hayan estudiado los logaritmos en cursos anteriores de álgebra. Ahí, sin las ventajas del cálculo, suelen definirse en términos de un número **base**. Por ejemplo, los logaritmos comunes tienen base 10 porque $\log_{10} 10 = 1$. (Volveremos a esto en la sección 5.5.)

Para definir la **base de los logaritmos naturales**, se aprovecha que la función logaritmo natural es continua, inyectiva y con recorrido o rango de $(-\infty, \infty)$. Por tanto, debe existir un único número real x tal que $\ln x = 1$, como muestra la figura 5.5. Este número se denota por la letra e. Puede demostrarse que e es irracional y que tiene un valor aproximado.

$$e \approx 2.71828182846$$

DEFINICIÓN DE *e*

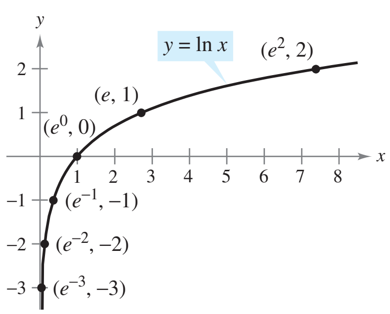
La letra e denota el número real positivo tal que

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre el número e, se recomienda ver el artículo "Unexpected Occurrences of the Number e", de Harris S. Shultz y Bill Leonard en la revista *Mathematics Magazine*.

Sabiendo que $\ln e = 1$, usar las propiedades logarítmicas para calcular los logaritmos naturales de otros números. Por ejemplo, usando la propiedad

$$\begin{aligned}\ln(e^n) &= n \ln e\\ &= n(1)\\ &= n\end{aligned}$$



Si $x = e^n$, entonces $\ln x = n$
Figura 5.6

se puede evaluar $\ln(e^n)$ para diversos valores de n, como se muestran en la tabla y en la figura 5.6.

x	$\frac{1}{e^3} \approx 0.050$	$\frac{1}{e^2} \approx 0.135$	$\frac{1}{e} \approx 0.368$	$e^0 = 1$	$e \approx 2.718$	$e^2 \approx 7.389$
$\ln x$	-3	-2	-1	0	1	2

Los logaritmos de esta tabla son fáciles de calcular de esa forma porque los valores de x son potencias enteras de e. Sin embargo, la mayoría de las expresiones logarítmicas se pueden evaluar mejor con una calculadora.

EJEMPLO 2 Evaluación de expresiones con logaritmos naturales

a) $\ln 2 \approx 0.693$

b) $\ln 32 \approx 3.466$

c) $\ln 0.1 \approx -2.303$

La derivada de la función logaritmo natural

La derivada de la función logaritmo natural se da por el teorema 5.3. La primera parte del teorema proviene de la definición de la función logaritmo natural como una antiderivada o primitiva. La segunda parte del teorema es simplemente la versión de la regla de la cadena de la primera parte.

TEOREMA 5.3 DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

Sea u una función derivable en x.

1. $\dfrac{d}{dx}[\ln x] = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$ **2.** $\dfrac{d}{dx}[\ln u] = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u'}{u}, \quad u > 0$

EXPLORACIÓN

Usar una herramienta de graficación para representar

$$y_1 = \frac{1}{x}$$

y

$$y_2 = \frac{d}{dx}[\ln x]$$

en la misma pantalla, con $0.1 \leq x \leq 5$ y $-2 \leq y \leq 8$. Explicar por qué las gráficas aparentemente son idénticas.

EJEMPLO 3 Derivación de funciones logarítmicas

a) $\dfrac{d}{dx}[\ln(2x)] = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$ $u = 2x.$

b) $\dfrac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)] = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ $u = x^2 + 1.$

c) $\dfrac{d}{dx}[x \ln x] = x\left(\dfrac{d}{dx}[\ln x]\right) + (\ln x)\left(\dfrac{d}{dx}[x]\right)$ Regla del producto.

$$= x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$$

d) $\dfrac{d}{dx}[(\ln x)^3] = 3(\ln x)^2 \dfrac{d}{dx}[\ln x]$ Regla de la cadena.

$$= 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}$$

Napier utilizaba las propiedades de los logaritmos para simplificar *cálculos* con productos, cocientes y potencias. Por supuesto, actualmente con las calculadoras a nuestra disposición hay poco lugar para esas aplicaciones de los logaritmos. No obstante, es de gran valor el uso de las propiedades de los logaritmos para simplificar la derivada de productos, cocientes y potencias.

EJEMPLO 4 Propiedades de los logaritmos como ayuda en la derivación

Derivar $f(x) = \ln\sqrt{x + 1}$.

Solución Como

$$f(x) = \ln\sqrt{x + 1} = \ln(x + 1)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(x + 1)$$ Reescribir antes de derivar.

se puede escribir

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + 1}\right) = \frac{1}{2(x + 1)}.$$ Derivar.

EJEMPLO 5 Propiedades de los logaritmos como ayuda en la derivación

Derivar $f(x) = \ln \dfrac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$.

Solución

$$f(x) = \ln \frac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}} \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$= \ln x + 2\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2x^3-1) \qquad \text{Reescribir antes de derivar.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{6x^2}{2x^3-1}\right) \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+1} - \frac{3x^2}{2x^3-1} \qquad \text{Simplificar.}$$

NOTA En los ejemplos 4 y 5 se puede ver la ventaja de aplicar las propiedades de los logaritmos *antes* de derivar. Considérese, por ejemplo, la dificultad de derivar directamente la función del ejemplo 5.

En ocasiones, es conveniente usar los logaritmos como ayuda en la derivación de funciones *no logarítmicas*. Este procedimiento se llama **derivación logarítmica**.

EJEMPLO 6 Derivación logarítmica

Encontrar la derivada de

$$y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 2.$$

Solución Notar que $y > 0$ para todo $x \neq 2$. Así, $\ln y$ está definido. Iniciar aplicando el logaritmo natural en los dos miembros de la ecuación. Y a continuación aplicar las propiedades de los logaritmos y la derivación implícita. Por último, despejar y'.

$$y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 2 \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$\ln y = \ln \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{Aplicar logaritmo natural en ambos lados.}$$

$$\ln y = 2\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \qquad \text{Propiedades de los logaritmos.}$$

$$\frac{y'}{y} = 2\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)} \qquad \text{Simplificar.}$$

$$y' = y\left[\frac{x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)}\right] \qquad \text{Despejar } y'.$$

$$= \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}\left[\frac{x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)}\right] \qquad \text{Sustituir } y.$$

$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{(x^2+1)^{3/2}} \qquad \text{Simplificar.}$$

Puesto que el logaritmo natural no está definido para números negativos, encontraremos con frecuencia expresiones como $\ln|u|$. El siguiente teorema afirma que se pueden derivar funciones de la forma $y = \ln|u|$ ignorando el signo del valor absoluto.

TEOREMA 5.4 DERIVADAS CON VALORES ABSOLUTOS

Si u es una función derivable de x tal que $u \neq 0$, entonces

$$\frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}.$$

DEMOSTRACIÓN Si $u > 0$, entonces $|u| = u$, y el resultado se obtiene aplicando el teorema 5.3. Si $u < 0$, entonces $|u| = -u$, y se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\ln|u|] &= \frac{d}{dx}[\ln(-u)]\\ &= \frac{-u'}{-u}\\ &= \frac{u'}{u}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Derivadas con valores absolutos

Encontrar la derivada de

$$f(x) = \ln|\cos x|.$$

Solución Según el teorema 5.4, tomar $u = \cos x$ y escribir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\ln|\cos x|] &= \frac{u'}{u} && \frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}\\ &= \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} && u = \cos x\\ &= -\tan x. && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Localización de extremos relativos

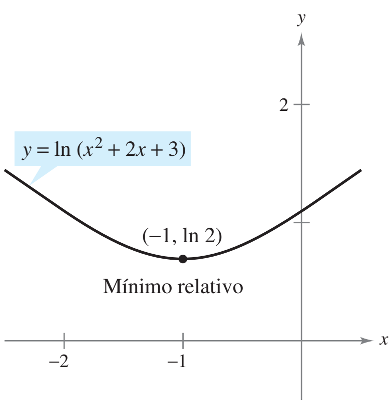
Localizar los extremos relativos de

$$y = \ln(x^2 + 2x + 3).$$

Solución Al derivar y, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3}.$$

Como $dy/dx = 0$ para $x = -1$, se puede aplicar el criterio de la primera derivada y concluir que el punto $(-1, \ln 2)$ es un mínimo relativo. Como no hay más puntos críticos, ése es el único extremo relativo (ver la figura 5.7).



La derivada de y cambia de negativo a positivo en $x = -1$

Figura 5.7

5.1 Ejercicios

1. Completar la tabla usando la herramienta de graficación y la regla de Simpson con $n = 10$, aproximar la integral $\int_1^x (1/t)\, dt$.

x	0.5	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\int_1^x (1/t)\, dt$							

2. *a)* Dibujar los puntos generados en el ejercicio 1 y conectarlos con una curva suave. Comparar el resultado con la gráfica de $y = \ln x$.

b) Usar la herramienta de graficación para representar $y = \int_1^x (1/t)\, dt$ para $0.2 \le x \le 4$. Comparar los resultados con la gráfica de $y = \ln x$.

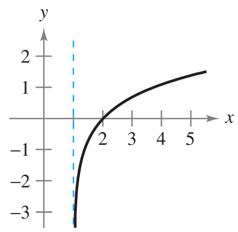
En los ejercicios 3 a 6, usar la herramienta de graficación para evaluar la función logaritmo *a)* usando la tecla logaritmo natural y *b)* usando la función de integración para evaluar la integral $\int_1^x (1/t)\, dt$.

3. $\ln 45$ **4.** $\ln 8.3$

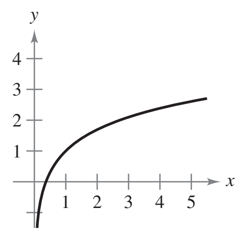
5. $\ln 0.8$ **6.** $\ln 0.6$

En los ejercicios 7 a 10, comparar la función con los gráficos. [Las gráficas están etiquetadas *a)*, *b)*, *c)* y *d)*.]

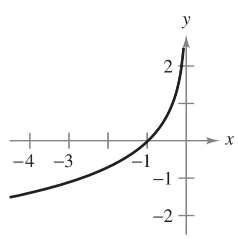
a)



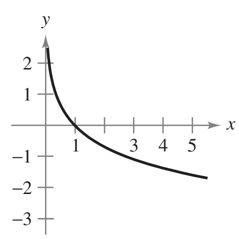
b)



c)



d)



7. $f(x) = \ln x + 1$ **8.** $f(x) = -\ln x$

9. $f(x) = \ln(x - 1)$ **10.** $f(x) = -\ln(-x)$

En los ejercicios 11 a 18, trazar la gráfica de la función y su dominio.

11. $f(x) = 3 \ln x$ **12.** $f(x) = -2 \ln x$

13. $f(x) = \ln 2x$ **14.** $f(x) = \ln|x|$

15. $f(x) = \ln(x - 1)$ **16.** $g(x) = 2 + \ln x$

17. $h(x) = \ln(x + 2)$ **18.** $f(x) = \ln(x - 2) + 1$

En los ejercicios 19 y 20, usar las propiedades de los logaritmos para aproximar el logaritmo indicado, teniendo que $\ln 2 \approx 0.6931$ y $\ln 3 \approx 1.0986$.

19. *a)* $\ln 6$ *b)* $\ln \frac{2}{3}$ *c)* $\ln 81$ *d)* $\ln \sqrt{3}$

20. *a)* $\ln 0.25$ *b)* $\ln 24$ *c)* $\ln \sqrt[3]{12}$ *d)* $\ln \frac{1}{72}$

En los ejercicios 21 a 30, usar las propiedades de los logaritmos para desarrollar las expresiones.

21. $\ln \dfrac{x}{4}$ **22.** $\ln \sqrt{x^5}$

23. $\ln \dfrac{xy}{z}$ **24.** $\ln(xyz)$

25. $\ln\left(x\sqrt{x^2 + 5}\right)$ **26.** $\ln \sqrt{a - 1}$

27. $\ln \sqrt{\dfrac{x - 1}{x}}$ **28.** $\ln(3e^2)$

29. $\ln z(z - 1)^2$ **30.** $\ln \dfrac{1}{e}$

En los ejercicios 31 a 36, escribir la expresión como el logaritmo de una sola cantidad.

31. $\ln(x - 2) - \ln(x + 2)$ **32.** $3 \ln x + 2 \ln y - 4 \ln z$

33. $\frac{1}{3}[2 \ln(x + 3) + \ln x - \ln(x^2 - 1)]$

34. $2[\ln x - \ln(x + 1) - \ln(x - 1)]$

35. $2 \ln 3 - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$

36. $\frac{3}{2}[\ln(x^2 + 1) - \ln(x + 1) - \ln(x - 1)]$

En los ejercicios 37 y 38, *a)* verificar que $f = g$ usando una herramienta de graficación para representar f y g en la misma pantalla. *b)* Entonces verificar que $f = g$ algebraicamente.

37. $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{4}, \quad x > 0, \quad g(x) = 2 \ln x - \ln 4$

38. $f(x) = \ln \sqrt{x(x^2 + 1)}, \quad g(x) = \frac{1}{2}[\ln x + \ln(x^2 + 1)]$

En los ejercicios 39 a 42, calcular el límite.

39. $\lim\limits_{x \to 3^+} \ln(x - 3)$ **40.** $\lim\limits_{x \to 6^-} \ln(6 - x)$

41. $\lim\limits_{x \to 2^-} \ln[x^2(3 - x)]$ **42.** $\lim\limits_{x \to 5^+} \ln \dfrac{x}{\sqrt{x - 4}}$

En los ejercicios 43 a 46, escribir la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función logarítmica en el punto (1, 0).

43. $y = \ln x^3$ **44.** $y = \ln x^{3/2}$

45. $y = x^4$ **46.** $y = \ln x^{1/2}$

En los ejercicios 47 a 76, hallar la derivada de la función.

47. $f(x) = \ln(3x)$ **48.** $f(x) = \ln(x - 1)$

49. $g(x) = \ln x^2$ **50.** $h(x) = \ln(2x^2 + 1)$

51. $y = (\ln x)^4$ **52.** $y = x^2 \ln x$

53. $y = \ln(t+1)^2$

54. $y = \ln\sqrt{x^2-4}$

55. $y = \ln\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$

56. $y = \ln[t(t^2+3)^3]$

57. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

58. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x+3}\right)$

59. $g(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$

60. $h(t) = \dfrac{\ln t}{t}$

61. $y = \ln(\ln x^2)$

62. $y = \ln(\ln x)$

63. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

64. $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

65. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x}\right)$

66. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{4+x^2}\right)$

67. $y = \dfrac{-\sqrt{x^2+1}}{x} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

68. $y = \dfrac{-\sqrt{x^2+4}}{2x^2} - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{x^2+4}}{x}\right)$

69. $y = \ln|\operatorname{sen} x|$

70. $y = \ln|\csc x|$

71. $y = \ln\left|\dfrac{\cos x}{\cos x - 1}\right|$

72. $y = \ln|\sec x + \tan x|$

73. $y = \ln\left|\dfrac{-1+\operatorname{sen} x}{2+\operatorname{sen} x}\right|$

74. $y = \ln\sqrt{2+\cos^2 x}$

75. $f(x) = \displaystyle\int_2^{\ln(2x)} (t+1)\, dt$

76. $g(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x} (t^2+3)\, dt$

En los ejercicios 77 a 82, *a*) encontrar una ecuación para la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado, *b*) usar una herramienta de graficación para representar la función y la recta tangente en el punto y *c*) usar la función *derivada* de la herramienta de graficación para confirmar los resultados.

77. $f(x) = 3x^2 - \ln x, \quad (1, 3)$

78. $f(x) = 4 - x^2 - \ln\left(\frac{1}{2}x + 1\right), \quad (0, 4)$

79. $f(x) = \ln\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}, \quad \left(\dfrac{\pi}{4}, \ln\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$

80. $f(x) = \operatorname{sen} 2x \ln x^2, \quad (1, 0)$

81. $f(x) = x^3 \ln x, \quad (1, 0)$

82. $f(x) = \dfrac{1}{2}x \ln x^2, \quad (-1, 0)$

En los ejercicios 83 a 86, usar derivación implícita para encontrar *dy*/*dx*.

83. $x^2 - 3\ln y + y^2 = 10$

84. $\ln xy + 5x = 30$

85. $4x^3 + \ln y^2 + 2y = 2x$

86. $4xy + \ln x^2 y = 7$

En los ejercicios 87 y 88, usar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado.

87. $x + y - 1 = \ln(x^2+y^2), \quad (1, 0)$

88. $y^2 + \ln xy = 2, \quad (e, 1)$

En los ejercicios 89 y 90, mostrar que la función es una solución de la ecuación diferencial.

	Función	*Ecuación diferencial*
89.	$y = 2\ln x + 3$	$xy'' + y' = 0$
90.	$y = x\ln x - 4x$	$x + y - xy' = 0$

En los ejercicios 91 a 96, hallar los extremos relativos y los puntos de inflexión. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

91. $y = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$

92. $y = x - \ln x$

93. $y = x\ln x$

94. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

95. $y = \dfrac{x}{\ln x}$

96. $y = x^2 \ln \dfrac{x}{4}$

Aproximaciones lineal y cuadrática **En los ejercicios 97 y 98, usar una herramienta de graficación para representar la función. A continuación, representar**

$$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1)$$

y

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \tfrac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$$

en la misma pantalla. Comparar los valores de *f*, P_1 y P_2 y sus primeras derivadas en $x = 1$.

97. $f(x) = \ln x$

98. $f(x) = x\ln x$

En los ejercicios 99 y 100, usar el método de Newton para aproximar, con tres cifras decimales, la coordenada *x* del punto de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones. Usar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

99. $y = \ln x, \quad y = -x$

100. $y = \ln x, \quad y = 3 - x$

En los ejercicios 101 a 106, usar derivación logarítmica para encontrar *dy*/*dx*.

101. $y = x\sqrt{x^2+1}, \quad x > 0$

102. $y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}, \quad x > 0$

103. $y = \dfrac{x^2\sqrt{3x-2}}{(x+1)^2}, \quad x > \dfrac{2}{3}$

104. $y = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}, \quad x > 1$

105. $y = \dfrac{x(x-1)^{3/2}}{\sqrt{x+1}}, \quad x > 1$

106. $y = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}, \quad x > 2$

Desarrollo de conceptos

107. Con sus propias palabras, enunciar las propiedades de la función logaritmo natural.

108. Definir la base de la función logaritmo natural.

109. Suponer que f es una función positiva y derivable en toda la recta real. Sea $g(x) = \ln f(x)$.

a) Si g es decreciente, ¿debe f ser decreciente necesariamente? Explicar la respuesta.

b) Si la gráfica de f es cóncava hacia arriba, ¿lo es necesariamente la de g? Explicar la respuesta.

110. Considerar la función $f(x) = x - 2\ln x$ sobre $[1, 3]$.

a) Explicar por qué el teorema de Rolle (sección 3.2) no se aplica.

b) ¿Piensa que la conclusión del teorema de Rolle es verdadera para f? Explicar.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 111 a 114, determinar si las ecuaciones son verdaderas o falsas. Si son falsas, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

111. $\ln(x + 25) = \ln x + \ln 25$

112. $\ln xy = \ln x \ln y$

113. Si $y = \ln \pi$, entonces $y' = 1/\pi$.

114. Si $y = \ln e$, entonces $y' = 1$.

115. ***Hipoteca de casa*** El término t (en años) de una hipoteca de casa de \$200 000 al 7.5% de interés puede aproximarse mediante

$$t = 13.375 \ln\left(\frac{x}{x - 1\,250}\right), \quad x > 1\,250$$

donde x es el pago mensual en dólares.

a) Usar una herramienta de graficación para representar el modelo.
b) Usar el modelo para aproximar el término de una hipoteca de casa, para la cual el pago mensual es de \$1 398.43. ¿Cuál es la cantidad de pago total?
c) Usar el modelo para aproximar el término de una hipoteca de casa para la cual el pago mensual es de \$1 611.19. ¿Cuál es la cantidad de pago total?
d) Encontrar la razón de cambio instantánea de t con respecto a x cuando $x = \$1\,398.43$ y $x = \$1\,611.19$.
e) Escribir un párrafo corto que describa el beneficio del pago mensual más alto.

116. ***Intensidad del sonido*** La relación entre el número de decibeles β y la intensidad del sonido I en watts por cm^2 es

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-16}}\right).$$

Usar las propiedades de los logaritmos para simplificar la fórmula y determinar el número de decibeles de un sonido con intensidad de 10^{-10} watts por cm^2.

117. ***Modelo matemático*** La tabla muestra las temperaturas T (°F) de ebullición del agua a ciertas presiones p (libras por pulgada cuadrada). (*Fuente: Standard Handbook of Mechanical Engineers*)

p	5	10	14.696 (1 atm)	20
T	162.24°	193.21°	212.00°	227.96°

p	30	40	60	80	100
T	250.33°	267.25°	292.71°	312.03°	327.81°

Un modelo que ajusta los datos es

$$T = 87.97 + 34.96 \ln p + 7.91\sqrt{p}.$$

a) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.
b) Encontrar la razón de cambio de T respecto de p cuando $p = 10$ y $p = 70$.
c) Usar una herramienta de graficación para representar T'. Encontrar $\lim_{p\to\infty} T'(p)$ e interpretar el resultado en el contexto del problema.

118. ***Modelado matemático*** La presión de la atmósfera decrece con el incremento de la altitud. A nivel del mar, el promedio de la presión del aire es una atmósfera (1.033227 kilogramos por centímetro cuadrado). La tabla muestra la presión p (en atmósferas) para algunas altitudes h (en kilómetros).

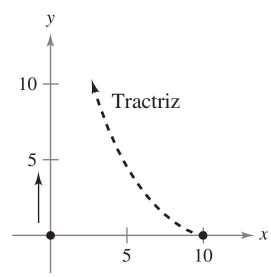
h	0	5	10	15	20	25
p	1	0.55	0.25	0.12	0.06	0.02

a) Usar una herramienta de graficación para ajustar un modelo de la forma $p = a + b \ln h$ a esos datos. Explicar por qué el resultado es un mensaje de error.
b) Usar una herramienta de graficación para ajustar el modelo logarítmico de $h = a + b \ln p$ a esos datos.
c) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.
d) Usar el modelo para estimar la altitud cuando $p = 0.75$.
e) Usar el modelo para estimar la presión cuando $h = 13$.
f) Usar el modelo para encontrar el ritmo o velocidad de cambio de la presión cuando $h = 5$ y $h = 20$. Interpretar los resultados.

119. ***Tractriz*** Una persona que camina por un muelle recto, tira de un bote por medio de una cuerda de 10 metros. El bote viaja a lo largo de un camino conocido como *tractriz* (ver la figura). La ecuación de esta ruta es

$$y = 10 \ln\left(\frac{10 + \sqrt{100 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{100 - x^2}.$$

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función.
b) ¿Cuál es la pendiente de la curva cuando $x = 5$ y $x = 9$?
c) ¿Cuál es la pendiente de la curva cuando el camino se aproxima a $x \to 10$?



Para discusión

120. Dado que $f(x) = \ln x^a$, donde a es un número real tal que $a > 0$, determinar la razón de cambio de f cuando *a*) $x = 10$ y *b*) $x = 100$.

121. ***Conjetura*** Usar una herramienta de graficación para representar f y g en la misma pantalla y determinar cuál de ellas crece a mayor ritmo para valores "grandes" de x. ¿Qué se puede concluir del ritmo de crecimiento de la función logaritmo natural?

a) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \sqrt{x}$ *b*) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \sqrt[4]{x}$

122. Para aproximar e^x puede usarse una función de la forma $f(x) = \dfrac{a + bx}{1 + cx}$. (Esta función se conoce como una **aproximación de Padé**.) Los valores de $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$ son iguales al valor correspondiente de e^x. Mostrar que esos valores son iguales a 1 y encontrar los valores de a, b y c, tal que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$. Después, usar una herramienta de graficación para comparar las gráficas de f y e^x.

5.2 La función logaritmo natural: integración

- Usar la regla de logaritmo de integración para integrar una función racional.
- Integrar funciones trigonométricas.

EXPLORACIÓN

Integración de funciones racionales En el capítulo 4 se estudiaron las reglas a seguir para integrar cualquier función polinomial. La regla de logaritmo presentada en esta sección facilita la integración de funciones racionales. Por ejemplo, cada una de las siguientes funciones puede ser integrada con la regla de logaritmo.

$\dfrac{2}{x}$	Ejemplo 1
$\dfrac{1}{4x-1}$	Ejemplo 2
$\dfrac{x}{x^2+1}$	Ejemplo 3
$\dfrac{3x^2+1}{x^3+x}$	Ejemplo 4*a*
$\dfrac{x+1}{x^2+2x}$	Ejemplo 4*c*
$\dfrac{1}{3x+2}$	Ejemplo 4*d*
$\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$	Ejemplo 5
$\dfrac{2x}{(x+1)^2}$	Ejemplo 6

Hay todavía muchas funciones racionales que no pueden ser integradas usando la regla de logaritmo. Dar ejemplos de estas funciones y explicar el razonamiento.

Regla de logaritmo para integración

Las reglas de derivación

$$\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}$$

que se estudiaron en la sección anterior producen las siguientes reglas de integración.

TEOREMA 5.5 REGLA DE LOGARITMO PARA INTEGRACIÓN

Sea u una función derivable de x.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ **2.** $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

Como $du = u'\,dx$, la segunda fórmula también puede expresarse como

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C.$$

Forma alternativa para la regla de logaritmo.

EJEMPLO 1 Uso de la regla de logaritmo para integración

$$\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx \quad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= 2\ln|x| + C \quad \text{Regla de logaritmo para integración.}$$

$$= \ln(x^2) + C \quad \text{Propiedad de los logaritmos.}$$

Como x^2 no puede ser negativa, el valor absoluto no es necesario en la forma final de la primitiva o antiderivada.

EJEMPLO 2 Uso de la regla de logaritmo con cambio de variables

Hallar $\displaystyle\int \frac{1}{4x-1}\,dx.$

Solución Si se toma $u = 4x - 1$, entonces $du = 4\,dx$.

$$\int \frac{1}{4x-1}\,dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{4x-1}\right)4\,dx \quad \text{Multiplicar y dividir entre 4.}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,du \quad \text{Sustituir } u = 4x-1.$$

$$= \frac{1}{4}\ln|u| + C \quad \text{Aplicar la regla de logaritmo.}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|4x-1| + C \quad \text{Sustitución regresiva.}$$

En el ejemplo 3 usar la forma alternativa de la regla de logaritmo. Para aplicar esta regla, buscar cocientes en los que el numerador sea la derivada del denominador.

EJEMPLO 3 Cálculo de un área con la regla de logaritmo

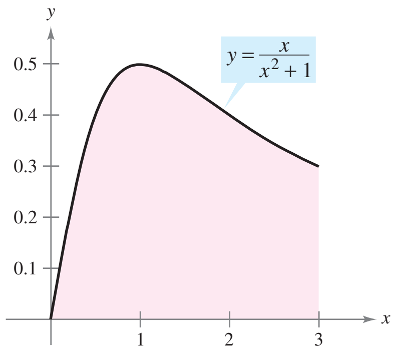
Encontrar el área de la región limitada por la gráfica de

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

el eje x y la recta $x = 3$.

Solución En la figura 5.8 se puede observar que el área está dada por la integral definida

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1}\, dx.$$



Área $= \displaystyle\int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$

El área de la región limitada por la gráfica de y, el eje x y $x = 3$ es $\frac{1}{2}\ln 10$

Figura 5.8

Si se toma $u = x^2 + 1$, entonces $u' = 2x$. Para aplicar la regla de logaritmo, se debe multiplicar y dividir entre 2 como se muestra.

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1}\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx && \text{Multiplicar y dividir entre 2.}\\
&= \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2 + 1)\Big]_0^3 && \int \frac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + C\\
&= \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 1)\\
&= \frac{1}{2}\ln 10 && \ln 1 = 0\\
&\approx 1.151
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Integración de cocientes para la regla de logaritmo

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x}\, dx = \ln|x^3 + x| + C$ $\qquad u = x^3 + x$

b) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\, dx = \ln|\tan x| + C$ $\qquad u = \tan x$

c) $$\begin{aligned}\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x}\, dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x}\, dx && u = x^2 + 2x\\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x| + C\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\int \frac{1}{3x + 2}\, dx &= \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x + 2}\, dx && u = 3x + 2\\
&= \frac{1}{3}\ln|3x + 2| + C\end{aligned}$$

Con antiderivadas o primitivas que contienen logaritmos es fácil obtener formas que parecen diferentes, pero que son equivalentes. Por ejemplo, las siguientes son equivalentes a la antiderivada o primitiva que aparece en el ejemplo 4*d*.

$$\ln|(3x + 2)^{1/3}| + C \qquad \text{y} \qquad \ln|3x + 2|^{1/3} + C$$

Las integrales a las que se aplica la regla de logaritmo aparecen a menudo disfrazadas. Por ejemplo, si una función racional tiene un *numerador de grado mayor o igual que el del denominador*, la división puede revelar una forma a la que se pueda aplicar la regla de logaritmo. Esto se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Usar división larga antes de integrar

Hallar $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx.$

Solución Primero se utiliza la división larga para reescribir el integrando.

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{r|l} & \;1 \\ x^2+1 & \overline{x^2+x+1} \\ & \underline{x^2+1} \\ & x \end{array} \quad\Rightarrow\quad 1+\frac{x}{x^2+1}$$

Ahora, se puede integrar para obtener

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx &= \int\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)dx && \text{Reescribir usando la división larga.}\\ &= \int dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx && \text{Reescribir como dos integrales.}\\ &= x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C. && \text{Integrar.}\end{aligned}$$

Verificar este resultado por derivación para obtener el integrando original.

El siguiente ejemplo presenta otro caso en que el uso de la regla de logaritmo está disfrazado. En este caso, un cambio de la variable ayuda a reconocer la regla de logaritmo.

EJEMPLO 6 Cambio de variable con la regla de logaritmo

Hallar $\displaystyle\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx.$

Solución Si se toma $u = x+1$, entonces $du = dx$ y $x = u-1$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx &= \int\frac{2(u-1)}{u^2}\,du && \text{Sustituir.}\\ &= 2\int\left(\frac{u}{u^2}-\frac{1}{u^2}\right)du && \text{Reescribir como dos fracciones.}\\ &= 2\int\frac{du}{u}-2\int u^{-2}\,du && \text{Reescribir como dos integrales.}\\ &= 2\ln|u|-2\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right)+C && \text{Integrar.}\\ &= 2\ln|u|+\frac{2}{u}+C && \text{Simplificar.}\\ &= 2\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}+C && \text{Sustitución regresiva.}\end{aligned}$$

Comprobar este resultado por derivación para obtener el integrando original.

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un sistema algebraico por computadora, se puede usar para resolver las integrales indefinidas de los ejemplos 5 y 6. Comparar las formas de las primitivas dadas con los resultados obtenidos en los ejemplos 5 y 6.

Al estudiar los métodos mostrados en los ejemplos 5 y 6, está claro que ambos métodos involucran reescribir el integrando disfrazado ajustándolo a una o más fórmulas básicas de integración. En las próximas secciones del capítulo 5 y en el capítulo 8, se estudiarán ampliamente las técnicas de integración. Para dominar estas técnicas, se requiere reconocer la naturaleza de “probar y errar” de la integración. En este sentido, la integración no es tan directa como la derivación. La derivación se plantea así:

“He aquí la pregunta; ¿cuál es la respuesta?”

La integración viene a ser más bien

“He aquí la respuesta; ¿cuál es la pregunta?”

Las siguientes son estrategias que se pueden usar para la integración.

AYUDA DE ESTUDIO Tener en cuenta que se puede comprobar la respuesta de un problema de integración al derivar la respuesta. Como se ve en el ejemplo 7, la derivada de $y = \ln|\ln x| + C$ es $y' = 1/(x \ln x)$.

Estrategias para la integración

1. Memorizar una lista básica de fórmulas de integración. (Incluyendo las dadas en esta sección, ya disponemos de 12 fórmulas: la regla de la potencia, la regla de logaritmo y 10 reglas trigonométricas. Al final de la sección 5.7 la lista se ampliará a 20 reglas básicas.)
2. Buscar una fórmula de integración que se parezca total o parcialmente al integrando, y por prueba y error elegir una u que ajuste el integrando a la fórmula.
3. Si no se puede hallar una sustitución u adecuada, intentar transformar el integrando, mediante identidades trigonométricas, multiplicación y división por la misma cantidad, o suma y resta de una misma cantidad. Se requiere ingenio.
4. Si se tiene acceso a un software de computadora que resuelva antiderivadas, es conveniente usarlo.

EJEMPLO 7 Sustitución u y la regla de logaritmo

Resolver la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \ln x}$.

Solución La solución se puede escribir como una integral indefinida.

$$y = \int \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

Como el integrando es un cociente con denominador de potencia 1, se puede intentar utilizar la regla de logaritmo. Hay tres formas posibles para u. La forma $u = x$ y $u = x \ln x$, no logra ajustarse a la forma u'/u de la regla de logaritmo, sin embargo, la tercera forma sí se ajusta. Si $u = \ln x$, entonces $u' = 1/x$, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x \ln x}\, dx &= \int \frac{1/x}{\ln x}\, dx && \text{Dividir numerador y denominador por } x.\\
&= \int \frac{u'}{u}\, dx && \text{Sustituir } u = \ln x.\\
&= \ln|u| + C && \text{Aplicar regla de logaritmo.}\\
&= \ln|\ln x| + C && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución es $y = \ln|\ln x| + C$.

Integrales de funciones trigonométricas

En la sección 4.1 se estudiaron seis reglas de integración trigonométrica, las seis que corresponden directamente a reglas de derivación. Con la regla de logaritmo, se puede completar el conjunto de reglas básicas de integración trigonométrica.

EJEMPLO 8 Uso de identidad trigonométrica

Hallar $\displaystyle\int \tan x\, dx$.

Solución Esta integral no parece ajustarse a ninguna de las reglas básicas de la lista. Sin embargo, al utilizar una identidad trigonométrica se tiene

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx.$$

Sabiendo que $D_x[\cos x] = -\operatorname{sen} x$, tenemos $u = \cos x$ y escribimos

$$\begin{aligned}
\int \tan x\, dx &= -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= -\int \frac{u'}{u}\, dx && \text{Sustituir } u = \cos x.\\
&= -\ln|u| + C && \text{Aplicar regla de logaritmo.}\\
&= -\ln|\cos x| + C. && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

En el ejemplo 8 se usó una identidad trigonométrica para derivar una regla de integración de la función tangente. En el siguiente ejemplo, se efectúa un paso algo inusual (multiplicar y dividir entre una misma cantidad) para llegar a una fórmula de integración para la función secante.

EJEMPLO 9 Obtención de la fórmula para secante

Hallar $\displaystyle\int \sec x\, dx$.

Solución Considerar el siguiente procedimiento.

$$\begin{aligned}
\int \sec x\, dx &= \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right) dx\\
&= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx
\end{aligned}$$

Al tomar u como el denominador de este cociente se obtiene

$$u = \sec x + \tan x \quad \Rightarrow \quad u' = \sec x \tan x + \sec^2 x.$$

Así, se puede concluir que

$$\begin{aligned}
\int \sec x\, dx &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx && \text{Reescribir el integrando.}\\
&= \int \frac{u'}{u}\, dx && \text{Sustituir } u = \sec x + \tan x.\\
&= \ln|u| + C && \text{Aplicar regla de logaritmo.}\\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C. && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

Con los resultados de los ejemplos 8 y 9, se dispone de las fórmulas de integración de sen x, cos x, tan x y sec x. Las seis reglas trigonométricas se resumen a continuación. (Las demostraciones de cot u y csc u se dejan como ejercicios 91 y 92.)

NOTA Al utilizar las identidades trigonométricas y las propiedades de los logaritmos, se pueden reescribir esas seis reglas de integración de otras maneras. Por ejemplo,

$$\int \csc u\, du = \ln|\csc u - \cot u| + C.$$

(Ver los ejercicios 93 a 96.)

Integrales de las seis funciones trigonométricas básicas

$$\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C \qquad \int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + C \qquad \int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C \qquad \int \csc u\, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$$

EJEMPLO 10 Integración de funciones trigonométricas

Evaluar $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx.$

Solución Si $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, se puede escribir

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x}\, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \sec x\, dx && \sec x \geq 0 \ \text{ para } \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \\
&= \ln|\sec x + \tan x| \Big]_0^{\pi/4} \\
&= \ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - \ln 1 \\
&\approx 0.881.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 11 Encontrar un valor promedio

Encontrar el valor promedio de $f(x) = \tan x$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Solución

$$\begin{aligned}
\text{Valor promedio} &= \frac{1}{(\pi/4) - 0} \int_0^{\pi/4} \tan x\, dx && \text{Valor promedio} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx. \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \tan x\, dx && \text{Simplificar.} \\
&= \frac{4}{\pi}\Big[-\ln|\cos x|\Big]_0^{\pi/4} && \text{Integrar.} \\
&= -\frac{4}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(1)\right] \\
&= -\frac{4}{\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&\approx 0.441
\end{aligned}$$

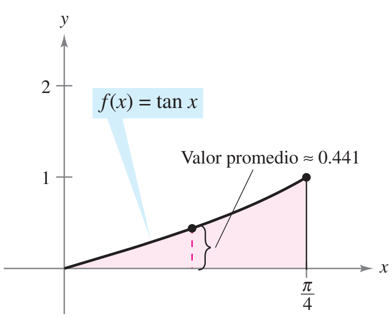


Figura 5.9

El valor promedio está alrededor de 0.441, como se muestra en la figura 5.9.

5.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 26, encontrar la integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \frac{5}{x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{10}{x}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x-5}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{2x+5}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{4-3x}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^2}{5-x^3}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{4x^3+3}{x^4+3x}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{x^2-4}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x(x+2)}{x^3+3x^2-4}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x+1}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-3}{x-2}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+5}{x-3}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{x^3-6x-20}{x+5}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x^4+x-4}{x^2+2}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+4x-9}{x^2+3}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x^3}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{1}{x^{2/3}(1+x^{1/3})}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{2x}{(x-1)^2}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^3}\,dx$

En los ejercicios 27 a 30, hallar la integral indefinida por sustitución *u*. (*Sugerencia:* Tomar *u* como el denominador del integrando.)

27. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{3x}}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$

En los ejercicios 31 a 40, encontrar la integral indefinida.

31. $\displaystyle\int \cot\frac{\theta}{3}\,d\theta$

32. $\displaystyle\int \tan 5\theta\,d\theta$

33. $\displaystyle\int \csc 2x\,dx$

34. $\displaystyle\int \sec\frac{x}{2}\,dx$

35. $\displaystyle\int (\cos 3\theta - 1)\,d\theta$

36. $\displaystyle\int \left(2-\tan\frac{\theta}{4}\right)d\theta$

37. $\displaystyle\int \frac{\cos t}{1+\operatorname{sen} t}\,dt$

38. $\displaystyle\int \frac{\csc^2 t}{\cot t}\,dt$

39. $\displaystyle\int \frac{\sec x\tan x}{\sec x - 1}\,dx$

40. $\displaystyle\int (\sec 2x + \tan 2x)\,dx$

En los ejercicios 41 a 46, resolver la ecuación diferencial. Usar una herramienta de graficación para representar tres soluciones, una de las cuales tiene que pasar por el punto indicado.

41. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{x}, \quad (1, 2)$

42. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-2}{x}, \quad (-1, 0)$

43. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2-x}, \quad (1, 0)$

44. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{x^2-9}, \quad (0, 4)$

45. $\dfrac{ds}{d\theta} = \tan 2\theta, \quad (0, 2)$

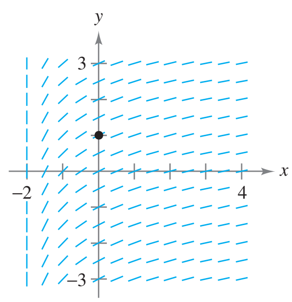
46. $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{\sec^2 t}{\tan t + 1}, \quad (\pi, 4)$

47. Determinar la función f si $f''(x) = \dfrac{2}{x^2}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$, $x > 0$.

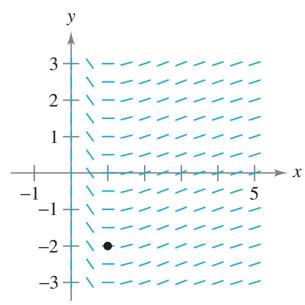
48. Determinar la función f si $f''(x) = -\dfrac{4}{(x-1)^2} - 2$, $f(2) = 3$, $f'(2) = 0$, $x > 1$.

Campos de pendientes **En los ejercicios 49 a 52, se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Trazar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial del campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Hallar por integración la solución particular de la ecuación diferencial y representarla en una herramienta de graficación. Comparar el resultado con los trazos del apartado *a*).**

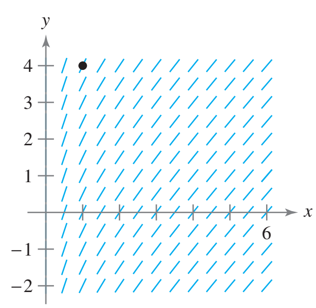
49. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x+2}, \quad (0, 1)$



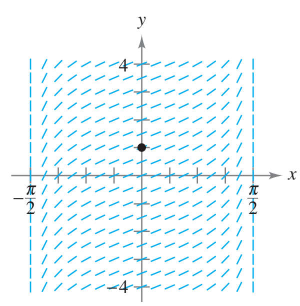
50. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x}{x}, \quad (1, -2)$



51. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{1}{x}, \quad (1, 4)$



52. $\dfrac{dy}{dx} = \sec x, \quad (0, 1)$



En los ejercicios 53 a 60, calcular la integral. Verificar el resultado con una herramienta de graficación.

53. $\displaystyle\int_0^4 \frac{5}{3x+1}\,dx$ **54.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{2x+3}\,dx$

55. $\displaystyle\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$ **56.** $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

57. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2-2}{x+1}\,dx$ **58.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,dx$

59. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1-\cos\theta}{\theta-\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$ **60.** $\displaystyle\int_{0.1}^{0.2} (\csc 2\theta - \cot 2\theta)^2\,d\theta$

CAS **En los ejercicios 61 a 66, usar un sistema algebraico por computadora para hallar o evaluar la integral.**

61. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ **62.** $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

63. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx$ **64.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$

65. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc x - \operatorname{sen} x)\,dx$ **66.** $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos x}\,dx$

En los ejercicios 67 a 70, encontrar $F'(x)$.

67. $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ **68.** $F(x) = \displaystyle\int_0^x \tan t\,dt$

69. $F(x) = \displaystyle\int_1^{3x} \frac{1}{t}\,dt$ **70.** $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{1}{t}\,dt$

Aproximación **En los ejercicios 71 y 72, determinar el valor que mejor aproxima el área de la región entre el eje x y la gráfica de la función en el intervalo dado. (Basar la elección en un esbozo de la región y no en cálculos.)**

71. $f(x) = \sec x,\quad [0, 1]$

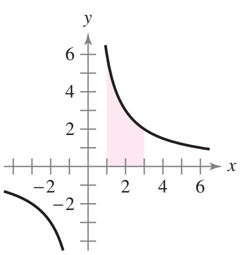
a) 6 *b)* -6 *c)* $\frac{1}{2}$ *d)* 1.25 *e)* 3

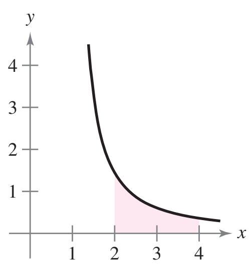
72. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1},\quad [0, 4]$

a) 3 *b)* 7 *c)* -2 *d)* 5 *e)* 1

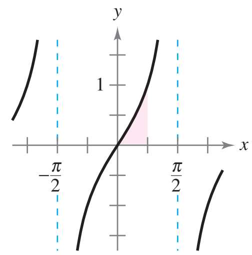
Área **En los ejercicios 73 a 76, calcular el área de la región dada. Verificar el resultado con una herramienta de graficación.**

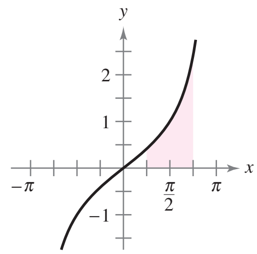
73. $y = \dfrac{6}{x}$ **74.** $y = \dfrac{2}{x\ln x}$





75. $y = \tan x$ **76.** $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$





Área **En los ejercicios 77 a 80, calcular el área de la región delimitada por la gráfica de las ecuaciones. Verificar el resultado con una herramienta de graficación.**

77. $y = \dfrac{x^2+4}{x},\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$

78. $y = \dfrac{x+6}{x},\ x = 1,\ x = 5,\ y = 0$

79. $y = 2\sec\dfrac{\pi x}{6},\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0$

80. $y = 2x - \tan 0.3x,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$

Integración numérica **En los ejercicios 81 a 84 usar la regla de los trapecios y la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral definida. Tomar $n = 4$ y redondear la respuesta a 4 decimales. Verificar el resultado con una herramienta de graficación.**

81. $\displaystyle\int_1^5 \frac{12}{x}\,dx$ **82.** $\displaystyle\int_0^4 \frac{8x}{x^2+4}\,dx$

83. $\displaystyle\int_2^6 \ln x\,dx$ **84.** $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x\,dx$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 85 a 88, especificar la fórmula de integración adecuada. No integrar.

85. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx$ **86.** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$

87. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$ **88.** $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx$

89. Encontrar un valor de x, tal que $\displaystyle\int_1^x \frac{3}{t}\,dt = \int_{1/4}^x \frac{1}{t}\,dt.$

Para discusión

90. Encontrar un valor de x tal que

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

es igual a *a)* ln 5 y *b)* 1.

91. Mostrar que $\int \cot u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.

92. Mostrar que $\int \csc u \, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$.

En los ejercicios 93 a 96, mostrar que las dos fórmulas son equivalentes.

93. $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C$

94. $\int \cot x \, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$

$\int \cot x \, dx = -\ln|\csc x| + C$

95. $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

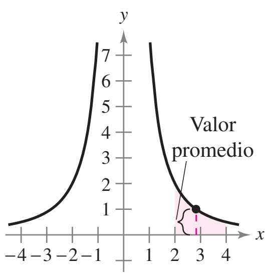
$\int \sec x \, dx = -\ln|\sec x - \tan x| + C$

96. $\int \csc x \, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

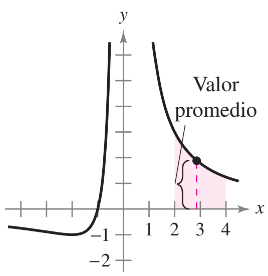
$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

En los ejercicios 97 a 100, encontrar el valor promedio de la función sobre el intervalo dado.

97. $f(x) = \dfrac{8}{x^2}$, $[2, 4]$



98. $f(x) = \dfrac{4(x+1)}{x^2}$, $[2, 4]$



99. $f(x) = \dfrac{2 \ln x}{x}$, $[1, e]$

100. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{6}$, $[0, 2]$

101. ***Crecimiento de una población*** Una población de bacterias cambia a una razón

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3\,000}{1 + 0.25t}$$

donde t es el tiempo en días. La población inicial (cuando $t = 0$) era 1 000. Escribir una ecuación que describa la población en cualquier instante t y calcular la población cuando $t = 3$ días.

102. ***Transferencia de calor*** Calcular el tiempo requerido para enfriar un objeto de 300 a 250° F al evaluar

$$t = \frac{10}{\ln 2} \int_{250}^{300} \frac{1}{T - 100} \, dT$$

donde t es el tiempo en minutos.

103. ***Precio promedio*** La ecuación para la demanda de un producto es

$$p = \frac{90\,000}{400 + 3x}.$$

Calcular su precio *promedio* en el intervalo $40 \leq x \leq 50$.

104. ***Ventas*** La razón de cambio en las ventas S es inversamente proporcional al tiempo t ($t > 1$) medido en semanas. Encontrar S en función de t, si las ventas después de 2 y 4 semanas son 200 y 300 unidades, respectivamente.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 105 a 108, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que confirme que es falsa.**

105. $(\ln x)^{1/2} = \frac{1}{2}(\ln x)$

106. $\int \ln x \, dx = (1/x) + C$

107. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|cx|, \quad c \neq 0$

108. $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x} \, dx = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

109. ***Trayectoria ortogonal***

a) Usar una herramienta de graficación para la ecuación $2x^2 - y^2 = 8$.

b) Evaluar la integral para encontrar y^2 en términos de x.

$$y^2 = e^{-\int (1/x)\, dx}$$

Para un valor particular de la constante de integración, graficar el resultado en la misma ventana usada en el apartado *a*).

c) Verificar que las tangentes para las gráficas en los apartados *a*) y *b*) son perpendiculares a los puntos de intersección.

110. Graficar la función

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

en el intervalo $[0, \infty)$.

a) Encontrar el área delimitada por la gráfica de f y la recta $y = \frac{1}{2}x$.

b) Determinar los valores de la pendiente m en los que la recta $y = mx$ y la gráfica de f están incluidos en la región finita.

c) Calcular el área de esta región como una función de m.

111. ***Desigualdad de Napier*** Para $0 < x < y$, mostrar que

$$\frac{1}{y} < \frac{\ln y - \ln x}{y - x} < \frac{1}{x}.$$

112. Probar que la función

$$F(x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{t} \, dt$$

es constante en el intervalo $(0, \infty)$.

5.3 Funciones inversas

- **Verificar que una función es la inversa de otra.**
- **Determinar si una función tiene una función inversa.**
- **Encontrar la derivada de una función inversa.**

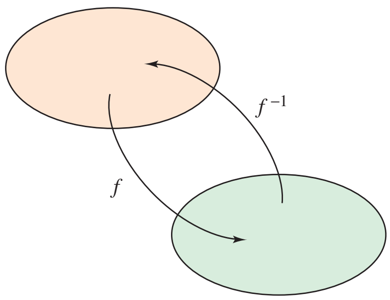
Funciones inversas

Recordar de la sección P.3 que una función se puede representar por un conjunto de pares ordenados. Por ejemplo, la función $f(x) = x + 3$ de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{4, 5, 6, 7\}$, se puede escribir como

$$f : \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}.$$

Por el intercambio de la primera y segunda coordenadas de cada par ordenado se puede formar la **función inversa** de f. Esta función se denota por f^{-1}. Ésta es una función de B en A, y se escribe como

$$f^{-1} : \{(4, 1), (5, 2), (6, 3), (7, 4)\}.$$



Dominio de f = recorrido o rango de f^{-1}
Dominio de f^{-1} = recorrido o rango de f
Figura 5.10

Notar que el dominio de f es el recorrido o rango de f^{-1}, y viceversa, como se ilustra en la figura 5.10. Las funciones f y f^{-1} tienen el efecto de "deshacer" cada una a la otra. Esto es, al componer f con f^{-1} o la composición de f^{-1} con f, se obtiene la función identidad.

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

EXPLORACIÓN

Cálculo de las funciones inversas Explicar cómo "deshacer" lo que hace cada una de las siguientes funciones. Usar la explicación para escribir la función inversa de f.

a) $f(x) = x - 5$
b) $f(x) = 6x$
c) $f(x) = \dfrac{x}{2}$
d) $f(x) = 3x + 2$
e) $f(x) = x^3$
f) $f(x) = 4(x - 2)$

Usar una herramienta de graficación para representar cada función junto con su inversa. ¿Qué observación se puede hacer acerca de cada par de gráficas?

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN INVERSA

Una función g es la **función inversa** de la función f si

$$f(g(x)) = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } g$$

y

$$g(f(x)) = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f.$$

La función g se denota por f^{-1} (se lee como "inversa de f").

NOTA Aunque la notación utilizada para la función inversa se parece a la *notación exponencial*, es un uso distinto del -1 como superíndice. Esto es, en general, $f^{-1}(x) \neq 1/f(x)$. ■

He aquí algunas observaciones relevantes acerca de las funciones inversas.

1. Si g es la función inversa de f, entonces f es la función inversa de g.
2. El dominio de f^{-1} es igual al recorrido o rango de f y el recorrido o rango f^{-1} es igual que el dominio de f.
3. Una función puede no tener función inversa, pero si la tiene, la función inversa es única (ver el ejercicio 108).

Se puede pensar en f^{-1} como una operación que deshace lo hecho por f. Por ejemplo, la resta deshace lo que la suma hace, y la división deshace lo que hace la multiplicación. Usar la definición de función inversa para comprobar:

$$f(x) = x + c \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(x) = x - c \quad \text{son funciones inversas una de la otra.}$$

$$f(x) = cx \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(x) = \frac{x}{c},\ c \neq 0, \quad \text{son funciones inversas una de la otra.}$$

EJEMPLO 1 Comprobación de funciones inversas

Demostrar que las funciones siguientes son mutuamente inversas.

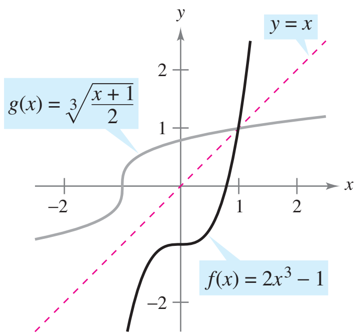
$$f(x) = 2x^3 - 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

Solución Como el dominio y el recorrido o rango de f y g son todos los números reales, se puede concluir que las dos funciones compuestas existen para todo x. La composición de f con g se da por

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 \\ &= 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 \\ &= x + 1 - 1 \\ &= x. \end{aligned}$$

La composición de g con f es

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt[3]{\frac{(2x^3 - 1) + 1}{2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x. \end{aligned}$$



f y g son funciones inversas una de la otra
Figura 5.11

Puesto que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, se puede concluir que f y g son inversas una de otra (ver la figura 5.11).

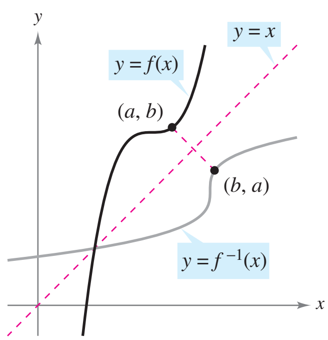
AYUDA DE ESTUDIO En el ejemplo 1, comparar las funciones f y g en forma verbal.

Para f: Primero elevar x al cubo, luego multiplicar por 2, y después restar 1.

Para g: Primero sumar 1, después dividir entre 2, y luego sacar raíz cúbica.

¿Se ve cómo se "deshace el proceso"?

En la figura 5.11, las gráficas de f y $g = f^{-1}$ parecen el reflejo una de la otra respecto a la recta $y = x$. La gráfica de f^{-1} se obtiene **reflejando** la de f en la línea $y = x$. Esta idea generaliza el siguiente teorema.



La gráfica de f^{-1} es un reflejo de la gráfica de f en la recta $y = x$
Figura 5.12

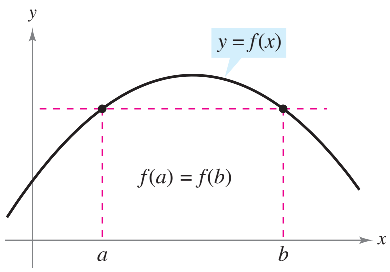
TEOREMA 5.6 PROPIEDAD DE REFLEXIÓN DE LAS FUNCIONES INVERSAS

La gráfica de f contiene el punto (a, b) si y sólo si la gráfica de f^{-1} contiene el punto (b, a).

DEMOSTRACIÓN Si (a, b) está en la gráfica de f, entonces es $f(a) = b$ y se puede escribir

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

De forma que (b, a) está en la gráfica de f^{-1}, como se muestra en la figura 5.12. Un argumento similar demuestra el teorema en la otra dirección.



Si una recta horizontal corta dos veces la gráfica de f, entonces f no es inyectiva
Figura 5.13

Existencia de una función inversa

No todas las funciones tienen función inversa; el teorema 5.6 sugiere un criterio gráfico para aquellas que lo son: el **criterio de la recta horizontal** para una función inversa. Esta prueba establece que la función f tiene inversa si y sólo si toda recta horizontal corta a la gráfica de f a lo más en sólo un punto (figura 5.13). El siguiente teorema explica por qué la prueba de la recta horizontal es válida. (Recordar de la sección 3.3 que la función es *estrictamente monótona* si ésta es creciente o decreciente en todo su dominio.)

TEOREMA 5.7 EXISTENCIA DE LA FUNCIÓN INVERSA

1. Una función tiene función inversa si y sólo si es inyectiva.
2. Si f es estrictamente monótona en todo su dominio, entonces ésta es inyectiva y, por tanto, tiene inversa.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la segunda parte del teorema, recordar de la sección P.3 que f es inyectiva si para x_1 y x_2 en su dominio

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ahora, se escoge x_1 y x_2 en el dominio de f. Si $x_1 \neq x_2$, entonces, como f es estrictamente monótona, se deduce que

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{o} \qquad f(x_1) > f(x_2).$$

En cualquier caso, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por tanto, f es inyectiva en el intervalo. La demostración de la primera parte del teorema se deja como ejercicio (ver el ejercicio 109).

EJEMPLO 2 Existencia de la función inversa

¿Cuál de las funciones tiene inversa?

a) $f(x) = x^3 + x - 1$ *b)* $f(x) = x^3 - x + 1$

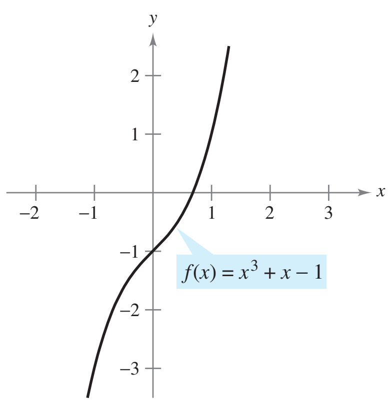
Solución

a) En la figura 5.14*a* se observa una gráfica de f, que aparenta que f es creciente en todo su dominio. Para verificar esto, notar que su derivada, $f'(x) = 3x^2 + 1$, es positiva para todos los valores reales de x. Por tanto, f es estrictamente monótona y debe tener una función inversa.

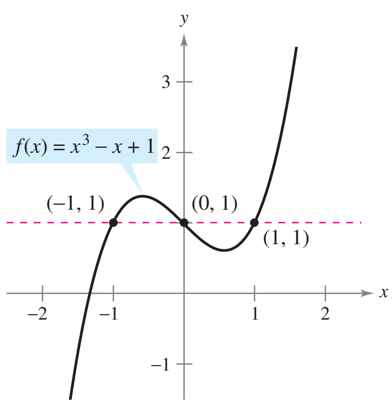
b) En la figura 5.14*b* se observa una gráfica de f, en la que se puede ver que la función no satisface el criterio de la recta horizontal. En otras palabras, no es inyectiva. Por ejemplo, f toma el mismo valor cuando $x = -1$, 0 y 1.

$$f(-1) = f(1) = f(0) = 1 \qquad \text{No inyectiva.}$$

En consecuencia, por el teorema 5.7, f no admite inversa.



a) Dado que f es creciente en todo su dominio, tiene función inversa



b) Dado que f no es inyectiva, no tiene una función inversa
Figura 5.14

NOTA Suele ser más fácil probar que una función *tiene* función inversa que hallarla. Por ejemplo, sería algebraicamente difícil hallar la función inversa del ejemplo 2*a*.

A continuación se sugiere un procedimiento para encontrar la función inversa de una función.

Estrategia para hallar la inversa de una función

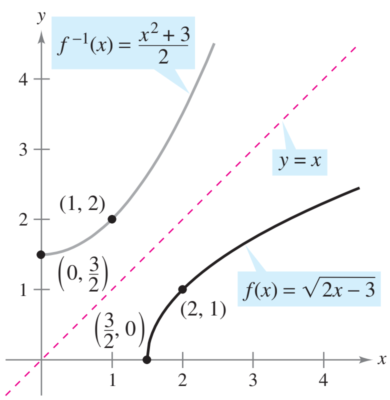
1. Utilizar el teorema 5.7 para determinar si la función dada $y = f(x)$ tiene inversa.
2. Despejar x como función de y: $x = g(y) = f^{-1}(y)$.
3. Intercambiar x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.
4. Definir como dominio de f^{-1} el recorrido de f.
5. Verificar que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

EJEMPLO 3 Cálculo de la inversa de una función

Hallar la función inversa de

$$f(x) = \sqrt{2x - 3}.$$

Solución De la gráfica de f en la figura 5.15, aparece que f se incrementa sobre su dominio entero $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$. Para verificar esto, observar que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$ es positivo sobre el dominio de f. Así, f es estrictamente monótona y debe tener una función inversa. Para encontrar una ecuación para la función inversa, sea $y = f(x)$ y despejar x en términos de y.



El dominio de f^{-1}, $[0, \infty)$ es el recorrido o rango de f
Figura 5.15

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x - 3} &= y && \text{Hacer } y = f(x).\\
2x - 3 &= y^2 && \text{Elevar al cuadrado.}\\
x &= \frac{y^2 + 3}{2} && \text{Despejar } x.\\
y &= \frac{x^2 + 3}{2} && \text{Intercambiar } x \text{ y } y.\\
f^{-1}(x) &= \frac{x^2 + 3}{2} && \text{Sustituir } y \text{ por } f^{-1}(x).
\end{aligned}$$

El dominio de f^{-1} es el recorrido o rango de f, que es $[0, \infty)$. Se puede verificar este resultado como sigue.

$$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{2\left(\frac{x^2 + 3}{2}\right) - 3} = \sqrt{x^2} = x, \quad x \geq 0$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{\left(\sqrt{2x - 3}\right)^2 + 3}{2} = \frac{2x - 3 + 3}{2} = x, \quad x \geq \frac{3}{2}$$

NOTA Recordar que se puede utilizar cualquier letra para representar la variable independiente. Así,

$$f^{-1}(y) = \frac{y^2 + 3}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 3}{2}$$

$$f^{-1}(s) = \frac{s^2 + 3}{2}$$

representan la misma función.

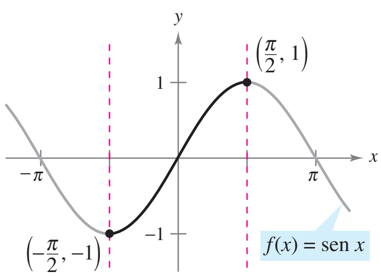
El teorema 5.7 es útil en el siguiente tipo de problemas. Supóngase una función que *no* es inyectiva en su dominio. Al restringir el dominio a un intervalo en que la función sea estrictamente monótona, se obtiene una nueva función que *ya* es inyectiva en el dominio restringido.

EJEMPLO 4 Analizar si una función es inyectiva

Demostrar que la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

no es inyectiva en toda la recta real. Después demostrar que $[-\pi/2, \pi/2]$ es el intervalo más grande, centrado en el origen, en el que f es estrictamente monótona.



f es inyectiva en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$
Figura 5.16

Solución Es claro que f no es inyectiva, ya que muchos valores diferentes de x dan un mismo valor de y. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}(0) = 0 = \operatorname{sen}(\pi).$$

Además, f es creciente en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, porque su derivada

$$f'(x) = \cos x$$

es positiva en él. Por último, como en los puntos terminales a la derecha y a la izquierda hay extremos relativos de la función seno, se puede concluir que la función f es creciente en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$ y que en cualquier otro intervalo mayor, la función no es estrictamente monótona (ver la figura 5.16).

Derivada de la función inversa

Los dos teoremas siguientes discuten la derivada de las funciones inversas. El razonamiento del teorema 8 se sigue de la propiedad reflexiva de la función inversa, como se muestra en la figura 5.12. En el apéndice A pueden verse las demostraciones de los dos teoremas.

TEOREMA 5.8 CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD DE LAS FUNCIONES INVERSAS

Sea f una función cuyo dominio es un intervalo I. Si f tiene una función inversa, entonces los siguientes enunciados son verdaderos.

1. Si f es continua en su dominio, entonces f^{-1} es continua en su dominio.
2. Si f es creciente en su dominio, entonces f^{-1} es creciente en su dominio.
3. Si f es decreciente en su dominio, entonces f^{-1} es decreciente en su dominio.
4. Si f es derivable en c y $f'(c) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(c)$.

TEOREMA 5.9 LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si f tiene una función inversa g, entonces g es derivable para todo x tal que $f'(g(x)) \neq 0$. Además,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(g(x)) \neq 0.$$

EXPLORACIÓN

Graficar las funciones inversas

$$f(x) = x^3$$

y

$$g(x) = x^{1/3}.$$

Calcular la pendiente de f en (1, 1), (2, 8) y (3, 27), y la pendiente de g en (1, 1), (8, 2) y (27, 3). ¿Qué se observa? ¿Qué ocurre en (0, 0)?

EJEMPLO 5 Cálculo de la derivada de una función inversa

Sea $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 1$.

a) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(x)$ para $x = 3$?
b) ¿Cuál es el valor de $(f^{-1})'(x)$ para $x = 3$?

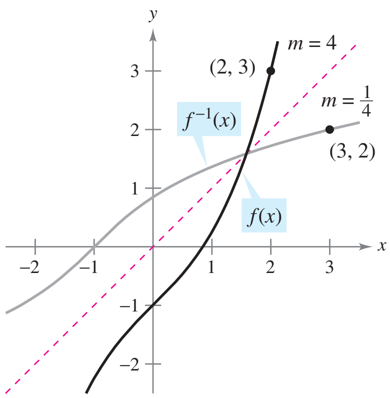
Solución Notar que f es una función inyectiva, así que tiene una función inversa.

a) Como $f(x) = 3$ cuando $x = 2$, se sabe que $f^{-1}(3) = 2$.
b) Como la función f es derivable y tiene inversa, se puede aplicar el teorema 5.9 (con $g = f^{-1}$) y se escribe

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(2)}.$$

Además, usando $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 1$, se concluye que

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{3}{4}(2^2) + 1} = \frac{1}{4}.$$



Las gráficas de las funciones inversas f y f^{-1} tienen pendientes recíprocas en los puntos (a, b) y (b, a)
Figura 5.17

En el ejemplo 5, notar que la pendiente en el punto (2, 3) de la gráfica de f es 4 y la pendiente de f^{-1} en el punto (3, 2) es $\frac{1}{4}$ (ver la figura 5.17). Esta relación recíproca (que se sigue del teorema 5.9) puede escribirse como se muestra.

Si $y = g(x) = f^{-1}(x)$, entonces $f(y) = x$ y $f'(y) = \dfrac{dx}{dy}$. El teorema 5.9 dice que

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(dx/dy)}.$$

Así que, $$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}.}$$

EJEMPLO 6 Las gráficas de las funciones inversas tienen pendientes recíprocas

Sea $f(x) = x^2$ (para $x \geq 0$) y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Probar que las pendientes de las gráficas de f y f^{-1} son recíprocas en los puntos siguientes.

a) (2, 4) y (4, 2) ***b)*** (3, 9) y (9, 3)

Solución Las derivadas de f y f^{-1} están dadas por

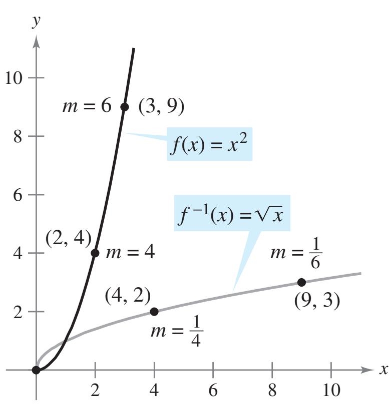
$$f'(x) = 2x \quad \text{y} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

a) En (2, 4), la pendiente de la gráfica de f es $f'(2) = 2(2) = 4$. En (4, 2) la pendiente de la gráfica de f^{-1} es

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}.$$

b) En el punto (3, 9), la pendiente de la gráfica de f es $f'(3) = 2(3) = 6$. En (9, 3), la pendiente de la gráfica de f^{-1} es

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}.$$



En (0, 0), la derivada de f es 0, y la derivada de f^{-1} no existe
Figura 5.18

Así, en ambos casos, las pendientes son recíprocas, como ilustra la figura 5.18.

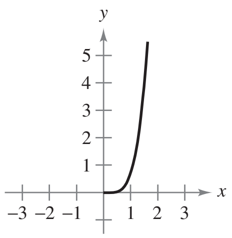
5.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, mostrar que f y g son funciones inversas *a*) analíticamente y *b*) gráficamente.

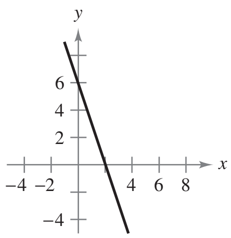
1. $f(x) = 5x + 1$, $\quad g(x) = \dfrac{x - 1}{5}$
2. $f(x) = 3 - 4x$, $\quad g(x) = \dfrac{3 - x}{4}$
3. $f(x) = x^3$, $\quad g(x) = \sqrt[3]{x}$
4. $f(x) = 1 - x^3$, $\quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$
5. $f(x) = \sqrt{x - 4}$, $\quad g(x) = x^2 + 4, \quad x \geq 0$
6. $f(x) = 16 - x^2, \quad x \geq 0$, $\quad g(x) = \sqrt{16 - x}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}, \quad x \geq 0$, $\quad g(x) = \dfrac{1 - x}{x}, \quad 0 < x \leq 1$

En los ejercicios 9 a 12, relacionar la gráfica de la función con la gráfica de su inversa. [Las gráficas de las funciones inversas están rotuladas *a*), *b*), *c*) y *d*).]

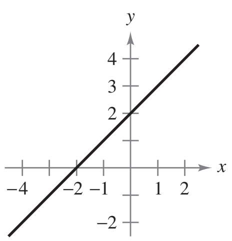
a)



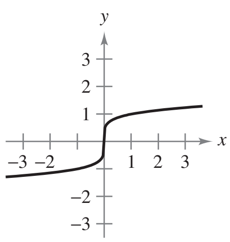
b)



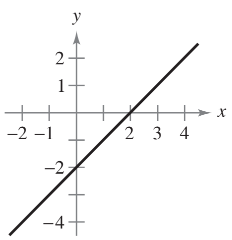
c)



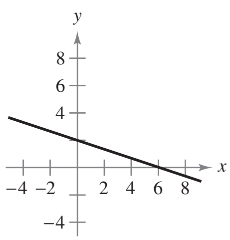
d)



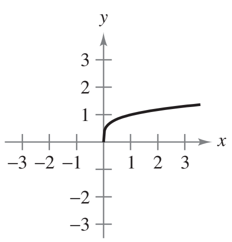
9.



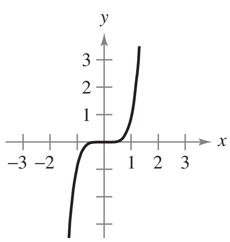
10.



11.



12.



En los ejercicios 13 a 22, usar una herramienta de graficación para representar la función. Entonces, usar la prueba de la recta horizontal para determinar si la función es inyectiva en su dominio entero y así tiene una función inversa.

13. $f(x) = \frac{3}{4}x + 6$
14. $f(x) = 5x - 3$
15. $f(\theta) = \operatorname{sen} \theta$
16. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$
17. $h(s) = \dfrac{1}{s - 2} - 3$
18. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$
19. $f(x) = \ln x$
20. $f(x) = 5x\sqrt{x - 1}$
21. $g(x) = (x + 5)^3$
22. $h(x) = |x + 4| - |x - 4|$

En los ejercicios 23 a 30, *a*) encontrar la función inversa de f, *b*) graficar f y f^{-1} sobre la misma configuración de ejes coordenados, *c*) describir la relación entre las gráficas y *d*) establecer el dominio y el rango de f y f^{-1}.

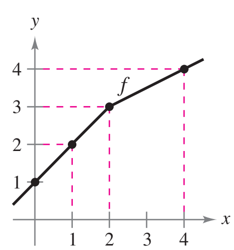
23. $f(x) = 2x - 3$
24. $f(x) = 3x$
25. $f(x) = x^5$
26. $f(x) = x^3 - 1$
27. $f(x) = \sqrt{x}$
28. $f(x) = x^2, \quad x \geq 0$
29. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$
30. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad x \geq 2$

En los ejercicios 31 a 36, *a*) encontrar la función inversa de f. *b*) Usar una herramienta de graficación para representar f y f^{-1} en la misma pantalla. *c*) Describir la relación entre las gráficas y *d*) establecer el dominio así como el recorrido o rango de f y f^{-1}.

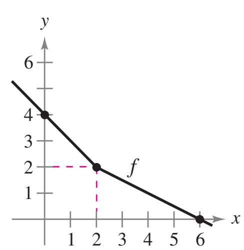
31. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$
32. $f(x) = 3\sqrt[5]{2x - 1}$
33. $f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$
34. $f(x) = x^{3/5}$
35. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 7}}$
36. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$

En los ejercicios 37 y 38, usar la gráfica de la función f para hacer una tabla de valores para los puntos dados. Entonces, hacer una segunda tabla que pueda usarse para encontrar f^{-1} y bosquejar la gráfica de f^{-1}.

37.



38.



39. ***Costo*** Supóngase que se necesitan 50 libras de dos productos que cuestan \$1.25 y \$1.60 por libra.

a) Verificar que el costo total es $y = 1.25x + 1.60(50 - x)$, donde x es el número de libras del producto más barato.

b) Encontrar la función inversa de la función costo. ¿Qué representa cada variable en la función inversa?

c) ¿Cuál es el dominio de la función inversa? Validar o explicar el resultado a partir del contexto del problema.

d) Determinar el número de libras del producto más barato si el costo total es de \$73.

40. ***Temperatura*** La temperatura $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde $F \geq -459.6$, representa la temperatura C en grados Celsius como una función de la temperatura F en grados Fahrenheit.

a) Encontrar la función inversa de C.

b) ¿Qué representa la función inversa?

c) Determinar el dominio de la función inversa. Validar o explicar el resultado con el contexto del problema.

d) La temperatura es de 22° C. ¿Cuál es la temperatura correspondiente en grados Fahrenheit?

En los ejercicios 41 a 46, usar la derivada para determinar si la función es estrictamente monótona en su dominio completo y, por tanto, tiene una función inversa.

41. $f(x) = 2 - x - x^3$ **42.** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$

43. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$ **44.** $f(x) = (x + a)^3 + b$

45. $f(x) = \ln(x - 3)$ **46.** $f(x) = \cos \dfrac{3x}{2}$

En los ejercicios 47 a 52, mostrar que *f* es estrictamente monótona en el intervalo dado y, por tanto, tiene una función inversa en ese intervalo.

47. $f(x) = (x - 4)^2, \quad [4, \infty)$ **48.** $f(x) = |x + 2|, \quad [-2, \infty)$

49. $f(x) = \dfrac{4}{x^2}, \quad (0, \infty)$ **50.** $f(x) = \cot x, \quad (0, \pi)$

51. $f(x) = \cos x, \quad [0, \pi]$ **52.** $f(x) = \sec x, \quad \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

En los ejercicios 53 y 54, encontrar la inversa de *f* en el intervalo indicado. Usar una herramienta de graficación para representar *f* y f^{-1} en una misma pantalla. Describir la relación entre ambas gráficas.

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}, \quad (-2, 2)$ **54.** $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x^2}, \quad (0, 10)$

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 55 a 58, *a*) usar una herramienta de graficación para representar la función, *b*) representar su función inversa utilizando la herramienta de graficación y *c*) determinar si la gráfica de la relación inversa es una función inversa. Explicar la respuesta.**

55. $f(x) = x^3 + x + 4$ **56.** $h(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

57. $g(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 1}$ **58.** $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + 15}}$

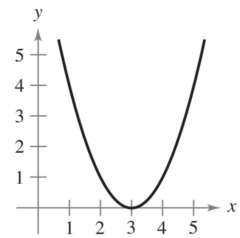
En los ejercicios 59 a 62, determinar si la función es inyectiva. Si lo es, encontrar su función inversa.

59. $f(x) = \sqrt{x - 2}$ **60.** $f(x) = -3$

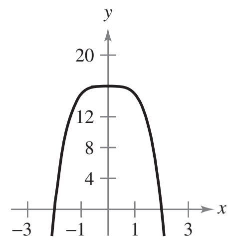
61. $f(x) = |x - 2|, \quad x \leq 2$ **62.** $f(x) = ax + b, \quad a \neq 0$

En los ejercicios 63 a 66, desechar la parte del dominio con el fin de que la función restringida sea inyectiva. Encontrar la función inversa de la función resultante y dar su dominio. (*Nota*: Hay más de una respuesta correcta.)

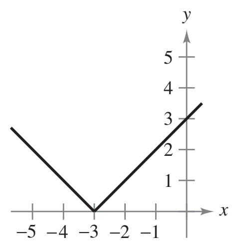
63. $f(x) = (x - 3)^2$



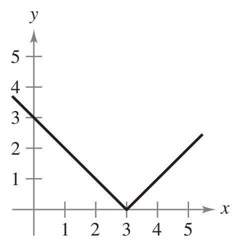
64. $f(x) = 16 - x^4$



65. $f(x) = |x + 3|$



66. $f(x) = |x - 3|$



Para pensar **En los ejercicios 67 a 70, determinar si la función admite inversa. Si es así, ¿cuál es la función inversa?**

67. $g(t)$ es el volumen de agua que ha pasado por una tubería a t minutos de abrir la llave de paso.

68. $h(t)$ es el nivel de la marea t horas pasada la medianoche, donde $0 \leq t < 24$.

69. $C(t)$ es el costo de una llamada telefónica de t minutos.

70. $A(r)$ es el área de un círculo de radio r.

En los ejercicios 71 a 80, verificar si *f* tiene una inversa. Entonces usar la función *f* y el número real dado *a* para encontrar $(f^{-1})'(a)$. (*Sugerencia:* Ver el ejemplo 5.)

71. $f(x) = x^3 - 1, \quad a = 26$ **72.** $f(x) = 5 - 2x^3, \quad a = 7$

73. $f(x) = x^3 + 2x - 1, \quad a = 2$

74. $f(x) = \frac{1}{27}(x^5 + 2x^3), \quad a = -11$

75. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \quad a = \dfrac{1}{2}$

76. $f(x) = \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \quad a = 1$

77. $f(x) = \dfrac{x + 6}{x - 2}, \quad x > 2, \quad a = 3$

78. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}, \quad x > -1, \quad a = 2$

79. $f(x) = x^3 - \dfrac{4}{x}, \quad x > 0, \quad a = 6$

80. $f(x) = \sqrt{x-4}, \quad a = 2$

En los ejercicios 81 a 84, *a*) hallar el dominio de f y de f^{-1}, *b*) encontrar los recorridos o rangos de f y f^{-1}, *c*) graficar f y f^{-1}, y *d*) demostrar que las pendientes de las gráficas de f y f^{-1} son recíprocas en los puntos dados.

	Funciones	*Punto*
81.	$f(x) = x^3$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$
	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$
82.	$f(x) = 3 - 4x$	$(1, -1)$
	$f^{-1}(x) = \dfrac{3-x}{4}$	$(-1, 1)$
83.	$f(x) = \sqrt{x-4}$	$(5, 1)$
	$f^{-1}(x) = x^2 + 4, \quad x \geq 0$	$(1, 5)$
84.	$f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}, \quad x \geq 0$	$(1, 2)$
	$f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$	$(2, 1)$

En los ejercicios 85 y 86, encontrar dy/dx en los puntos dados para la ecuación.

85. $x = y^3 - 7y^2 + 2, \quad (-4, 1)$

86. $x = 2\ln(y^2 - 3), \quad (0, 2)$

En los ejercicios 87 a 90, usar las funciones $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ y $g(x) = x^3$ para encontrar los valores dados.

87. $(f^{-1} \circ g^{-1})(1)$

88. $(g^{-1} \circ f^{-1})(-3)$

89. $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$

90. $(g^{-1} \circ g^{-1})(-4)$

En los ejercicios 91 a 94, usar las funciones $f(x) = x + 4$ y $g(x) = 2x - 5$ para encontrar las funciones dadas.

91. $g^{-1} \circ f^{-1}$

92. $f^{-1} \circ g^{-1}$

93. $(f \circ g)^{-1}$

94. $(g \circ f)^{-1}$

Desarrollo de conceptos

95. Describir cómo encontrar la función inversa de una función inyectiva dada por una ecuación en x y y. Dar un ejemplo.

96. Describir la relación entre la gráfica de una función y la gráfica de su función inversa.

En los ejercicios 97 y 98, la derivada de la función tiene el mismo signo para todo x en su dominio, pero la función no es inyectiva. Explicar.

97. $f(x) = \tan x$

98. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

99. ***Para pensar*** La función $f(x) = k(2 - x - x^3)$ es inyectiva y $f^{-1}(3) = -2$. Encontrar k.

Para discusión

100. ***Para pensar*** El punto $(1, 3)$ se encuentra en la gráfica de f, y la pendiente de la recta tangente por este punto es $m = 2$. Suponer que f^{-1} existe. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente para la gráfica de f^{-1} en el punto $(3, 1)$?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 101 a 104, determinar cuál de las sentencias es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre que es falsa.**

101. Si f es una función par entonces f^{-1} existe.

102. Si la función inversa de f existe, entonces la intersección en y de f es una intersección en x de f^{-1}.

103. Si $f(x) = x^n$ donde n es impar, entonces f^{-1} existe.

104. No existe ninguna función f tal que $f = f^{-1}$.

105. *a*) Mostrar que $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ no es inyectiva en $(-\infty, \infty)$.

b) Determinar el mayor valor de c de forma que f sea inyectiva en $(-c, c)$.

106. Sean f y g funciones inyectivas. Probar que *a*) $f \circ g$ es inyectiva y *b*) $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

107. Probar que si f tiene una función inversa, entonces $(f^{-1})^{-1} = f$.

108. Demostrar que si una función tiene una función inversa, la función inversa es única.

109. Demostrar que una función tiene inversa si y sólo si es inyectiva.

110. ¿Es cierto el recíproco de la segunda parte del teorema 5.7? Esto es, si una función es inyectiva (y tiene una función inversa), entonces ¿debe ser, por tanto, una función estrictamente monótona? Si es cierto, demostrarlo. Si no lo es, dar un contraejemplo.

111. Sea f dos veces derivable e inyectiva en un intervalo abierto I. Probar que su función inversa g satisface

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3}.$$

Si f es creciente y cóncava hacia abajo, ¿cómo es la concavidad de $f^{-1} = g$?

112. Si $f(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$, encontrar $(f^{-1})'(0)$.

113. Demostrar que $f(x) = \displaystyle\int_2^x \sqrt{1+t^2}\,dt$ es inyectiva y encontrar $(f^{-1})'(0)$.

114. Sea $y = \dfrac{x-2}{x-1}$. Demostrar que y es su propia función inversa. ¿Qué se puede concluir acerca de la gráfica de f? Explicar.

115. Sea $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

a) Mostrar que f es inyectiva si y sólo si $bc - ad \neq 0$.

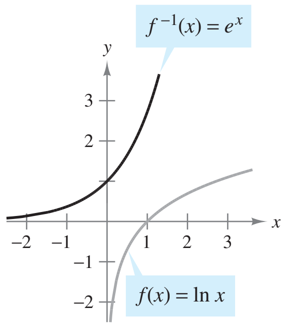
b) Dado $bc - ad \neq 0$, encontrar f^{-1}.

c) Determinar los valores de a, b, c y d tal que $f = f^{-1}$.

5.4 Funciones exponenciales: derivación e integración

- Desarrollar las propiedades de la función exponencial natural.
- Derivar las funciones exponenciales naturales.
- Integrar las funciones exponenciales naturales.

La función exponencial natural



La función inversa de la función logaritmo natural es la función exponencial natural
Figura 5.19

La función $f(x) = \ln x$ es creciente en todo su dominio, y por tanto tiene una función inversa f^{-1}. El dominio de f^{-1} es el conjunto de todos los reales, y el recorrido o rango es el conjunto de todos los reales positivos, como se muestra en la figura 5.19. Así pues, para cualquier número real x,

$$f(f^{-1}(x)) = \ln[f^{-1}(x)] = x.$$ x es cualquier número real.

Si x es racional, entonces

$$\ln(e^x) = x \ln e = x(1) = x.$$ x es un número racional.

Como la función logaritmo natural es inyectiva, se puede concluir que $f^{-1}(x)$ y e^x son iguales en valores *racionales* de x. La siguiente definición extiende el significado de e^x para incluir *todos* los valores reales de x.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

La función inversa de la función logaritmo natural $f(x) = \ln x$ se llama **función exponencial natural** y se denota por

$$f^{-1}(x) = e^x.$$

Esto es,

$$y = e^x \text{ si y sólo si } x = \ln y.$$

El número e

El símbolo e fue utilizado por primera vez para representar la base de los logaritmos naturales por el matemático Leonhard Euler en una carta a otro matemático, Christian Goldbach, en 1731.

La relación inversa entre las funciones logaritmo natural y exponencial natural se puede resumir como sigue:

$$\ln(e^x) = x \quad \text{y} \quad e^{\ln x} = x$$ Relación inversa.

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones exponenciales

Resolver $7 = e^{x+1}$.

Solución Se puede pasar de la forma exponencial a la forma logarítmica con sólo *aplicar el logaritmo natural en ambos miembros* de la ecuación.

$7 = e^{x+1}$	Ecuación original.
$\ln 7 = \ln(e^{x+1})$	Aplicar logaritmo natural a cada lado.
$\ln 7 = x + 1$	Aplicar la propiedad de inversa.
$-1 + \ln 7 = x$	Despejar x.
$0.946 \approx x$	Usar la calculadora.

Verificar esta solución en la ecuación original.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación logarítmica

Resolver $\ln(2x - 3) = 5$.

Solución Para convertir la forma logarítmica en la forma exponencial aplicar la función exponencial de ambos miembros de la ecuación logarítmica.

$$\ln(2x - 3) = 5 \qquad \text{Ecuación original.}$$
$$e^{\ln(2x-3)} = e^5 \qquad \text{Aplicar exponenciales a cada lado.}$$
$$2x - 3 = e^5 \qquad \text{Aplicar la propiedad inversa.}$$
$$x = \tfrac{1}{2}(e^5 + 3) \qquad \text{Despejar } x.$$
$$x \approx 75.707 \qquad \text{Usar la calculadora.}$$

Las reglas usuales para operar con exponentes racionales pueden ser extendidas a la función exponencial natural, como se muestra en el siguiente teorema.

TEOREMA 5.10 OPERACIONES CON FUNCIONES EXPONENCIALES

Sean a y b dos números reales arbitrarios.

1. $e^a e^b = e^{a+b}$
2. $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

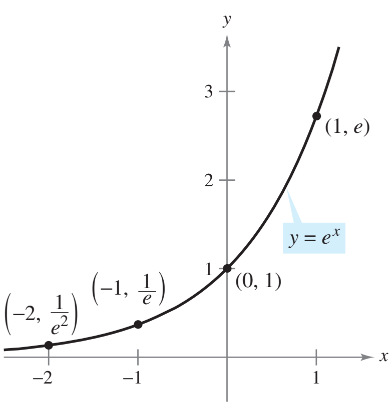
DEMOSTRACIÓN Para demostrar la propiedad 1, se puede escribir

$$\ln(e^a e^b) = \ln(e^a) + \ln(e^b)$$
$$= a + b$$
$$= \ln(e^{a+b}).$$

Como la función logaritmo natural es inyectiva, se puede concluir como

$$e^a e^b = e^{a+b}.$$

La demostración de la segunda propiedad se da en el apéndice A.



La función exponencial natural es creciente y su gráfica es cóncava hacia arriba
Figura 5.20

En la sección 5.3 se aprendió que una función inversa f^{-1} comparte muchas propiedades con f. Así, la función exponencial natural hereda las siguientes propiedades de la función logaritmo natural (ver la figura 5.20).

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

1. El dominio de $f(x) = e^x$ es $(-\infty, \infty)$, y el rango es $(0, \infty)$.
2. La función $f(x) = e^x$ es continua, creciente e inyectiva en todo su dominio.
3. La gráfica de $f(x) = e^x$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$.

Derivadas de las funciones exponenciales

Una de las características más intrigantes (y más útiles) de la función exponencial natural es que *su derivada es ella misma*. En otras palabras, es solución de la ecuación diferencial $y' = y$. Este resultado se enuncia en el siguiente teorema.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para encontrar más información acerca de derivadas de funciones exponenciales de orden $\frac{1}{2}$, ver el artículo "A Child's Garden of Fractional Derivates", de Marcia Kleinz y Thomas J. Osler en *The College Mathematics Journal*.

TEOREMA 5.11 DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Si u es una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$

2. $\dfrac{d}{dx}[e^u] = e^u\dfrac{du}{dx}$

DEMOSTRACIÓN Para probar la propiedad 1, usar el hecho de que $\ln e^x = x$, y derivar cada lado de la ecuación.

$$\ln e^x = x \qquad \text{Definición de la función exponencial.}$$

$$\frac{d}{dx}[\ln e^x] = \frac{d}{dx}[x] \qquad \text{Derivar ambos lados con respecto a } x.$$

$$\frac{1}{e^x}\frac{d}{dx}[e^x] = 1$$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

La derivada e^u se deduce de la regla de la cadena.

NOTA Se puede interpretar este teorema geométricamente diciendo que la pendiente de la gráfica de $f(x) = e^x$ en cualquier punto (x, e^x) es igual a la coordenada y del punto.

EJEMPLO 3 Derivación de funciones exponenciales

a) $\dfrac{d}{dx}[e^{2x-1}] = e^u\dfrac{du}{dx} = 2e^{2x-1}$ $\qquad u = 2x - 1$

b) $\dfrac{d}{dx}[e^{-3/x}] = e^u\dfrac{du}{dx} = \left(\dfrac{3}{x^2}\right)e^{-3/x} = \dfrac{3e^{-3/x}}{x^2}$ $\qquad u = -\dfrac{3}{x}$

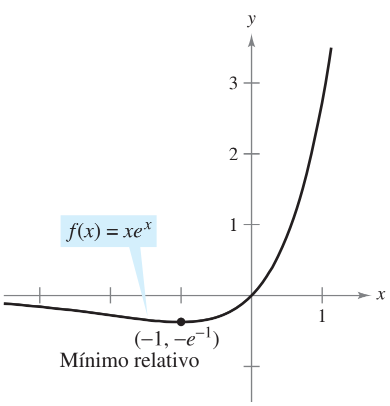
EJEMPLO 4 Localización de extremos relativos

Encontrar los extremos relativos de $f(x) = xe^x$.

Solución La derivada de f está dada por

$$f'(x) = x(e^x) + e^x(1) \qquad \text{Regla del producto.}$$
$$= e^x(x + 1).$$

Como e^x nunca es 0, la derivada es 0 sólo cuando $x = -1$. Además, el criterio de la primera derivada permite determinar que en ese punto hay un mínimo relativo, como se muestra en la figura 5.21. Como la derivada $f'(x) = e^x(x + 1)$ está definida para todo x, no hay otros puntos críticos.



La derivada de f cambia de negativo a positivo en $x = -1$
Figura 5.21

EJEMPLO 5 La función densidad de probabilidad normal estándar

Probar que la *función densidad de probabilidad normal estándar*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

tiene puntos de inflexión cuando $x = \pm 1$.

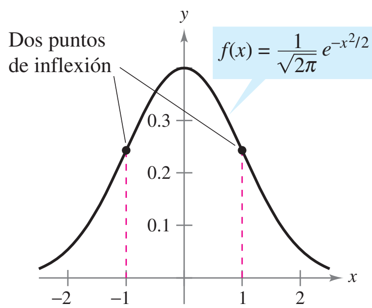
Solución Para localizar los posibles puntos de inflexión, se deben buscar los valores de x para los cuales la segunda derivada es cero.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \qquad \text{Función original.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x)e^{-x^2/2} \qquad \text{Primera derivada.}$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[(-x)(-x)e^{-x^2/2} + (-1)e^{-x^2/2}] \qquad \text{Regla del producto.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-x^2/2})(x^2 - 1) \qquad \text{Segunda derivada.}$$



La curva en forma de campana dada por una función de densidad de probabilidad estándar normal
Figura 5.22

Por tanto, $f''(x) = 0$ cuando $x = \pm 1$, y se pueden aplicar las técnicas del capítulo 3 para concluir que estos valores son los dos puntos de inflexión mostrados en la figura 5.22.

NOTA La forma general de una función de densidad de probabilidad normal (cuya media es 0) está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

donde σ es la desviación estándar (σ es la letra griega minúscula sigma). Esta "curva en forma de campana" tiene puntos de inflexión cuando $x = \pm\sigma$.

EJEMPLO 6 Transacciones comerciales

El número y de transacciones comerciales (en millones) en la bolsa de valores de Nueva York desde 1990 hasta 2005 puede ser modelado por

$$y = 39\,811e^{0.1715t}$$

donde t representa el año, $t = 0$ corresponde a 1990. ¿A qué ritmo o velocidad cambió el número de transacciones comerciales en 2000? (*Fuente: New York Stock Exchange, Inc.*)

Solución La derivada del modelo dado es

$$y' = (0.1715)(39\,811)e^{0.1715t}$$
$$\approx 6\,828e^{0.1715t}.$$

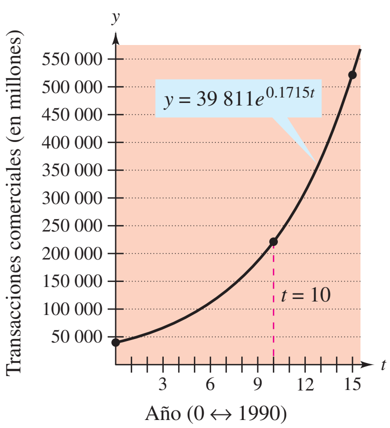


Figura 5.23

Al evaluar la derivada cuando $t = 10$, se puede concluir que el ritmo o velocidad de cambio en 2000 fue cerca de

37 941 millones de transacciones por año.

La gráfica de este modelo se muestra en la figura 5.23.

Integrales de funciones exponenciales

Cada fórmula de derivación en el teorema 5.11 tiene su correspondiente fórmula de integración.

TEOREMA 5.12 REGLAS DE INTEGRACIÓN PARA FUNCIONES EXPONENCIALES

Si u es una función derivable de x.

1. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$ **2.** $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$

EJEMPLO 7 Integración de funciones exponenciales

Encontrar $\displaystyle\int e^{3x+1}\,dx$.

Solución Si $u = 3x + 1$, entonces $du = 3\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int e^{3x+1}dx &= \frac{1}{3}\int e^{3x+1}(3)\,dx && \text{Multiplicar y dividir entre 3.}\\
&= \frac{1}{3}\int e^{u}\,du && \text{Sustituir } u = 3x + 1.\\
&= \frac{1}{3}e^{u} + C && \text{Aplicar la regla exponencial.}\\
&= \frac{e^{3x+1}}{3} + C && \text{Sustituir nuevamente.}
\end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 7, el factor constante faltante 3 se ha introducido para crear $du = 3\,dx$. Sin embargo, recordemos que no se puede introducir un factor *variable* faltante en el integrando. Por ejemplo,

$$\int e^{-x^2}\,dx \qquad \frac{1}{x}\int e^{-x^2}\,(x\,dx).$$

EJEMPLO 8 Integración de funciones exponenciales

Encontrar $\displaystyle\int 5xe^{-x^2}\,dx$.

Solución Si se tiene $u = -x^2$, entonces $du = -2x\,dx$ o $x\,dx = -du/2$.

$$\begin{aligned}
\int 5xe^{-x^2}dx &= \int 5e^{-x^2}(x\,dx) && \text{Reagrupar el integrando.}\\
&= \int 5e^{u}\left(-\frac{du}{2}\right) && \text{Sustituir } u = -x^2.\\
&= -\frac{5}{2}\int e^{u}\,du && \text{Regla del múltiplo constante.}\\
&= -\frac{5}{2}e^{u} + C && \text{Aplicar la regla exponencial.}\\
&= -\frac{5}{2}e^{-x^2}+C && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Integración de funciones exponenciales

a)
$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = -\int \underbrace{e^{1/x}}_{e^u}\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx}_{du} \qquad u = \frac{1}{x}$$
$$= -e^{1/x} + C$$

b)
$$\int \operatorname{sen} x\, e^{\cos x}\,dx = -\int \underbrace{e^{\cos x}}_{e^u}\underbrace{(-\operatorname{sen} x\,dx)}_{du} \qquad u = \cos x$$
$$= -e^{\cos x} + C$$

EJEMPLO 10 Cálculo de áreas acotadas o delimitadas por funciones exponenciales

Evaluar cada una de las integrales definidas.

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_{-1}^0 [e^x\cos(e^x)]\,dx$

Solución

a)
$$\int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big]_0^1 \qquad \text{Ver la figura 5.24}a.$$
$$= -e^{-1} - (-1)$$
$$= 1 - \frac{1}{e}$$
$$\approx 0.632$$

b)
$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x)\Big]_0^1 \qquad \text{Ver la figura 5.24}b.$$
$$= \ln(1+e) - \ln 2$$
$$\approx 0.620$$

c)
$$\int_{-1}^0 [e^x\cos(e^x)]\,dx = \operatorname{sen}(e^x)\Big]_{-1}^0 \qquad \text{Ver la figura 5.24}c.$$
$$= \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen}(e^{-1})$$
$$\approx 0.482$$

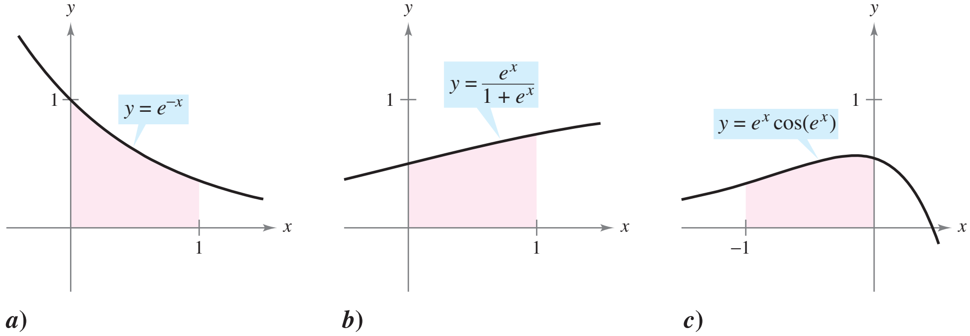


Figura 5.24

5.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 16, calcular x redondeando a tres decimales.

1. $e^{\ln x} = 4$
2. $e^{\ln 2x} = 12$
3. $e^x = 12$
4. $4e^x = 83$
5. $9 - 2e^x = 7$
6. $-6 + 3e^x = 8$
7. $50e^{-x} = 30$
8. $200e^{-4x} = 15$
9. $\dfrac{800}{100 - e^{x/2}} = 50$
10. $\dfrac{5\,000}{1 + e^{2x}} = 2$
11. $\ln x = 2$
12. $\ln x^2 = 10$
13. $\ln(x - 3) = 2$
14. $\ln 4x = 1$
15. $\ln\sqrt{x + 2} = 1$
16. $\ln(x - 2)^2 = 12$

En los ejercicios 17 a 22, dibujar la gráfica de la función

17. $y = e^{-x}$
18. $y = \frac{1}{2}e^x$
19. $y = e^x + 2$
20. $y = e^{x-1}$
21. $y = e^{-x^2}$
22. $y = e^{-x/2}$

23. Usar una herramienta de graficación para representar $f(x) = e^x$ y la función dada en la misma pantalla. ¿Cómo es la relación de las dos gráficas?

 a) $g(x) = e^{x-2}$ *b*) $h(x) = -\frac{1}{2}e^x$ *c*) $q(x) = e^{-x} + 3$

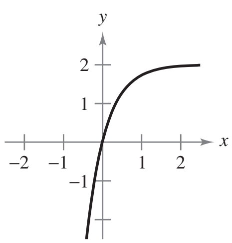
24. Usar una herramienta de graficación para representar la función. Usar la gráfica para determinar las asíntotas de la función.

 a) $f(x) = \dfrac{8}{1 + e^{-0.5x}}$

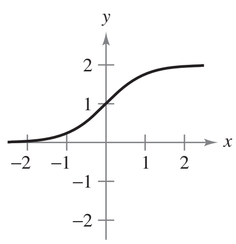
 b) $g(x) = \dfrac{8}{1 + e^{-0.5/x}}$

En los ejercicios 25 a 28, asociar cada ecuación con su gráfica. Suponer que a y C son números reales positivos. [Las gráficas están etiquetadas con *a*), *b*), *c*) y *d*).]

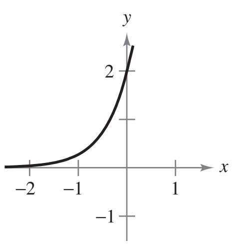
a)



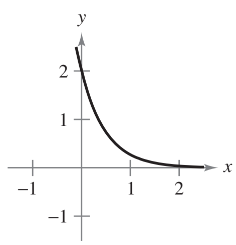
b)



c)



d)



25. $y = Ce^{ax}$
26. $y = Ce^{-ax}$
27. $y = C(1 - e^{-ax})$
28. $y = \dfrac{C}{1 + e^{-ax}}$

En los ejercicios 29 a 32, confirmar que las funciones son inversas una de la otra al representar ambas funciones sobre el mismo sistema de coordenadas.

29. $f(x) = e^{2x}$
 $g(x) = \ln\sqrt{x}$
30. $f(x) = e^{x/3}$
 $g(x) = \ln x^3$
31. $f(x) = e^x - 1$
 $g(x) = \ln(x + 1)$
32. $f(x) = e^{x-1}$
 $g(x) = 1 + \ln x$

33. ***Análisis gráfico*** Usar una herramienta de graficación para representar

$$f(x) = \left(1 + \frac{0.5}{x}\right)^x \qquad \text{y} \qquad g(x) = e^{0.5}$$

en la misma pantalla. ¿Cuál es la relación entre f y g cuando $x \to \infty$?

34. ***Conjetura*** Usar el resultado del ejercicio 33 para hacer una conjetura acerca del valor de

$$\left(1 + \frac{r}{x}\right)^x$$

como $x \to \infty$.

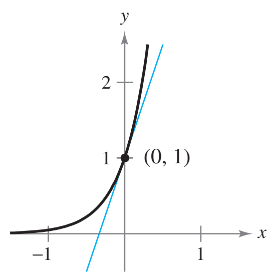
En los ejercicios 35 y 36, comparar los números dados con el número e. ¿Es el número mayor o menor que e?

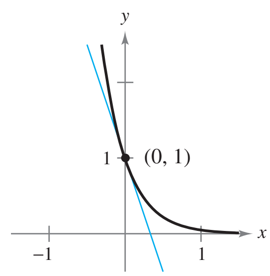
35. $\left(1 + \dfrac{1}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000}$ (ver el ejercicio 34.)

36. $1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{720} + \dfrac{1}{5\,040}$

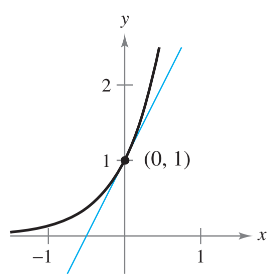
En los ejercicios 37 y 38, encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (0, 1).

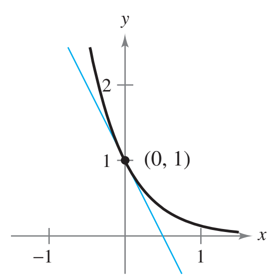
37. *a*) $y = e^{3x}$ *b*) $y = e^{-3x}$





38. *a*) $y = e^{2x}$ *b*) $y = e^{-2x}$





En los ejercicios 39 a 60, encontrar la derivada.

39. $f(x) = e^{2x}$

40. $y = e^{-5x}$

41. $y = e^{\sqrt{x}}$

42. $y = e^{-x^2}$

43. $y = e^{x-4}$

44. $f(x) = 3e^{1-x^2}$

45. $y = e^x \ln x$

46. $y = xe^x$

47. $y = x^3 e^x$

48. $y = x^2 e^{-x}$

49. $g(t) = (e^{-t} + e^t)^3$

50. $g(t) = e^{-3/t^2}$

51. $y = \ln(1 + e^{2x})$

52. $y = \ln\left(\dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}\right)$

53. $y = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

54. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

55. $y = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

56. $y = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

57. $y = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

58. $y = \ln e^x$

59. $F(x) = \displaystyle\int_{\pi}^{\ln x} \cos e^t \, dt$

60. $F(x) = \displaystyle\int_0^{e^{2x}} \ln(t + 1) \, dt$

En los ejercicios 61 a 68, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

61. $f(x) = e^{1-x}, \quad (1, 1)$

62. $y = e^{-2x+x^2}, \quad (2, 1)$

63. $y = \ln(e^{x^2}), \quad (-2, 4)$

64. $y = \ln\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (0, 0)$

65. $y = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x, \quad (1, e)$

66. $y = xe^x - e^x, \quad (1, 0)$

67. $f(x) = e^{-x}\ln x, \quad (1, 0)$

68. $f(x) = e^3 \ln x, \quad (1, 0)$

En los ejercicios 69 y 70, hallar dy/dx por derivación implícita.

69. $xe^y - 10x + 3y = 0$

70. $e^{xy} + x^2 - y^2 = 10$

En los ejercicios 71 y 72, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

71. $xe^y + ye^x = 1, \quad (0, 1)$

72. $1 + \ln xy = e^{x-y}, \quad (1, 1)$

En los ejercicios 73 y 74, encontrar la segunda derivada de la función.

73. $f(x) = (3 + 2x)e^{-3x}$

74. $g(x) = \sqrt{x} + e^x \ln x$

En los ejercicios 75 a 78, probar que la función $y = f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial.

75. $y = 4e^{-x}$
$y'' - y = 0$

76. $y = e^{3x} + e^{-3x}$
$y'' - 9y = 0$

77. $y = e^x(\cos \sqrt{2}\,x + \operatorname{sen} \sqrt{2}\,x)$
$y'' - 2y' + 3y = 0$

78. $y = e^x(3\cos 2x - 4 \operatorname{sen} 2x)$
$y'' - 2y' + 5y = 0$

En los ejercicios 79 a 86, encontrar los extremos y puntos de inflexión (si existen) de la función. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y confirmar los resultados.

79. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

80. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

81. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-2)^2/2}$

82. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/2}$

83. $f(x) = x^2e^{-x}$

84. $f(x) = xe^{-x}$

85. $g(t) = 1 + (2 + t)e^{-t}$

86. $f(x) = -2 + e^{3x}(4 - 2x)$

87. ***Área*** Calcular el área del rectángulo más grande que puede ser inscrito bajo la curva $y = e^{-x^2}$ en el primer y segundo cuadrantes.

88. ***Área*** Efectuar los pasos siguientes para encontrar el área máxima del rectángulo mostrado en la figura.

a) Despejar c en la ecuación $f(c) = f(c + x)$.

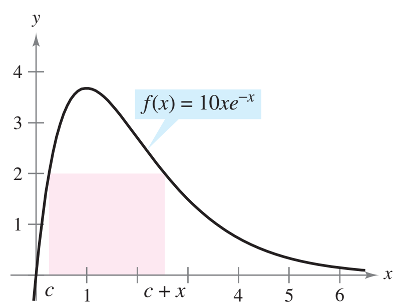
b) Usar el resultado del apartado *a*), para expresar el área A como función de x. [*Sugerencia:* $A = xf(c)$.]

c) Usar una herramienta de graficación para representar la función área. Usar la gráfica para aproximar las dimensiones del rectángulo de área máxima. Determinar el área máxima.

d) Usar una herramienta de graficación para representar la expresión de c encontrada en *a*). Usar la gráfica para aproximar.

$$\lim_{x\to 0^+} c \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} c.$$

Usar este resultado para describir los cambios en las dimensiones y posición del rectángulo para $0 < x < \infty$.



89. Encontrar un punto en la gráfica de la función $f(x) = e^{2x}$ tal que la recta tangente a la gráfica en este punto pase por el origen. Usar una herramienta de graficación para representar f y la recta tangente en la misma pantalla.

90. Localizar el punto en la gráfica de $y = e^{-x}$ donde la recta normal a la curva pasa por el origen. (Usar el método de Newton o cálculo de raíces en la herramienta de graficación.)

91. ***Depreciación*** El valor V de un objeto a t años de su adquisición es $V = 15\,000e^{-0.6286t}$, $0 \le t \le 10$.

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función.

b) Encontrar la razón de cambio de V respecto de t cuando $t = 1$ y $t = 5$.

c) Usar una herramienta de graficación para representar la recta tangente a la función cuando $t = 1$ y $t = 5$.

92. ***Movimiento armónico*** El desplazamiento desde el equilibrio de una masa que oscila en el extremo de un resorte suspendido del techo es $y = 1.56e^{-0.22t}\cos 4.9t$, donde y es el desplazamiento en pies y t el tiempo en segundos. Representar la función de desplazamiento en el intervalo $[0, 10]$ con la herramienta de graficación. Hallar el valor de t en el que el desplazamiento es menor que 3 pulgadas desde la posición de equilibrio.

93. ***Modelado matemático*** Un meteorólogo mide la presión atmosférica P (en kg por m^2) a la altitud h (en km). La tabla muestra los resultados.

h	0	5	10	15	20
P	10 332	5 583	2 376	1 240	517

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar los puntos (h, ln P), y usar la función de regresión de la misma para encontrar un modelo lineal para los puntos.

b) La recta en *a*) tiene la forma $\ln P = ah + b$. Escribir la ecuación en forma exponencial.

c) Usar una herramienta de graficación para representar los datos originales y representar el modelo exponencial de *b*).

d) Calcular la razón de cambio de la presión cuando $h = 5$ y $h = 18$.

94. ***Modelado matemático*** La tabla muestra los valores aproximados V de un sedán de tamaño mediano para los años 2003 a 2009. La variable t representa el tiempo en años, con $t = 3$ correspondiendo a 2003.

t	3	4	5	6
V	\$23 046	\$20 596	\$18 851	\$17 001

t	7	8	9
V	\$15 226	\$14 101	\$12 841

a) Usar la función de regresión de una herramienta de graficación para encontrar los modelos lineal y cuadrático para los datos. Representar el modelo.

b) ¿Qué representa la pendiente en el modelo lineal en *a*)?

c) Usar la función de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo exponencial de los datos.

d) Determinar la asíntota horizontal del modelo exponencial del apartado *c*). Interpretar su significado en el contexto del problema.

e) Hallar el ritmo de depreciación en el valor del vehículo cuando $t = 4$ y $t = 8$ usando el modelo exponencial.

Aproximaciones lineal y cuadrática **En los ejercicios 95 y 96, usar una herramienta de graficación para representar la función. Después, trazar la gráfica**

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) \quad \text{y}$$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \tfrac{1}{2} f''(0)(x - 0)^2$$

en la misma pantalla. Comparar los valores de f, P_1 y P_2 y de sus primeras derivadas en $x = 0$.

95. $f(x) = e^x$ **96.** $f(x) = e^{x/2}$

Fórmula de Stirling **Para grandes valores de n,**

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n - 1) \cdot n$$

puede aproximarse mediante la fórmula de Stirling, $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

En los ejercicios 97 y 98, encontrar el valor exacto de $n!$ y entonces aproximar $n!$, utilizando la fórmula de Stirling.

97. $n = 12$ **98.** $n = 15$

En los ejercicios 99 a 116, hallar la integral indefinida.

99. $\int e^{5x}(5)\,dx$ **100.** $\int e^{-x^4}(-4x^3)\,dx$

101. $\int e^{2x-1}\,dx$ **102.** $\int e^{1-3x}\,dx$

103. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$ **104.** $\int e^x(e^x + 1)^2\,dx$

105. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **106.** $\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx$

107. $\int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\,dx$ **108.** $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,dx$

109. $\int e^x\sqrt{1 - e^x}\,dx$ **110.** $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

111. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$ **112.** $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}\,dx$

113. $\int \frac{5 - e^x}{e^{2x}}\,dx$ **114.** $\int \frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^x}\,dx$

115. $\int e^{-x}\tan(e^{-x})\,dx$ **116.** $\int \ln(e^{2x-1})\,dx$

En los ejercicios 117 a 126, evaluar la integral definida. Usar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

117. $\int_0^1 e^{-2x}\,dx$ **118.** $\int_3^4 e^{3-x}\,dx$

119. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$ **120.** $\int_{-2}^0 x^2 e^{x^3/2}\,dx$

121. $\int_1^3 \frac{e^{3/x}}{x^2}\,dx$ **122.** $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{-(x^2/2)}\,dx$

123. $\int_0^3 \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,dx$ **124.** $\int_0^1 \frac{e^x}{5 - e^x}\,dx$

125. $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen}\pi x}\cos \pi x\,dx$ **126.** $\int_{\pi/3}^{\pi/2} e^{\sec 2x}\sec 2x \tan 2x\,dx$

Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 127 y 128, resolver la ecuación diferencial.**

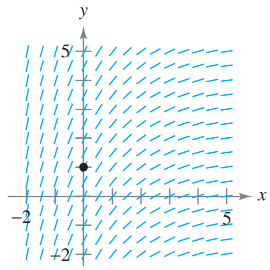
127. $\frac{dy}{dx} = xe^{ax^2}$ **128.** $\frac{dy}{dx} = (e^x - e^{-x})^2$

Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 129 y 130, encontrar la solución particular que satisface las condiciones iniciales.**

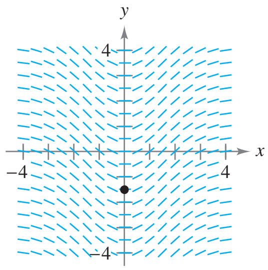
129. $f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $f(0) = 1, f'(0) = 0$ **130.** $f''(x) = \operatorname{sen} x + e^{2x}$, $f(0) = \frac{1}{4}, f'(0) = \frac{1}{2}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 131 y 132 se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes.** ***a)*** **Esbozar dos soluciones de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado.** ***b)*** **Por integración encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representarla. Comparar el resultado con los esbozos del apartado** ***a*****).**

131. $\dfrac{dy}{dx} = 2e^{-x/2}, \quad (0, 1)$



132. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-0.2x^2}, \quad \left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$



Área **En los ejercicios 133 a 136, calcular el área de la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones. Usar una herramienta de graficación para representar la región y verificar los resultados.**

133. $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 5$

134. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = a,\ x = b$

135. $y = xe^{-x^2/4},\ y = 0,\ x = 0,\ x = \sqrt{6}$

136. $y = e^{-2x} + 2,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$

Integración numérica **En los ejercicios 137 y 138, aproximar la integral usando la regla del punto medio, la de los trapecios y la regla de Simpson con $n = 12$. Usar una herramienta de graficación para verificar los resultados.**

137. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\, e^x\, dx$ **138.** $\displaystyle\int_0^2 2xe^{-x}\, dx$

139. ***Probabilidad*** Ciertas baterías para automóvil tienen una vida media de 48 meses con una desviación estándar de 6 meses. Las vidas de las baterías siguen una distribución normal. La probabilidad de que una batería dure entre 48 y 60 meses es $0.0665 \int_{48}^{60} e^{-0.0139(t-48)^2}\, dt$. Usar la función de integración de una herramienta de graficación para aproximar la integral. Interpretar los resultados.

140. ***Probabilidad*** El tiempo medio de espera (en minutos) en una tienda está dado por la solución de la ecuación $\int_0^x 0.3e^{-0.3t}\, dt = \frac{1}{2}$. Resolver la ecuación.

141. ***Movimiento horizontal*** La función posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x es $x(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt}$ donde A, B y k son constantes positivas.

a) ¿Durante qué tiempo t la partícula está más cercana al origen?

b) Mostrar que la aceleración de la partícula es proporcional a la posición de la partícula. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

142. ***Modelado matemático*** Una válvula de un depósito se abre durante 4 horas para dejar salir un producto químico en un proceso de manufactura. El ritmo o velocidad de flujo de salida R (en litros por hora) en el instante t (en horas) está dado en la siguiente tabla.

t	0	1	2	3	4
R	425	240	118	71	36

Tabla para 142

a) Usar la función de regresión en la herramienta de graficación para calcular un modelo lineal para los puntos $(t, \ln R)$. Escribir la ecuación resultante de la forma $\ln R = at + b$, de manera exponencial.

b) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo exponencial.

c) Usar la integral definida para aproximar el número de litros del producto químico que han salido durante esas cuatro horas.

Desarrollo de conceptos

143. Con sus propias palabras, enunciar las propiedades de la función exponencial natural.

144. ¿Existe una función f tal que $f(x) = f'(x)$? Si es así, ¿cuál es?

145. Sin integrar, enunciar la fórmula que podría utilizarse para efectuar las integrales siguientes.

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx$ *b*) $\displaystyle\int xe^{x^2}\, dx$

146. Considerar la función $f(x) = \dfrac{2}{1 + e^{1/x}}$.

a) Usar una herramienta de graficación para graficar f.

b) Escribir un párrafo corto explicando por qué la gráfica tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ y por qué la función tiene una discontinuidad no desmontable en $x = 0$.

147. Al ser $e^x \geq 1$ para $x \geq 0$, se tiene que $\displaystyle\int_0^x e^t\, dt \geq \int_0^x 1\, dt$. Efectuar esta integración para deducir la desigualdad $e^x \geq 1 + x$ para $x \geq 0$.

Para discusión

148. Describir la relación entre las gráficas de $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^x$.

149. Encontrar, con tres decimales, el valor de x tal que $e^{-x} = x$. (Usar el método de Newton.)

150. Encontrar el valor de a del área comprendida entre $y = e^{-x}$, el eje x, $x = -a$ y $x = a$ es $\frac{8}{3}$.

151. Verificar que la función

$$y = \frac{L}{1 + ae^{-x/b}}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad L > 0$$

se incrementa a una razón máxima cuando $y = L/2$.

152. Sea $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

a) Representar gráficamente f en $(0, \infty)$ y probar que f es estrictamente decreciente en (e, ∞).

b) Demostrar que si $e \leq A < B$, entonces $A^B > B^A$.

c) Usar el apartado *b*) para demostrar que $e^\pi > \pi^e$.

5.5 Otras bases distintas de *e* y aplicaciones

- **Definir funciones exponenciales con bases distintas de *e*.**
- **Derivar e integrar funciones exponenciales con bases distintas de *e*.**
- **Usar las funciones exponenciales como modelos para el interés compuesto y el crecimiento exponencial.**

Otras bases de e

La **base** de la función exponencial natural es e. Esta base "natural" se puede utilizar para dar el significado de cualquier base general a.

> **DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL BASE *a***
>
> Si a es un número real positivo $(a \neq 1)$ y x es cualquier número real, entonces la **función exponencial base *a*** se denota por a^x y se define como
>
> $$a^x = e^{(\ln a)x}.$$
>
> Si $a = 1$, entonces $y = 1^x = 1$ es una función constante.

Estas funciones obedecen las leyes usuales de los exponentes. Éstas son algunas propiedades familiares.

1. $a^0 = 1$ **2.** $a^x a^y = a^{x+y}$

3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ **4.** $(a^x)^y = a^{xy}$

Cuando se desea plantear un modelo exponencial para la semivida o vida media de un elemento radiactivo, por ejemplo, es conveniente usar $\frac{1}{2}$ como base del modelo. (La *vida media* es el número de años requerido para que la mitad de los átomos en una muestra de material radiactivo decaigan.)

EJEMPLO 1 Modelo de la semivida (o vida media) de un elemento radiactivo

La semivida o vida media del carbono-14 es aproximadamente 5 715 años. Si se tiene una muestra de 1 g de carbono-14, ¿qué cantidad existirá dentro de 10 000 años?

Solución Sean $t = 0$ el momento actual y y la cantidad de carbono-14 (en gramos) en la muestra. Al usar como base $\frac{1}{2}$, se puede plantear el modelo y dado mediante la ecuación

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5\,715}.$$

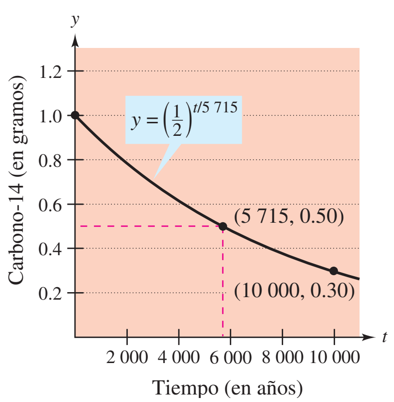
Notar que cuando $t = 5\,715$, la cantidad se ha reducido a la mitad de la original.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{5\,715/5\,715} = \frac{1}{2} \text{ gramo}$$

Cuando $t = 11\,430$, se ha reducido a un cuarto de la cantidad inicial y así sucesivamente. Para hallar la cantidad de carbono-14 que queda después de 10 000 años, sustituir $t = 10\,000$.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{10\,000/5\,715} \approx 0.30 \text{ gramo}$$

La gráfica de y se muestra en la figura 5.25.



La vida media del carbono-14 es de aproximadamente 5 715 años
Figura 5.25

Las funciones logarítmicas con base diferente de e se definen de manera muy similar a las funciones exponenciales con otras bases.

NOTA En los cursos previos de cálculo, se ha aprendido que $\log_a x$ es el valor al que hay que elevar a para obtener x. Esto concuerda con la definición dada ya que

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= a^{(1/\ln a)\ln x} \\ &= (e^{\ln a})^{(1/\ln a)\ln x} \\ &= e^{(\ln a/\ln a)\ln x} \\ &= e^{\ln x} \\ &= x. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE BASE *a*

Si a es un número real positivo ($a \neq 1$) y x es cualquier número real positivo, entonces la **función logarítmica base *a*** se denota $\log_a x$ y se define como

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x.$$

Las funciones logarítmicas base a tienen las mismas propiedades que la función logaritmo natural, dadas en el teorema 5.2. (Suponer que x y y son números positivos y n es un racional.)

1. $\log_a 1 = 0$ Logaritmo de 1.

2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ Logaritmo de un producto.

3. $\log_a x^n = n \log_a x$ Logaritmo de una potencia.

4. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ Logaritmo de un cociente.

De las definiciones de funciones exponenciales y logarítmicas base a, se sigue que $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$ son funciones inversas una de otra.

PROPIEDADES DE FUNCIONES INVERSAS

1. $y = a^x$ si y sólo si $x = \log_a y$

2. $a^{\log_a x} = x$, para $x > 0$

3. $\log_a a^x = x$, para todo x

La función logaritmo base 10 se llama **función logarítmica común o decimal**. Así, $y = 10^x$ si y sólo si $x = \log_{10} y$.

EJEMPLO 2 Otras bases distintas de e

Despejar x en las siguientes ecuaciones.

a) $3^x = \dfrac{1}{81}$ ***b***) $\log_2 x = -4$

Solución

a) Resolver la ecuación aplicando la función logaritmo base 3 en ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} 3^x &= \frac{1}{81} \\ \log_3 3^x &= \log_3 \frac{1}{81} \\ x &= \log_3 3^{-4} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

b) Resolver la ecuación aplicando la función exponencial base 2 en ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} \log_2 x &= -4 \\ 2^{\log_2 x} &= 2^{-4} \\ x &= \frac{1}{2^4} \\ x &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Derivación e integración

Para derivar funciones exponenciales y logarítmicas de base arbitraria, existen tres opciones: 1) usar las definiciones de a^x y $\log_a x$ y obtener la derivada mediante las reglas válidas para las funciones exponencial natural y logarítmica, 2) usar derivación logarítmica o 3) usar las siguientes reglas de derivación para bases diferentes de e.

TEOREMA 5.13 DERIVADAS PARA OTRAS BASES DE *e*

Sean a un número real positivo ($a \neq 1$) y u una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[a^x] = (\ln a)a^x$ **2.** $\dfrac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u \dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}[\log_a x] = \dfrac{1}{(\ln a)x}$ **4.** $\dfrac{d}{dx}[\log_a u] = \dfrac{1}{(\ln a)u}\dfrac{du}{dx}$

DEMOSTRACIÓN Por definición, $a^x = e^{(\ln a)x}$. Por tanto, se puede demostrar la primera regla si $u = (\ln a)\,x$, y al derivar con base e se obtiene

$$\frac{d}{dx}[a^x] = \frac{d}{dx}[e^{(\ln a)x}] = e^u\frac{du}{dx} = e^{(\ln a)x}(\ln a) = (\ln a)a^x.$$

Para demostrar la tercera regla, se puede escribir

$$\frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\ln a}\ln x\right] = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{(\ln a)x}.$$

La segunda y la cuarta fórmulas simplemente son versiones de la regla de la cadena de la primera y la tercera reglas.

NOTA Estas reglas de derivación son análogas a las de la función exponencial natural y logaritmo natural. De hecho, sólo difieren en los factores constantes $\ln a$ y $1/\ln a$. He aquí una de las razones que hacen de e la base más conveniente para el cálculo.

EJEMPLO 3 Derivación de funciones de base distinta

Encontrar la derivada de cada una de estas funciones.

a) $y = 2^x$
b) $y = 2^{3x}$
c) $y = \log_{10} \cos x$

Solución

a) $y' = \dfrac{d}{dx}[2^x] = (\ln 2)2^x$

b) $y' = \dfrac{d}{dx}[2^{3x}] = (\ln 2)2^{3x}(3) = (3 \ln 2)2^{3x}$

Escribir 2^{3x} como 8^x y derivar para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

c) $y' = \dfrac{d}{dx}[\log_{10} \cos x] = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{(\ln 10)\cos x} = -\dfrac{1}{\ln 10}\tan x$

En ocasiones, un integrando contiene una función exponencial en una base distinta de e. En tal caso, hay dos opciones: 1) pasar a base e usando la fórmula $a^x = e^{(\ln a)x}$ y entonces integrar, o 2) integrar directamente, usando la fórmula de integración

$$\int a^x\,dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^x + C$$

(que se deduce del teorema 5.13).

EJEMPLO 4 Integración de una función exponencial en una base distinta

Hallar $\int 2^x\,dx$.

Solución

$$\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}2^x + C$$

Cuando fue introducida la regla de la potencia $D_x[x^n] = nx^{n-1}$ en el capítulo 2, se exigió que n fuese racional. Ahora la regla se extiende a cualquier valor real de n. Intentar probar este teorema usando derivación logarítmica.

TEOREMA 5.14 REGLA DE LA POTENCIA PARA EXPONENTES REALES

Sea n cualquier número real y sea u una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$

2. $\dfrac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

El siguiente ejemplo compara las derivadas de cuatro tipos de funciones. Cada función requiere una fórmula de derivación diferente para la obtención de la derivada, dependiendo de si la base y el exponente son constantes o variables.

EJEMPLO 5 Comparación de variables y constantes

a) $\dfrac{d}{dx}[e^e] = 0$ Regla de la constante.

b) $\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$ Regla exponencial.

c) $\dfrac{d}{dx}[x^e] = ex^{e-1}$ Regla de la potencia.

d) $y = x^x$ Derivación logarítmica.

$$\ln y = \ln x^x$$
$$\ln y = x\ln x$$
$$\frac{y'}{y} = x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$$
$$y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

NOTA Asegurarse de ver que no existe una regla sencilla de derivación para $y = x^x$. En general, si $y = u(x)^{v(x)}$, se necesita recurrir a la derivación logarítmica.

Aplicaciones de las funciones exponenciales

n	A
1	\$1 080.00
2	\$1 081.60
4	\$1 082.43
12	\$1 083.00
365	\$1 083.28

Si se depositan P dólares en una cuenta a una tasa anual de interés r (en forma decimal) y los intereses se acumulan en la cuenta, ¿cuál es el balance en la cuenta al cabo de 1 año? La respuesta depende del número n de veces que el interés se compone de acuerdo con la fórmula

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

Por ejemplo, el resultado para un depósito de \$1 000 a 8% de interés compuesto n veces al año se muestra en la tabla de la izquierda.

Al crecer n, el balance A tiende a un límite. Para hallarlo, utilizar el siguiente teorema. Para comprobar las razones de su contenido, calcular $[(x + 1)/x]^x$ para varios valores de x, como se puede ver en la tabla inferior izquierda. (Una demostración del teorema se puede consultar en el apéndice A.)

x	$\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$
10	2.59374
100	2.70481
1 000	2.71692
10 000	2.71815
100 000	2.71827
1 000 000	2.71828

TEOREMA 5.15 UN LÍMITE QUE INVOLUCRA AL NÚMERO *e*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e$$

Ahora, regresar a la fórmula del balance A en una cuenta con interés compuesto n veces por año. Al tomar el límite cuando n tiende a infinito, se obtiene

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n && \text{Tomar el límite cuando } n \to \infty. \\ &= P \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r}\right]^r && \text{Reescribir.} \\ &= P\left[\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^r && \text{Hacer } x = n/r. \text{ Entonces } x \to \infty \text{ cuando } n \to \infty. \\ &= Pe^r. && \text{Aplicar el teorema 5.15.} \end{aligned}$$

Este límite produce el balance después de 1 año de interés **compuesto continuo**. Así, para un depósito inicial de \$1 000 a 8% de interés compuesto continuo, el balance al fin de año sería

$$\begin{aligned} A &= 1\,000e^{0.08} \\ &\approx \$1\,083.29 \end{aligned}$$

Estos resultados se resumen a continuación.

Resumen de las fórmulas de interés compuesto

Sea P = cantidad a depositar, t = número de años, A = balance después de t años, r = tasa de interés anual (forma decimal) y n = número de veces que se compone por año.

1. Compuesto n veces por año: $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
2. Compuesto continuamente: $A = Pe^{rt}$

EJEMPLO 6 Comparación de interés compuesto continuo, mensual y trimestral

Se hace un depósito de \$2 500 en una cuenta que paga un interés anual de 5%. Calcular el balance en la cuenta al final de 5 años si el interés se compone *a*) trimestralmente, *b*) mensualmente y *c*) continuamente.

Solución

a) $A = P\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt} = 2\,500\left(1 + \dfrac{0.05}{4}\right)^{4(5)}$ Compuesto trimestralmente.

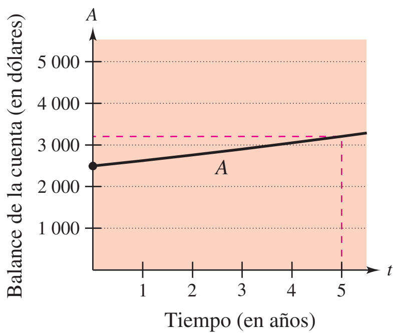
$$= 2\,500(1.0125)^{20}$$
$$\approx \$3\,205.09$$

b) $A = P\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt} = 2\,500\left(1 + \dfrac{0.05}{12}\right)^{12(5)}$ Compuesto mensualmente.

$$\approx 2\,500(1.0041667)^{60}$$
$$\approx \$3\,208.40$$

c) $A = Pe^{rt} = 2\,500[e^{0.05(5)}]$ Compuesto continuamente.

$$= 2\,500e^{0.25} \approx \$3\,210.06$$



El balance en una cuenta de ahorros crece exponencialmente
Figura 5.26

La figura 5.26 muestra cómo se incrementa el balance durante el periodo de 5 años. Notar que se debe hacer constar que la escala de la figura no distingue gráficamente entre los tres tipos de crecimiento exponencial en *a*), *b*) y *c*).

EJEMPLO 7 Crecimiento de un cultivo de bacterias

Un cultivo de bacterias crece según la *función logística de crecimiento*

$$y = \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4t}}, \quad t \geq 0$$

donde y es el peso del cultivo en gramos y t es el tiempo en horas. Calcular el peso del cultivo después de *a*) 0 horas, *b*) 1 hora y *c*) 10 horas. *d*) ¿Cuál es el límite cuando t tiende a infinito?

Solución

a) Cuando $t = 0$, $\quad y = \dfrac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4(0)}}$

$$= 1 \text{ gramo.}$$

b) Cuando $t = 1$, $\quad y = \dfrac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4(1)}}$

$$\approx 1.071 \text{ gramos.}$$

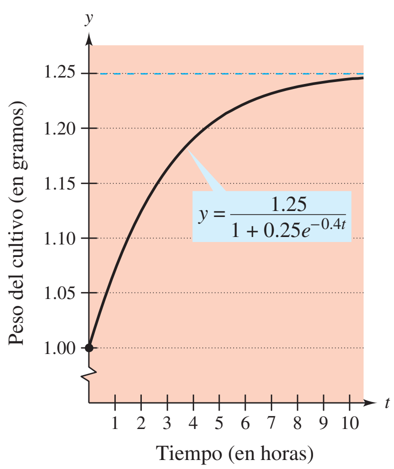
c) Cuando $t = 10$, $\quad y = \dfrac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4(10)}}$

$$\approx 1.244 \text{ gramos.}$$

d) Por último, al tomar el límite para t tendiendo a infinito, se obtiene

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4t}} = \frac{1.25}{1 + 0} = 1.25 \text{ gramos.}$$

La figura 5.27 muestra la gráfica de la función.



El límite de peso del cultivo cuando $t \to \infty$ es 1.25 gramos
Figura 5.27

5.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, evaluar la expresión sin usar calculadora.

1. $\log_2 \frac{1}{8}$
2. $\log_{27} 9$
3. $\log_7 1$
4. $\log_a \dfrac{1}{a}$

En los ejercicios 5 a 8, escribir la ecuación exponencial en forma logarítmica o viceversa.

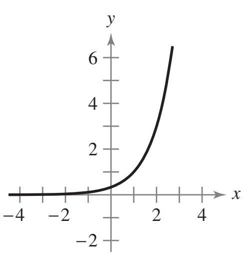
5. *a*) $2^3 = 8$ *b*) $3^{-1} = \frac{1}{3}$
6. *a*) $27^{2/3} = 9$ *b*) $16^{3/4} = 8$
7. *a*) $\log_{10} 0.01 = -2$ *b*) $\log_{0.5} 8 = -3$
8. *a*) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ *b*) $49^{1/2} = 7$

En los ejercicios 9 a 14, dibujar a mano la gráfica de la función.

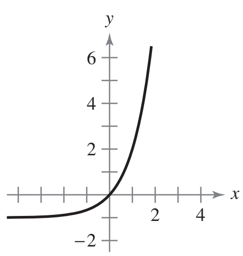
9. $y = 3^x$
10. $y = 3^{x-1}$
11. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
12. $y = 2^{x^2}$
13. $h(x) = 5^{x-2}$
14. $y = 3^{-|x|}$

En los ejercicios 15 a 18, encontrar la función de la gráfica. [Las gráficas son marcadas como *a*), *b*), *c*) y *d*).]

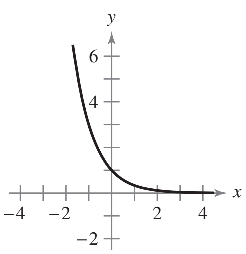
a)



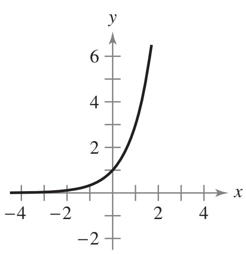
b)



c)



d)



15. $f(x) = 3^x$
16. $f(x) = 3^{-x}$
17. $f(x) = 3^x - 1$
18. $f(x) = 3^{x-1}$

En los ejercicios 19 a 24, despejar *x* o *b*.

19. *a*) $\log_{10} 1\,000 = x$ *b*) $\log_{10} 0.1 = x$
20. *a*) $\log_3 \frac{1}{81} = x$ *b*) $\log_6 36 = x$
21. *a*) $\log_3 x = -1$ *b*) $\log_2 x = -4$
22. *a*) $\log_b 27 = 3$ *b*) $\log_b 125 = 3$
23. *a*) $x^2 - x = \log_5 25$ *b*) $3x + 5 = \log_2 64$
24. *a*) $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 1$ *b*) $\log_{10}(x + 3) - \log_{10} x = 1$

En los ejercicios 25 a 34, resolver la ecuación y aproximarla a tres decimales.

25. $3^{2x} = 75$
26. $5^{6x} = 8\,320$
27. $2^{3-z} = 625$
28. $3(5^{x-1}) = 86$
29. $\left(1 + \dfrac{0.09}{12}\right)^{12t} = 3$
30. $\left(1 + \dfrac{0.10}{365}\right)^{365t} = 2$
31. $\log_2(x - 1) = 5$
32. $\log_{10}(t - 3) = 2.6$
33. $\log_3 x^2 = 4.5$
34. $\log_5 \sqrt{x - 4} = 3.2$

En los ejercicios 35 a 38, usar una herramienta de graficación para representar la función y aproximar su(s) cero(s) hasta tres decimales.

35. $g(x) = 6(2^{1-x}) - 25$
36. $f(t) = 300(1.0075^{12t}) - 735.41$
37. $h(s) = 32 \log_{10}(s - 2) + 15$
38. $g(x) = 1 - 2 \log_{10}[x(x - 3)]$

En los ejercicios 39 y 40 ilustrar cuáles de las funciones son inversas una de otra al dibujar sus gráficas en unos mismos ejes de coordenadas.

39. $f(x) = 4^x$, $g(x) = \log_4 x$
40. $f(x) = 3^x$, $g(x) = \log_3 x$

En los ejercicios 41 a 62, encontrar las derivadas de la función. (*Sugerencia*: En algunos ejercicios, puede ser de ayuda aplicar las propiedades de los logaritmos *antes* de derivar.)

41. $f(x) = 4^x$
42. $f(x) = 3^{2x}$
43. $y = 5^{-4x}$
44. $y = 7^{2x-1}$
45. $f(x) = x\,9^x$
46. $y = x(6^{-2x})$
47. $g(t) = t^2 2^t$
48. $f(t) = \dfrac{3^{2t}}{t}$
49. $h(\theta) = 2^{-\theta} \cos \pi\theta$
50. $g(\alpha) = 5^{-\alpha/2} \operatorname{sen} 2\alpha$
51. $y = \log_4(5x + 1)$
52. $y = \log_3(x^2 - 3x)$
53. $h(t) = \log_5(4 - t)^2$
54. $g(t) = \log_2(t^2 + 7)^3$
55. $y = \log_5 \sqrt{x^2 - 1}$
56. $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{2x + 1}$
57. $f(x) = \log_2 \dfrac{x^2}{x - 1}$
58. $y = \log_{10} \dfrac{x^2 - 1}{x}$
59. $h(x) = \log_3 \dfrac{x\sqrt{x - 1}}{2}$
60. $g(x) = \log_5 \dfrac{4}{x^2\sqrt{1 - x}}$
61. $g(t) = \dfrac{10 \log_4 t}{t}$
62. $f(t) = t^{3/2} \log_2 \sqrt{t + 1}$

En los ejercicios 63 a 66, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en los puntos dados.

63. $y = 2^{-x}$, $(-1, 2)$
64. $y = 5^{x-2}$, $(2, 1)$
65. $y = \log_3 x$, $(27, 3)$
66. $y = \log_{10} 2x$, $(5, 1)$

En los ejercicios 67 a 70, usar derivación logarítmica para hallar dy/dx.

67. $y = x^{2/x}$

68. $y = x^{x-1}$

69. $y = (x-2)^{x+1}$

70. $y = (1+x)^{1/x}$

En los ejercicios 71 a 74, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en los puntos siguientes.

71. $y = x^{\operatorname{sen} x}, \quad \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

72. $y = (\operatorname{sen} x)^{2x}, \quad \left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

73. $y = (\ln x)^{\cos x}, \quad (e, 1)$

74. $y = x^{1/x}, \quad (1, 1)$

En los ejercicios 75 a 82, hallar la integral.

75. $\displaystyle\int 3^x\,dx$

76. $\displaystyle\int 5^{-x}\,dx$

77. $\displaystyle\int (x^2 + 2^{-x})\,dx$

78. $\displaystyle\int (x^3 + 3^{-x})\,dx$

79. $\displaystyle\int x(5^{-x^2})\,dx$

80. $\displaystyle\int (3-x)7^{(3-x)^2}\,dx$

81. $\displaystyle\int \frac{3^{2x}}{1+3^{2x}}\,dx$

82. $\displaystyle\int 2^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$

En los ejercicios 83 a 86, evaluar la integral.

83. $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2^x\,dx$

84. $\displaystyle\int_{-2}^{2} 4^{x/2}\,dx$

85. $\displaystyle\int_{0}^{1} (5^x - 3^x)\,dx$

86. $\displaystyle\int_{1}^{e} (6^x - 2^x)\,dx$

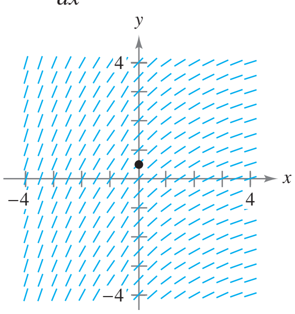
Área **En los ejercicios 87 y 88, calcular el área de la región delimitada por las gráficas de la ecuación.**

87. $y = 3^x, y = 0, x = 0, x = 3$

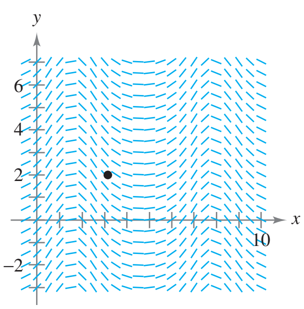
88. $y = 3^{\cos x}\operatorname{sen} x, y = 0, x = 0, x = \pi$

Campos de pendientes **En los ejercicios 89 y 90, se proporcionan una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Esbozar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y con una herramienta de graficación representar la solución. Comparar el resultado con los esbozos del apartado *a*).**

89. $\dfrac{dy}{dx} = 0.4^{x/3}, \quad \left(0, \tfrac{1}{2}\right)$



90. $\dfrac{dy}{dx} = e^{\operatorname{sen} x}\cos x, \quad (\pi, 2)$



Desarrollo de conceptos

91. Considerar la función $f(x) = \log_{10} x$.

a) ¿Cuál es el dominio de f?

b) Encontrar f^{-1}.

c) Si x es un número real entre 1 000 y 10 000, determinar el intervalo en el cual $f(x)$ puede ser encontrado.

d) Determinar el intervalo en el cual se encuentra x si $f(x)$ es negativo.

e) Si $f(x)$ aumenta en una unidad, ¿por qué factor hay que multiplicar x?

f) Hallar el cociente entre x_1 a x_2 sabiendo que $f(x_1) = 3n$ y $f(x_2) = n$.

92. Ordenar las funciones

$$f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = x^x, \quad h(x) = x^2 \quad \text{y} \quad k(x) = 2^x$$

desde la que tiene mayor ritmo de crecimiento hasta la que tiene el menor, para valores grandes de x.

93. Calcular la derivada de cada función, para a constante.

a) $y = x^a$ *b*) $y = a^x$

c) $y = x^x$ *d*) $y = a^a$

Para discusión

94. La tabla de valores se obtuvo para evaluación de una función. Determinar cuáles de los enunciados pueden ser ciertos o falsos y explicar la razón.

x	1	2	8
y	0	1	3

a) y es una función exponencial de x.

b) y es una función logarítmica de x.

c) x es una función exponencial de y.

d) y es una función lineal de x.

95. ***Inflación*** Si el ritmo o tasa de inflación anual es, en promedio, de 5% para los próximos 10 años, el costo aproximado C de bienes o servicios durante una década es

$$C(t) = P(1.05)^t$$

donde t es el tiempo en años y P es el costo actual.

a) Si el cambio de aceite del automóvil cuesta hoy \$24.95, estimar el precio dentro de 10 años.

b) Calcular el ritmo o velocidad de cambio de C respecto a t para $t = 1$ y $t = 8$.

c) Verificar que el ritmo de cambio de C es proporcional a C. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

96. ***Depreciación*** Después de t años, el valor de un automóvil adquirido por $25 000 es

$$V(t) = 25\,000\left(\tfrac{3}{4}\right)^t.$$

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función y determinar el valor del automóvil 2 años después de su compra.
b) Calcular la razón de cambio de V respecto a t para $t = 1$ y $t = 4$.
c) Usar una herramienta de graficación para representar $V'(t)$ y determinar la asíntota horizontal. Interpretar su significado en el contexto del problema.

Interés compuesto **En los ejercicios 97 a 100, completar la tabla al determinar el balance A para P dólares invertidos a una tasa de interés r, durante t años, n veces al año.**

n	1	2	4	12	365	Intereses continuos
A						

97. $P = \$1\,000$
$r = 3\frac{1}{2}\%$
$t = 10$ años

98. $P = \$2\,500$
$r = 6\%$
$t = 20$ años

99. $P = \$1\,000$
$r = 5\%$
$t = 30$ años

100. $P = \$5\,000$
$r = 7\%$
$t = 25$ años

Interés compuesto **En los ejercicios 101 a 104, completar la tabla al determinar la cantidad de dinero P (valor presente) que debe ser depositada a una tasa r de interés anual para producir un balance de $100 000 en t años.**

t	1	10	20	30	40	50
P						

101. $r = 5\%$
Interés compuesto continuo

102. $r = 6\%$
Interés compuesto continuo

103. $r = 5\%$
Interés compuesto mensual

104. $r = 7\%$
Interés compuesto diario

105. ***Interés compuesto*** Se tiene una inversión de una renta de 6% compuesto diariamente. ¿Cuál de las siguientes opciones produciría un balance mayor después de 8 años?

a) $20 000 ahora
b) $30 000 después de 8 años
c) $8 000 ahora y $20 000 después de 4 años
d) $9 000 ahora, $9 000 después de 4 años y $9 000 después de 8 años.

106. ***Interés compuesto*** Considerar un depósito de $100 a r% de interés compuesto continuo durante 20 años. Usar una herramienta de graficación para representar las funciones exponenciales que describen el crecimiento del capital en los siguientes veinte años para cada una de las tasas de interés que se especifican. Comparar los balances finales de cada una de las tasas.

a) $r = 3\%$
b) $r = 5\%$
c) $r = 6\%$

107. ***Producción de madera*** El rendimiento V (en millones de pies cúbicos por acre) de un bosque de t años de edad es

$$V = 6.7e^{(-48.1)/t}$$

donde t es medido en años.

a) Calcular el volumen límite de madera por acre cuando t tiende a infinito.
b) Encontrar el ritmo o velocidad de cambio de V cuando $t = 20$ años y cuando $t = 60$ años.

108. ***Teoría del aprendizaje*** Un modelo matemático para la proporción P de respuestas correctas tras n ensayos, en un experimento sobre aprendizaje, resultó seguir el modelo

$$P = \frac{0.86}{1 + e^{-0.25n}}.$$

a) Calcular la proporción límite de respuestas correctas cuando n tiende a infinito.
b) Calcular el ritmo de cambio P después de $n = 3$ pruebas y de $n = 10$ pruebas.

109. ***Defoliación forestal*** Para estimar la defoliación producida por las lagartas durante un año, un ingeniero forestal cuenta el número de montones de huevos en $\frac{1}{40}$ de acre en el otoño anterior. El porcentaje de defoliación y está dado aproximadamente por

$$y = \frac{300}{3 + 17e^{-0.0625x}}$$

donde x es el número de montones en miles. (*Fuente: USDA Forest Service*.)

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función.
b) Estimar el porcentaje de defoliación si se cuentan 2 000 montones de huevos.
c) Estimar el número de montones de huevos que existen si se observa que aproximadamente $\frac{2}{3}$ del bosque se han defoliado.
d) Mediante el cálculo, estimar el valor de x para el que y crece más rápidamente.

110. ***Crecimiento poblacional*** Un lago se repuebla con 500 peces, y su población crece de acuerdo con la curva logística

$$p(t) = \frac{10\,000}{1 + 19e^{-t/5}}$$

donde t se mide en meses.

a) Usar la función de regresión de una herramienta de graficación para representar la función.
b) ¿Cuál es el tamaño límite de la población de peces?
c) ¿A qué ritmo o velocidad crece la población de peces al final de 1 mes y al final del décimo mes?
d) ¿Después de cuántos meses crece más de prisa la población?

111. ***Modelado matemático*** La tabla muestra la resistencia B (en toneladas) a la ruptura de un cable de acero de varios diámetros d (en pulgadas).

d	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
B	9.85	21.8	38.3	59.2	84.4	114.0

a) Usar la función de regresión de la herramienta de graficación para ajustar un modelo exponencial a los datos.
b) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.
c) Calcular el retorno o la tasa de crecimiento del modelo cuando $d = 0.8$ y $d = 1.5$.

112. ***Comparación de modelos*** Los números y (en miles) de trasplantes de órganos en Estados Unidos de 2001 a 2006 se muestran en la tabla, con $x = 1$ correspondiendo a 2001. (*Fuente: Organ Procurement and Transplantation Network*)

x	1	2	3	4	5	6
y	24.2	24.9	25.5	27.0	28.1	28.9

a) Usar la habilidad de regresión de una herramienta de graficación para encontrar los siguientes modelos para los datos.

$y_1 = ax + b$ $\quad$ $y_2 = a + b \ln x$
$y_3 = ab^x$ $\quad$ $y_4 = ax^b$

b) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y graficar cada uno de los modelos. ¿Qué modelo se ajusta mejor a los datos?
c) Interpretar la pendiente del modelo lineal en el contexto del problema.
d) Encontrar la razón de cambio de cada uno de los modelos para el año 2004. ¿Qué modelo se incrementa a la más grande razón en 2004?

113. ***Conjetura***

a) Usar una herramienta de graficación que aproxime las integrales de las funciones

$$f(t) = 4\left(\frac{3}{8}\right)^{2t/3}, \quad g(t) = 4\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{4}\right)^t \quad \text{y} \quad h(t) = 4e^{-0.653886t}$$

en el intervalo [0, 4].
b) Usar una herramienta de graficación para representar las tres funciones.
c) Usar los resultados de los apartados *a*) y *b*) para formular una conjetura acerca de las tres funciones. ¿Podría haber realizado una conjetura usando sólo el apartado *a*)? Explicar. Demostrar la conjetura analíticamente.

114. Completar la tabla para demostrar que e puede definirse también como $\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x}$.

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
$(1 + x)^{1/x}$					

En los ejercicios 115 y 116, encontrar una función exponencial que se ajuste a los datos experimentales tomados en los tiempos t indicados.

115.

t	0	1	2	3	4
y	1 200.00	720.00	432.00	259.20	155.52

116.

t	0	1	2	3	4
y	600.00	630.00	661.50	694.58	729.30

En los ejercicios 117 a 120, encontrar el valor exacto de la expresión.

117. $5^{1/\ln 5}$ **118.** $6^{\ln 10/\ln 6}$

119. $9^{1/\ln 3}$ **120.** $32^{1/\ln 2}$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 121 a 126, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.**

121. $e = \dfrac{271\,801}{99\,900}$

122. Si $f(x) = \ln x$, entonces $f(e^{n+1}) - f(e^n) = 1$ para cualquier valor de n.

123. Las funciones $f(x) = 2 + e^x$ y $g(x) = \ln (x - 2)$ son inversas una de otra.

124. La función exponencial $y = Ce^x$ es la solución de la ecuación diferencial $d^ny/dx^n = y$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

125. Las gráficas $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en ángulo recto.

126. Si $f(x) = g(x)\,e^x$, los únicos ceros de f son los ceros de g.

127. *a*) Mostrar que $(2^3)^2 \neq 2^{(3^2)}$.
b) ¿Son $f(x) = (x^x)^x$ y $g(x) = x^{(x^x)}$ la misma función? ¿Por qué sí o por qué no?
c) Encontrar $f'(x)$ y $g'(x)$.

128. Sea $f(x) = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$ para $a > 0$, $a \neq 1$. Mostrar que f tiene una función inversa. Entonces encontrar f^{-1}.

129. Demostrar que al resolver la ecuación diferencial logística

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8}{25}y\left(\frac{5}{4} - y\right), \quad y(0) = 1$$

se obtiene la función de crecimiento logístico del ejemplo 7.

$$\left[\textit{Sugerencia: } \frac{1}{y\left(\frac{5}{4} - y\right)} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{\frac{5}{4} - y}\right)\right]$$

130. Dada la función exponencial $f(x) = a^x$, demostrar que

a) $f(u + v) = f(u) \cdot f(v)$

b) $f(2x) = [f(x)]^2$.

131. *a*) Determinar y' dado $y^x = x^y$.

b) Encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y^x = x^y$ en cada uno de los siguientes puntos.

i) (c, c)

ii) $(2, 4)$

iii) $(4, 2)$

c) En cuáles puntos de la gráfica de $y^x = x^y$ no existe la recta tangente?

132. Considerar la función $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = b^x$, $b > 1$.

a) Sea $b = 2$, usar la herramienta de graficación para representar f y g en la misma pantalla. Identificar los puntos de intersección.

b) Repetir el apartado *a*) usando $b = 3$.

c) Calcular todos los valores de b tales que $g(x) \geq f(x)$ para todo x.

Preparación del examen Putnam

133. ¿Cuál es mayor

$$\left(\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n+1}} \qquad \text{o} \qquad \left(\sqrt{n+1}\right)^{\sqrt{n}}$$

donde $n > 8$?

134. Demostrar que si x es positivo, entonces

$$\log_e\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1 + x}.$$

PROYECTO DE TRABAJO

Estimación gráfica de pendientes

Sea $f(x) = \begin{cases} |x|^x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

a) Usar una herramienta de graficación para representar f en la ventana $-3 \leq x \leq 3$, $-2 \leq y \leq 2$. ¿Cuál es el dominio de f?

b) Usar las funciones *trace* y *zoom* de la herramienta de graficación para estimar

$$\lim_{x \to 0} f(x).$$

c) Explicar brevemente por qué la función f es continua en todos los números reales.

d) Estimar a simple vista la pendiente de f en el punto $(0, 1)$.

e) Explicar por qué la derivada de una función se puede aproximar mediante la fórmula.

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

para valores pequeños de Δx. Usar esta fórmula para aproximar la pendiente de f en el punto $(0, 1)$.

$$f'(0) \approx \frac{f(0 + \Delta x) - f(0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - f(-\Delta x)}{2\Delta x}$$

¿Cuál es la pendiente de f en $(0, 1)$?

f) Hallar una fórmula para la derivada de f y determinar $f'(0)$. Explicar por escrito por qué una herramienta de graficación puede proporcionar un valor incorrecto de la pendiente de una gráfica.

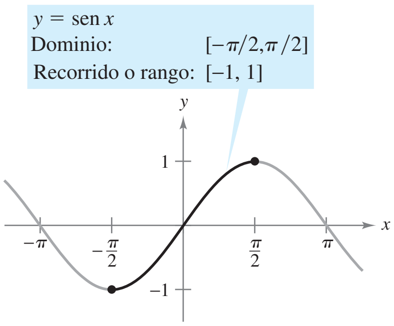
g) Usar esa fórmula para la derivada de f con el fin de encontrar los extremos relativos de f. Verificar su respuesta con la herramienta de graficación.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para saber más sobre el uso de herramientas de graficación para estimar pendientes, ver el artículo “Computer-Aided Delusions”, de Richard L. Hall en *The College Mathematics Journal*.

5.6 Funciones trigonométricas inversas: derivación

- **Desarrollar propiedades de las seis funciones trigonométricas inversas.**
- **Derivar las funciones trigonométricas inversas.**
- **Repasar las reglas básicas de derivación de las funciones elementales.**

Funciones trigonométricas inversas



La función seno es inyectiva en $[-\pi/2, \pi/2]$
Figura 5.28

Esta sección comienza con una afirmación sorprendente: *ninguna de las seis funciones trigonométricas tienen inversa*. Y es cierto, ya que las seis funciones trigonométricas son periódicas y, en consecuencia, no son inyectivas. En esta sección se analizan esas seis funciones para ver si es posible redefinir su dominio de manera tal que, en el *dominio restringido*, tengan funciones inversas.

En el ejemplo 4 de la sección 5.3 se vio que la función seno es creciente (y por tanto inyectiva) en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (ver la figura 5.28). En ese intervalo se puede definir la inversa de la función seno *restringida* como

$$y = \operatorname{arcsen} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad \operatorname{sen} y = x$$

donde $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq \operatorname{arcsen} x \leq \pi/2$.

Bajo restricciones adecuadas, cada una de las seis funciones trigonométricas es inyectiva y admite inversa, como se muestra en las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

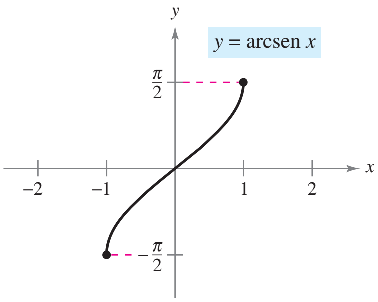
Función	*Dominio*	*Recorrido o rango*
$y = \operatorname{arcsen} x$ si y sólo si $\operatorname{sen} y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$ si y sólo si $\cos y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \arctan x$ si y sólo si $\tan y = x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arccot} x$ si y sólo si $\cot y = x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$
$y = \operatorname{arcsec} x$ si y sólo si $\sec y = x$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$0 \leq y \leq \pi, \quad y \neq \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arccsc} x$ si y sólo si $\csc y = x$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad y \neq 0$

NOTA El término “arcsen x” se lee “el arco seno de x” o algunas veces “el ángulo cuyo seno es x”. Una notación alternativa de la función inversa del seno es “$\operatorname{sen}^{-1} x$”.

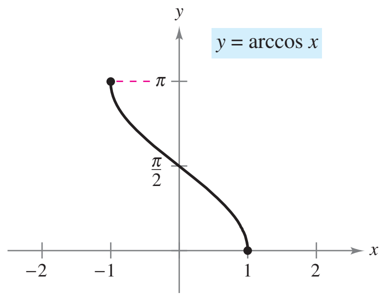
EXPLORACIÓN

La función inversa de la secante En la definición anterior, la función inversa de la secante se ha definido restringiendo el dominio de la función secante a los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. La mayoría de los libros coincide en la restricción elegida, pero algunos discrepan. ¿Qué otros dominios podrían adoptarse? Explicar el razonamiento gráficamente. La mayoría de las calculadoras no dispone de la función inversa de la secante. ¿Cómo se puede evaluar la función inversa de la secante con la calculadora?

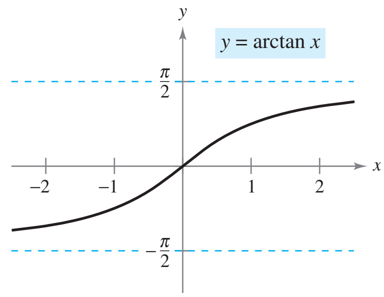
Las gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas se muestran en la figura 5.29.



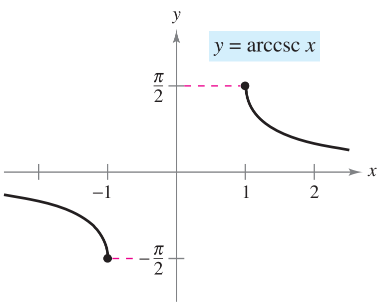
Dominio: $[-1, 1]$
Recorrido o rango: $[-\pi/2, \pi/2]$



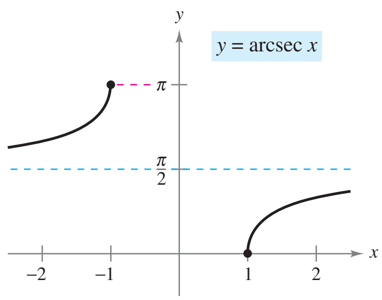
Dominio: $[-1, 1]$
Recorrido o rango: $[0, \pi]$



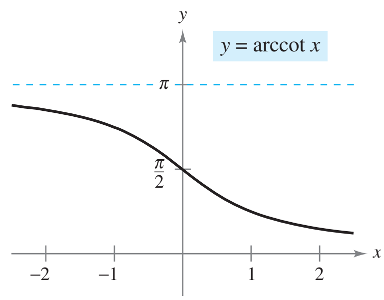
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\pi/2, \pi/2)$



Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Recorrido o rango: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$



Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Recorrido o rango: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(0, \pi)$

Figura 5.29

EJEMPLO 1 Evaluación de las funciones trigonométricas inversas

Evaluar cada una de las funciones.

a) $\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ ***b)*** $\arccos 0$ ***c)*** $\arctan \sqrt{3}$ ***d)*** $\operatorname{arcsen}(0.3)$

Solución

a) Por definición, $y = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ implica que $\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}$. En el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ el valor correcto de y es $-\pi/6$.

$$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

b) Por definición $y = \arccos 0$ implica que $\cos y = 0$. En el intervalo $[0, \pi]$ se tiene $y = \pi/2$.

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

c) Por definición, $y = \arctan \sqrt{3}$ implica que $\tan y = \sqrt{3}$. En el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, se tiene $y = \pi/3$.

$$\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

d) Al utilizar la calculadora en modo *radianes* se obtiene

$$\operatorname{arcsen}(0.3) \approx 0.305.$$

NOTA Al evaluar funciones trigonométricas inversas es importante recordar que los *ángulos están medidos en radianes.*

EXPLORACIÓN

Graficar $y = \arccos(\cos x)$ para $-4\pi \le x \le 4\pi$. ¿Por qué la gráfica no es la misma que la gráfica de $y = x$?

Las funciones inversas tienen las propiedades

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Cuando se aplican estas relaciones a las funciones trigonométricas inversas, debe tenerse en cuenta que las funciones trigonométricas tienen inversas sólo en dominios restringidos. Para valores de x fuera de esos dominios, esas dos propiedades no son válidas. Por ejemplo, arcsen (sen π) es 0, no π.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, entonces

$$\text{sen}(\text{arcsen } x) = x \text{ y } \text{arcsen}(\text{sen } y) = y.$$

Si $-\pi/2 < y < \pi/2$, entonces

$$\tan(\arctan x) = x \text{ y } \arctan(\tan y) = y.$$

Si $|x| \ge 1$ y $0 \le y < \pi/2$ o $\pi/2 < y \le \pi$, entonces

$$\sec(\text{arcsec } x) = x \text{ y } \text{arcsec}(\sec y) = y.$$

Propiedades análogas son válidas para otras funciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación

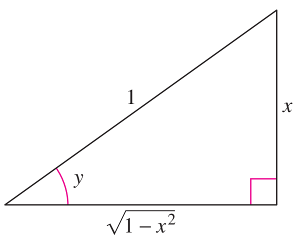
$$\arctan(2x - 3) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{Ecuación original.}$$

$$\tan[\arctan(2x - 3)] = \tan\frac{\pi}{4} \qquad \text{Tomar tangentes en ambos lados.}$$

$$2x - 3 = 1 \qquad \tan(\arctan x) = x.$$

$$x = 2 \qquad \text{Despejar } x.$$

Algunos problemas de cálculo requieren la evaluación de expresiones del tipo cos(arcsen x), como se muestra en el ejemplo 3.



$y = \text{arcsen } x$
Figura 5.30

EJEMPLO 3 Uso de triángulos rectángulos

a) Dado $y = \text{arcsen } x$, donde $0 < y < \pi/2$, encontrar cos y.
b) Dado $y = \text{arcsec}(\sqrt{5}/2)$, encontrar tan y.

Solución

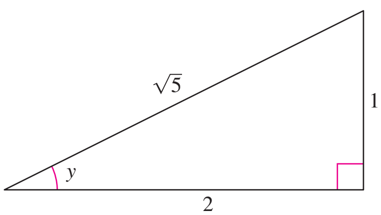
a) Como $y = \text{arcsen } x$, se sabe que sen $y = x$. Esta relación entre x y y puede representarse en un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 5.30.

$$\cos y = \cos(\text{arcsen } x) = \frac{\text{adj.}}{\text{hip.}} = \sqrt{1 - x^2}$$

(Este resultado es también válido para $-\pi/2 < y < 0$.)

b) Al utilizar el triángulo rectángulo mostrado en la figura 5.31 se obtiene

$$\tan y = \tan\left[\text{arcsec}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \frac{\text{op.}}{\text{adj.}} = \frac{1}{2}$$



$y = \text{arcsec}\,\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
Figura 5.31

NOTA No hay acuerdo universal sobre la definición de arcsec x (o de arccsc x) para valores negativos de x. Cuando se definió aquí el recorrido o rango de arco secante, se eligió preservar la identidad recíproca.

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}.$$

Por ejemplo, para evaluar arcsec (-2), se puede escribir

$$\operatorname{arcsec}(-2) = \arccos(-0.5) \approx 2.09.$$

Una de las consecuencias de la definición de la inversa de la función secante dada en este texto es que su gráfica tiene pendiente positiva en todo valor de x de su dominio. (Ver la figura 5.29.) Ello se refleja en el signo de valor absoluto en la fórmula de la derivada de arcsec x. ■

TECNOLOGÍA Si la herramienta de graficación no tiene la función arco secante, se puede obtener la gráfica usando

$$f(x) = \operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}.$$

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

En la sección 5.1 se vio que la derivada de la función *trascendente* $f(x) = \ln x$ es la función *algebraica* $f'(x) = 1/x$. A continuación se verá que las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son también algebraicas (aunque las funciones trigonométricas inversas son trascendentes).

El próximo teorema presenta las derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas. En el apéndice A se presentan las demostraciones para arcsen u y arccos u, y el resto se deja como ejercicio (ver el ejercicio 104). Notar que las derivadas de arccos u, arccot u y arccsc u son las *negativas* de la derivada de arcsen u, arctan u y arcsec u, respectivamente.

TEOREMA 5.16 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si u es una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

EJEMPLO 4 Derivación de funciones trigonométricas inversas

a) $$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen}(2x)] = \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

b) $$\frac{d}{dx}[\arctan(3x)] = \frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{3}{1+9x^2}$$

c) $$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen}\sqrt{x}] = \frac{(1/2)\,x^{-1/2}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

d) $$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} e^{2x}] = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{(e^{2x})^2-1}} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1}} = \frac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}}$$

El signo de valor absoluto no es necesario, porque $e^{2x} > 0$.

EJEMPLO 5 Una derivada que puede ser simplificada

$$\begin{aligned}
y &= \operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2} \\
y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x\left(\frac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-1/2} + \sqrt{1-x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \\
&= \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \\
&= 2\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 5, se aprecia una de las ventajas de las funciones trigonométricas inversas: pueden utilizarse para integrar funciones algebraicas comunes. Por ejemplo, del resultado mostrado en el ejemplo se desprende que

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}\right).$$

■

EJEMPLO 6 Análisis de la gráfica de una función trigonométrica inversa

Analizar la gráfica de $y = (\arctan x)^2$.

Solución De la derivada

$$y' = 2(\arctan x)\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)$$
$$= \frac{2 \arctan x}{1 + x^2}$$

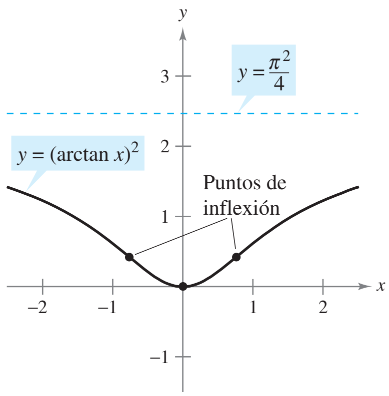
se puede observar que el único punto crítico es $x = 0$. Por el criterio de la primera derivada, este valor corresponde a un mínimo relativo. De la segunda derivada se obtiene

$$y'' = \frac{(1 + x^2)\left(\dfrac{2}{1 + x^2}\right) - (2 \arctan x)(2x)}{(1 + x^2)^2}$$
$$= \frac{2(1 - 2x \arctan x)}{(1 + x^2)^2}$$

se concluye que los puntos de inflexión se presentan donde $2x \arctan x = 1$. Al utilizar el método de Newton, esos puntos son $x \approx \pm 0.765$. Por último, como

$$\lim_{x \to \pm\infty} (\arctan x)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

se concluye que la gráfica tiene a $y = \pi^2/4$ como asíntota horizontal. La figura 5.32 muestra la gráfica.



La gráfica de $y = (\arctan x)^2$ tiene una asíntota horizontal a $y = \pi^2/4$
Figura 5.32

EJEMPLO 7 Obtener un ángulo máximo

Un fotógrafo está fotografiando un cuadro de 4 pies de altura colgado en una pared de una galería de arte. La lente de la cámara está a 1 pie bajo el extremo inferior del cuadro como se muestra en la figura 5.33. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse la cámara para conseguir que el ángulo subtendido por la lente de la cámara sea máximo?

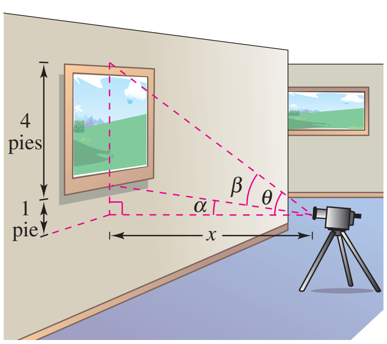
Solución En la figura 5.33, sea β el ángulo que se desea maximizar

$$\beta = \theta - \alpha$$
$$= \operatorname{arccot} \frac{x}{5} - \operatorname{arccot} x$$

Al derivar se obtiene

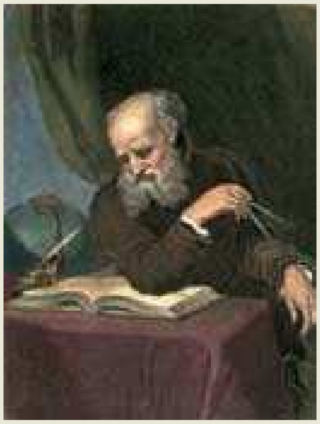
$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{-1/5}{1 + (x^2/25)} - \frac{-1}{1 + x^2}$$
$$= \frac{-5}{25 + x^2} + \frac{1}{1 + x^2}$$
$$= \frac{4(5 - x^2)}{(25 + x^2)(1 + x^2)}.$$

como $d\beta/dx = 0$ cuando $x = \sqrt{5}$, se puede concluir por el criterio de la primera derivada que esta distancia hace maximizar el ángulo β. Así pues, la distancia es $x \approx 2.236$ pies y el ángulo máximo es $\beta \approx 0.7297$ radianes $\approx 41.81°$.



No está dibujado a escala

La cámara debe estar a 2.236 pies de la pared para maximizar el ángulo β
Figura 5.33



The Granger Collection

GALILEO GALILEI (1564-1642)

La visión de la ciencia de Galileo difería de la aceptada perspectiva aristotélica de que la Naturaleza tiene magnitudes susceptibles de descripción, tales como "fluidez" o "potencialidad". Él quiso describir el mundo físico en términos de *cantidades medibles*, como el tiempo, la distancia, la fuerza y la masa.

Resumen de las reglas básicas de derivación

A principios del siglo XVII, Europa se vio inmersa en una era científica representada por grandes pensadores como Descartes, Galileo, Huygens, Newton y Kepler. Estos hombres creían en una naturaleza gobernada por leyes básicas, expresables en gran parte en términos matemáticos. Una de las publicaciones más influyentes de la época —el *Dialogo soprai die massimi sistemi del mondo* de Galileo Galilei— se ha convertido en una descripción clásica del pensamiento científico moderno.

Conforme las matemáticas se han ido desarrollando en los siglos posteriores, se ha visto que unas cuantas funciones elementales son suficientes para modelar la mayoría* de los fenómenos de la física, la química, la biología, la ingeniería, la economía y otros campos. Una **función elemental** es una función de la lista siguiente o una que puede obtenerse con éstas mediante sumas, productos, cocientes o composiciones.

Funciones algebraicas	*Funciones trascendentes*
Funciones polinomiales	Funciones logarítmicas
Funciones racionales	Funciones exponenciales
Funciones con radicales	Funciones trigonométricas
	Funciones trigonométricas inversas

Con las reglas de derivación introducidas hasta ahora en el texto es posible derivar *cualquier* función elemental. Por conveniencia, se resumen esas reglas a continuación.

Reglas básicas de derivación de funciones elementales

1. $\frac{d}{dx}[cu] = cu'$
2. $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$
3. $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$
4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
5. $\frac{d}{dx}[c] = 0$
6. $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$
7. $\frac{d}{dx}[x] = 1$
8. $\frac{d}{dx}[|u|] = \frac{u}{|u|}(u'), \quad u \neq 0$
9. $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u}$
10. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u\, u'$
11. $\frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{u'}{(\ln a)u}$
12. $\frac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u u'$
13. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = (\cos u)u'$
14. $\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\operatorname{sen} u)u'$
15. $\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)u'$
16. $\frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)u'$
17. $\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)u'$
18. $\frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)u'$
19. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
20. $\frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
21. $\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1 + u^2}$
22. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1 + u^2}$
23. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$
24. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

* *Algunas funciones importantes usadas en ingeniería y ciencias (como las funciones de Bessel y la función gamma) no son funciones elementales.*

5.6 Ejercicios

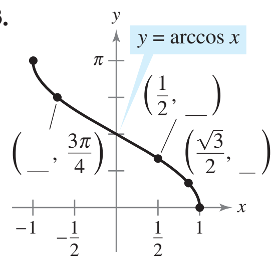
Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 1 y 2, *a*) usar una herramienta de graficación para completar la tabla, *b*) representar a mano los puntos de la tabla y la función, *c*) usar una herramienta de graficación para representar la función y comparar con el dibujo del apartado *b*) y *d*) hallar las intersecciones con los ejes y las simetrías de la gráfica.**

x	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y											

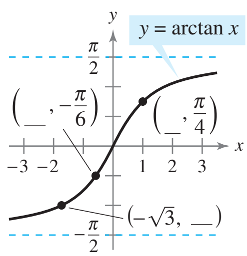
1. $y = \text{arcsen } x$ **2.** $y = \arccos x$

En los ejercicios 3 y 4, determinar las coordenadas faltantes de los puntos sobre la gráfica de la función.

3.



4.



En los ejercicios 5 a 12, evaluar la expresión sin usar calculadora.

5. $\text{arcsen } \frac{1}{2}$ **6.** $\text{arcsen } 0$

7. $\arccos \frac{1}{2}$ **8.** $\arccos 1$

9. $\arctan \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **10.** $\text{arccot}(-\sqrt{3})$

11. $\text{arccsc}(-\sqrt{2})$ **12.** $\text{arcsec}(-\sqrt{2})$

En los ejercicios 13 a 16, usar la calculadora para aproximar el valor. Redondear la respuesta a dos decimales.

13. $\arccos(-0.8)$ **14.** $\text{arcsen}(-0.39)$

15. $\text{arcsec } 1.269$ **16.** $\arctan(-5)$

En los ejercicios 17 a 20, evaluar la expresión sin usar calculadora. (*Sugerencia:* Ver el ejercicio 3.)

17. *a*) $\text{sen}\left(\arctan \dfrac{3}{4}\right)$

b) $\sec\left(\text{arcsen } \dfrac{4}{5}\right)$

18. *a*) $\tan\left(\arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\cos\left(\text{arcsen } \dfrac{5}{13}\right)$

19. *a*) $\cot\left[\text{arcsen}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]$

b) $\csc\left[\arctan\left(-\dfrac{5}{12}\right)\right]$

20. *a*) $\sec\left[\arctan\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right]$

b) $\tan\left[\text{arcsen}\left(-\dfrac{5}{6}\right)\right]$

En los ejercicios 21 a 26, usar la figura para escribir la expresión en forma algebraica dada $y = \arccos x$, donde $0 < y < \pi/2$.

21. $\cos y$

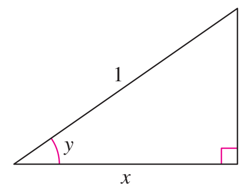
22. $\text{sen } y$

23. $\tan y$

24. $\cot y$

25. $\sec y$

26. $\csc y$



En los ejercicios 27 a 34, escribir la expresión en la forma algebraica. [*Sugerencia:* Trazar un triángulo rectángulo, como se demostró en el ejemplo 3.]

27. $\cos(\text{arcsen } 2x)$ **28.** $\sec(\arctan 4x)$

29. $\text{sen}(\text{arcsec } x)$ **30.** $\cos(\text{arccot } x)$

31. $\tan\left(\text{arcsec } \dfrac{x}{3}\right)$ **32.** $\sec[\text{arcsen}(x - 1)]$

33. $\csc\left(\arctan \dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$ **34.** $\cos\left(\text{arcsen } \dfrac{x - h}{r}\right)$

En los ejercicios 35 y 36, *a*) utilizar una herramienta de graficación para representar f y g en la misma pantalla para verificar si son iguales, *b*) usar álgebra para verificar que f y g son iguales y *c*) identificar las asíntotas horizontales de las gráficas.

35. $f(x) = \text{sen}(\arctan 2x), \quad g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$

36. $f(x) = \tan\left(\arccos \dfrac{x}{2}\right), \quad g(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$

En los ejercicios 37 a 40, despejar x.

37. $\text{arcsen}(3x - \pi) = \frac{1}{2}$ **38.** $\arctan(2x - 5) = -1$

39. $\text{arcsen}\sqrt{2x} = \arccos\sqrt{x}$ **40.** $\arccos x = \text{arcsec } x$

En los ejercicios 41 y 42, verificar cada identidad.

41. *a*) $\text{arccsc } x = \text{arcsen } \dfrac{1}{x}, \quad x \geq 1$

b) $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}, \quad x > 0$

42. *a*) $\text{arcsen}(-x) = -\text{arcsen } x, \quad |x| \leq 1$

b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \leq 1$

En los ejercicios 43 a 62, hallar la derivada de la función.

43. $f(x) = 2 \text{ arcsen}(x - 1)$ **44.** $f(t) = \text{arcsen } t^2$

45. $g(x) = 3 \arccos \dfrac{x}{2}$ **46.** $f(x) = \text{arcsec } 2x$

47. $f(x) = \arctan e^x$ **48.** $f(x) = \arctan\sqrt{x}$

49. $g(x) = \dfrac{\text{arcsen } 3x}{x}$ **50.** $h(x) = x^2 \arctan 5x$

51. $h(t) = \text{sen}(\arccos t)$ **52.** $f(x) = \text{arcsen } x + \arccos x$

53. $y = 2x \arccos x - 2\sqrt{1 - x^2}$

54. $y = \ln(t^2 + 4) - \dfrac{1}{2}\arctan \dfrac{t}{2}$

55. $y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\ln \dfrac{x + 1}{x - 1} + \arctan x\right)$

56. $y = \dfrac{1}{2}\left[x\sqrt{4 - x^2} + 4 \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]$

57. $y = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2}$

58. $y = x \arctan 2x - \dfrac{1}{4}\ln(1 + 4x^2)$

59. $y = 8 \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{4} - \dfrac{x\sqrt{16 - x^2}}{2}$

60. $y = 25 \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{5} - x\sqrt{25 - x^2}$

61. $y = \arctan x + \dfrac{x}{1 + x^2}$

62. $y = \arctan \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2(x^2 + 4)}$

En los ejercicios 63 a 68, encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto dado.

63. $y = 2 \operatorname{arcsen} x, \quad \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$

64. $y = \dfrac{1}{2}\arccos x, \quad \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\pi}{8}\right)$

65. $y = \arctan \dfrac{x}{2}, \quad \left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$

66. $y = \operatorname{arcsec} 4x, \quad \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

67. $y = 4x \arccos(x - 1), \quad (1, 2\pi)$

68. $y = 3x \operatorname{arcsen} x, \quad \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

CAS ***Aproximación lineal y cuadrática*** **En los ejercicios 69 a 72, usar un sistema algebraico por computadora para hallar la aproximación lineal $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ y la aproximación cuadrática $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$ de la función f en $x = a$. Dibujar la gráfica de la función y sus aproximaciones lineal y cuadrática.**

69. $f(x) = \arctan x, \quad a = 0$

70. $f(x) = \arccos x, \quad a = 0$

71. $f(x) = \operatorname{arcsen} x, \quad a = \frac{1}{2}$

72. $f(x) = \arctan x, \quad a = 1$

En los ejercicios 73 a 76, encontrar los extremos relativos de la función.

73. $f(x) = \operatorname{arcsec} x - x$

74. $f(x) = \operatorname{arcsen} x - 2x$

75. $f(x) = \arctan x - \arctan(x - 4)$

76. $h(x) = \operatorname{arcsen} x - 2 \arctan x$

En los ejercicios 77 a 80, analizar y bosquejar una gráfica de la función. Identificar algún extremo relativo, puntos de inflexión, y asíntotas. Usar una herramienta de graficación para verificar sus resultados.

77. $f(x) = \operatorname{arcsen}(x - 1)$

78. $f(x) = \arctan x + \dfrac{\pi}{2}$

79. $f(x) = \operatorname{arcsec} 2x$

80. $f(x) = \arccos \dfrac{x}{4}$

Derivación implícita **En los ejercicios 81 a 84, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el punto dado.**

81. $x^2 + x \arctan y = y - 1, \quad \left(-\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

82. $\arctan(xy) = \operatorname{arcsen}(x + y), \quad (0, 0)$

83. $\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arcsen} y = \dfrac{\pi}{2}, \quad \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

84. $\arctan(x + y) = y^2 + \dfrac{\pi}{4}, \quad (1, 0)$

Desarrollo de conceptos

85. Explicar por qué los dominios de las funciones trigonométricas están restringidos cuando se calcula la función trigonométrica inversa.

86. Explicar por qué $\tan \pi = 0$ no implica que $\arctan 0 = \pi$.

87. Explicar cómo dibujar $y = \operatorname{arccot} x$ en una herramienta de graficación que no tiene la función arco cotangente.

88. ¿Son las derivadas de las funciones trigonométricas inversas algebraicas o trascendentales? Mencionar las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

89. *a)* Usar una herramienta de graficación para evaluar arcsen (arcsen 0.5) y arcsen (arcsen 1).

b) Sea $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{arcsen} x)$. Hallar el valor de x en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ tal que $f(x)$ es un número real.

Para discusión

90. El punto $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$ está en la gráfica de $y = \cos x$. ¿$\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ se encuentra en la gráfica de $y = \arccos x$? Si no es así, ¿esto contradice la definición de la función inversa?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 91 a 96, determinar si la expresión es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

91. Dado que $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, se tiene que $\arccos \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\pi}{3}$.

92. $\operatorname{arcsen} \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

93. La pendiente de la gráfica de la función tangente inversa es positiva para todo x.

94. El dominio de $y = \operatorname{arcsen} x$ es $[0, \pi]$.

95. $\dfrac{d}{dx}[\arctan(\tan x)] = 1$ para todo x en su dominio.

96. $\operatorname{arcsen}^2 x + \arccos^2 x = 1$.

97. ***Razón de cambio angular*** Un aeroplano vuela a una altitud de 5 millas hacia un punto directamente sobre un observador. Considerar θ y x como se muestra en la figura siguiente.

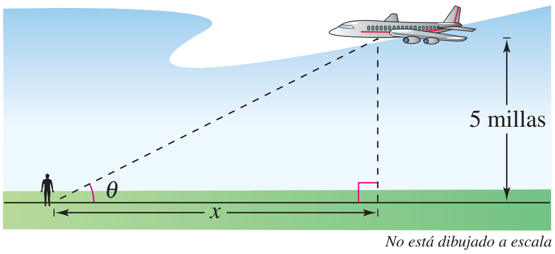


Figura para 97

a) Escribir θ como una función de x.

b) La velocidad del aeroplano es 400 millas por hora. Encontrar $d\theta/dt$ cuando $x = 10$ millas y cuando $x = 3$ millas.

98. ***Redactar*** Repetir el ejercicio 97 si la altitud del aeroplano es 3 millas y describir cómo la altitud afecta la razón de cambio de θ.

99. ***Ritmo o velocidad de cambio angular*** En un experimento sobre caída libre, se deja caer un objeto desde una altura de 256 pies. Una cámara situada en el suelo y distante 500 pies del punto de impacto, toma imágenes de la caída (ver la figura).

a) Hallar la función posición que describe la altura del objeto en cada instante t, suponer que se deja caer en $t = 0$. ¿En qué momento el objeto llega al suelo?

b) Calcular la razón de cambio del ángulo de elevación de la cámara cuando $t = 1$ y $t = 2$.

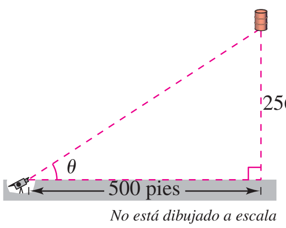


Figura para 99

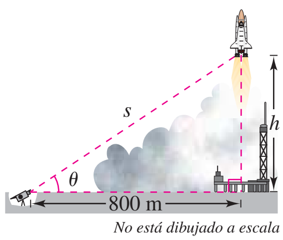


Figura para 100

100. ***Razón de cambio angular*** Una cámara de televisión a nivel del suelo graba el despegue vertical de un cohete desde un punto a 800 metros del punto de lanzamiento. Sea θ el ángulo de elevación del cohete y s la distancia entre la cámara y el cohete (ver la figura). Expresar θ como función de s durante el ascenso del cohete. Diferenciar el resultado para hallar $d\theta/dt$ en términos de s y de ds/dt.

101. ***Maximización de un ángulo*** Una cartelera de 85 pies de distancia de separación es perpendicular a un camino recto y está a 40 pies del camino (ver la figura). Encontrar el punto sobre el camino en el cual el ángulo θ subtendido por la carretera es un máximo.

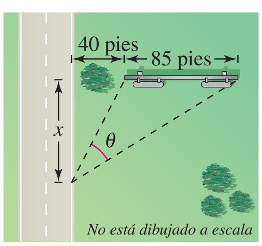


Figura para 101

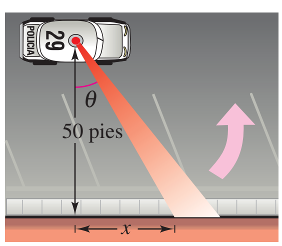


Figura para 102

102. ***Velocidad angular*** Un carro patrulla está estacionado a 50 pies de un almacén grande (ver la figura). La luz giratoria en la parte superior del carro gira a una razón de 30 revoluciones por minuto. Escribir θ como una función de x. ¿Qué tan lejos está el rayo de luz moviéndose a lo largo de la pared cuando el rayo hace un ángulo de $\theta = 45°$ con la línea perpendicular desde la luz hasta la pared?

103. *a*) Demostrar que $\arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$, $xy \neq 1$.

b) Usar la fórmula del apartado *a*) para probar que

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

104. Verificar las siguientes fórmulas de derivación.

a) $\dfrac{d}{dx}[\arctan u] = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

b) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$

c) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

d) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

105. ***Existencia de una inversa*** Determinar los valores de k para los que la función $f(x) = kx + \operatorname{sen} x$ tiene función inversa.

106. ***Para pensar*** Usar una herramienta de graficación para representar $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.

a) ¿Por qué la gráfica de g no es la recta $y = x$?

b) Hallar los extremos de g.

107. *a*) Representar la función $f(x) = \arccos x + \operatorname{arcsen} x$ sobre el intervalo $[-1, 1]$.

b) Describir la gráfica de f.

c) Comprobar el resultado del apartado *b*) analíticamente.

108. Comprobar que $\operatorname{arcsen} x = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$, $|x| < 1$.

109. Calcular el valor de c en el intervalo $[0, 4]$ sobre el eje x que maximiza el ángulo θ.

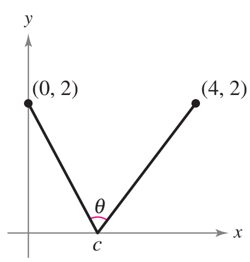


Figura para 109

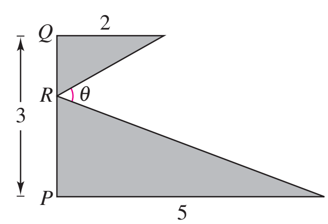


Figura para 110

110. Encontrar PR tal que $0 \leq PR \leq 3$ y $m\angle\theta$ sea un máximo.

111. Algunos textos de cálculo definen la inversa de la función secante usando el dominio $[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$.

a) Hacer un boceto de la gráfica $y = \operatorname{arcsec} x$ usando este rango.

b) Mostrar que $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

5.7 Funciones trigonométricas inversas: integración

- **Integrar funciones cuyas primitivas o antiderivadas contienen funciones trigonométricas inversas.**
- **Integrar funciones completando un cuadrado.**
- **Resumir las reglas básicas de integración de funciones elementales.**

Integrales que contienen funciones trigonométricas inversas

Las derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas se agrupan en tres pares. En cada par, la derivada de una es la negativa de la otra. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y

$$\frac{d}{dx}[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cuando se hace una lista de las *antiderivadas* o *primitivas* que corresponden a cada una de las funciones trigonométricas inversas, es suficiente citar una de cada par. Es conveniente usar arcsen x como primitiva de $1/\sqrt{1-x^2}$, en lugar de $-\arccos x$. El siguiente teorema da una fórmula para la primitiva de cada una de las tres parejas. La demostración de estas reglas de integración se deja como ejercicio (ver ejercicios 87 a 89).

PARA MAYOR INFORMACIÓN En el artículo "A Direct Proof of the Integral Formula for Arctangent", de Arnold J. Insel, en *The College Mathematics Journal*, se puede encontrar una detallada demostración de la parte 2 del teorema 5.17.

TEOREMA 5.17 INTEGRALES QUE INVOLUCRAN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Sea u una función derivable de x, y sea $a > 0$.

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$ **2.** $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

EJEMPLO 1 Integrales con funciones trigonométricas inversas

a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + C$$

b) $$\int \frac{dx}{2+9x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{(\sqrt{2})^2+(3x)^2} \qquad u = 3x,\ a = \sqrt{2}$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{3x}{\sqrt{2}} + C$$

c) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{2\,dx}{2x\sqrt{(2x)^2-3^2}} \qquad u = 2x,\ a = 3$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\frac{|2x|}{3} + C$$

Las integrales del ejemplo 1 son aplicaciones a simple vista de las fórmulas de integración. Desafortunadamente, no es lo frecuente. Las fórmulas de integración que involucran funciones trigonométricas inversas pueden aparecer de muy diversas formas.

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Integrales como la del ejemplo 2 son fáciles con ayuda de programas de integración simbólica en computadora. No obstante, al usarlos hay que recordar que pueden no ser capaces de encontrar una primitiva debido a dos razones. En primer lugar, algunas funciones elementales tienen primitivas no elementales. En segundo lugar, todos esos programas tienen limitaciones, así que puede darse una función para cuya integración no está preparado el programa. Recordar, asimismo, que las primitivas o antiderivadas que involucran funciones trigonométricas o logarítmicas se pueden expresar de maneras muy diversas. Por ejemplo, al utilizar uno de esos programas para la integral del ejemplo 2 se obtiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \arctan \sqrt{e^{2x}-1} + C.$$

Demostrar que esta antiderivada es equivalente a la obtenida en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Integración por sustitución

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Solución Tal como está, la integral no se ajusta a ninguna de las tres fórmulas para las funciones trigonométricas inversas. Pero haciendo la sustitución de $u = e^x$, se obtiene

$$u = e^x \quad \Rightarrow \quad du = e^x\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}.$$

Con esta sustitución, ya se puede integrar como sigue:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(e^x)^2-1}} && \text{Escribir } e^{2x} \text{ como } (e^x)^2.\\
&= \int \frac{du/u}{\sqrt{u^2-1}} && \text{Sustituir.}\\
&= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} && \text{Reescribir para que se ajuste a la regla arcsec.}\\
&= \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{1} + C && \text{Aplicar la regla arcsec.}\\
&= \operatorname{arcsec} e^x + C && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Reescribir como suma de dos cocientes

Hallar $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

Solución Esta integral tampoco parece ajustarse a las fórmulas. Sin embargo, desdoblando el integrando en dos partes, la primera es integrable por la regla de la potencia y la segunda da una función seno inversa.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\
&= -\frac{1}{2}\int (4-x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{(4-x^2)^{1/2}}{1/2}\right] + 2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} + C\\
&= -\sqrt{4-x^2} + 2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

Completar el cuadrado

Cuando hay funciones cuadráticas en el integrando, completar el cuadrado ayuda a resolver la integral. Por ejemplo, la expresión cuadrática $x^2 + bx + c$ puede escribirse como diferencia de dos cuadrados al sumar y restar $(b/2)^2$.

$$\begin{aligned}
x^2 + bx + c &= x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\\
&= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Completar el cuadrado

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}$.

Solución Se puede escribir el denominador como la suma de dos cuadrados como se muestra.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 7 &= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 7 \\ &= (x - 2)^2 + 3 = u^2 + a^2 \end{aligned}$$

En esta forma de cuadrados completados, al tomar $u = x - 2$ y $a = \sqrt{3}$.

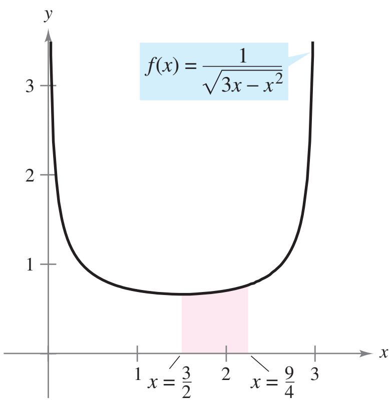
$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7} = \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x - 2}{\sqrt{3}} + C$$

Si el coeficiente dominante no es 1, conviene sacarlo como factor común del cuadrado. Por ejemplo, se puede completar el cuadrado en la expresión $2x^2 - 8x + 10$ factorizando primero.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 10 &= 2(x^2 - 4x + 5) \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4 + 5) \\ &= 2[(x - 2)^2 + 1] \end{aligned}$$

Para completar el cuadrado cuando el coeficiente de x^2 es negativo, el mismo proceso de factorización sirve. Por ejemplo, se puede completar el cuadrado en la expresión $3x - x^2$ como se muestra.

$$\begin{aligned} 3x - x^2 &= -(x^2 - 3x) \\ &= -\left[x^2 - 3x + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2\right] \\ &= \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$



El área de la gráfica en la región delimitada por la gráfica de f, el eje x, $x = \frac{3}{2}$, y $x = \frac{9}{4}$ es $\pi/6$

Figura 5.34

EJEMPLO 5 Completar el cuadrado (coeficiente dominante negativo)

Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}$$

el eje x, y las rectas $x = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{9}{4}$.

Solución En la figura 5.34 se ve que el área está dada por

$$\text{Área} = \int_{3/2}^{9/4} \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}\, dx.$$

Al utilizar la expresión con el cuadrado completo antes obtenido, se puede integrar como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{3/2}^{9/4} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2}} &= \int_{3/2}^{9/4} \frac{dx}{\sqrt{(3/2)^2 - [x - (3/2)]^2}} \\ &= \arcsen \frac{x - (3/2)}{3/2}\Bigg]_{3/2}^{9/4} \\ &= \arcsen \frac{1}{2} - \arcsen 0 \\ &= \frac{\pi}{6} \\ &\approx 0.524 \end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Ante integrales como la del ejemplo 5 siempre queda el recurso de una solución numérica. Así, aplicando la regla de Simpson (con $n = 12$) a la integral de este ejemplo, se obtiene

$$\int_{3/2}^{9/4} \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}\, dx \approx 0.523599.$$

Este valor difiere del valor exacto de la integral ($\pi/6 \approx 0.5235988$) en menos de una millonésima.

Repaso a las reglas básicas de integración

Ya se ha terminado la introducción a las **reglas básicas de integración**. Si se quiere llegar a un uso eficaz de tales fórmulas, es conveniente practicarlas hasta que se consiga aprenderlas de memoria.

Reglas básicas de integración ($a > 0$)

1. $\displaystyle\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$

2. $\displaystyle\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$

3. $\displaystyle\int du = u + C$

4. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

5. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

6. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$

7. $\displaystyle\int a^u\,du = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^u + C$

8. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

9. $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

10. $\displaystyle\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

11. $\displaystyle\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

12. $\displaystyle\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

13. $\displaystyle\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$

14. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

15. $\displaystyle\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

16. $\displaystyle\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

17. $\displaystyle\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

18. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C$

19. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$

20. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$

Se aprende mucho acerca de la naturaleza de la integración comparando esta lista con la de las reglas de derivación dadas en la sección anterior. Se dispone ya de suficientes reglas de derivación para derivar *cualquier* función elemental. Sin embargo, la situación en la integración no es la misma.

Las reglas recogidas en la lista de arriba son esencialmente las que se han podido deducir de las reglas de derivación. Hasta ahora, no se han desarrollado reglas para integrar un producto o un cociente general, o la función logaritmo natural o las funciones trigonométricas inversas. Lo que es más importante, ninguna de las reglas de la lista es aplicable si no se logra dar el *du* apropiado correspondiente a la *u* de la fórmula. La cuestión es que se necesita trabajar más sobre técnicas de integración, lo cual se hará en el capítulo 8. Los dos ejemplos siguientes dan una idea más clara de lo que *se puede* y de lo que *no se puede* hacer con las técnicas disponibles hasta este momento.

EJEMPLO 6 Comparación de problemas de integración

De las siguientes integrales encontrar tantas como sea posible, al utilizar las fórmulas y técnicas estudiadas hasta ahora en este texto.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ ***c)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

Solución

a) *Se puede* encontrar la integral (se emplea la regla del arco secante).

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}|x| + C$$

b) *Se puede* encontrar la integral (se emplea la regla de la potencia).

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \frac{1}{2}\int (x^2-1)^{-1/2}(2x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2-1)^{1/2}}{1/2}\right] + C \\ &= \sqrt{x^2-1} + C\end{aligned}$$

c) *No se pueden* integrar con las técnicas estudiadas. (Verificar esta conclusión revisando las fórmulas de la lista.)

EJEMPLO 7 Comparación de problemas de integración

Hallar tantas de las integrales siguientes como sea posible mediante las técnicas y fórmulas estudiadas hasta ahora en este texto.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x}$ ***c)*** $\displaystyle\int \ln x\,dx$

Solución

a) *Se puede* calcular la integral (se emplea la regla para el logaritmo).

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\ln x} &= \int \frac{1/x}{\ln x}\,dx \\ &= \ln|\ln x| + C\end{aligned}$$

b) *Se puede* calcular la integral (se emplea la regla de la potencia).

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x\,dx}{x} &= \int \left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^1\,dx \\ &= \frac{(\ln x)^2}{2} + C\end{aligned}$$

c) *No se puede* integrar con las técnicas estudiadas.

NOTA Observar que en los ejemplos 6 y 7 son precisamente las funciones *más simples* las que no se pueden integrar todavía.

5.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 24, hallar la integral.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
3. $\displaystyle\int \frac{7}{16+x^2}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{12}{1+9x^2}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{4+(x-3)^2}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{t}{t^4+16}\,dt$
9. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-4}}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{t}{t^4+25}\,dt$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx$
13. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{4+e^{4x}}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{3+(x-2)^2}\,dx$
15. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{25-\tan^2 x}}\,dx$
16. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{7+\cos^2 x}\,dx$
17. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{3}{2\sqrt{x}(1+x)}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+1}\,dx$
22. $\displaystyle\int \frac{4x+3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
23. $\displaystyle\int \frac{x+5}{\sqrt{9-(x-3)^2}}\,dx$
24. $\displaystyle\int \frac{x-2}{(x+1)^2+4}\,dx$

En los ejercicios 25 a 38, evaluar la integral.

25. $\displaystyle\int_0^{1/6} \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$
26. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
27. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$
28. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{6}{9+x^2}\,dx$
29. $\displaystyle\int_{-1/2}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
30. $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{x}{1+x^2}\,dx$
31. $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{25+(x-3)^2}\,dx$
32. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{16x^2-5}}\,dx$
33. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$
34. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx$
35. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$
36. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$
37. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
38. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

En los ejercicios 39 a 50, calcular o evaluar la integral (completando el cuadrado cuando sea necesario).

39. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}$
40. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4x+13}$
41. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+6x+13}\,dx$
42. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2+2x+2}\,dx$
43. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx$
44. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx$
45. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx$
46. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx$
47. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$
48. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}\,dx$
49. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+2x^2+2}\,dx$
50. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9+8x^2-x^4}}\,dx$

En los ejercicios 51 a 54, hallar o evaluar la integral mediante sustitución especificada.

51. $\displaystyle\int \sqrt{e^t-3}\,dt$

$u = \sqrt{e^t-3}$

52. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,dx$

$u = \sqrt{x-2}$

53. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

$u = \sqrt{x}$

54. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{3-x}\sqrt{x+1}}$

$u = \sqrt{x+1}$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 55 a 57, determinar cuáles de las integrales pueden hallarse usando las reglas básicas estudiadas hasta ahora en el texto.

55. *a)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$
56. *a)* $\displaystyle\int e^{x^2}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}e^{1/x}\,dx$
57. *a)* $\displaystyle\int \sqrt{x-1}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

58. Determinar qué valor aproxima mejor el área de la región entre el eje x y la función.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

en el intervalo $[-0.5, 0.5]$. (Basar la elección en un dibujo de la región, *no* en cálculos.)

a) 4 *b)* -3 *c)* 1 *d)* 2 *e)* 3

59. Decidir si se puede calcular la integral

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

al utilizar las fórmulas y técnicas estudiadas. Explicar el razonamiento.

Para discusión

60. Determinar cuál de las integrales puede encontrarse usando las fórmulas de integración básicas que se han estudiado hasta ahora en el texto.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ *c*) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

Ecuación diferencial **En los ejercicios 61 y 62, usar la ecuación diferencial y las condiciones especificadas para encontrar *y*.**

61. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

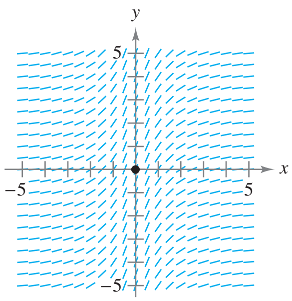
$y(0) = \pi$

62. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{4+x^2}$

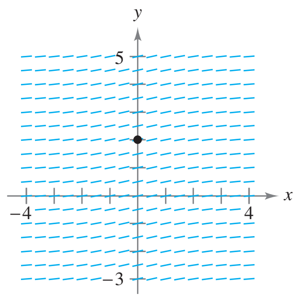
$y(2) = \pi$

Campos de pendientes **En los ejercicios 63 a 66 se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto especificado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representar la solución. Comparar los resultados con los dibujos del apartado *a*).**

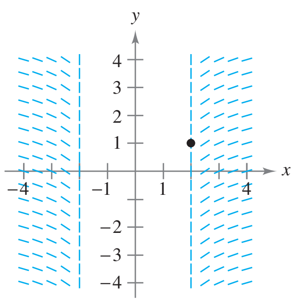
63. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{1+x^2}$, $(0, 0)$



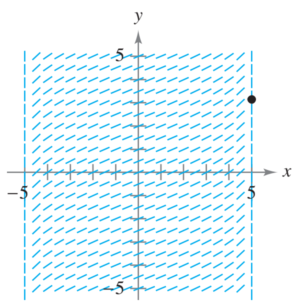
64. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{9+x^2}$, $(0, 2)$



65. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-4}}$, $(2, 1)$



66. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{\sqrt{25-x^2}}$, $(5, \pi)$



CAS ***Campo de pendientes*** **En los ejercicios 67 a 70, usar un sistema algebraico por computadora para graficar el campo de pendientes de la ecuación diferencial y representar la solución que satisface la condición inicial.**

67. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10}{x\sqrt{x^2-1}}$, $y(3) = 0$

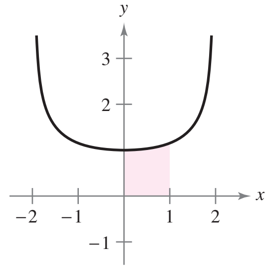
68. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{12+x^2}$, $y(4) = 2$

69. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{\sqrt{16-x^2}}$, $y(0) = 2$

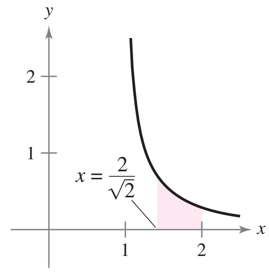
70. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y}}{1+x^2}$, $y(0) = 4$

Área **En los ejercicios 71 a 76, encontrar el área de la región.**

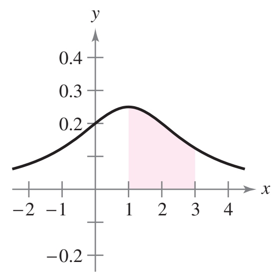
71. $y = \dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}$



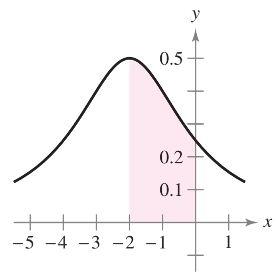
72. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$



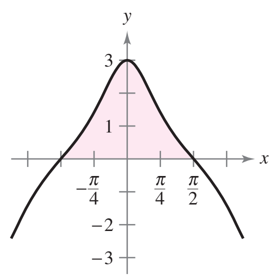
73. $y = \dfrac{1}{x^2-2x+5}$



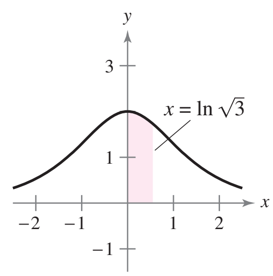
74. $y = \dfrac{2}{x^2+4x+8}$



75. $y = \dfrac{3\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$



76. $y = \dfrac{4e^x}{1+e^{2x}}$



En los ejercicios 77 y 78, *a*) verificar la fórmula de integración, después *b*) usar ésta para encontrar el área de la región.

77. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\arctan x}{x} + C$

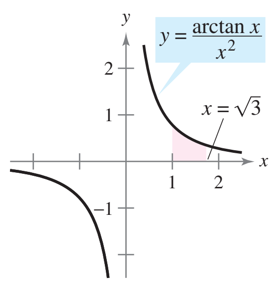


Figura para 77

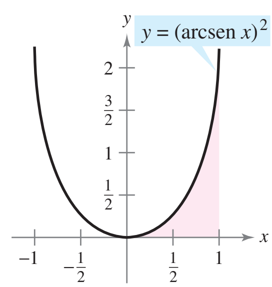


Figura para 78

78. $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$

$= x(\operatorname{arcsen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x + C$

79. *a*) Dibujar la región representada por

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx.$$

b) Usar la función de integración de una herramienta de graficación para aproximar el área.

c) Encontrar analíticamente el área exacta.

80. *a*) Mostrar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \pi.$

b) Estimar el número π usando la regla de Simpson (con $n = 6$) y la integral en el apartado *a*).

c) Estimar el número π usando la capacidad de integración de una herramienta de graficación.

81. ***Investigación*** Considerar la función $F(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{x+2} \frac{2}{t^2+1}\,dt.$

a) Escribir una breve interpretación geométrica de $F(x)$ con relación a la función $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$. Empleando la explicación, estimar el valor de x donde F es máxima.

b) Efectuar la integración para hallar una forma alternativa de $F(x)$. Usar el cálculo para localizar el valor de x que hace a F máxima y comparar los resultados con lo estimado en el apartado *a*).

82. Considerar la integral $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{6x - x^2}}\,dx.$

a) Hallar la integral completando el cuadrado en el radicando.

b) Hallarla al sustituir $u = \sqrt{x}$.

c) Las primitivas o antiderivadas obtenidas en *a*) y *b*) parecen muy diferentes. Usar una herramienta de graficación para representar cada primitiva en la misma pantalla y determinar la relación entre ellas. Determinar sus dominios.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 83 a 86, determinar si la expresión es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

83. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x\sqrt{9x^2 - 16}} = \frac{1}{4}\operatorname{arcsec}\frac{3x}{4} + C$

84. $\displaystyle\int \frac{dx}{25 + x^2} = \frac{1}{25}\arctan\frac{x}{25} + C$

85. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = -\arccos\frac{x}{2} + C$

86. Una forma de hallar $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{9 - e^{2x}}}\,dx$ es mediante la regla del arcoseno.

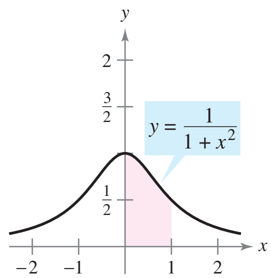
Verificación de las reglas de integración **En los ejercicios 87 a 89, verificar cada regla por diferenciación. Sea $a > 0$.**

87. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$

88. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

89. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

90. ***Integración numérica*** *a*) Escribir una integral que represente el área de la región. *b*) Después usar la regla de los trapecios con $n = 8$ para estimar el área de la región. *c*) Explicar cómo se pueden usar los resultados de los apartados *a*) y *b*) para estimar π.



91. ***Movimiento vertical*** Un objeto es lanzado desde el suelo hacia arriba con velocidad inicial de 500 pies por segundo. En este ejercicio, el objetivo es analizar el movimiento mientras asciende.

a) Despreciando la resistencia al aire, expresar la velocidad en función del tiempo. Representar esta función en la herramienta de graficación.

b) Usando los resultados del apartado *a*) encontrar la función posición y determinar la altura máxima alcanzada por el objeto.

c) Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, la ecuación obtenida es

$$\frac{dv}{dt} = -(32 + kv^2)$$

donde -32 pies/s² en la aceleración de la gravedad y k una constante. Hallar la velocidad en función del tiempo al resolver la ecuación.

$$\int \frac{dv}{32 + kv^2} = -\int dt.$$

d) Usar una herramienta de graficación para representar la función velocidad $v(t)$ del apartado *c*) si $k = 0.001$. Usar la gráfica para estimar el instante t_0 en el que el objeto alcanza la máxima altura.

e) Usar la función integración de la herramienta de graficación para aproximar el valor de

$$\int_0^{t_0} v(t)\,dt$$

donde $v(t)$ y t_0 son los obtenidos en el apartado *d*). Ésta es la aproximación de la máxima altura del objeto.

f) Explicar la diferencia entre los resultados de los apartados *b*) y *e*).

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este tópico, ver el artículo "What Goes Up Must Come Down; Will Air Resistance Make It Return Sooner, or Later?", de John Lekner, en *Mathematics Magazine*.

92. Representar $y_1 = \dfrac{x}{1+x^2}$, $y_2 = \arctan x$, y $y_3 = x$ sobre $[0, 10]$.

Demostrar que $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ para $x > 0$.

5.8 Funciones hiperbólicas

- **Desarrollar las propiedades de las funciones hiperbólicas.**
- **Derivar e integrar funciones hiperbólicas.**
- **Desarrollar las propiedades de las funciones hiperbólicas inversas.**
- **Derivar e integrar funciones que contienen funciones hiperbólicas inversas.**

American Institute of Physics/Emilio Segre Visual Archives, Physics Today Collection

JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777)

La primera persona que publicó un estudio acerca de las funciones hiperbólicas fue Johann Heinrich Lambert, un matemático germano-suizo y colega de Euler.

Funciones hiperbólicas

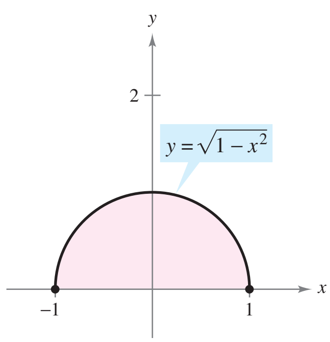
En esta sección se verá brevemente una clase especial de funciones exponenciales llamadas **funciones hiperbólicas**. El nombre de *funciones hiperbólicas* proviene de la comparación entre el área de una región semicircular, como se muestra en la figura 5.35, con el área de una región bajo una hipérbola, como se muestra en la figura 5.36. La integral que da el área del semicírculo emplea una función trigonométrica (circular) inversa:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.571.$$

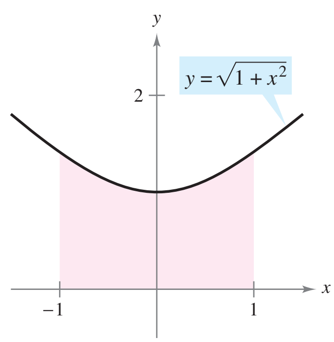
La integral que da el área de la región hiperbólica emplea una función hiperbólica inversa:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{senh}^{-1} x\right]_{-1}^{1} \approx 2.296.$$

Ésta es sólo una de las muchas analogías existentes entre las funciones hiperbólicas y las trigonométricas.



Círculo: $x^2 + y^2 = 1$
Figura 5.35



Hipérbola: $-x^2 + y^2 = 1$
Figura 5.36

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre el desarrollo de funciones hiperbólicas, ver el artículo "An Introduction to Hyperbolic Functions in Elementary Calculus", de Jerome Rosenthal en *Mathematics Teacher*.

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

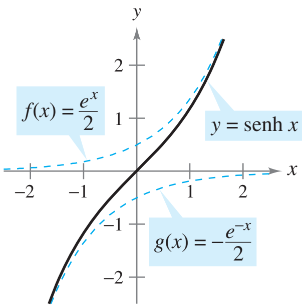
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}, \quad x \neq 0$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

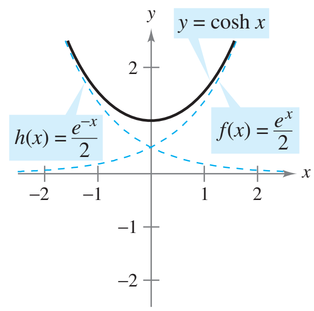
$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x}, \quad x \neq 0$$

NOTA senh x se lee "seno hiperbólico de x", cosh x se lee "coseno hiperbólico de x", etcétera.

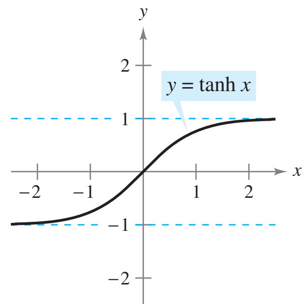
La figura 5.37 muestra las gráficas de las seis funciones hiperbólicas, así como sus dominios y recorridos o rangos. Nótese que la gráfica de senh x se puede obtener al sumar la coordenada y que corresponde a las funciones exponenciales $f(x) = \frac{1}{2}\, e^x$ y $g(x) = -\frac{1}{2}\, e^{-x}$. De manera semejante, la gráfica de cosh x puede ser obtenida al sumar la coordenada y que corresponde a las funciones exponenciales $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ y $h(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$.



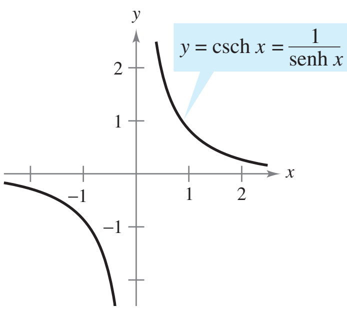
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$



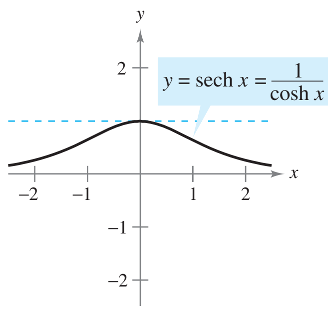
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $[1, \infty)$



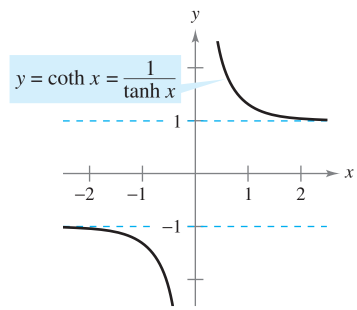
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-1, 1)$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(0, 1]$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Figura 5.37

Muchas identidades trigonométricas tienen sus correspondientes *identidades hiperbólicas*. Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
\cosh^2 x - \text{senh}^2\, x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{4}{4} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
2\, \text{senh} x \cosh x &= 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\
&= \text{senh}\, 2x.
\end{aligned}
$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para entender geométricamente la relación entre las funciones hiperbólica y exponencial, ver el artículo "A Short Proof. Linking the Hyperbolic and Exponential Functions", de Michael J. Seery en *The AMATYC Review*.

Identidades hiperbólicas

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad \operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$
$$\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1 \qquad \operatorname{senh}(x - y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y$$
$$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1 \qquad \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$
$$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$
$$\operatorname{senh}^2 x = \frac{-1 + \cosh 2x}{2} \qquad \cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$$
$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

Derivación e integración de funciones hiperbólicas

Debido a que las funciones hiperbólicas se expresan en términos de e^x y e^{-x}, es fácil obtener reglas de derivación para sus derivadas. El siguiente teorema presenta estas derivadas con las reglas de integración correspondientes.

TEOREMA 5.18 DERIVADAS E INTEGRALES DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Sea u una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{senh} u] = (\cosh u)u' \qquad \int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\cosh u] = (\operatorname{senh} u)u' \qquad \int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\tanh u] = (\operatorname{sech}^2 u)u' \qquad \int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\coth u] = -(\operatorname{csch}^2 u)u' \qquad \int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech} u] = -(\operatorname{sech} u \tanh u)u' \qquad \int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\operatorname{csch} u] = -(\operatorname{csch} u \coth u)u' \qquad \int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\operatorname{senh} x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \\
\frac{d}{dx}[\tanh x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right] \\
&= \frac{\cosh x(\cosh x) - \operatorname{senh} x(\operatorname{senh} x)}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{1}{\cosh^2 x} \\
&= \operatorname{sech}^2 x
\end{aligned}$$

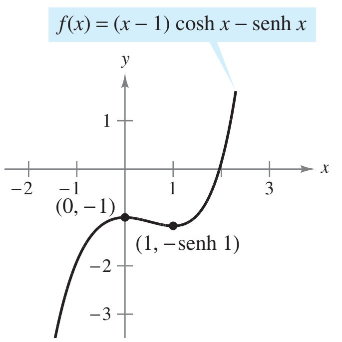
En los ejercicios 122 a 124, se pide la demostración de algunas de las reglas de derivación.

EJEMPLO 1 Derivación de funciones hiperbólicas

a) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{senh}(x^2 - 3)] = 2x \cosh(x^2 - 3)$ **b)** $\dfrac{d}{dx}[\ln(\cosh x)] = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \tanh x$

c) $\dfrac{d}{dx}[x \operatorname{senh} x - \cosh x] = x \cosh x + \operatorname{senh} x - \operatorname{senh} x = x \cosh x$

EJEMPLO 2 Localización de los extremos relativos



$f''(0) < 0$, entonces $(0, -1)$ es un máximo relativo. $f''(1) > 0$, para $(1, -\operatorname{senh} 1)$ es un mínimo relativo
Figura 5.38

Localizar los extremos relativos de $f(x) = (x - 1) \cosh x - \operatorname{senh} x$.

Solución Se comienza por igualar a cero la derivada de f.

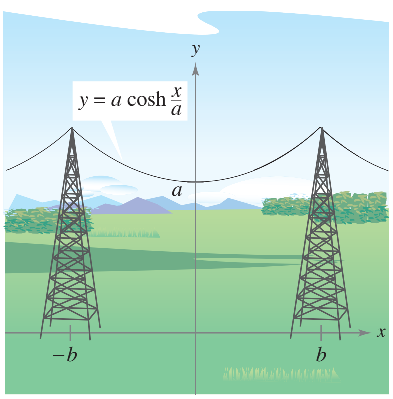
$$\begin{aligned} f'(x) = (x - 1) \operatorname{senh} x + \cosh x - \cosh x &= 0 \\ (x - 1) \operatorname{senh} x &= 0 \end{aligned}$$

Así pues, los puntos críticos son $x = 1$ y $x = 0$. Con el criterio de la segunda derivada es fácil comprobar que el punto $(0, -1)$ da un máximo relativo y el punto $(1, -\operatorname{senh} 1)$ da un mínimo relativo, como muestra la figura 5.38. Confirmar este resultado gráficamente usando una herramienta de graficación. Si no se dispone de las funciones hiperbólicas en la herramienta de graficación, se pueden utilizar funciones exponenciales como a continuación.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 1)\left(\tfrac{1}{2}\right)(e^x + e^{-x}) - \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &= \tfrac{1}{2}(xe^x + xe^{-x} - e^x - e^{-x} - e^x + e^{-x}) \\ &= \tfrac{1}{2}(xe^x + xe^{-x} - 2e^x) \end{aligned}$$

Cuando un cable flexible uniforme, como un cable telefónico, está suspendido entre dos puntos, adopta la forma de una *catenaria*, que se estudia en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Cables colgantes



Catenaria
Figura 5.39

Los cables de un tendido eléctrico están suspendidos entre dos torres, formando la catenaria que se muestra en la figura 5.39. La ecuación de la catenaria es

$$y = a \cosh \frac{x}{a}.$$

La distancia entre las dos torres es $2b$. Calcular la pendiente de la catenaria en el punto de sujeción del cable en la torre de la derecha.

Solución Derivando se obtiene

$$y' = a\left(\frac{1}{a}\right) \operatorname{senh} \frac{x}{a} = \operatorname{senh} \frac{x}{a}.$$

En el punto $(b, a \cosh(b/a))$, la pendiente (desde la izquierda) viene dada por $m = \operatorname{senh} \dfrac{b}{a}$.

PARA MAYOR INFORMACIÓN En el ejemplo 3, el cable es una curva catenaria entre dos soportes de la misma altura. Para aprender acerca de la forma del cable sostenido entre dos soportes de diferente altura, ver el artículo "Reexamining the Catenary", de Paul Cella en *The College Mathematics Journal*.

EJEMPLO 4 Integración de una función hiperbólica

Calcular $\int \cosh 2x \operatorname{senh}^2 2x\, dx$.

Solución

$$\begin{aligned}\int \cosh 2x \operatorname{senh}^2 2x\, dx &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{senh} 2x)^2(2\cosh 2x)\, dx \qquad u = \operatorname{senh} 2x\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\operatorname{senh} 2x)^3}{3}\right] + C\\ &= \frac{\operatorname{senh}^3 2x}{6} + C\end{aligned}$$

Funciones hiperbólicas inversas

A diferencia de las funciones trigonométricas, las funciones hiperbólicas no son periódicas. De hecho, volviendo a la figura 5.37 se ve que cuatro de las seis funciones hiperbólicas son inyectivas (el seno, la tangente, la cosecante y la cotangente hiperbólicos). Así, se puede aplicar el teorema 5.7, el cual afirma que esas cuatro funciones tienen funciones inversas. Las otras dos (las funciones coseno y secante hiperbólicas) son inyectivas si se restringe su dominio a los números reales positivos, y es en este dominio restringido donde tienen función inversa. Debido a que las funciones hiperbólicas se definen en términos de las funciones exponenciales, no es de extrañar que las funciones hiperbólicas inversas puedan expresarse en términos de funciones logarítmicas, como se muestra en el teorema 5.19.

TEOREMA 5.19 FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Función	*Dominio*
$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	$(-\infty, \infty)$
$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$	$[1, \infty)$
$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$(-1, 1)$
$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$	$(0, 1]$
$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{\lvert x\rvert}\right)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

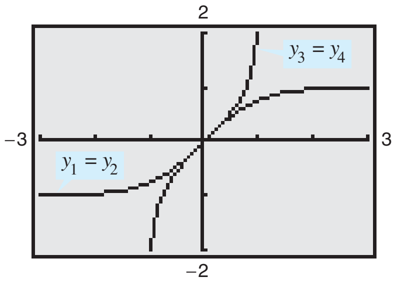
DEMOSTRACIÓN La demostración de este teorema es una aplicación directa de las propiedades de las funciones exponencial y logarítmica. Por ejemplo, si

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

y

$$g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

se puede ver que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, lo cual implica que g es la función inversa de f.



Gráfica de la función tangente hiperbólica y la función tangente hiperbólica inversa
Figura 5.40

TECNOLOGÍA Se puede utilizar una herramienta de graficación para verificar gráficamente los resultados del teorema 5.19. Por ejemplo, dibujando las gráficas de las funciones siguientes.

$$y_1 = \tanh x \qquad \text{Tangente hiperbólica.}$$

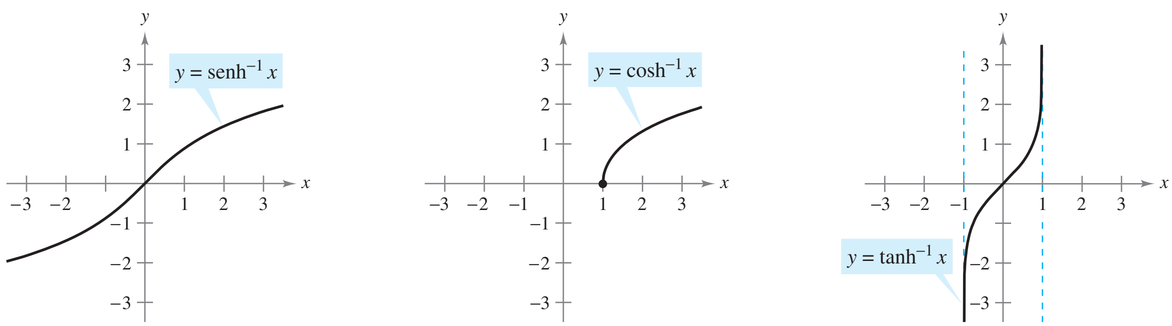
$$y_2 = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{Definición de la tangente hiperbólica.}$$

$$y_3 = \tanh^{-1} x \qquad \text{Tangente hiperbólica inversa.}$$

$$y_4 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad \text{Definición de la tangente hiperbólica inversa.}$$

Los resultados se muestran en la figura 5.40. En ella se aprecia que $y_1 = y_2$ y $y_3 = y_4$. También se puede ver que la gráfica de y_1 es el reflejo de la de y_3 en la recta $y = x$.

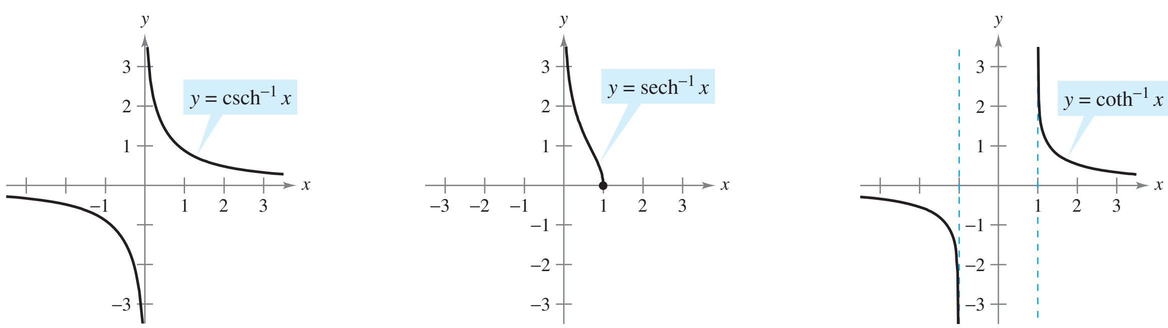
Las gráficas de las funciones hiperbólicas inversas se muestran en la figura 5.41.



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$

Dominio: $[1, \infty)$
Recorrido o rango: $[0, \infty)$

Dominio: $(-1, 1)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Dominio: $(0, 1]$
Recorrido o rango: $[0, \infty)$

Dominio: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Figura 5.41

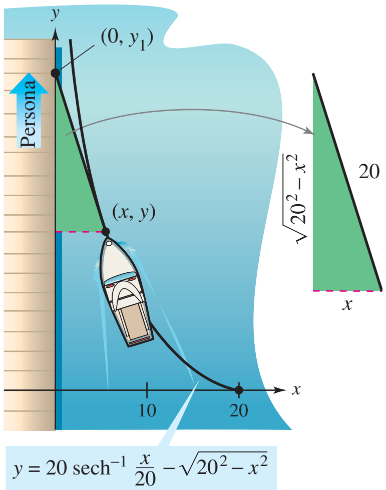
La secante hiperbólica inversa se puede utilizar para definir la curva llamada *tractriz* o *curva de persecución*, que se analiza en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Tractriz

Una persona sostiene una cuerda que está atada a un bote, como se muestra en la figura 5.42. Mientras la persona camina por el muelle, el bote recorre una **tractriz**, dada por la ecuación

$$y = a \operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

donde a es la longitud de la cuerda. Si $a = 20$ pies, calcular la distancia que la persona debe caminar para llevar el bote a 5 pies del muelle.



Una persona tiene que caminar 41.27 pies para acercar el bote a 5 pies del muelle
Figura 5.42

Solución En la figura 5.42, notar que la distancia recorrida por la persona se da por

$$\begin{aligned} y_1 = y + \sqrt{20^2 - x^2} &= \left(20 \operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{20} - \sqrt{20^2 - x^2}\right) + \sqrt{20^2 - x^2} \\ &= 20 \operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{20}. \end{aligned}$$

Cuando $x = 5$, esta distancia es

$$\begin{aligned} y_1 = 20 \operatorname{sech}^{-1}\frac{5}{20} &= 20 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (1/4)^2}}{1/4} \\ &= 20 \ln\left(4 + \sqrt{15}\right) \\ &\approx 41.27 \text{ pies.} \end{aligned}$$

Derivación e integración de funciones hiperbólicas inversas

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas, que recuerdan las de las funciones trigonométricas inversas, se enumeran en el teorema 5.20, junto con las correspondientes fórmulas de integración (en forma logarítmica). Se puede comprobar cada una de ellas al aplicar las definiciones logarítmicas de las funciones hiperbólicas inversas. (Ver los ejercicios 119 a 121.)

TEOREMA 5.20 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Sea u una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{senh}^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}} \qquad \frac{d}{dx}[\cosh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2} \qquad \frac{d}{dx}[\coth^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1} u] = \frac{-u'}{u\sqrt{1 - u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{csch}^{-1} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1 + u^2}}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C$$

EJEMPLO 6 Más sobre la tractriz

Para la tractriz del ejemplo 5, mostrar que el bote apunta siempre hacia la persona que tira de él.

Solución En un punto (x, y) de la tractriz, la pendiente de la gráfica marca la dirección del bote, como se muestra en la figura 5.42.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\left[20 \operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{20} - \sqrt{20^2 - x^2}\right] \\ &= -20\left(\frac{1}{20}\right)\left[\frac{1}{(x/20)\sqrt{1 - (x/20)^2}}\right] - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-2x}{\sqrt{20^2 - x^2}}\right) \\ &= \frac{-20^2}{x\sqrt{20^2 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{20^2 - x^2}} \\ &= -\frac{\sqrt{20^2 - x^2}}{x} \end{aligned}$$

Sin embargo, en la figura 5.42 se puede ver que la pendiente del segmento de recta que une el punto $(0, y_1)$ con el punto (x, y) es también

$$m = -\frac{\sqrt{20^2 - x^2}}{x}.$$

Así pues, el bote apunta hacia la persona en todo momento. (Por esta razón se llama *curva de persecución*.)

EJEMPLO 7 Integración usando funciones hiperbólicas inversas

Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9x^2}}$.

Solución Sea $a = 2$ y $u = 3x$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9x^2}} &= \int \frac{3\,dx}{(3x)\sqrt{4 - 9x^2}} & \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} \\ &= -\frac{1}{2}\ln\frac{2 + \sqrt{4 - 9x^2}}{|3x|} + C & -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{|u|} + C \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Integración usando funciones hiperbólicas inversas

Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 4x^2}$.

Solución Sea $a = \sqrt{5}$ y $u = 2x$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 - 4x^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{(\sqrt{5})^2 - (2x)^2} & \int \frac{du}{a^2 - u^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5} + 2x}{\sqrt{5} - 2x}\right|\right) + C & \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C \\ &= \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5} + 2x}{\sqrt{5} - 2x}\right| + C \end{aligned}$$

5.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, evaluar la función. Si el valor no es un número racional, dar la respuesta con tres decimales.

1. *a*) $\operatorname{senh} 3$
   b) $\tanh(-2)$
2. *a*) $\cosh 0$
   b) $\operatorname{sech} 1$
3. *a*) $\operatorname{csch}(\ln 2)$
   b) $\coth(\ln 5)$
4. *a*) $\operatorname{senh}^{-1} 0$
   b) $\tanh^{-1} 0$
5. *a*) $\cosh^{-1} 2$
   b) $\operatorname{sech}^{-1} \frac{2}{3}$
6. *a*) $\operatorname{csch}^{-1} 2$
   b) $\coth^{-1} 3$

En los ejercicios 7 a 16, verificar la identidad.

7. $e^x = \operatorname{senh} x + \cosh x$
8. $e^{2x} = \operatorname{senh} 2x + \cosh 2x$
9. $\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$
10. $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$
11. $\cosh^2 x = \dfrac{1 + \cosh 2x}{2}$
12. $\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{-1 + \cosh 2x}{2}$
13. $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$
14. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
15. $\operatorname{senh} 3x = 3 \operatorname{senh} x + 4 \operatorname{senh}^3 x$
16. $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \dfrac{x + y}{2} \cosh \dfrac{x - y}{2}$

En los ejercicios 17 y 18, usar el valor de la función hiperbólica dada para hallar los valores de las otras funciones hiperbólicas en *x*.

17. $\operatorname{senh} x = \dfrac{3}{2}$
18. $\tanh x = \dfrac{1}{2}$

En los ejercicios 19 a 30, encontrar la derivada de la función.

19. $f(x) = \operatorname{senh} 3x$
20. $f(x) = \cosh(x - 2)$
21. $y = \operatorname{sech}(5x^2)$
22. $y = \tanh(3x^2 - 1)$
23. $f(x) = \ln(\operatorname{senh} x)$
24. $g(x) = \ln(\cosh x)$
25. $y = \ln\left(\tanh \dfrac{x}{2}\right)$
26. $y = x \cosh x - \operatorname{senh} x$
27. $h(x) = \dfrac{1}{4} \operatorname{senh} 2x - \dfrac{x}{2}$
28. $h(t) = t - \coth t$
29. $f(t) = \arctan(\operatorname{senh} t)$
30. $g(x) = \operatorname{sech}^2 3x$

En los ejercicios 31 a 34, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

31. $y = \operatorname{senh}(1 - x^2)$, $(1, 0)$
32. $y = x^{\cosh x}$, $(1, 1)$
33. $y = (\cosh x - \operatorname{senh} x)^2$, $(0, 1)$
34. $y = e^{\operatorname{senh} x}$, $(0, 1)$

En los ejercicios 35 a 38, hallar los extremos relativos de la función. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

35. $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x - \cos x \cosh x$, $\quad -4 \leq x \leq 4$
36. $f(x) = x \operatorname{senh}(x - 1) - \cosh(x - 1)$
37. $g(x) = x \operatorname{sech} x$
38. $h(x) = 2 \tanh x - x$

En los ejercicios 39 y 40, demostrar que la función satisface la ecuación diferencial.

	Función	*Ecuación diferencial*
39.	$y = a \operatorname{senh} x$	$y''' - y' = 0$
40.	$y = a \cosh x$	$y'' - y = 0$

CAS ***Aproximaciones lineal y cuadrática*** **En los ejercicios 41 y 42, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la aproximación lineal. $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ y la aproximación cuadrática $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$ de la función f en $x = a$. Usar una herramienta de graficación para representar la función y las aproximaciones lineal y cuadrática.**

41. $f(x) = \tanh x, \quad a = 0$
42. $f(x) = \cosh x, \quad a = 0$

Catenarias **En los ejercicios 43 y 44, se proporciona un modelo de cables de alta tensión suspendidos entre dos torres. *a*) Representar gráficamente el modelo, *b*) calcular la altura del cable en los puntos de sujeción y en el punto medio entre las torres y *c*) encontrar la pendiente del modelo en el punto donde el cable está sujeto a la torre de la derecha.**

43. $y = 10 + 15 \cosh \dfrac{x}{15}, \quad -15 \leq x \leq 15$
44. $y = 18 + 25 \cosh \dfrac{x}{25}, \quad -25 \leq x \leq 25$

En los ejercicios 45 a 58, hallar la integral.

45. $\displaystyle\int \cosh 2x \, dx$
46. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(-x) \, dx$
47. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(1 - 2x) \, dx$
48. $\displaystyle\int \frac{\cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$
49. $\displaystyle\int \cosh^2(x - 1) \operatorname{senh}(x - 1) \, dx$
50. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh} x}{1 + \operatorname{senh}^2 x} \, dx$
51. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} \, dx$
52. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(2x - 1) \, dx$
53. $\displaystyle\int x \operatorname{csch}^2 \frac{x^2}{2} \, dx$
54. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^3 x \tanh x \, dx$
55. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{csch}(1/x) \coth(1/x)}{x^2} \, dx$
56. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\sqrt{9 - \operatorname{senh}^2 x}} \, dx$
57. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4 + 1} \, dx$
58. $\displaystyle\int \frac{2}{x\sqrt{1 + 4x^2}} \, dx$

En los ejercicios 59 a 64, evaluar la integral.

59. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \tanh x \, dx$
60. $\displaystyle\int_0^1 \cosh^2 x \, dx$
61. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{25 - x^2} \, dx$
62. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} \, dx$
63. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/4} \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} \, dx$
64. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} 2e^{-x} \cosh x \, dx$

En los ejercicios 65 a 74, calcular la derivada de la función.

65. $y = \cosh^{-1}(3x)$

66. $y = \tanh^{-1}\dfrac{x}{2}$

67. $y = \tanh^{-1}\sqrt{x}$

68. $f(x) = \coth^{-1}(x^2)$

69. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$

70. $y = \tanh^{-1}(\operatorname{sen} 2x)$

71. $y = (\operatorname{csch}^{-1} x)^2$

72. $y = \operatorname{sech}^{-1}(\cos 2x), \quad 0 < x < \pi/4$

73. $y = 2x \operatorname{senh}^{-1}(2x) - \sqrt{1 + 4x^2}$

74. $y = x \tanh^{-1} x + \ln\sqrt{1 - x^2}$

Desarrollo de conceptos

75. Discutir en qué son similares las funciones hiperbólicas y las funciones trigonométricas.

76. Dibujar la gráfica de cada una de las funciones hiperbólicas. Después identificar el dominio y el recorrido o rango de cada función.

77. ¿Cuál de las fórmulas de derivadas hiperbólicas difiere de sus contrapartes trigonométricas por un signo menos?

Para discusión

78. ¿Qué función hiperbólica toma sólo valores positivos? ¿Qué funciones hiperbólicas se incrementan en sus dominios?

Límites **En los ejercicios 79 a 86, encontrar los límites.**

79. $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{senh} x$

80. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{senh} x$

81. $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh x$

82. $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x$

83. $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sech} x$

84. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{csch} x$

85. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x}{x}$

86. $\lim\limits_{x\to 0^-} \coth x$

En los ejercicios 87 a 96, calcular la integral indefinida usando las fórmulas del teorema 5.20.

87. $\displaystyle\int \frac{1}{3 - 9x^2}\,dx$

88. $\displaystyle\int \frac{1}{2x\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx$

89. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}}\,dx$

90. $\displaystyle\int \frac{x}{9 - x^4}\,dx$

91. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1 + x}}\,dx$

92. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + x^3}}\,dx$

93. $\displaystyle\int \frac{-1}{4x - x^2}\,dx$

94. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 8}}$

95. $\displaystyle\int \frac{1}{1 - 4x - 2x^2}\,dx$

96. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{2x^2 + 4x + 8}}$

En los ejercicios 97 a 100, evaluar la integral usando las fórmulas del teorema 5.20.

97. $\displaystyle\int_3^7 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$

98. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{4 + x^2}}\,dx$

99. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{16 - 9x^2}\,dx$

100. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{25x^2 + 1}}\,dx$

En los ejercicios 101 a 104, resolver la ecuación diferencial.

101. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{80 + 8x - 16x^2}}$

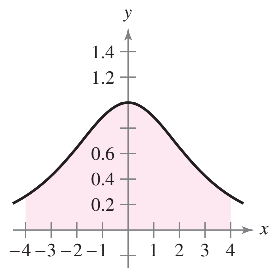
102. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(x - 1)\sqrt{-4x^2 + 8x - 1}}$

103. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 - 21x}{5 + 4x - x^2}$

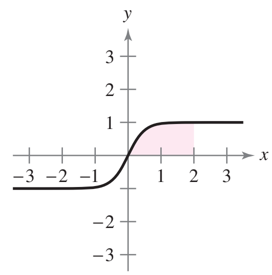
104. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - 2x}{4x - x^2}$

Área **En los ejercicios 105 a 108, encontrar el área de la región.**

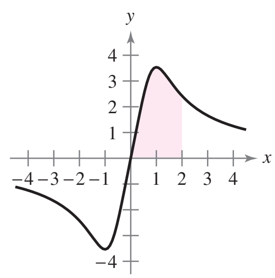
105. $y = \operatorname{sech}\dfrac{x}{2}$



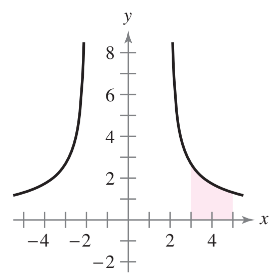
106. $y = \tanh 2x$



107. $y = \dfrac{5x}{\sqrt{x^4 + 1}}$



108. $y = \dfrac{6}{\sqrt{x^2 - 4}}$



En los ejercicios 109 y 110, evaluar la integral en términos de *a*) logaritmos naturales y *b*) funciones hiperbólicas inversas.

109. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

110. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2}$

111. ***Reacciones químicas*** Las sustancias químicas A y B se combinan en razón de 3 a 1 para formar un compuesto. La cantidad x de compuesto producida hasta el instante t es proporcional a las cantidades que quedan sin transformar de A y B en la disolución. Así pues, si se mezclan 3 kilogramos de A con 2 kilogramos de B, se tiene

$$\frac{dx}{dt} = k\left(3 - \frac{3x}{4}\right)\left(2 - \frac{x}{4}\right) = \frac{3k}{16}(x^2 - 12x + 32).$$

Un kilogramo del compuesto se ha formado en 10 minutos. Calcular la cantidad formada en 20 minutos y resolver la ecuación

$$\int \frac{3k}{16}\,dt = \int \frac{dx}{x^2 - 12x + 32}.$$

112. ***Movimiento vertical*** Un objeto es arrojado desde una altura de 400 pies.

a) Expresar la velocidad del objeto en función del tiempo (despreciando la resistencia al aire sobre el objeto).

b) Utilizando el resultado del apartado *a*) encontrar la función posición.

c) Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces $dv/dt = -32 + kv^2$, donde -32 pies/s^2 es la aceleración de la gravedad y k es una constante. Mostrar que la velocidad v es la función del tiempo

$$v(t) = -\sqrt{\frac{32}{k}}\tanh\left(\sqrt{32k}\,t\right)$$

al efectuar la siguiente integración y simplificando el resultado:

$$\int \frac{dv}{(32 - kv^2)} = -\int$$

d) Usando el resultado del apartado *c*) calcular $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$ e interpretarlo.

e) Integrar la función velocidad del apartado *c*) y hallar la posición s del objeto en función de t. Usar una herramienta de graficación para representar la función posición $k = 0.01$ y la función posición del apartado *b*) en la misma pantalla. Estimar el tiempo adicional requerido para que el objeto alcance el suelo, cuando se tiene en cuenta la resistencia al aire.

f) Describir qué sucedería si se aumenta el valor de k. A continuación, comprobar la afirmación con un valor particular de k.

Tractriz **En los ejercicios 113 y 114, usar la ecuación de la tractriz** $y = a\,\operatorname{sech}^{-1}\dfrac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$.

113. Encontrar dy/dx.

114. Sea L la recta tangente a la tractriz en el punto P. Si L corta al eje y en el punto Q, probar que la distancia entre P y Q es a.

115. Demostrar que $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $-1 < x < 1$.

116. Demostrar que $\operatorname{senh}^{-1} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right)$.

117. Demostrar que $\arctan(\operatorname{senh} x) = \operatorname{arcsen}(\tanh x)$.

118. Sean $x > 0$ y $b > 0$. Demostrar que $\displaystyle\int_{-b}^{b} e^{xt}\,dt = \frac{2\operatorname{senh} bx}{x}$.

En los ejercicios 119 a 124, verificar la fórmula de derivación.

119. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1} x] = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

120. $\dfrac{d}{dx}[\cosh^{-1} x] = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

121. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{senh}^{-1} x] = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

122. $\dfrac{d}{dx}[\cosh x] = \operatorname{senh} x$

123. $\dfrac{d}{dx}[\coth x] = -\operatorname{csch}^2 x$

124. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sech} x] = -\operatorname{sech} x \tanh x$

Preparación del examen Putnam

125. Desde el vértice $(0, c)$ de la catenaria $y = c\cosh(x/c)$, se dibuja una recta L perpendicular a la tangente de la catenaria en el punto P. Demostrar que la longitud de L intersecada por los ejes es igual a la ordenada y del punto P.

126. Aprobar o rechazar que existe al menos una recta normal a la gráfica de $y = \cosh x$ en un punto $(a, \cosh a)$ y también normal a la gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ en un punto $(c, \operatorname{senh} c)$.

[En un punto de la gráfica, una recta normal es la perpendicular a la recta tangente al punto. También, $x = (e^x + e^{-x})/2$ y $\operatorname{senh} x = (e^x - e^{-x})/2$.]

PROYECTO DE TRABAJO

Arco de San Luis

National Geographic/Getty Images

El arco de entrada a San Luis, Missouri, fue diseñada utilizando la función coseno hiperbólico. La ecuación utilizada para la construcción del arco es

$y = 693.8597 - 68.7672 \cosh 0.0100333x$,

$-299.2239 \le x \le 299.2239$

donde x y y se miden en pies. Las secciones del arco son triángulos equiláteros, y (x, y) describe la trayectoria de los centros de masas de esos triángulos. Para cada valor de x, el área del triángulo de la sección transversal es $A = 125.1406 \cosh 0.0100333x$. (*Fuente: Owner's Manual for the Gateway Arch, Saint Louis, MO, de William Thayer*)

a) ¿A qué altura sobre el suelo está el centro del triángulo más alto? (Al nivel del suelo es $y = 0$.)

b) ¿Cuál es la altura del arco? (*Sugerencia:* En un triángulo equilátero, $A = \sqrt{3}c^2$, donde c es la mitad de la base del triángulo y el centro de masa del triángulo está situado a dos tercios de la altura del triángulo.)

c) ¿Qué anchura tiene el arco en su base?

5 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, esbozar a mano la gráfica de la función. Identificar sus asíntotas.

1. $f(x) = \ln x - 3$
2. $f(x) = \ln(x + 3)$

En los ejercicios 3 y 4, usar las propiedades de los logaritmos para desarrollar la función logarítmica.

3. $\ln \sqrt[5]{\dfrac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}}$
4. $\ln[(x^2 + 1)(x - 1)]$

En los ejercicios 5 y 6, escribir la expresión como el logaritmo de una única cantidad.

5. $\ln 3 + \frac{1}{3}\ln(4 - x^2) - \ln x$
6. $3[\ln x - 2\ln(x^2 + 1)] + 2\ln 5$

En los ejercicios 7 y 8, despejar *x*.

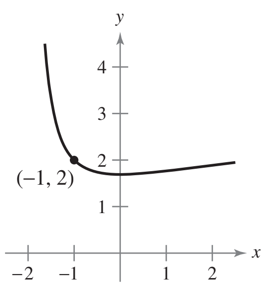
7. $\ln\sqrt{x + 1} = 2$
8. $\ln x + \ln(x - 3) = 0$

En los ejercicios 9 a 14, hallar la derivada de la función.

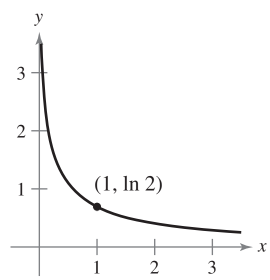
9. $g(x) = \ln\sqrt{2x}$
10. $h(x) = \ln \dfrac{x(x - 1)}{x - 2}$
11. $f(x) = x\sqrt{\ln x}$
12. $f(x) = \ln[x(x^2 - 2)^{2/3}]$
13. $y = \dfrac{1}{b^2}[a + bx - a\ln(a + bx)]$
14. $y = -\dfrac{1}{ax} + \dfrac{b}{a^2}\ln\dfrac{a + bx}{x}$

En los ejercicios 15 y 16, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

15. $y = \ln(2 + x) + \dfrac{2}{2 + x}$



16. $y = \ln\dfrac{1 + x}{x}$



En los ejercicios 17 a 24, hallar o evaluar la integral.

17. $\displaystyle\int \frac{1}{7x - 2}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 1}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$
21. $\displaystyle\int_1^4 \frac{2x + 1}{2x}\,dx$
22. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$
23. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sec\theta\,d\theta$
24. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx$

En los ejercicios 25 a 30, *a*) hallar la inversa de *f*, *b*) usar una herramienta de graficación para representar *f* y f^{-1} en una misma pantalla, *c*) comprobar que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ y *d*) establecer los dominios y rangos de *f* y f^{-1}.

25. $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$
26. $f(x) = 5x - 7$
27. $f(x) = \sqrt{x + 1}$
28. $f(x) = x^3 + 2$
29. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$
30. $f(x) = x^2 - 5, \quad x \geq 0$

En los ejercicios 31 a 34, verificar que *f* tiene una inversa. Entonces usar la función *f* del número real dado *a* para encontrar $(f^{-1})'(a)$. (*Sugerencia:* Usar el teorema 5.9.)

31. $f(x) = x^3 + 2, \quad a = -1$
32. $f(x) = x\sqrt{x - 3}, \quad a = 4$
33. $f(x) = \tan x, \quad -\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}, \quad a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
34. $f(x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad a = 0$

En los ejercicios 35 y 36, *a*) hallar la función inversa de *f*, *b*) usar una herramienta de graficación para representar *f* y f^{-1} en una misma pantalla, *c*) comprobar que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ y *d*) establecer los dominios y rangos de *f* y f^{-1}.

35. $f(x) = \ln\sqrt{x}$
36. $f(x) = e^{1-x}$

En los ejercicios 37 y 38, dibujar sin ayuda de una herramienta de graficación la gráfica de la función.

37. $y = e^{-x/2}$
38. $y = e^{-x^2}$

En los ejercicios 39 a 44, encontrar la derivada de la función.

39. $g(t) = t^2 e^t$
40. $g(x) = \ln\dfrac{e^x}{1 + e^x}$
41. $y = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$
42. $h(z) = e^{-z^2/2}$
43. $g(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$
44. $y = 3e^{-3/t}$

En los ejercicios 45 y 46, encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

45. $f(x) = \ln(e^{-x^2}), \quad (2, -4)$
46. $f(\theta) = \dfrac{1}{2}e^{\operatorname{sen} 2\theta}, \quad \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

En los ejercicios 47 y 48, hallar dy/dx por derivación implícita.

47. $y\ln x + y^2 = 0$
48. $\cos x^2 = xe^y$

En los ejercicios 49 a 56, encontrar o evaluar la integral.

49. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-3x^2}\,dx$
50. $\displaystyle\int_{1/2}^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$
51. $\displaystyle\int \frac{e^{4x} - e^{2x} + 1}{e^x}\,dx$
52. $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\,dx$

53. $\int xe^{1-x^2}\,dx$ **54.** $\int x^2e^{x^3+1}\,dx$

55. $\int_1^3 \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx$ **56.** $\int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$

57. Demostrar que $y = e^x(a\cos 3x + b \operatorname{sen} 3x)$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 10y = 0$.

58. ***Depreciación*** El valor V de un artículo después de t años es comparado por $V = 9\,000e^{-0.6t}$, $0 \le t \le 5$.

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función.

b) Encontrar la razón de cambio de V respecto de t cuando $t = 1$ y $t = 4$.

c) Usar una herramienta de graficación para representar las líneas tangentes a la función cuando $t = 1$ y $t = 4$.

En los ejercicios 59 y 60, calcular el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones.

59. $y = xe^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$

60. $y = 2e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

En los ejercicios 61 a 64, dibujar a mano la gráfica de la función.

61. $y = 3^{x/2}$ **62.** $y = 6(2^{-x^2})$

63. $y = \log_2(x - 1)$ **64.** $y = \log_4 x^2$

En los ejercicios 65 a 70, encontrar la derivada de la función.

65. $f(x) = 3^{x-1}$ **66.** $f(x) = (4e)^x$

67. $y = x^{2x+1}$ **68.** $y = x(4^{-x})$

69. $g(x) = \log_3 \sqrt{1-x}$ **70.** $h(x) = \log_5 \frac{x}{x-1}$

En los ejercicios 71 y 72, encontrar la integral indefinida.

71. $\int (x+1)5^{(x+1)^2}\,dx$ **72.** $\int \frac{2^{-1/t}}{t^2}\,dt$

73. ***Ritmo o velocidad de ascenso*** El tiempo t (en minutos) que tarda un avión pequeño en subir a una altitud de h pies es

$$t = 50 \log_{10} \frac{18\,000}{18\,000 - h}$$

donde 18 000 pies es el tope de altitud alcanzable por el avión.

a) Determinar el dominio de la función apropiada al contexto del problema.

b) Usar una herramienta de graficación para la función tiempo e identificar las asíntotas.

c) Encontrar el instante en el que la altitud crece a mayor ritmo o velocidad.

74. ***Interés compuesto***

a) ¿Qué capital hay que invertir continuamente a 5% de interés compuesto para que, al cabo de 15 años, el balance final sea $10 000?

b) Un depósito a una tasa de r% de interés compuesto continuo duplica su valor en 10 años. Calcular r.

En los ejercicios 75 y 76, representar la gráfica de la función.

75. $f(x) = 2\arctan(x+3)$ **76.** $h(x) = -3 \operatorname{arcsen} 2x$

En los ejercicios 77 y 78, evaluar la expresión sin usar una calculadora. (*Sugerencia:* Dibujar un triángulo rectángulo.)

77. *a*) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2})$ **78.** *a*) $\tan(\operatorname{arccot} 2)$

b) $\cos(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2})$ *b*) $\cos(\operatorname{arcsec} \sqrt{5})$

En los ejercicios 79 a 84, encontrar la derivada de la función.

79. $y = \tan(\operatorname{arcsen} x)$ **80.** $y = \arctan(x^2 - 1)$

81. $y = x \operatorname{arcsec} x$ **82.** $y = \frac{1}{2}\arctan e^{2x}$

83. $y = x(\operatorname{arcsen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x$

84. $y = \sqrt{x^2 - 4} - 2 \operatorname{arcsec} \frac{x}{2}$, $2 < x < 4$

En los ejercicios 85 a 90, encontrar la integral indefinida.

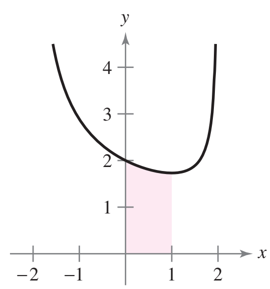
85. $\int \frac{1}{e^{2x} + e^{-2x}}\,dx$ **86.** $\int \frac{1}{3 + 25x^2}\,dx$

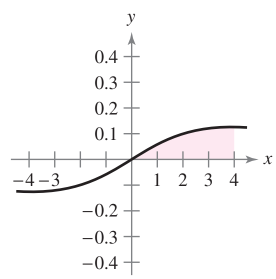
87. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ **88.** $\int \frac{1}{16 + x^2}\,dx$

89. $\int \frac{\arctan(x/2)}{4 + x^2}\,dx$ **90.** $\int \frac{\operatorname{arcsen} 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

En los ejercicios 91 y 92, encontrar el área de la región.

91. $y = \frac{4-x}{\sqrt{4-x^2}}$ **92.** $y = \frac{x}{16 + x^2}$





93. ***Movimiento armónico*** Un peso de masa m está sujeto al extremo de un resorte que oscila con movimiento armónico simple. Según la ley de Hooke, se puede determinar que

$$\int \frac{dy}{\sqrt{A^2 - y^2}} = \int \sqrt{\frac{k}{m}}\,dt$$

donde A es el desplazamiento máximo, t el tiempo y k una constante. Expresar y en función de t, teniendo que $y = 0$ cuando $t = 0$.

En los ejercicios 94 y 95, encontrar la derivada de la función.

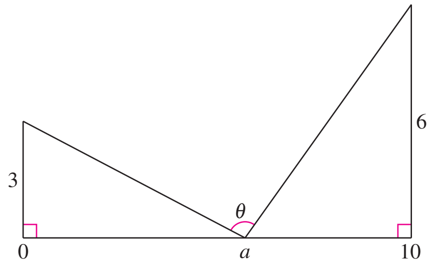
94. $y = 2x - \cosh \sqrt{x}$ **95.** $y = x \tanh^{-1} 2x$

En los ejercicios 96 y 97, encontrar la integral indefinida.

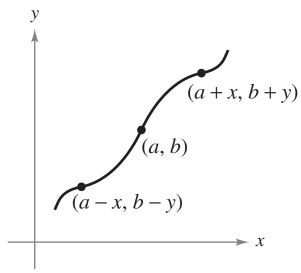
96. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 1}}\,dx$ **97.** $\int x^2 \operatorname{sech}^2 x^3\,dx$

SP Solución de problemas

1. Encontrar el valor de a que maximiza el ángulo θ mostrado en la figura. ¿Cuál es el valor aproximado de este ángulo?



2. Recordar que la gráfica de una función $y = f(x)$ es simétrica respecto al origen si (x, y) es un punto de la gráfica, $(-x, -y)$ lo es también. La gráfica de la función $y = f(x)$ es **simétrica respecto al punto (a, b)** siempre que $(a - x, b - y)$ es un punto de la gráfica, $(a + x, b + y)$ lo es también, como se muestra en la figura.



a) Trazar la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Escribir un párrafo breve explicando cómo la simetría de la gráfica respecto al punto $(0, \pi)$ permite concluir que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 0.$$

b) Trazar la gráfica de $y = \operatorname{sen} x + 2$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Usar la simetría de la gráfica respecto al punto $(\pi, 2)$ para evaluar la integral

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} x + 2)\, dx.$$

c) Trazar la gráfica de $y = \arccos x$ en el intervalo $[-1, 1]$. Usar la simetría de la gráfica para evaluar la integral

$$\int_{-1}^{1} \arccos x\, dx$$

d) Evaluar la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}\, dx.$

3. *a*) Usar una herramienta de graficación para representar $f(x) = \dfrac{\ln(x + 1)}{x}$ sobre el intervalo $[-1, 1]$.

b) Usar la gráfica para estimar $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$.

c) Usar la definición de derivada para justificar la respuesta del apartado *b*).

4. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$.

a) Determinar el dominio de la función f.

b) Encontrar dos valores de x que satisfagan $f(x) = 1$.

c) Encontrar dos valores de x que satisfagan $f(x) = -1$.

d) ¿Cuál es el recorrido o rango de la función f?

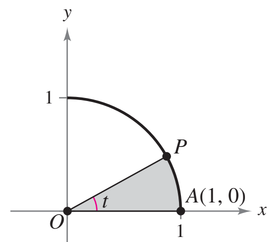
e) Calcular $f'(x)$ y usar el cálculo para encontrar el valor máximo de f en el intervalo $[1, 10]$.

f) Usar una herramienta de graficación para representar f en la pantalla $[0, 5] \times [-2, 2]$ y estimar $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$, si es que existe.

g) Determinar $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$ analíticamente, si es que existe.

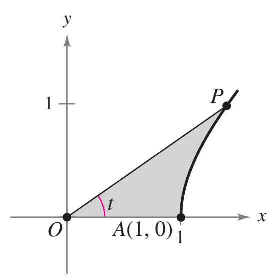
5. Graficar la función exponencial $y = a^x$ para $a = 0.5$, 1.2 y 2.0. ¿Cuál de estas curvas interseca la recta $y = x$? Determinar todos los valores positivos de a para los cuales la curva $y = a^x$ hace intersección con la recta $y = x$.

6. *a*) Sea $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ un punto sobre el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante (ver la figura). Mostrar que t es igual a dos veces el área del sector circular sombreado AOP.



b) Sea $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ un punto sobre la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ en el primer cuadrante (ver la figura). Mostrar que t es igual a dos veces el área de la región sombreada AOP. Empezar por mostrar que el área AOP está dada por la fórmula

$$A(t) = \frac{1}{2} \cosh t \operatorname{senh} t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1}\, dx.$$

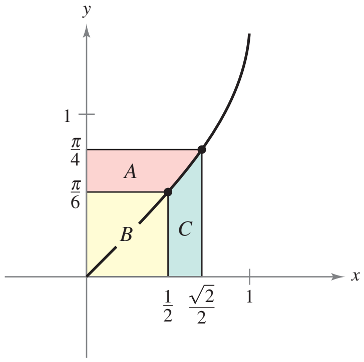


7. Aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = \ln x$ sobre el intervalo cerrado $[1, e]$. Encontrar el valor de c en el intervalo abierto $(1, e)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1}.$$

8. Mostrar que $f(x) = \dfrac{\ln x^n}{x}$ es una función decreciente para $x > e$ y $n > 0$.

9. Considerar las tres regiones A, B y C determinadas por la gráfica de $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, como se muestra en la figura.



a) Calcular las áreas de las regiones A y B.

b) Usar la respuesta del apartado *a*) para evaluar la integral

$$\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \operatorname{arcsen} x \, dx.$$

c) Usar la respuesta del apartado *a*) para evaluar la integral

$$\int_{1}^{3} \ln x \, dx.$$

d) Usar la respuesta del apartado *a*) para evaluar la integral

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx.$$

10. Sea L la recta tangente de la gráfica de la función $y = \ln x$ en el punto (a, b). Demostrar que la distancia entre b y c siempre es igual a uno.

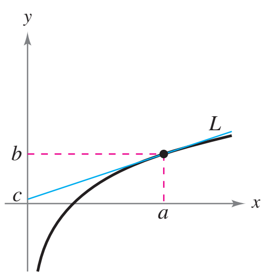


Figura para 10

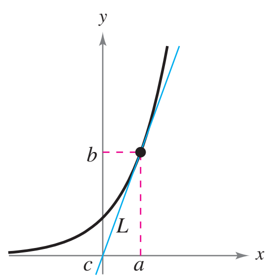


Figura para 11

11. Sea L la línea tangente de la gráfica de la función $y = e^x$ en el punto (a, b). Demostrar que la distancia entre a y c siempre es igual a uno.

12. La **función gudermanniana** de x es $\operatorname{gd}(x) = \arctan(\operatorname{senh} x)$

a) Graficar gd usando una herramienta de graficación.

b) Mostrar que gd es una función impar.

c) Mostrar que gd es monótona y, por tanto, tiene una inversa.

d) Encontrar el punto de inflexión de gd.

e) Verificar que $\operatorname{gd}(x) = \operatorname{arcsen}(\tanh x)$.

f) Verificar que $\operatorname{gd}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\cosh t}$.

13. Usar integración por sustitución para encontrar el área bajo la curva

$$y = \frac{1}{\sqrt{x} + x}$$

entre $x = 1$ y $x = 4$.

14. Usar la integración por sustitución para encontrar el área bajo la curva

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x}$$

entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.

15. *a*) Usar una herramienta de graficación para comparar la gráfica de la función $y = e^x$ con las gráficas de cada una de las funciones dadas.

i) $y_1 = 1 + \dfrac{x}{1!}$

ii) $y_2 = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!}$

iii) $y_3 = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$

b) Identificar el patrón de las funciones polinomiales sucesivas en el apartado *a*), extender el patrón un término más y comparar la gráfica de la función polinomial resultante con la gráfica de $y = e^x$.

c) ¿Qué implica este patrón?

16. Una hipoteca de una casa por \$120 000 por 35 años a un $9\frac{1}{2}\%$ tiene un pago mensual de \$985.93. Parte de este pago mensual va al interés sobre el balance no pagado y el resto del pago se utiliza para reducir el capital principal. La cantidad que va para el interés es

$$u = M - \left(M - \frac{Pr}{12}\right)\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$$

y la cantidad que va directamente hacia la reducción del capital principal es

$$v = \left(M - \frac{Pr}{12}\right)\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}.$$

En esas fórmulas P es la cantidad de la hipoteca, r la tasa de interés, M el pago mensual y t el tiempo en años.

a) Usar una herramienta de graficación para representar cada función en la misma pantalla. (La pantalla debe mostrar los 35 años de pagos de la hipoteca.)

b) En los primeros años, ¿a qué corresponde la mayor parte de la mensualidad? Estimar el momento en que se dedican cantidades iguales a los intereses y a la amortización.

c) Usar las gráficas del apartado *a*) para formular una conjetura acerca de la relación entre las pendientes de las rectas tangentes de las dos curvas para un valor específico de t. Proporcionar un argumento analítico para verificar la conjetura. Encontrar $u'(15)$ y $v'(15)$.

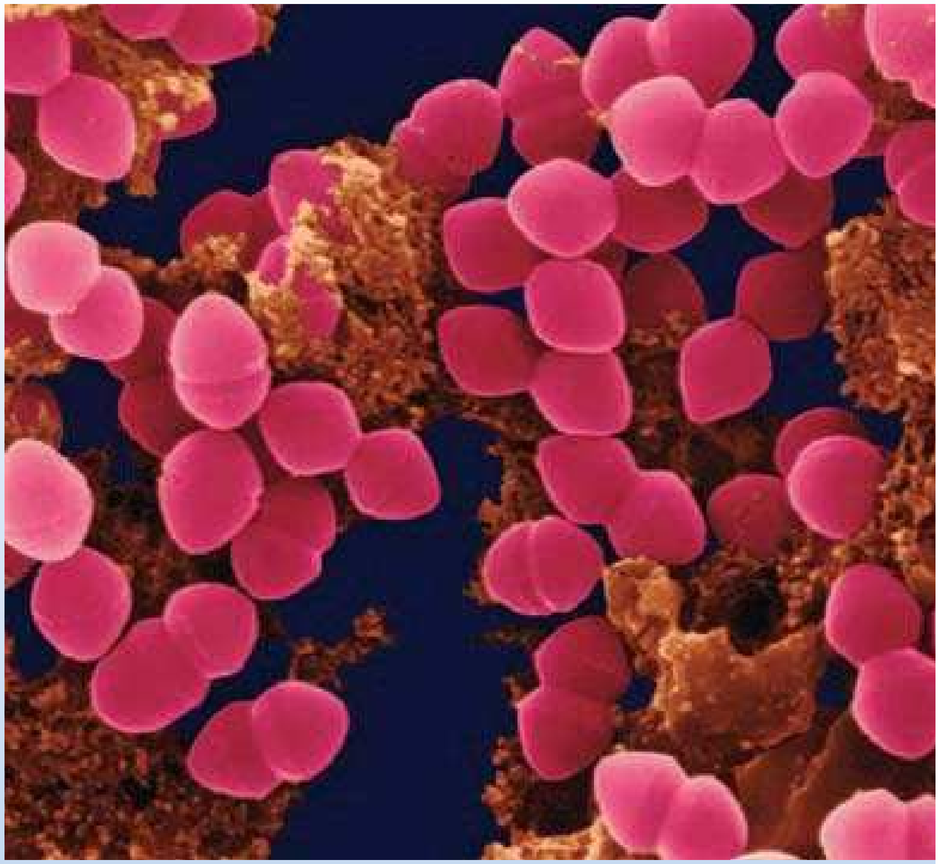
d) Repetir los apartados *a*) y *b*) para un plazo de 20 años ($M = \$1\,118.56$). ¿Qué se puede concluir?

6 Ecuaciones diferenciales

En este capítulo se estudiará una de las más importantes aplicaciones del cálculo: *las ecuaciones diferenciales*. El lector aprenderá varios métodos para resolver diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, como las homogéneas, las lineales de primer orden y las de Bernoulli. Posteriormente aplicará esas reglas para resolver ecuaciones diferenciales en problemas de aplicación.

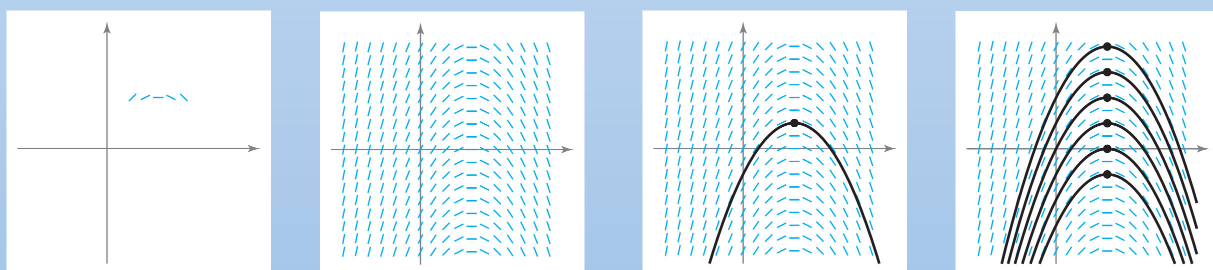
En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo generar un campo de pendientes de una ecuación diferencial y encontrar una solución particular. (6.1)
- Cómo usar una función exponencial para modelos de crecimiento y decrecimiento. (6.2)
- Cómo usar el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales. (6.3)
- Cómo resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y la ecuación diferencial de Bernoulli. (6.4)



Dr. Dennis Kunkel/Getty Images

Según el tipo de bacteria, el tiempo que le toma duplicar su peso al cultivo puede variar mucho, desde varios minutos hasta varios días. ¿Cómo se usaría una ecuación diferencial para modelar la tasa de crecimiento del peso del cultivo de una bacteria? (Ver la sección 6.3, ejercicio 84.)



Una función $y = f(x)$ es una solución de una ecuación diferencial, si la ecuación se satisface cuando y y sus derivadas se reemplazan por $f(x)$ y sus derivadas. Una manera de resolver una ecuación diferencial es mediante los campos de pendientes, los cuales muestran la forma de todas las soluciones de una ecuación diferencial. (Ver la sección 6.1.)

6.1 Campos de pendientes y método de Euler

- **Usar condiciones iniciales para encontrar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales.**
- **Usar campos de pendientes para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales.**
- **Usar el método de Euler para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales.**

Soluciones general y particular

En este texto se aprenderá que los fenómenos físicos se pueden describir por medio de ecuaciones diferenciales. Hay que recordar que una **ecuación diferencial** en x y y es una ecuación que incluye x, y y derivadas de y. En la sección 6.2 se observará que los problemas acerca de la descomposición radiactiva, el crecimiento poblacional y las leyes de enfriamiento de Newton se pueden formular en términos de ecuaciones diferenciales.

Una función $y = f(x)$ se denomina **solución** de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface cuando y y sus derivadas se reemplazan por $f(x)$ y sus derivadas. Por ejemplo, la derivación y sustitución demostrarán que $y = e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = 0$. Esto demuestra que cada solución de esta ecuación diferencial es de la forma

$$y = Ce^{-2x} \qquad \text{Solución general de } y' + 2y = 0.$$

donde C es cualquier número real. La solución se llama **solución general**. Algunas ecuaciones diferenciales tienen **soluciones singulares** que no se pueden escribir como casos especiales de la solución general. Sin embargo, tales soluciones no se consideran en este texto. El **orden** de una ecuación diferencial se determina por la derivada de mayor orden en la ecuación. Como ejemplo, $y' = 4y$ es una ecuación diferencial de primer orden. Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se discutirán en la sección 6.4.

En la sección 4.1, ejemplo 8, se observó que la ecuación diferencial de segundo orden $s''(t) = -32$ tiene la solución general

$$s(t) = -16t^2 + C_1t + C_2 \qquad \text{Solución general de } s''(t) = -32.$$

que contiene dos constantes arbitrarias. Se puede mostrar que una ecuación diferencial de orden n tiene una solución general con n constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1 Verificación de soluciones

Determinar si la función es una solución de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$.

a) $y = \operatorname{sen} x$ ***b)*** $y = 4e^{-x}$ ***c)*** $y = Ce^x$

Solución

a) Dado que $y = \operatorname{sen} x$, $y' = \cos x$, y $y'' = -\operatorname{sen} x$, se deduce que

$$y'' - y = -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = -2 \operatorname{sen} x \neq 0.$$

Así, $y = \operatorname{sen} x$ *no* es una solución.

b) Dado que $y = 4e^{-x}$, $y' = -4e^{-x}$, y $y'' = 4e^{-x}$, se deduce que

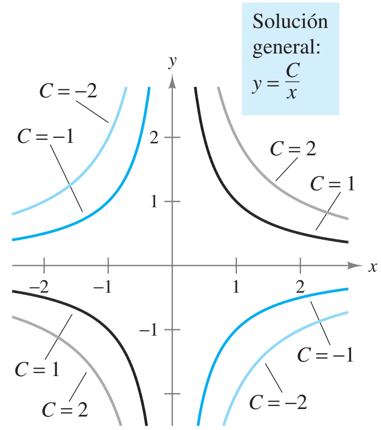
$$y'' - y = 4e^{-x} - 4e^{-x} = 0.$$

Así, $y = 4e^{-x}$ es una solución.

c) Dado que $y = Ce^x$, $y' = Ce^x$, y $y'' = Ce^x$, se deduce que

$$y'' - y = Ce^x - Ce^x = 0.$$

Así, $y = Ce^x$ es una solución para cualquier valor de C.



Curvas solución para $xy' + y = 0$
Figura 6.1

Geométricamente, la solución general de una ecuación diferencial de primer orden representa una familia de curvas conocidas como **curvas solución**, una para cada valor asignado a la constante arbitraria. Por ejemplo, se puede verificar que cada función de la forma

$$y = \frac{C}{x} \qquad \text{Solución general de } xy' + y = 0.$$

es una solución de la ecuación diferencial $xy' + y = 0$. La figura 6.1 muestra cuatro de las curvas solución correspondientes a diferentes valores de C.

Como se discutió en la sección 4.1, las **soluciones particulares** de la ecuación diferencial se obtienen de las **condiciones iniciales** que da el valor de la variable dependiente o una de sus derivadas para un valor particular de la variable independiente. El término "condición inicial" deriva del hecho de que, con frecuencia en problemas que involucran tiempo, el valor de la variable dependiente o una de sus derivadas es conocida en el tiempo *inicial* $t = 0$. Como ejemplo, la ecuación diferencial de segundo orden $s''(t) = -32$ tiene la solución general

$$s(t) = -16t^2 + C_1t + C_2 \qquad \text{Solución general de } s''(t) = -32.$$

podrá tener las siguientes condiciones iniciales.

$$s(0) = 80, \qquad s'(0) = 64 \qquad \text{Condiciones iniciales.}$$

En este caso, las condiciones iniciales llevan a la solución particular

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80. \qquad \text{Solución particular.}$$

EJEMPLO 2 Encontrar una solución particular

Dada la ecuación diferencial $xy' - 3y = 0$, verificar que $y = Cx^3$ es una solución, y encontrar la solución particular determinada por la condición inicial $y = 2$ cuando $x = -3$.

Solución Se sabe que $y = Cx^3$ es una solución dado que $y' = 3Cx^2$ y

$$\begin{aligned} xy' - 3y &= x(3Cx^2) - 3(Cx^3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, la condición inicial $y = 2$ cuando $x = -3$ lleva a

$$\begin{aligned} y &= Cx^3 && \text{Solución general.} \\ 2 &= C(-3)^3 && \text{Sustituye la condición inicial.} \\ -\frac{2}{27} &= C && \text{Solución para } C. \end{aligned}$$

y se puede concluir que la solución particular es

$$y = -\frac{2x^3}{27}. \qquad \text{Solución particular.}$$

Verificar esta solución al sustituir y y y' en la ecuación diferencial original.

NOTA Para determinar una solución particular, el número de condiciones iniciales debe corresponder al número de constantes en la solución general.

Campos de pendientes

Resolver una ecuación diferencial analíticamente puede ser difícil o casi imposible. Sin embargo, existe una aproximación gráfica que se puede usar para aprender mucho acerca de la solución de una ecuación diferencial. Considerar una ecuación diferencial de la forma

$$y' = F(x, y) \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

donde $F(x, y)$ es alguna expresión en x y y. En cada punto (x, y) en el plano xy donde F está definida la ecuación diferencial determina la pendiente $y' = F(x, y)$ de la solución en ese punto. Si se dibuja una recta corta con pendiente $F(x, y)$ en los puntos seleccionados (x, y) en el dominio de F, entonces esos segmentos forman un **campo de pendientes** o un *campo de direcciones* para la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$. Cada segmento tiene la misma pendiente que la curva de solución a través de ese punto. Un campo de pendientes muestra la forma general de todas las soluciones y puede ser útil en la obtención de una perspectiva visual de las direcciones de las soluciones de una ecuación diferencial.

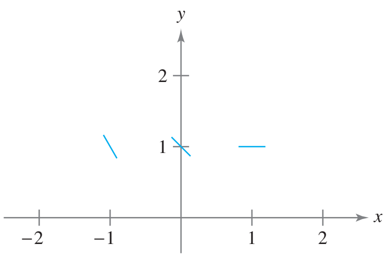


Figura 6.2

EJEMPLO 3 Representación gráfica de un campo de pendientes

Representar un campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = x - y$ para los puntos $(-1, 1)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$.

Solución La pendiente de la curva solución en cualquier punto (x, y) es $F(x, y) = x - y$. Así, la pendiente en el punto $(-1, 1)$ es $y' = -1 - 1 = -2$, la pendiente en $(0, 1)$ es $y' = 0 - 1 = -1$, y la pendiente en $(1, 1)$ es $y' = 1 - 1 = 0$. Dibujar segmentos cortos en los tres puntos con sus respectivas pendientes, como se muestra en la figura 6.2.

EJEMPLO 4 Identificar campos de pendientes para ecuaciones diferenciales

Asociar a cada campo vectorial su ecuación diferencial.

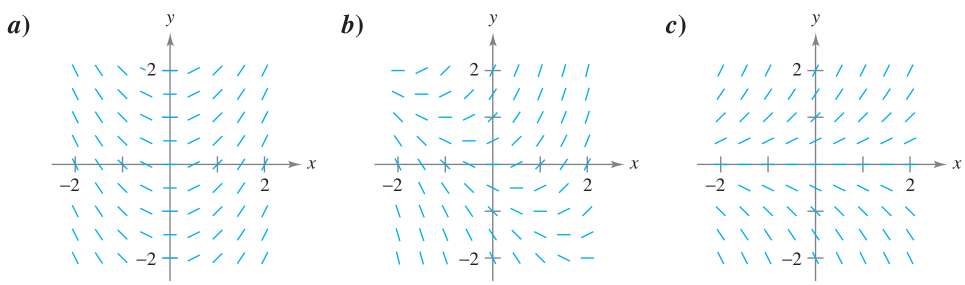


Figura 6.3

i) $y' = x + y$ *ii*) $y' = x$ *iii*) $y' = y$

Solución

a) En la figura 6.3*a* se puede observar que la pendiente de cualquier punto a lo largo del eje y es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = x$. Así, la gráfica corresponde con *ii*).

b) En la figura 6.3*b* se puede observar que la pendiente en el punto $(1, -1)$ es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = x + y$. Así, la gráfica corresponde con *i*).

c) En la figura 6.3*c* se puede observar que la pendiente de algún punto a lo largo del eje x es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = y$. Así, la gráfica corresponde con *iii*).

Una curva solución de una ecuación diferencial $y' = F(x, y)$ es simplemente una curva en el plano xy cuya recta tangente en cada punto (x, y) tiene pendiente igual a $F(x, y)$. Esto se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Trazado de una solución mediante un campo de pendientes

Trazar un campo de pendientes para la ecuación diferencial

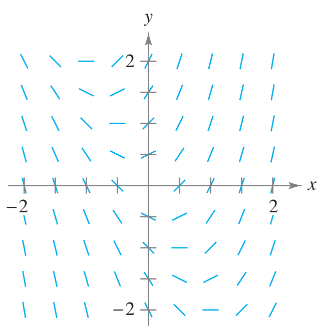
$$y' = 2x + y.$$

Usar un campo de pendientes para representar gráficamente la solución que pasa por el punto (1, 1).

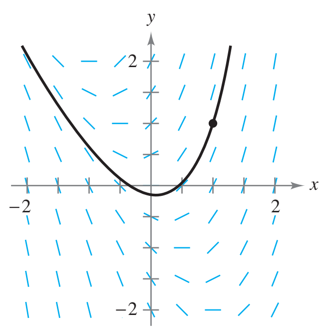
Solución Hacer una tabla que muestre las pendientes en varios puntos. La tabla siguiente es un pequeño ejemplo. Se deben calcular las pendientes de muchos puntos para obtener un campo de pendientes representativo.

x	-2	-2	-1	-1	0	0	1	1	2	2
y	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
$y' = 2x + y$	-5	-3	-3	-1	-1	1	1	3	3	5

A continuación, dibujar segmentos de rectas en los puntos con sus respectivas pendientes, como se muestra en la figura 6.4.



Campo de pendientes para $y' = 2x + y$
Figura 6.4



Solución particular para $y' = 2x + y$ que pasa a través de (1, 1)
Figura 6.5

Después de dibujar el campo de pendientes, se comienza en el punto inicial (1, 1) y se mueve a la derecha en dirección del segmento. A continuación, dibujar la curva solución tal que ésta se mueva paralela al segmento más cercano. Hacer lo mismo para la izquierda de (1, 1). La solución resultante se muestra en la figura 6.5.

Del ejemplo 5, notar que el campo de pendientes muestra que mientras x aumenta, y' lo hace hasta el infinito.

NOTA Dibujar un campo de pendientes a mano es tedioso. En la práctica, los campos de pendientes usualmente se dibujan mediante un método gráfico.

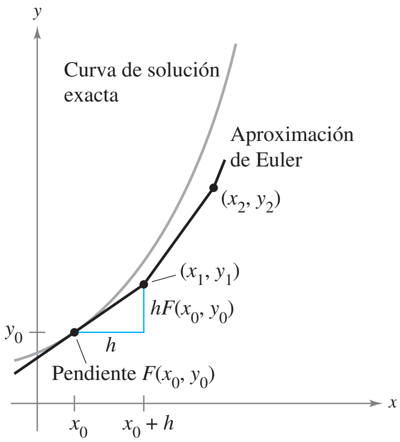


Figura 6.6

Método de Euler

El **método de Euler** es un método numérico para aproximar la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = F(x, y)$$

que pasa a través del punto (x_0, y_0). Con esta información se sabe que la gráfica de esa solución pasa a través del punto (x_0, y_0) y tiene una pendiente de $F(x_0, y_0)$ en ese punto. Esto da un "punto inicial" para aproximar la solución.

A partir del punto inicial, se sigue en la dirección indicada por la pendiente. Mediante un pequeño paso h, se mueve a lo largo de la recta tangente hasta llegar al punto (x_1, y_1), donde

$$x_1 = x_0 + h \quad \text{y} \quad y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

como se muestra en la figura 6.6. Si se considera (x_1, y_1) como un nuevo punto inicial, se puede repetir el proceso para obtener un segundo punto (x_2, y_2). Los valores de x_i y y_i son los siguientes.

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + h & y_1 &= y_0 + hF(x_0, y_0)\\
x_2 &= x_1 + h & y_2 &= y_1 + hF(x_1, y_1)\\
&\vdots & &\vdots\\
x_n &= x_{n-1} + h & y_n &= y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})
\end{aligned}$$

NOTA Se pueden obtener mejores aproximaciones de la solución exacta si se escogen tamaños de paso cada vez más pequeños. ■

EJEMPLO 6 Aproximar una solución mediante el método de Euler

Usar el método de Euler para aproximar la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = x - y$$

que pasa a través del punto (0, 1). Usar un paso de $h = 0.1$.

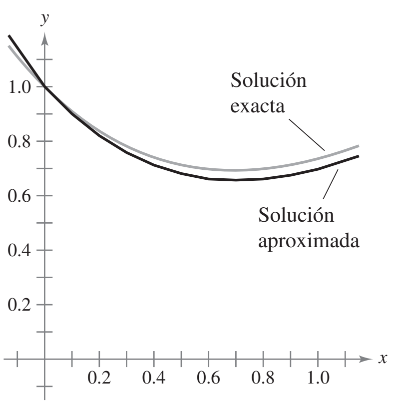


Figura 6.7

Solución Mediante $h = 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $F(x, y) = x - y$, se tiene $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3, \ldots,$ y

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + (0.1)(0 - 1) = 0.9\\
y_2 &= y_1 + hF(x_1, y_1) = 0.9 + (0.1)(0.1 - 0.9) = 0.82\\
y_3 &= y_2 + hF(x_2, y_2) = 0.82 + (0.1)(0.2 - 0.82) = 0.758.
\end{aligned}$$

Las primeras diez aproximaciones se muestran en la tabla. Se pueden representar esos valores para obtener una gráfica de la solución aproximada, como se muestra en la figura 6.7.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	1	0.900	0.820	0.758	0.712	0.681	0.663	0.657	0.661	0.675	0.697

NOTA Para la ecuación diferencial aplicada en el ejemplo 6, se puede verificar que la solución exacta es $y = x - 1 + 2e^{-x}$. La figura 6.7 compara esta solución exacta con la solución aproximada obtenida en el ejemplo 6. ■

6.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, verificar la solución de la ecuación diferencial.

	Solución	*Ecuación diferencial*
1.	$y = Ce^{4x}$	$y' = 4y$
2.	$y = e^{-2x}$	$3y' + 5y = -e^{-2x}$
3.	$x^2 + y^2 = Cy$	$y' = 2xy/(x^2 - y^2)$
4.	$y^2 - 2 \ln y = x^2$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{y^2 - 1}$
5.	$y = C_1 \operatorname{sen} x - C_2 \cos x$	$y'' + y = 0$
6.	$y = C_1e^{-x} \cos x + C_2e^{-x} \operatorname{sen} x$	$y'' + 2y' + 2y = 0$
7.	$y = -\cos x \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert$	$y'' + y = \tan x$
8.	$y = \frac{2}{5}(e^{-4x} + e^x)$	$y'' + 4y' = 2e^x$

En los ejercicios 9 a 12, verificar la solución particular de la ecuación diferencial.

	Solución	*Ecuación diferencial y condición inicial*
9.	$y = \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x$	$2y + y' = 2 \operatorname{sen}(2x) - 1$ $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$
10.	$y = \frac{1}{2}x^2 - 2 \cos x - 3$	$y' = x + 2 \operatorname{sen} x$ $y(0) = -5$
11.	$y = 4e^{-6x^2}$	$y' = -12xy$ $y(0) = 4$
12.	$y = e^{-\cos x}$	$y' = y \operatorname{sen} x$ $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

En los ejercicios 13 a 20, determinar si la función es una solución de la ecuación diferencial $y^{(4)} - 16y = 0$.

13. $y = 3 \cos x$

14. $y = 2 \operatorname{sen} x$

15. $y = 3 \cos 2x$

16. $y = 3 \operatorname{sen} 2x$

17. $y = e^{-2x}$

18. $y = 5 \ln x$

19. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 \operatorname{sen} 2x + C_4 \cos 2x$

20. $y = 3e^{2x} - 4 \operatorname{sen} 2x$

En los ejercicios 21 a 28, determinar si la función es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 2y = x^3e^x$.

21. $y = x^2$ **22.** $y = x^3$

23. $y = x^2e^x$ **24.** $y = x^2(2 + e^x)$

25. $y = \operatorname{sen} x$ **26.** $y = \cos x$

27. $y = \ln x$ **28.** $y = x^2e^x - 5x^2$

En los ejercicios 29 a 32 se dan algunas de las curvas correspondientes a los diferentes valores de C en la solución general de la ecuación diferencial. Encontrar la solución particular que pasa a través del punto mostrado en la gráfica.

	Solución	*Ecuación diferencial*
29.	$y = Ce^{-x/2}$	$2y' + y = 0$
30.	$y(x^2 + y) = C$	$2xy + (x^2 + 2y)y' = 0$
31.	$y^2 = Cx^3$	$2xy' - 3y = 0$
32.	$2x^2 - y^2 = C$	$yy' - 2x = 0$

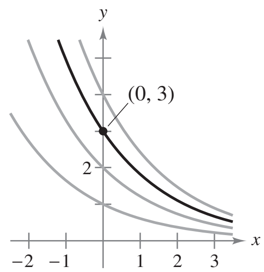


Figura para 29

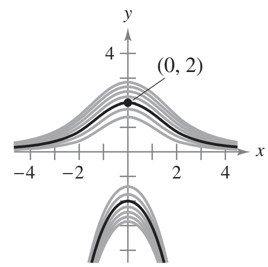


Figura para 30

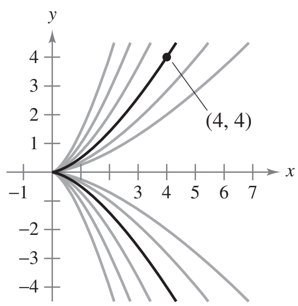


Figura para 31

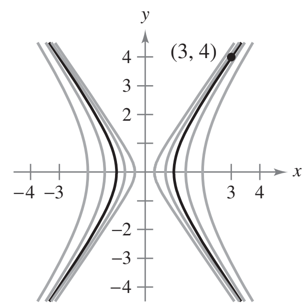


Figura para 32

En los ejercicios 33 y 34, la solución general de la ecuación diferencial está dada. Usar una herramienta de graficación para graficar las soluciones particulares para los valores dados de C.

33. $4yy' - x = 0$
$4y^2 - x^2 = C$
$C = 0, C = \pm 1, C = \pm 4$

34. $yy' + x = 0$
$x^2 + y^2 = C$
$C = 0, C = 1, C = 4$

En los ejercicios 35 a 40, verificar que la solución general satisface la ecuación diferencial. Después encontrar la solución particular que satisface la condición inicial.

35. $y = Ce^{-2x}$
$y' + 2y = 0$
$y = 3$ cuando $x = 0$

36. $3x^2 + 2y^2 = C$
$3x + 2yy' = 0$
$y = 3$ cuando $x = 1$

37. $y = C_1 \operatorname{sen} 3x + C_2 \cos 3x$
$y'' + 9y = 0$
$y = 2$ cuando $x = \pi/6$
$y' = 1$ cuando $x = \pi/6$

38. $y = C_1 + C_2 \ln x$
$xy'' + y' = 0$
$y = 0$ cuando $x = 2$
$y' = \frac{1}{2}$ cuando $x = 2$

39. $y = C_1x + C_2x^3$
$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$
$y = 0$ cuando $x = 2$
$y' = 4$ cuando $x = 2$

40. $y = e^{2x/3}(C_1 + C_2x)$
$9y'' - 12y' + 4y = 0$
$y = 4$ cuando $x = 0$
$y = 0$ cuando $x = 3$

En los ejercicios 41 a 52, encontrar la solución general de la ecuación diferencial por integración.

41. $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2$

42. $\dfrac{dy}{dx} = 2x^3 - 3x$

43. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{1 + x^2}$

44. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{4 + e^x}$

45. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 2}{x}$

46. $\dfrac{dy}{dx} = x \cos x^2$

47. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 2x$

48. $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2 x$

49. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{x - 6}$

50. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{3 - x}$

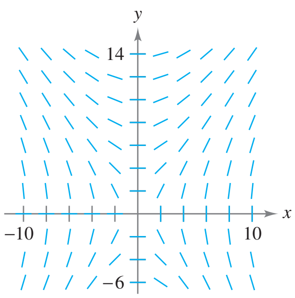
51. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{x^2}$

52. $\dfrac{dy}{dx} = 5e^{-x/2}$

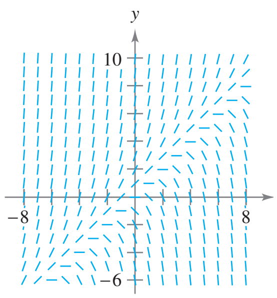
Campos de pendientes **En los ejercicios 53 a 56, se dan una ecuación diferencial y su campo de pendientes. Determinar las pendientes (si es posible) en el campo de pendientes en los puntos dados en la tabla.**

x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx						

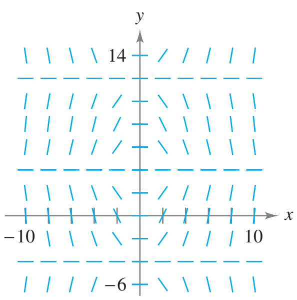
53. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y}$



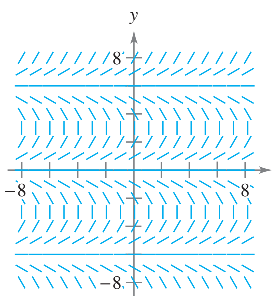
54. $\dfrac{dy}{dx} = y - x$



55. $\dfrac{dy}{dx} = x \cos \dfrac{\pi y}{8}$

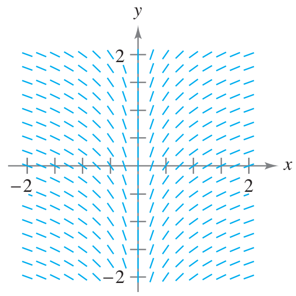


56. $\dfrac{dy}{dx} = \tan\left(\dfrac{\pi y}{6}\right)$

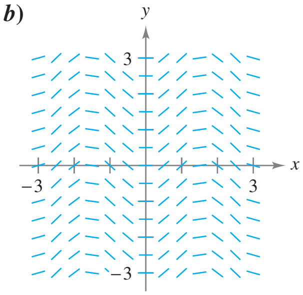


En los ejercicios 57 a 60, ubicar la ecuación diferencial con su respectivo campo de pendientes. [Los campos de pendientes se etiquetaron como *a*), *b*), *c*) y *d*).]

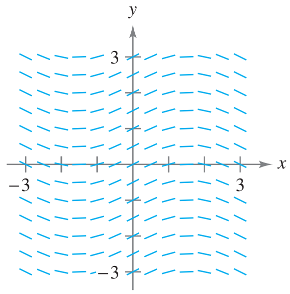
***a*)**



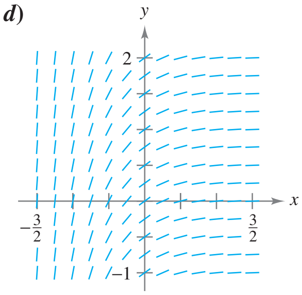
***b*)**



***c*)**



***d*)**



57. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(2x)$

58. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2} \cos x$

59. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-2x}$

60. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 61 a 64, *a*) trazar la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial, *b*) usar el campo de pendientes para trazar la gráfica de la función que pasa a través del punto dado, y *c*) discutir la gráfica de la solución cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$. Usar una herramienta de graficación para verificar los resultados.**

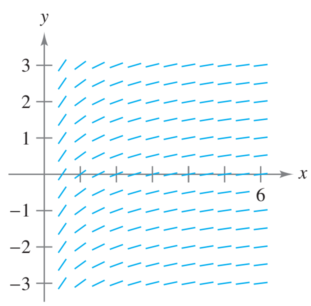
61. $y' = 3 - x, \quad (4, 2)$

62. $y' = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x, \quad (1, 1)$

63. $y' = y - 4x, \quad (2, 2)$

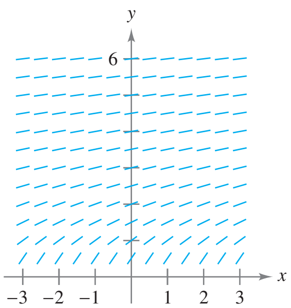
64. $y' = y + xy, \quad (0, -4)$

65. ***Campo de pendientes*** **Usar el campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = 1/x$, donde $x > 0$, para representar la gráfica de la solución que satisface cada condición inicial. Entonces realizar una conjetura acerca del comportamiento de una solución particular de $y' = 1/x$ cuando $x \to \infty$.**



a) $(1, 0)$ *b*) $(2, -1)$

66. ***Campo de pendientes*** **Usar el campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = 1/y$, donde $y > 0$, para esbozar la gráfica de la solución que satisface cada condición inicial. Entonces realizar una conjetura acerca del comportamiento de una solución particular de $y' = 1/y$ cuando $x \to \infty$.**



a) (0, 1) *b*) (1, 1)

CAS ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 67 a 72, usar un sistema algebraico por computadora para *a*) trazar la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y *b*) trazar la gráfica de la solución que satisface la condición inicial especificada.**

67. $\dfrac{dy}{dx} = 0.25y, \quad y(0) = 4$

68. $\dfrac{dy}{dx} = 4 - y, \quad y(0) = 6$

69. $\dfrac{dy}{dx} = 0.02y(10 - y), \quad y(0) = 2$

70. $\dfrac{dy}{dx} = 0.2x(2 - y), \quad y(0) = 9$

71. $\dfrac{dy}{dx} = 0.4y(3 - x), \quad y(0) = 1$

72. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}e^{-x/8}\operatorname{sen}\dfrac{\pi y}{4}, \quad y(0) = 2$

Método de Euler **En los ejercicios 73 a 78, usar el método de Euler para hacer una tabla de valores para la solución aproximada de la ecuación diferencial con un valor inicial específico. Usar *n* pasos de tamaño *h*.**

73. $y' = x + y, \quad y(0) = 2, \quad n = 10, \quad h = 0.1$

74. $y' = x + y, \quad y(0) = 2, \quad n = 20, \quad h = 0.05$

75. $y' = 3x - 2y, \quad y(0) = 3, \quad n = 10, \quad h = 0.05$

76. $y' = 0.5x(3 - y), \quad y(0) = 1, \quad n = 5, \quad h = 0.4$

77. $y' = e^{xy}, \quad y(0) = 1, \quad n = 10, \quad h = 0.1$

78. $y' = \cos x + \operatorname{sen} y, \quad y(0) = 5, \quad n = 10, \quad h = 0.1$

En los ejercicios 79 a 81, completar la tabla mediante la solución exacta de la ecuación diferencial y dos aproximaciones obtenidas mediante el método de Euler para aproximar la solución particular de la ecuación diferencial. Usar $h = 0.2$ y $h = 0.1$ y calcular cada aproximación con cuatro decimales.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y(x)$ (exacta)						
$y(x)$ ($h = 0.2$)						
$y(x)$ ($h = 0.1$)						

Tabla para 79 a 81

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*	*Solución exacta*
79.	$\dfrac{dy}{dx} = y$	(0, 3)	$y = 3e^x$
80.	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y}$	(0, 2)	$y = \sqrt{2x^2 + 4}$
81.	$\dfrac{dy}{dx} = y + \cos(x)$	(0, 0)	$y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x + e^x)$

82. Comparar los valores de las aproximaciones en los ejercicios 79 a 81 con los valores dados por la solución exacta. ¿Cómo cambia el error cuando se incrementa h?

83. ***Temperatura*** En el tiempo $t = 0$ minutos, la temperatura de un objeto es 140°F. La temperatura del objeto cambia en un ritmo o velocidad dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}(y - 72).$$

a) Usar una herramienta de graficación y el método de Euler para aproximar las soluciones de esta ecuación diferencial en $t = 1, 2$ y 3. Usar un tamaño de paso de $h = 0.1$.

b) Comparar los resultados con la solución exacta

$y = 72 + 68e^{-t/2}$.

c) Repetir los incisos *a*) y *b*) con un tamaño de paso de $h = 0.05$. Comparar los resultados.

Para discusión

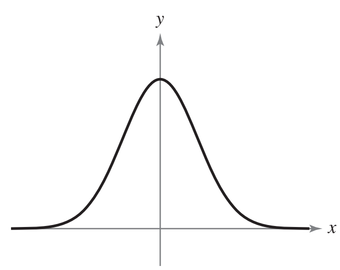
84. La gráfica muestra una solución de una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Determinar la ecuación correcta. Explicar su razonamiento.

a) $y' = xy$

b) $y' = \dfrac{4x}{y}$

c) $y' = -4xy$

d) $y' = 4 - xy$



Desarrollo de conceptos

85. Describir la diferencia entre una solución general de una ecuación diferencial y una solución particular.

86. Explicar cómo interpretar un campo de pendientes.

87. Describir cómo usar el método de Euler para aproximar la solución particular de una ecuación diferencial.

88. Se sabe que $y = Ce^{kx}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = 0.07y$. ¿Es posible determinar C o k con la información dada? Si es posible, encontrar sus valores.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 89 a 92, determinar si los enunciados son verdaderos o falsos. Si son falsos, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

89. Si $y = f(x)$ es una solución de una ecuación diferencial de primer orden, entonces $y = f(x) + C$ es también una solución.

90. La solución general de una ecuación diferencial es $y = -4.9x^2 + C_1x + C_2$. Para encontrar la solución particular se deben tener dos condiciones iniciales.

91. Los campos de pendientes representan las soluciones generales de ecuaciones diferenciales.

92. Un campo de pendientes muestra que la pendiente en el punto $(1, 1)$ es 6. Este campo de pendientes representa la familia de soluciones para la ecuación diferencial $y' = 4x + 2y$.

93. ***Error y método de Euler*** La solución exacta de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

donde $y(0) = 4$, es $y = 4e^{-2x}$.

a) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla, donde y es el valor exacto de la solución, y_1 es la solución aproximada que se tiene mediante el método de Euler con $h = 0.1$, y_2 es la solución aproximada obtenida mediante el método de Euler con $h = 0.2$, e_1 es el error absoluto $|y - y_1|$, e_2 es el error absoluto $|y - y_2|$, y r es la relación e_1/e_2.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y						
y_1						
y_2						
e_1						
e_2						
r						

b) ¿Qué se puede concluir acerca de la razón r a medida que cambia h?

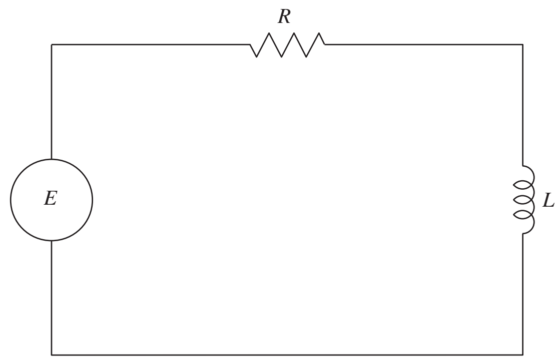
c) Predecir el error absoluto cuando $h = 0.05$.

94. ***Error y método de Euler*** Repetir el ejercicio 93 cuya solución exacta de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x - y$$

donde $y(0) = 1$, es $y = x - 1 + 2e^{-x}$.

95. ***Circuitos eléctricos*** El diagrama muestra un circuito eléctrico simple que consiste de una fuente de potencia, un resistor y un inductor.



Un modelo de la corriente I, en amperes (A), en un tiempo t, está dado por la ecuación diferencial de primer orden

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

donde $E(t)$ es el voltaje (V) producido por la fuente de potencia, R es la resistencia, en ohms (Ω), y L es la inductancia, en henrys (H). Suponer que el circuito eléctrico consiste de una fuente de potencia de 24 V, un resistor de 12 Ω y un inductor de 4 H.

a) Trazar la gráfica para el campo de pendientes de la ecuación diferencial.

b) ¿Cuál es el valor limitante de la corriente? Explicar.

96. ***Para pensar*** Se sabe que $y = e^{kt}$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 16y = 0$. Encontrar los valores de k.

97. ***Para pensar*** Se sabe que $y = A \operatorname{sen} \omega t$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + 16y = 0$. Encontrar los valores de ω.

Preparación del examen Putnam

98. Sea f una función de valor real dos veces derivable que satisfaga

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x)$$

donde $g(x) \geq 0$ para todo x real. Probar que $|f(x)|$ está acotada.

99. Probar si la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \qquad p(x) \cdot q(x) \neq 0$$

es cortada por la recta $x = k$, las tangentes de los puntos de intersección son concurrentes.

6.2 Ecuaciones diferenciales: crecimiento y decrecimiento

- **Usar la separación de variables para resolver una ecuación diferencial simple.**
- **Usar funciones exponenciales para modelar el crecimiento y decrecimiento en problemas de aplicación.**

Ecuaciones diferenciales

En la sección anterior se aprendió a analizar de manera visual las soluciones de ecuaciones diferenciales mediante los campos de pendientes, y la solución aproximada de forma numérica mediante el método de Euler. Analíticamente, se aprendió a resolver sólo dos tipos de ecuaciones diferenciales, las de las formas $y' = f(x)$ y $y'' = f(x)$. En esta sección, se aprenderá a resolver un tipo más general de ecuaciones diferenciales. La estrategia es reescribir la ecuación de manera tal que cada variable ocurre sólo en un lado de la ecuación. La estrategia se denomina *separación de variables*. (Se estudiará esa estrategia más a detalle en la sección 6.3.)

EJEMPLO 1 Resolver una ecuación diferencial

$$y' = \frac{2x}{y} \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$yy' = 2x \qquad \text{Multiplicar ambos miembros por } y.$$

$$\int yy'\,dx = \int 2x\,dx \qquad \text{Integrar con respecto a } x.$$

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx \qquad dy = y'\,dx.$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1 \qquad \text{Aplicar la regla de la potencia.}$$

$$y^2 - 2x^2 = C \qquad \text{Reescribir, sea } C = 2C_1.$$

Así, la solución general está dada por $y^2 - 2x^2 = C$.

AYUDA DE ESTUDIO Se puede usar derivación implícita para verificar la solución en el ejemplo 1.

EXPLORACIÓN

En el ejemplo 1, la solución general de la ecuación diferencial es

$y^2 - 2x^2 = C.$

Usar una herramienta de graficación para graficar varias soluciones particulares, éstas se dan por $C = \pm 2$, $C = \pm 1$ y $C = 0$. Describir las soluciones gráficamente. ¿Es verdadero o falso el enunciado de cada solución?

La pendiente de la gráfica en el punto (x, y) es igual a dos veces la razón de x y y.

Explicar el razonamiento. ¿Están todas las curvas para las cuales este enunciado es verdadero representadas por la solución general?

Cuando se integran ambos miembros de la ecuación en el ejemplo 1, no se necesita agregar una constante de integración a ambos miembros de la ecuación. Si se hace, se obtendrá el mismo resultado que en el ejemplo 1.

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 + C_2 = x^2 + C_3$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = x^2 + (C_3 - C_2)$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$$

En la práctica, más personas prefieren usar la notación de Leibniz y las diferenciales cuando se aplica separación de variables. La solución del ejemplo 1 se muestra abajo por medio de esta notación.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$

$$y\,dy = 2x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$$

$$y^2 - 2x^2 = C$$

Modelos de crecimiento y decrecimiento

En muchas aplicaciones, el ritmo o velocidad de cambio de una variable y es proporcional al valor de y. Si y es una función del tiempo t, la proporción se puede escribir como se muestra.

Razón de cambio de y — es — proporcional a y.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

La solución general de esta ecuación diferencial se proporciona en el siguiente teorema.

TEOREMA 6.1 MODELO DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO EXPONENCIAL

Si y es una función derivable de t tal que $y > 0$ y $y' = ky$, para alguna constante k, entonces

$$y = Ce^{kt}$$

C es el **valor inicial** de y, y k es la **constante de proporcionalidad**. El **crecimiento exponencial** se produce cuando $k > 0$, y el **decrecimiento** cuando $k < 0$.

Demostración

$$y' = ky \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$\frac{y'}{y} = k \qquad \text{Separar variables.}$$

$$\int \frac{y'}{y}\,dt = \int k\,dt \qquad \text{Integrar con respecto a } t.$$

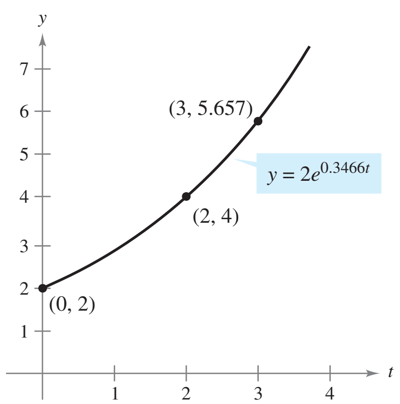
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt \qquad dy = y'\,dt.$$

$$\ln y = kt + C_1 \qquad \text{Encontrar la antiderivada de cada miembro.}$$

$$y = e^{kt}e^{C_1} \qquad \text{Despejar } y.$$

$$y = Ce^{kt} \qquad \text{Sea } C = e^{C_1}.$$

Así, todas las soluciones de $y' = ky$ son de la forma $y = Ce^{kt}$. Diferenciar la función $y = Ce^{kt}$ con respecto a t, y verificar que $y' = ky$.



Si la razón de cambio de y es proporcional a y, entonces y sigue un modelo exponencial
Figura 6.8

EJEMPLO 2 Uso de un modelo de crecimiento exponencial

La razón de cambio de y es proporcional a y. Cuando $t = 0$, $y = 2$. Cuando $t = 2$, $y = 4$. ¿Cuál es el valor de y cuando $t = 3$?

Solución Dado que $y' = ky$, se sabe que y y t se relacionan con la ecuación $y = Ce^{kt}$. Al aplicar las condiciones iniciales se encuentran los valores de las constantes C y k.

$$2 = Ce^0 \quad \Rightarrow \quad C = 2 \qquad \text{Cuando } t = 0,\ y = 2.$$

$$4 = 2e^{2k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.3466 \qquad \text{Cuando } t = 2,\ y = 4.$$

Así, el modelo es $y \approx 2e^{0.3466t}$. Cuando $t = 3$, el valor de y es $2e^{0.3466(3)} \approx 5.657$. (Ver la figura 6.8.)

AYUDA DE ESTUDIO Mediante propiedades logarítmicas, notar que el valor de k en el ejemplo 2 puede también escribirse como $\ln\left(\sqrt{2}\right)$. Así, el modelo se convierte en $y = 2e^{(\ln\sqrt{2})t}$, el cual se puede reescribir como $y = 2\left(\sqrt{2}\right)^t$.

TECNOLOGÍA La mayoría de las herramientas de graficación tiene funciones para ajustar curvas que se pueden usar para encontrar modelos que representen los datos. Usar la función de *regresión exponencial* y la información del ejemplo 2 para encontrar un modelo para los datos. ¿Cómo se podría comparar el modelo obtenido con el modelo dado?

El decrecimiento radiactivo se mide en términos de la *vida media* que es el número de años requeridos para reducir la muestra radiactiva a la mitad. La tasa de desintegración es proporcional a la cantidad presente. Las vidas medias de algunos isótopos radiactivos comunes muestran:

Uranio (^{238}U)	4 470 000 000 años
Plutonio (^{239}Pu)	24 100 años
Carbono (^{14}C)	5 715 años
Radio (^{226}Ra)	1 599 años
Einstenio (^{254}Es)	276 años
Nobelio (^{257}No)	25 segundos

EJEMPLO 3 Desintegración radiactiva

Suponer que 10 gramos del isótopo ^{239}Pu se liberaron en el accidente nuclear de Chernobyl. ¿Cuánto tiempo tomará a los 10 gramos disminuir a 1 gramo?

Solución Considerar que y representa la masa (en gramos) del plutonio. Dado que la tasa de desintegración es proporcional a y, se sabe que

$$y = Ce^{kt}$$

donde t es el tiempo en años. Para encontrar los valores de las constantes C y k, aplicar las condiciones iniciales. Con base en que $y = 10$ cuando $t = 0$, se puede escribir

$$10 = Ce^{k(0)} = Ce^{0}$$

lo cual implica que $C = 10$. Luego, con base en el hecho de que la vida media de ^{239}Pu es de 24 100 años se puede tener $y = 10/2 = 5$ cuando $t = 24\,100$, se puede escribir

$$\begin{aligned} 5 &= 10e^{k(24\,100)} \\ \frac{1}{2} &= e^{24\,100k} \\ \frac{1}{24\,100}\ln\frac{1}{2} &= k \\ -0.000028761 &\approx k. \end{aligned}$$

Así, el modelo es

$$y = 10e^{-0.000028761t}.$$ Modelo de vida media.

Para encontrar el tiempo en que 10 gramos decrecen a 1 gramo, se puede despejar para t en la ecuación

$$1 = 10e^{-0.000028761t}.$$

La solución es aproximadamente 80 059 años.

NOTA El modelo de decrecimiento exponencial en el ejemplo 3 se pudo escribir como $y = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{t/24\,100}$. Este modelo es más fácil de derivar, pero para algunas aplicaciones no es conveniente usarlo.

Del ejemplo 3, notar que en un crecimiento o decrecimiento exponencial es fácil obtener el valor de C cuando se da el valor de y para $t = 0$. El siguiente ejemplo demuestra un procedimiento para resolver C y k cuando no se conoce el valor de y en $t = 0$.

EJEMPLO 4 Crecimiento de población

Suponer que una población experimental de moscas se incrementa conforme a la ley de crecimiento exponencial. Había 100 moscas antes del segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día. ¿Cuántas moscas, aproximadamente, había en la población original?

Solución Sea $y = Ce^{kt}$ el número de moscas al momento t, donde t se mide en días. Notar que y es continua donde el número de moscas es discreto. Dado que $y = 100$ cuando $t = 2$ y $y = 300$ cuando $t = 4$, se puede escribir

$$100 = Ce^{2k} \qquad \text{y} \qquad 300 = Ce^{4k}$$

Por la primera ecuación, se sabe que $C = 100e^{-2k}$. Al sustituir este valor en la segunda ecuación, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} 300 &= 100e^{-2k}e^{4k} \\ 300 &= 100e^{2k} \\ \ln 3 &= 2k \\ \frac{1}{2}\ln 3 &= k \\ 0.5493 &\approx k \end{aligned}$$

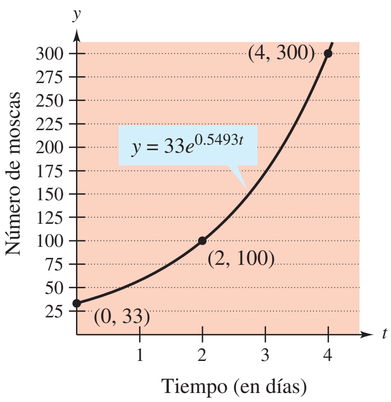


Figura 6.9

Así, el modelo de crecimiento exponencial es

$$y = Ce^{0.5493t}.$$

Para resolver C, reaplicar la condición $y = 100$ cuando $t = 2$ y obtener

$$\begin{aligned} 100 &= Ce^{0.5493(2)} \\ C &= 100e^{-1.0986} \approx 33. \end{aligned}$$

Así, la población original (cuando $t = 0$) consistía en aproximadamente $y = C = 33$ moscas, como se muestra en la figura 6.9.

EJEMPLO 5 Ventas decrecientes

Cuatro meses después de que se detuviera la publicidad, una compañía fabricante notifica que sus ventas han caído de 100 000 unidades por mes a 80 000. Si las ventas siguen un patrón de decrecimiento exponencial, ¿qué unidades habrá después de los siguientes dos meses?

Solución Usar el modelo de decrecimiento exponencial $y = Ce^{kt}$, donde t se mide en meses. De la condición inicial ($t = 0$), se sabe que $C = 100000$. Además, dado que $y = 80000$ cuando $t = 4$, se tiene

$$\begin{aligned} 80\,000 &= 100\,000e^{4k} \\ 0.8 &= e^{4k} \\ \ln(0.8) &= 4k \\ -0.0558 &\approx k. \end{aligned}$$

Así, después de 2 meses más ($t = 6$), se puede especular que la tasa de ventas mensuales será

$$\begin{aligned} y &\approx 100\,000e^{-0.0558(6)} \\ &\approx 71\,500 \text{ unidades.} \end{aligned}$$

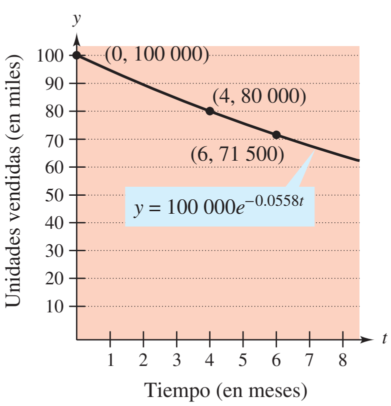


Figura 6.10

Ver la figura 6.10.

En los ejemplos 2 al 5, en realidad no se tuvo que resolver la ecuación diferencial

$$y' = ky.$$

(Esto se hizo una vez en la prueba del teorema 6.1.) El siguiente ejemplo ilustra un problema cuya solución involucra la técnica de separación de variables. El ejemplo concierne a la **ley de enfriamiento de Newton**, la cual establece que la razón de cambio en la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del medio circundante.

EJEMPLO 6 Ley de enfriamiento de Newton

Sea y la temperatura (en °F) de un objeto en una habitación cuya temperatura se conserva constante a 60°. Si la temperatura del objeto baja de 100° a 90° en 10 minutos, ¿cuánto tiempo se requerirá para bajar la temperatura a 80°?

Solución Por la ley de enfriamiento de Newton, se sabe que la razón de cambio en y es proporcional a la diferencia entre y y 60. Esto se puede escribir como

$$y' = k(y - 60), \qquad 80 \leq y \leq 100.$$

Para resolver esta ecuación diferencial, usar la separación de variables, como se muestra.

$$\frac{dy}{dt} = k(y - 60) \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

$$\left(\frac{1}{y - 60}\right) dy = k\,dt \qquad \text{Separar variables.}$$

$$\int \frac{1}{y - 60}\,dy = \int k\,dt \qquad \text{Integrar cada miembro.}$$

$$\ln|y - 60| = kt + C_1 \qquad \text{Encontrar la antiderivada o primitiva de cada miembro.}$$

Dado que $y > 60$, $|y - 60| = y - 60$, se pueden omitir los signos del valor absoluto. Mediante notación exponencial, se tiene

$$y - 60 = e^{kt + C_1} \quad \Rightarrow \quad y = 60 + Ce^{kt}. \qquad C = e^{C_1}$$

Mediante $y = 100$ cuando $t = 0$, se obtiene $100 = 60 + Ce^{k(0)} = 60 + C$, lo cual implica que $C = 40$. Dado que $y = 90$ cuando $t = 10$,

$$90 = 60 + 40e^{k(10)}$$
$$30 = 40e^{10k}$$
$$k = \tfrac{1}{10} \ln \tfrac{3}{4} \approx -0.02877.$$

Así, el modelo es

$$y = 60 + 40e^{-0.02877t} \qquad \text{Modelo de enfriamiento.}$$

y finalmente, cuando $y = 80$, se obtiene

$$80 = 60 + 40e^{-0.02877t}$$
$$20 = 40e^{-0.02877t}$$
$$\tfrac{1}{2} = e^{-0.02877t}$$
$$\ln \tfrac{1}{2} = -0.02877t$$
$$t \approx 24.09 \text{ minutos.}$$

Así, se requerirán alrededor de 14.09 minutos *más* para enfriar el objeto a una temperatura de 80° (ver la figura 6.11).

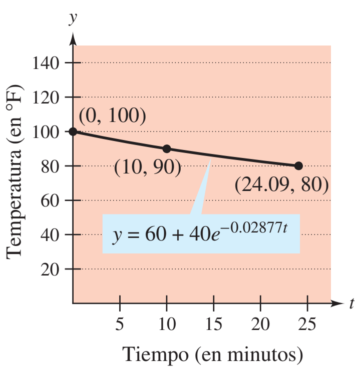


Figura 6.11

6.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, resolver la ecuación diferencial.

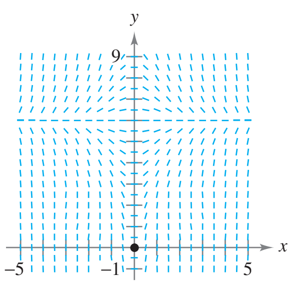
1. $\dfrac{dy}{dx} = x + 3$
2. $\dfrac{dy}{dx} = 6 - x$
3. $\dfrac{dy}{dx} = y + 3$
4. $\dfrac{dy}{dx} = 6 - y$
5. $y' = \dfrac{5x}{y}$
6. $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{7y}$
7. $y' = \sqrt{x}\,y$
8. $y' = x(1 + y)$
9. $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$
10. $xy + y' = 100x$

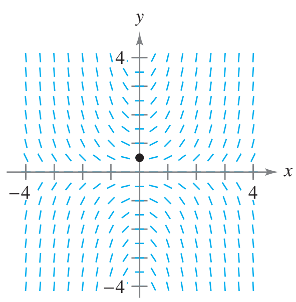
En los ejercicios 11 a 14, escribir y resolver la ecuación diferencial que modela el enunciado verbal.

11. La razón de cambio de Q con respecto a t es inversamente proporcional al cuadrado de t.
12. La razón de cambio de P con respecto a t es proporcional a $25 - t$.
13. La razón de cambio de N con respecto a s es proporcional a $500 - s$.
14. La razón de cambio de y con respecto a x varía juntamente con x y $L - y$.

Campos de pendientes **En los ejercicios 15 y 16, una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes son dados. *a*) Trazar la gráfica de dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, uno de los cuales pasa a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representar la solución. Comparar el resultado con la gráfica en el apartado *a*).**

15. $\dfrac{dy}{dx} = x(6 - y), \quad (0, 0)$
16. $\dfrac{dy}{dx} = xy, \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)$





En los ejercicios 17 a 20, encontrar la función $y = f(t)$ que pasa a través del punto (0, 10) con la primera derivada dada. Usar una herramienta de graficación para representar la solución.

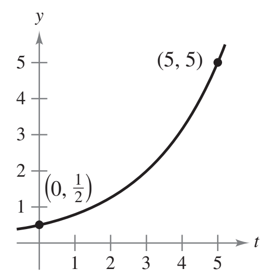
17. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}t$
18. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{3}{4}\sqrt{t}$
19. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{2}y$
20. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{4}y$

En los ejercicios 21 a 24, escribir y resolver la ecuación diferencial que modele el enunciado verbal. Evaluar la solución en los valores específicos de la variable independiente.

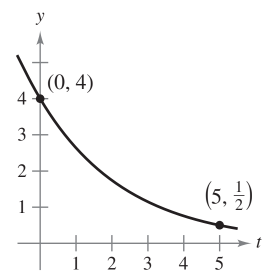
21. La razón de cambio de y es proporcional a y. Cuando $x = 0$, $y = 6$ y cuando $x = 4$, $y = 15$. ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 8$?
22. La razón de cambio de N es proporcional a N. Cuando $t = 0$, $N = 250$ y cuando $t = 1$, $N = 400$. ¿Cuál es el valor de N cuando $t = 4$?
23. La razón de cambio de V es proporcional a V. Cuando $t = 0$, $V = 20\,000$, y cuando $t = 4$, $V = 12\,500$. ¿Cuál es el valor de V cuando $t = 6$?
24. La razón de cambio de P es proporcional a P. Cuando $t = 0$, $P = 5\,000$, y cuando $t = 1$, $P = 4\,750$. ¿Cuál es el valor de P cuando $t = 5$?

En los ejercicios 25 a 28, encontrar la función exponencial $y = Ce^{kt}$ que pase a través de los dos puntos dados.

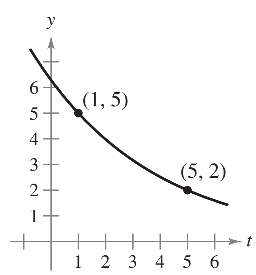
25.



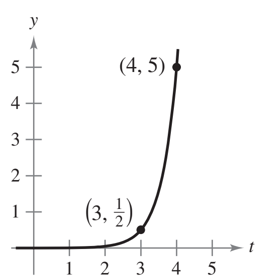
26.



27.



28.



Desarrollo de conceptos

29. Describir qué representan los valores de C y k en el modelo de crecimiento y decrecimiento exponencial, $y = Ce^{kt}$.
30. Proporcionar una ecuación diferencial que modele el crecimiento y decrecimiento exponencial.

En los ejercicios 31 y 32, determinar los cuadrantes en los cuales la solución de la ecuación diferencial es una función creciente. Explicar. (No resolver la ecuación diferencial.)

31. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}xy$
32. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x^2y$

Desintegración radiactiva **En los ejercicios 33 a 40, completar la tabla de los isótopos radiactivos.**

	Isótopo	*Semivida o vida media (en años)*	*Cantidad inicial*	*Cantidad después de 1 000 años*	*Cantidad después de 10 000 años*
33.	^{226}Ra	1 599	20 g		
34.	^{226}Ra	1 599		1.5 g	
35.	^{226}Ra	1 599			0.1 g
36.	^{14}C	5 715			3 g
37.	^{14}C	5 715	5 g		
38.	^{14}C	5 715		1.6 g	
39.	^{239}Pu	24 100		2.1 g	
40.	^{239}Pu	24 100			0.4 g

41. ***Desintegración radiactiva*** El radio radiactivo tiene una semivida o vida media de aproximadamente 1 599 años. ¿Qué porcentaje de una cantidad dada permanece después de 100 años?

42. ***La prueba del carbono 14*** La prueba del carbono 14 supone que el contenido de dióxido de carbono sobre la Tierra hoy tiene el mismo contenido radiactivo que el de hace siglos. Si esto es cierto, la cantidad de ^{14}C absorbido por un árbol que creció hace varios siglos debe tener la misma cantidad de ^{14}C absorbida por un árbol que crece hoy. Una pieza de carbón viejo contiene sólo 15% de la cantidad de carbono de una pieza de carbón actual. ¿Hace cuánto tiempo fue quemado el árbol para formar la pieza antigua de leño? (La vida media del ^{14}C es 5 715 años.)

Interés compuesto **En los ejercicios 43 a 48, completar la tabla para una cuenta de ahorros en la que se tiene un interés continuo.**

	Inversión inicial	*Tasa anual*	*Tiempo para duplicar*	*Cantidad después de 10 años*
43.	\$4 000	6%		
44.	\$18 000	$5\frac{1}{2}$%		
45.	\$750		$7\frac{3}{4}$ años	
46.	\$12 500		5 años	
47.	\$500			\$1 292.85
48.	\$2 000			\$5 436.56

Interés compuesto **En los ejercicios 49 a 52, encontrar el capital principal *P* que debe invertirse a una tasa *r*, a un interés mensual compuesto, tal que \$1 000 000 garanticen la jubilación en *t* años.**

49. $r = 7\frac{1}{2}\%, \quad t = 20$ **50.** $r = 6\%, \quad t = 40$

51. $r = 8\%, \quad t = 35$ **52.** $r = 9\%, \quad t = 25$

Interés compuesto **En los ejercicios 53 a 56, encontrar el tiempo necesario para que \$1 000 se dupliquen si se invierten a una tasa de *r* compuesta *a*) anual, *b*) mensual, *c*) diaria y *d*) continua.**

53. $r = 7\%$ **54.** $r = 6\%$

55. $r = 8.5\%$ **56.** $r = 5.5\%$

Población **En los ejercicios 57 a 61, se dan la población (en millones) de un país en 2007 y la razón de cambio continua anual especulada *k* de la población. (*Fuente: U.S. Census Bureau, International Data Base.*)**

***a*)** **Encontrar el modelo de crecimiento exponencial $P = Ce^{kt}$ de la población con $t = 0$ correspondiente a 2000.**

***b*)** **Usar el modelo para predecir la población del país en 2015.**

***c*)** **Discutir la relación entre el signo de *k* y el cambio en la población para el país.**

	País	*Población de 2007*	*k*
57.	Letonia	2.3	-0.006
58.	Egipto	80.3	0.017
59.	Paraguay	6.7	0.024
60.	Hungría	10.0	-0.003
61.	Uganda	30.3	$+0.036$

Para discusión

62. *a*) Suponiendo un incremento en la población de insectos en un número constante cada mes, explicar por qué el número de insectos puede ser representado por función lineal.

b) Suponiendo un incremento en la población de insectos en un porcentaje constante cada mes, explicar por qué el número de insectos puede ser representado por función exponencial.

63. ***Modelo matemático*** Sea un cultivo con una cantidad inicial de cien bacterias y *N* el número de bacterias que se cuentan cada hora durante 5 horas. Los resultados se muestran en la tabla, donde *t* es el tiempo en horas.

t	0	1	2	3	4	5
N	100	126	151	198	243	297

a) Usar la función de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo exponencial para los datos.

b) Usar el modelo para estimar el tiempo requerido para que la población se cuadriplique.

64. ***Crecimiento de bacterias*** El número de bacterias en un cultivo se incrementó de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Después de 2 horas se tienen 125 bacterias en el cultivo y 350 bacterias después de 4 horas.

a) Encontrar la población inicial.

b) Escribir un modelo de crecimiento exponencial de la población bacteriana. Sea *t* el tiempo en horas.

c) Usar el modelo para determinar el número de bacterias después de 8 horas.

d) ¿Después de cuántas horas la cantidad de bacterias será de 25 000?

65. ***Curva de aprendizaje*** El gerente de una fábrica ha calculado que un trabajador puede producir más de 30 unidades en un día. La curva de aprendizaje del número *N* de unidades producidas por día después de que un nuevo empleado haya trabajado *t* días es $N = 30(1 - e^{kt})$. Después de 20 días en el trabajo, un trabajador produce 19 unidades.

a) Encontrar la curva de aprendizaje de este trabajador.
b) ¿Cuántos días pasarían antes de que este trabajador produzca 25 unidades por día?

66. ***Curva de aprendizaje*** Si en el ejercicio 65 el gerente requiere que un nuevo empleado produzca al menos 20 unidades por día después de 30 días en el trabajo, encontrar *a*) la curva de aprendizaje que describe este requisito mínimo y *b*) los días necesarios antes de que un trabajador produzca, como mínimo, 25 unidades por día.

67. ***Análisis de datos*** La tabla muestra la población P (en millones) de Estados Unidos desde 1960 hasta 2000. (*Fuente: U.S. Census Bureau*)

Año	1960	1970	1980	1990	2000
Población, P	181	205	228	250	282

a) Usar los datos de 1960 y 1970 para encontrar un modelo exponencial P_1 para los datos. Considerar $t = 0$ en 1960.
b) Usar una herramienta de graficación para representar un modelo exponencial P_2 para los datos. Considerar $t = 0$ en 1960.
c) Usar una herramienta de graficación para trazar los datos y los modelos P_1 y P_2 en la misma pantalla. Comparar el dato real con las predicciones. ¿Qué modelo se ajusta mejor a los datos?
d) Estimar cuándo la población será de 320 millones.

68. ***Análisis de datos*** La tabla muestra los ingresos netos y las cantidades requeridas para satisfacer la deuda nacional (fondos de garantía de los intereses adecuados por la Tesorería) de Estados Unidos desde 2001 hasta 2010. Los años de 2007 a 2010 son estimados y las cantidades monetarias se dan en miles de millones de dólares. (*Fuente: U.S. Office of Management and Budget*)

Año	2001	2002	2003	2004	2005
Ingresos	1 991.4	1 853.4	1 782.5	1 880.3	2 153.9
Intereses	359.5	332.5	318.1	321.7	352.3

Año	2006	2007	2008	2009	2010
Ingresos	2 407.3	2 540.1	2 662.5	2 798.3	2 954.7
Intereses	405.9	433.0	469.9	498.0	523.2

a) Usar la capacidad de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo exponencial R para los ingresos y un modelo cuártico I para la cantidad necesaria para satisfacer la deuda. Considerar t como el tiempo en años, con $t = 1$ que corresponde a 2001.
b) Usar una herramienta de graficación para trazar los puntos correspondientes a los ingresos, y trazar el correspondiente modelo. Con base en el modelo, ¿cuál es la tasa de crecimiento continuo de los ingresos?
c) Usar una herramienta de graficación para representar los puntos que corresponden a la cantidad necesaria para satisfacer la deuda, y trazar el modelo cuártico.
d) Encontrar una función $P(t)$ que aproxime el porcentaje de los ingresos necesarios para satisfacer la deuda nacional. Usar una herramienta de graficación para representar esta función.

69. ***Intensidad del sonido*** El nivel del sonido β (en decibeles), con una intensidad de I es $\beta(I) = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ donde I_0 es una intensidad de 10^{-16} watts por centímetro cuadrado, que corresponde a la intensidad del sonido más débil que se puede escuchar. Determinar $\beta(I)$ para

a) $I = 10^{-14}$ watts por centímetro cuadrado (susurro)
b) $I = 10^{-9}$ watts por centímetro cuadrado (esquina de calle ruidosa)
c) $I = 10^{-6.5}$ watts por centímetro cuadrado (golpe de martillo)
d) $I = 10^{-4}$ watts por centímetro cuadrado (umbral de dolor)

70. ***Nivel de ruido*** Con la instalación de materiales de aislamiento sonoro, el nivel de ruido en un auditorio se redujo de 93 a 80 decibeles. Usar la función exponencial del ejercicio 69 para encontrar el porcentaje de decrecimiento en el nivel de intensidad del ruido como un resultado de la instalación de esos materiales.

71. ***Silvicultura*** El valor de un terreno de árboles maderables es $V(t) = 100\,000e^{0.8\sqrt{t}}$ donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiente a 2008. Si el dinero gana intereses continuamente de 10%, el actual valor del bosque maderero en cualquier tiempo t es $A(t) = V(t)e^{-0.10t}$. Encontrar el año en el cual el bosque se talará para maximizar la presente función valor.

72. ***Intensidad del terremoto*** En la escala de Richter, la magnitud R de un terremoto de intensidad I es

$$R = \frac{\ln I - \ln I_0}{\ln 10}$$

donde I_0 es la intensidad mínima usada como comparación. Suponer que $I_0 = 1$.

a) Encontrar la intensidad del terremoto de San Francisco en 1906 ($R = 8.3$).
b) Encontrar el factor para el cual la intensidad aumente si la medida en la escala Richter es el doble.
c) Encontrar dR/dI.

73. ***Ley de enfriamiento de Newton*** Cuando un objeto se extrae del horno y se coloca en un entorno con una temperatura constante de 80° F, la temperatura en el centro es 1 500° F. Una hora después de extraerlo, la temperatura del centro es 1 120° F. Encontrar la temperatura del centro 5 horas después de extraer el objeto del horno.

74. ***Ley de enfriamiento de Newton*** Un contenedor de líquido caliente se coloca en un congelador que se mantiene a una temperatura constante de 20° F. La temperatura inicial del líquido es 160° F. Después de 5 minutos, la temperatura del líquido es 60° F. ¿Cuánto tiempo se necesitará para que su temperatura disminuya a 30° F?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 75 a 78, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

75. En el crecimiento exponencial, la tasa de crecimiento es constante.

76. En el crecimiento lineal, la tasa de crecimiento es constante.

77. Si los precios aumentan a una tasa de 0.5% mensual, entonces éstos aumentan a una tasa de 6% por año.

78. El modelo exponencial de la ecuación diferencial de crecimiento es $dy/dx = ky$, donde k es una constante.

6.3 Separación de variables y la ecuación logística

- **Reconocer y resolver las ecuaciones diferenciales que se pueden resolver mediante separación de variables.**
- **Reconocer y resolver ecuaciones diferenciales homogéneas.**
- **Usar ecuaciones diferenciales para modelar y resolver problemas de aplicación.**
- **Resolver y analizar las ecuaciones diferenciales logísticas.**

Separación de variables

Considerar una ecuación diferencial que pueda escribirse de la forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

donde M es una función continua sólo de x y N es una función continua sólo de y. Como se observó en la sección anterior, para este tipo de ecuación, todos los términos x se pueden agrupar con dx y todos los de y con dy, y se puede obtener una solución por integración. Tales ecuaciones se dice que son **separables**, y el procedimiento de solución se denomina **separación de variables**. Abajo se muestran algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales que son separables.

Ecuación diferencial original	*Reescrita con variables separables*
$x^2 + 3y\dfrac{dy}{dx} = 0$	$3y\,dy = -x^2\,dx$
$(\operatorname{sen} x)y' = \cos x$	$dy = \cot x\,dx$
$\dfrac{xy'}{e^y + 1} = 2$	$\dfrac{1}{e^y + 1}\,dy = \dfrac{2}{x}\,dx$

EJEMPLO 1 Separación de variables

Encontrar la solución general de $(x^2+4)\dfrac{dy}{dx} = xy$.

Solución Para iniciar, observar que $y = 0$ es una solución. Para encontrar otras soluciones, suponer que $y \neq 0$ y separar las variables como se muestra.

$$(x^2 + 4)\,dy = xy\,dx \qquad \text{Forma diferencial.}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2 + 4}\,dx \qquad \text{Separar variables.}$$

Ahora, integrar para obtener

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx \qquad \text{Integrar.}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + C_1$$

$$\ln|y| = \ln\sqrt{x^2 + 4} + C_1$$

$$|y| = e^{C_1}\sqrt{x^2 + 4}$$

$$y = \pm e^{C_1}\sqrt{x^2 + 4}.$$

Dado que $y = 0$ es también una solución, se puede escribir la solución general como

$$y = C\sqrt{x^2 + 4}. \qquad \text{Solución general } (C = \pm e^{C_1})$$

NOTA Asegurarse de verificar las soluciones de este capítulo. En el ejemplo 1, se debe verificar la solución $y = C\sqrt{x^2 + 4}$ por derivación y sustitución en la ecuación original.

$$(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = xy$$

$$(x^2 + 4)\frac{Cx}{\sqrt{x^2 + 4}} \stackrel{?}{=} x\left(C\sqrt{x^2 + 4}\right)$$

$$Cx\sqrt{x^2 + 4} = Cx\sqrt{x^2 + 4}$$

Así, la solución concuerda. ■

En algunos casos, no es factible escribir la solución general en la forma explícita $y = f(x)$. El siguiente ejemplo ilustra tal situación. La derivación implícita se puede usar para verificar esta solución.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para un ejemplo (de ingeniería) de una ecuación diferencial que es separable, ver el artículo "Designing a Rose Cutter", de J. S. Hartzler en *The College Mathematics Journal*.

EJEMPLO 2 Encontrar una solución particular

Dada la condición inicial $y(0) = 1$, encontrar la solución particular de la ecuación

$$xy\,dx + e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy = 0.$$

Solución Notar que $y = 0$ es una solución de la ecuación diferencial, pero esta solución no satisface la condición inicial. Así, se puede suponer que $y \neq 0$. Para separar variables, se debe despejar el primer término de y y el segundo término de e^{-x^2}. Así, se debe multiplicar por e^{x^2}/y y obtener lo siguiente.

$$\begin{aligned} xy\,dx + e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy &= 0 \\ e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy &= -xy\,dx \\ \int\left(y - \frac{1}{y}\right)dy &= \int -xe^{x^2}\,dx \\ \frac{y^2}{2} - \ln|y| &= -\frac{1}{2}e^{x^2} + C \end{aligned}$$

De la condición inicial $y(0) = 1$, se tiene $\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2} + C$, lo cual implica que $C = 1$. Así, la solución particular tiene la forma implícita

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} - \ln|y| &= -\frac{1}{2}e^{x^2} + 1 \\ y^2 - \ln y^2 + e^{x^2} &= 2. \end{aligned}$$

Se puede verificar esto derivando y reescribiendo para obtener la ecuación original.

EJEMPLO 3 Encontrar la curva de una solución particular

Encontrar la ecuación de la curva que pasa a través del punto (1, 3) y tiene pendiente de y/x^2 en cualquier punto (x, y).

Solución Dado que la pendiente de la curva está dada por y/x^2, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$$

con la condición inicial $y(1) = 3$. Separando las variables e integrándolas se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x^2}, \quad y \qquad 0 \\ \ln|y| &= -\frac{1}{x} + C_1 \\ y &= e^{-(1/x) + C_1} = Ce^{-1/x}. \end{aligned}$$

Dado que $y = 3$ cuando $x = 1$, se concluye que $3 = Ce^{-1}$ y $C = 3e$. Así, la ecuación de la curva especificada es

$$y = (3e)e^{-1/x} = 3e^{(x-1)/x}, \quad x > 0.$$

Ya que la solución no se define en $x = 0$ y la condición inicial se da en $x = 1$, x está restringida a valores positivos. Ver la figura 6.12.

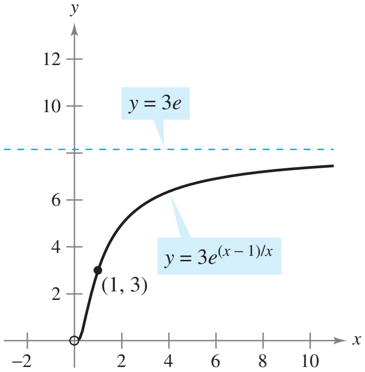


Figura 6.12

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Algunas ecuaciones diferenciales que no son separables en x y y se pueden separar por un cambio de variables. Éste es el caso de ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x, y)$, donde f es una **función homogénea**. La función dada por $f(x, y)$ es **homogénea de grado n** si

NOTA La notación $f(x, y)$ se usó para denotar una función de dos variables de la misma forma como $f(x)$ denota una función de una variable. Se estudiarán funciones de dos variables a detalle en el capítulo 13.

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$ Función homogénea de grado n.

donde n es un número real.

EJEMPLO 4 Verificar funciones homogéneas

a) $f(x, y) = x^2y - 4x^3 + 3xy^2$ es una función homogénea de grado 3 dado que

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2(ty) - 4(tx)^3 + 3(tx)(ty)^2 \\ &= t^3(x^2y) - t^3(4x^3) + t^3(3xy^2) \\ &= t^3(x^2y - 4x^3 + 3xy^2) \\ &= t^3 f(x, y). \end{aligned}$$

b) $f(x, y) = xe^{x/y} + y \text{ sen } (y/x)$ es una función homogénea de grado 1 dado que

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= txe^{tx/ty} + ty \text{ sen } \frac{ty}{tx} \\ &= t\left(xe^{x/y} + y \text{ sen } \frac{y}{x}\right) \\ &= tf(x, y). \end{aligned}$$

c) $f(x, y) = x + y^2$ *no* es una función homogénea dado que

$$f(tx, ty) = tx + t^2y^2 = t(x + ty^2) \neq t^n(x + y^2).$$

d) $f(x, y) = x/y$ es una función homogénea de grado 0 dado que

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{ty} = t^0 \frac{x}{y}.$$

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL HOMOGÉNEA

Una **ecuación diferencial homogénea** es una ecuación de la forma

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

donde M y N son funciones homogéneas del mismo grado.

EJEMPLO 5 Prueba para ecuaciones diferenciales homogéneas

a) $(x^2 + xy)\, dx + y^2\, dy = 0$ es homogénea de grado 2.

b) $x^3\, dx = y^3\, dy$ es homogénea de grado 3.

c) $(x^2 + 1)\, dx + y^2\, dy = 0$ *no* es una ecuación diferencial homogénea.

Para resolver una ecuación diferencial homogénea por el método de separación de variables, usar el siguiente teorema de cambio de variables.

TEOREMA 6.2 CAMBIO DE VARIABLES PARA ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Si $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es homogénea, entonces se puede transformar en una ecuación diferencial cuyas variables son separables por la sustitución

$$y = vx$$

donde v es una función derivable de x.

EJEMPLO 6 Resolver una ecuación diferencial homogénea

Encontrar la solución general de

$$(x^2 - y^2)\,dx + 3xy\,dy = 0.$$

AYUDA DE ESTUDIO La sustitución $y = vx$ llevará a una ecuación diferencial que es separable con respecto a las variables x y v. Se debe escribir su solución final, sin embargo, en términos de x y y.

Solución Dado que $(x^2 - y^2)$ y $3xy$ son homogéneas de grado 2, usar $y = vx$ para obtener $dy = x\,dv + v\,dx$. Entonces, por sustitución, se tiene

$$\begin{aligned}(x^2 - v^2x^2)\,dx + 3x(vx)\overbrace{(x\,dv + v\,dx)}^{dy} &= 0\\ (x^2 + 2v^2x^2)\,dx + 3x^3v\,dv &= 0\\ x^2(1 + 2v^2)\,dx + x^2(3vx)\,dv &= 0.\end{aligned}$$

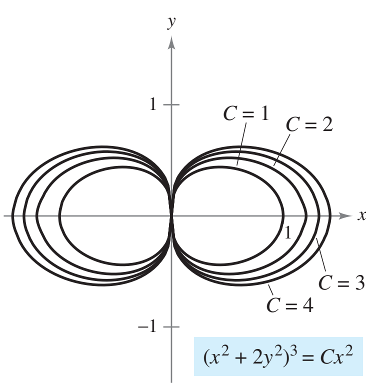
Al dividir entre x^2 y separar variables, se produce

$$\begin{aligned}(1 + 2v^2)\,dx &= -3vx\,dv\\ \int\frac{dx}{x} &= \int\frac{-3v}{1 + 2v^2}\,dv\\ \ln|x| &= -\frac{3}{4}\ln(1 + 2v^2) + C_1\\ 4\ln|x| &= -3\ln(1 + 2v^2) + \ln|C|\\ \ln x^4 &= \ln\left|C(1 + 2v^2)^{-3}\right|\\ x^4 &= C(1 + 2v^2)^{-3}.\end{aligned}$$

Al sustituir por v se produce la siguiente solución general.

$$\begin{aligned}x^4 &= C\left[1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{-3}\\ \left(1 + \frac{2y^2}{x^2}\right)^3 x^4 &= C\\ (x^2 + 2y^2)^3 &= Cx^2 \qquad \text{Solución general.}\end{aligned}$$

Se puede verificar esto al derivar y reescribir para obtener la ecuación original.



Solución general de
$(x^2 - y^2)\,dx + 3xy\,dy = 0$
Figura 6.13

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a una herramienta de graficación, representar varias soluciones para el ejemplo 6. La figura 6.13 muestra las gráficas de

$$(x^2 + 2y^2)^3 = Cx^2$$

para $C = 1, 2, 3$ y 4.

Aplicaciones

EJEMPLO 7 Población salvaje

La razón de cambio del número de coyotes $N(t)$ en una población es directamente proporcional a $650 - N(t)$, donde t es el tiempo en años. Cuando $t = 0$, la población es 300, y cuando $t = 2$, la población se incrementó a 500. Encontrar la población cuando $t = 3$.

Solución Dado que el ritmo o velocidad de cambio de la población es proporcional a $650 - N(t)$, se puede escribir la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dN}{dt} = k(650 - N)$$

Se puede resolver esta ecuación diferencial por separación de variables.

$$dN = k(650 - N)\,dt \qquad \text{Forma diferencial.}$$

$$\frac{dN}{650 - N} = k\,dt \qquad \text{Variables separables.}$$

$$-\ln|650 - N| = kt + C_1 \qquad \text{Integrar.}$$

$$\ln|650 - N| = -kt - C_1$$

$$650 - N = e^{-kt - C_1} \qquad \text{Suponer } N < 650.$$

$$N = 650 - Ce^{-kt} \qquad \text{Solución general.}$$

Si se usa $N = 300$ cuando $t = 0$, se puede concluir que $C = 350$, lo cual produce

$$N = 650 - 350e^{-kt}.$$

Entonces, mediante el valor de $N = 500$ cuando $t = 2$, se deduce que

$$500 = 650 - 350e^{-2k} \quad \Rightarrow \quad e^{-2k} = \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad k \approx 0.4236.$$

Así, el modelo para la población de coyotes es

$$N = 650 - 350e^{-0.4236t}. \qquad \text{Modelo para la población.}$$

Cuando $t = 3$, se puede aproximar la población a

$$N = 650 - 350e^{-0.4236(3)} \approx 552 \text{ coyotes.}$$

En la figura 6.14 se muestra el modelo de población. Note que $N = 650$ es la asíntota horizontal de la gráfica y es la *capacidad de carga* del modelo. Es posible aprender más acerca de la capacidad de carga después en esta sección.

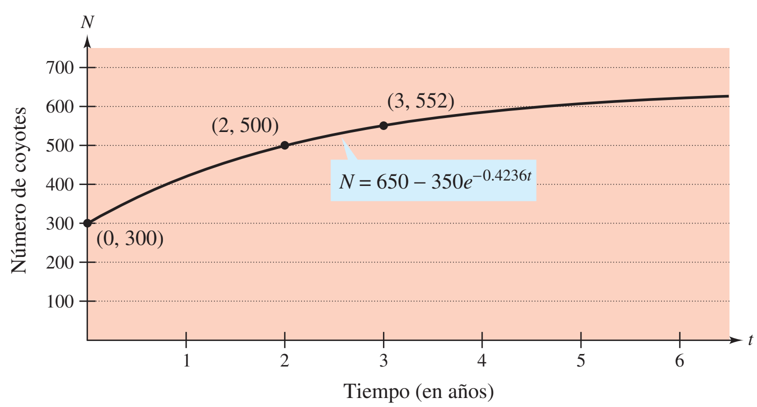
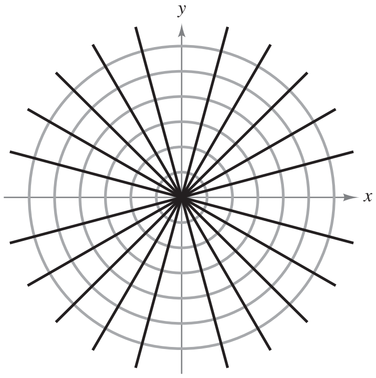


Figura 6.14



Cada recta $y = Kx$ es una trayectoria ortogonal de la familia de circunferencias
Figura 6.15

Un problema común en electrostática, termodinámica e hidrodinámica involucra encontrar una familia de curvas, cada una de las cuales es ortogonal a todos los miembros de una familia de curvas dada. Por ejemplo, la figura 6.15 muestra una familia de circunferencias

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{Familia de circunferencias.}$$

cada una de las cuales interseca las rectas en la familia

$$y = Kx \qquad \text{Familia de rectas.}$$

en ángulos rectos. Esas dos familias de curvas se dice que son **mutuamente ortogonales**, y cada curva en una de las familias se denomina como una **trayectoria ortogonal** de la otra familia. En electrostática, las líneas de fuerzas son ortogonales a las *curvas equipotenciales*. En termodinámica, el flujo de calor que atraviesa una superficie plana es ortogonal a las *curvas isotérmicas*. En hidrodinámica, las líneas de flujo (corriente) son trayectorias ortogonales a las *curvas de potencial de velocidad*.

EJEMPLO 8 Trayectorias ortogonales

Describir las trayectorias ortogonales para la familia de curvas dada por

$$y = \frac{C}{x}$$

para $C \neq 0$. Trazar la gráfica para varios miembros de cada familia.

Solución Primero, resolver la ecuación dada para C y escribir $xy = C$. Entonces, por derivación implícita con respecto a x, se obtiene la ecuación diferencial

$$xy' + y = 0 \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

$$x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \qquad \text{Pendiente de familia dada.}$$

Dado que y' representa la pendiente de la familia de curvas dada en (x, y), se deduce que la familia ortogonal tiene la pendiente recíproca negativa x/y. Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}. \qquad \text{Pendiente de familia ortogonal.}$$

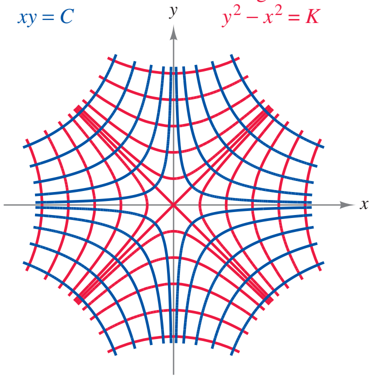
Ahora se puede encontrar la familia ortogonal por separación de variables e integrando.

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y^2 - x^2 = K$$

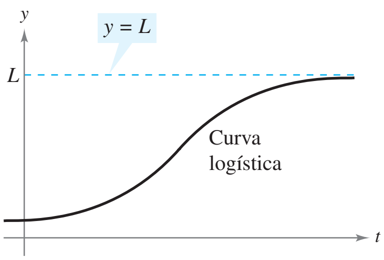
Los centros están en el origen y los ejes transversales son verticales para $K > 0$ y horizontales para $K < 0$. Si $K = 0$, las trayectorias ortogonales son las líneas $y = \pm x$. Si $K \neq 0$, las trayectorias ortogonales son hipérbolas. Varias trayectorias se muestran en la figura 6.16.



Trayectorias ortogonales
Figura 6.16

Ecuación diferencial logística

En la sección 6.2, el modelo de crecimiento exponencial se deriva del hecho de que la razón de cambio de una variable y es proporcional al valor de y. Se observó que la ecuación diferencial $dy/dt = ky$ tiene la solución general $y = Ce^{kt}$. El crecimiento exponencial es ilimitado, pero cuando describe una población, con frecuencia existe algún límite superior L más allá del cual no puede haber crecimiento. El límite superior L se denomina **capacidad límite** o **de soporte**, la cual es la máxima población $y(t)$ que se puede sostener o soportar a medida que se incrementa el tiempo t. Un modelo que con regularidad se usa para este tipo de crecimiento es la **ecuación diferencial logística**



Notar que, como $t \to \infty$, $y \to L$
Figura 6.17

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right) \qquad \text{Ecuación diferencial logística.}$$

donde k y L son constantes positivas. Una población que satisface esta ecuación no crece sin límite, pero se aproxima a la capacidad límite o de soporte L al aumentar t.

De la ecuación se puede observar que si y está entre 0 y la capacidad límite o de soporte L, entonces $dy/dt > 0$, y la población se incrementa. Si y es mayor que L, entonces $dy/dt < 0$, y la población decrece. La gráfica de la función y se denomina *curva logística*, como se muestra en la figura 6.17.

EJEMPLO 9 Obtención de la solución general

Resolver la ecuación diferencial logística $\dfrac{dy}{dt} = ky\left(1 - \dfrac{y}{L}\right)$.

Solución Empezar por separar variables.

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right) \qquad \text{Escribir la ecuación diferencial.}$$

$$\frac{1}{y(1 - y/L)}dy = kdt \qquad \text{Variables separables.}$$

$$\int \frac{1}{y(1 - y/L)}dy = \int kdt \qquad \text{Integrar cada miembro.}$$

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{L - y}\right)dy = \int kdt \qquad \text{Reescribir el primer miembro mediante fracciones parciales.}$$

$$\ln|y| - \ln|L - y| = kt + C \qquad \text{Encontrar la antiderivada de cada miembro.}$$

$$\ln\left|\frac{L - y}{y}\right| = -kt - C \qquad \text{Multiplicar cada miembro por –1 y simplificar.}$$

$$\left|\frac{L - y}{y}\right| = e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt} \qquad \text{Tomar exponenciales en cada miembro.}$$

$$\frac{L - y}{y} = be^{-kt} \qquad \text{Sea } \pm e^{-C} = b.$$

Al resolver esta ecuación para y se produce $y = \dfrac{L}{1 + be^{-kt}}$.

Del ejemplo 9, se puede concluir que todas las soluciones de la ecuación diferencial logística son de la forma

$$y = \frac{L}{1 + be^{-kt}}.$$

E XPLORACIÓN

Usar una herramienta de graficación para investigar los efectos de los valores de L, b y k sobre la gráfica de

$$y = \frac{L}{1 + be^{-kt}}.$$

Incluir algunos ejemplos para justificar los resultados.

EJEMPLO 10 Solución de una ecuación diferencial logística

Una comisión estatal libera 40 alces en una zona de refugio. Después de 5 años, la población de alces es de 104. La comisión cree que la zona no puede soportar más de 4 000 alces. La tasa de crecimiento de la población de alces p es

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{4\,000}\right), \quad 40 \leq p \leq 4\,000$$

donde t es el número de años.

a) Escribir un modelo para la población de alces en términos de t.
b) Representar el campo de pendientes de la ecuación diferencial y la solución que pasa a través del punto (0, 40).
c) Usar el modelo para estimar la población de alces después de 15 años.
d) Encontrar el límite del modelo cuando $t \to \infty$.

EXPLORACIÓN

Explicar qué sucede si $p(0) = L$.

Solución

a) Se sabe que $L = 4\,000$. Así, la solución de la ecuación diferencial es de la forma

$$p = \frac{4\,000}{1 + be^{-kt}}.$$

Dado que $p(0) = 40$, se puede resolver para b como se muestra.

$$40 = \frac{4\,000}{1 + be^{-k(0)}}$$

$$40 = \frac{4\,000}{1 + b} \quad \Rightarrow \quad b = 99$$

Entonces, dado que $p = 104$ cuando $t = 5$, se puede resolver para k.

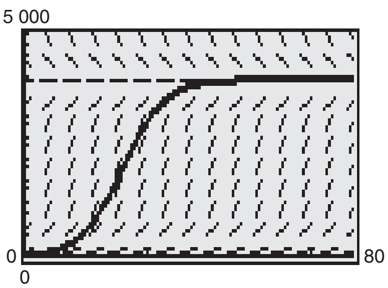
$$104 = \frac{4\,000}{1 + 99e^{-k(5)}} \quad \Rightarrow \quad k \approx 0.194$$

Así, un modelo para la población de alces está dada por $p = \dfrac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194t}}$.

b) Utilizando una herramienta de graficación, se puede representar el campo de pendientes de

$$\frac{dp}{dt} = 0.194p\left(1 - \frac{p}{4\,000}\right)$$

y la solución pasa a través de (0, 40), como se muestra en la figura 6.18.



Campo de pendientes para
$\dfrac{dp}{dt} = 0.194p\left(1 - \dfrac{p}{4\,000}\right)$
Y la solución que pasa a través de (0, 40)
Figura 6.18

c) Para estimar la población de alces después de 15 años, sustituir 15 para t en el modelo.

$$p = \frac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194(15)}} \qquad \text{Sustituir 15 para } t.$$

$$= \frac{4\,000}{1 + 99e^{-2.91}} \approx 626 \qquad \text{Simplificar.}$$

d) Como t se incrementa sin saltos, el denominador de $\dfrac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194t}}$ se cierra a 1.

Así, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194t}} = 4\,000.$

6.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 14, encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$ **2.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{y^2}$

3. $x^2 + 5y\dfrac{dy}{dx} = 0$ **4.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 3}{6y^2}$

5. $\dfrac{dr}{ds} = 0.75r$ **6.** $\dfrac{dr}{ds} = 0.75s$

7. $(2 + x)y' = 3y$ **8.** $xy' = y$

9. $yy' = 4 \operatorname{sen} x$ **10.** $yy' = -8\cos(\pi x)$

11. $\sqrt{1 - 4x^2}\,y' = x$ **12.** $\sqrt{x^2 - 16}\,y' = 11x$

13. $y \ln x - xy' = 0$ **14.** $12yy' - 7e^x = 0$

En los ejercicios 15 a 24, encontrar la solución particular que satisface la condición inicial.

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*
15.	$yy' - 2e^x = 0$	$y(0) = 3$
16.	$\sqrt{x} + \sqrt{y}\,y' = 0$	$y(1) = 9$
17.	$y(x + 1) + y' = 0$	$y(-2) = 1$
18.	$2xy' - \ln x^2 = 0$	$y(1) = 2$
19.	$y(1 + x^2)y' - x(1 + y^2) = 0$	$y(0) = \sqrt{3}$
20.	$y\sqrt{1 - x^2}\,y' - x\sqrt{1 - y^2} = 0$	$y(0) = 1$
21.	$\dfrac{du}{dv} = uv \operatorname{sen} v^2$	$u(0) = 1$
22.	$\dfrac{dr}{ds} = e^{r-2s}$	$r(0) = 0$
23.	$dP - kP\,dt = 0$	$P(0) = P_0$
24.	$dT + k(T - 70)\,dt = 0$	$T(0) = 140$

En los ejercicios 25 a 28, encontrar una ecuación para las gráficas que pasen por los puntos y tengan la pendiente dada.

25. $(0, 2)$, $y' = \dfrac{x}{4y}$ **26.** $(1, 1)$, $y' = -\dfrac{9x}{16y}$

27. $(9, 1)$, $y' = \dfrac{y}{2x}$ **28.** $(8, 2)$, $y' = \dfrac{2y}{3x}$

En los ejercicios 29 y 30, encontrar todas las funciones *f* que tienen la propiedad indicada.

29. La tangente de la gráfica de f en el punto (x, y) en intersección con el eje x en $(x + 2, 0)$.

30. Todas las tangentes de la gráfica de f que pasan a través del origen.

En los ejercicios 31 a 38, determinar si la función es homogénea y, si lo es, determinar su grado.

31. $f(x, y) = x^3 - 4xy^2 + y^3$ **32.** $f(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 - 2y^2$

33. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **34.** $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

35. $f(x, y) = 2 \ln xy$ **36.** $f(x, y) = \tan(x + y)$

37. $f(x, y) = 2 \ln \dfrac{x}{y}$ **38.** $f(x, y) = \tan \dfrac{y}{x}$

En los ejercicios 39 a 44, resolver la ecuación diferencial homogénea.

39. $y' = \dfrac{x + y}{2x}$ **40.** $y' = \dfrac{x^3 + y^3}{xy^2}$

41. $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$ **42.** $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$

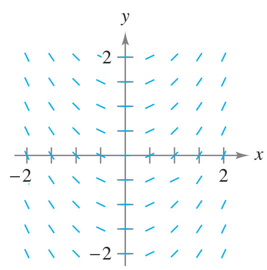
43. $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ **44.** $y' = \dfrac{2x + 3y}{x}$

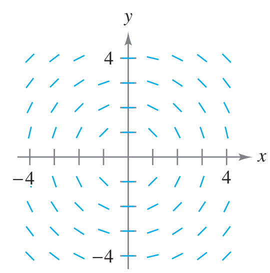
En los ejercicios 45 a 48, encontrar la solución particular que satisface la condición inicial.

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*
45.	$x\,dy - (2xe^{-y/x} + y)\,dx = 0$	$y(1) = 0$
46.	$-y^2\,dx + x(x + y)\,dy = 0$	$y(1) = 1$
47.	$\left(x \sec \dfrac{y}{x} + y\right) dx - x\,dy = 0$	$y(1) = 0$
48.	$(2x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$	$y(1) = 0$

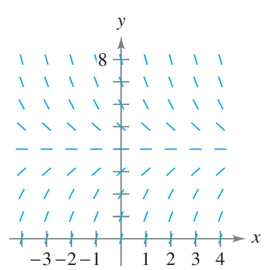
Campos de pendientes **En los ejercicios 49 a 52, representar algunas soluciones de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes y entonces encontrar la solución general analíticamente.**

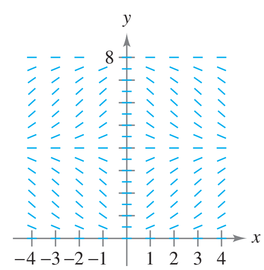
49. $\dfrac{dy}{dx} = x$ **50.** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$





51. $\dfrac{dy}{dx} = 4 - y$ **52.** $\dfrac{dy}{dx} = 0.25x(4 - y)$





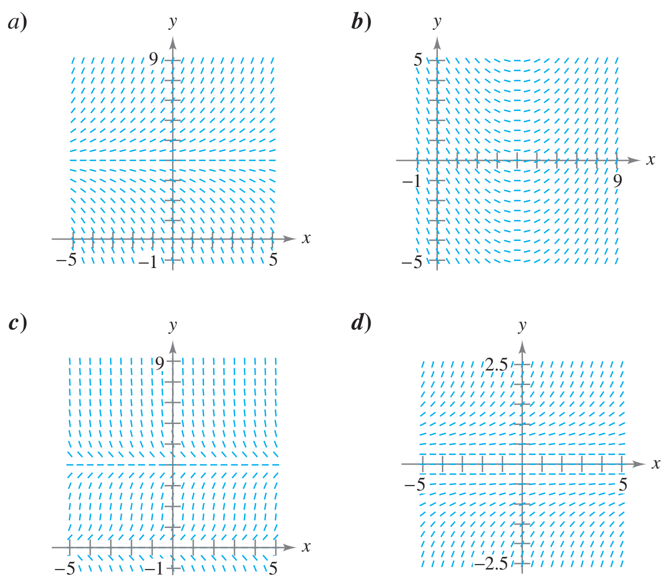
Método de Euler **En los ejercicios 53 a 56, *a*) usar el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 0.1$ para aproximar la solución particular del problema de valor inicial en un valor de x dado, *b*) encontrar analíticamente la solución exacta de la ecuación diferencial y *c*) comparar las soluciones en los valores de x dados.**

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*	*Valor x*
53.	$\dfrac{dy}{dx} = -6xy$	$(0, 5)$	$x = 1$
54.	$\dfrac{dy}{dx} + 6xy^2 = 0$	$(0, 3)$	$x = 1$
55.	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + 12}{3y^2 - 4}$	$(1, 2)$	$x = 2$
56.	$\dfrac{dy}{dx} = 2x(1 + y^2)$	$(1, 0)$	$x = 1.5$

57. ***Desintegración radiactiva*** La tasa de descomposición de radio radiactivo es proporcional a la cantidad presente en cualquier tiempo. La semivida o vida media de radio radiactivo es de 1 599 años. ¿Qué cantidad permanecerá después de 50 años?

58. ***Reacción química*** En una reacción química, un compuesto se transforma en otro a una tasa proporcional a la cantidad no cambiada. Si inicialmente existen 40 gramos del compuesto original, y permanecen 35 gramos después de 1 hora, ¿cuándo se transformará 75% del compuesto?

Campos de pendientes **En los ejercicios 59 a 62, *a*) escribir una ecuación diferencial para el enunciado, *b*) corresponder la ecuación diferencial con un posible campo de pendientes, y *c*) verificar los resultados mediante una herramienta de graficación para trazar un campo de pendientes de la ecuación diferencial. [Los campos de pendientes se marcaron con *a*), *b*), *c*) y *d*).]**



59. La razón de cambio de y con respecto a x es proporcional a la diferencia entre y y 4.

60. La razón de cambio de y con respecto a x es proporcional a la diferencia entre x y 4.

61. La razón de cambio de y con respecto a x es proporcional al producto de y y la diferencia entre y y 4.

62. La razón de cambio de y con respecto a x es proporcional a y^2.

CAS **63.** ***Ganancia de peso*** Un becerro que pesa 60 libras al nacer gana peso a razón de $dw/dt = k(1\,200 - w)$, donde w es el peso en libras y t es el tiempo en años. Resolver la ecuación diferencial.

a) Usar un sistema algebraico por computadora para resolver la ecuación diferencial para $k = 0.8$, 0.9 y 1. Representar las tres soluciones.

b) Si el animal se vende cuando su peso alcanza 800 libras, encontrar el tiempo de venta de cada uno de los modelos en el apartado *a*).

c) ¿Cuál es el peso máximo del animal para cada uno de los modelos?

64. ***Ganancia de peso*** Un becerro que pesa w_0 libras al nacer gana peso a razón de $dw/dt = 1\,200 - w$, donde w es el peso en libras y t es el tiempo en años. Resolver la ecuación diferencial.

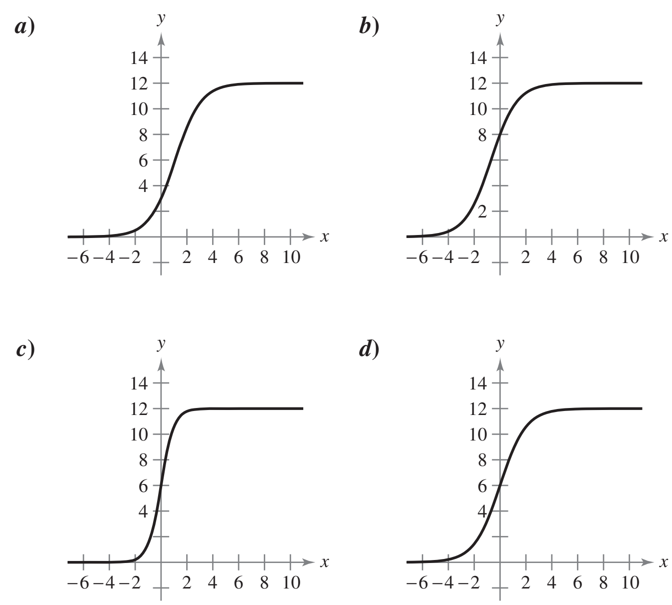
En los ejercicios 65 a 70, encontrar las trayectorias ortogonales de la familia. Usar una herramienta de graficación para obtener varios miembros de cada familia.

65. $x^2 + y^2 = C$ **66.** $x^2 - 2y^2 = C$

67. $x^2 = Cy$ **68.** $y^2 = 2Cx$

69. $y^2 = Cx^3$ **70.** $y = Ce^x$

En los ejercicios 71 a 74, señalar la ecuación logística con su gráfica. [Las gráficas se marcan con *a*), *b*), *c*) y *d*).]



71. $y = \dfrac{12}{1 + e^{-x}}$ **72.** $y = \dfrac{12}{1 + 3e^{-x}}$

73. $y = \dfrac{12}{1 + \frac{1}{2}e^{-x}}$ **74.** $y = \dfrac{12}{1 + e^{-2x}}$

En los ejercicios 75 y 76, la ecuación logística modela el crecimiento de una población. Usar la ecuación para *a*) encontrar el valor de *k*, *b*) encontrar la capacidad límite o de soporte, *c*) encontrar la población inicial, *d*) determinar cuándo la población alcanzará 50% de su capacidad límite o de soporte y *e*) escribir una ecuación diferencial logística que tiene la solución *P*(*t*).

75. $P(t) = \dfrac{2\,100}{1 + 29e^{-0.75t}}$

76. $P(t) = \dfrac{5\,000}{1 + 39e^{-0.2t}}$

CAS **En los ejercicios 77 y 78, la ecuación diferencial logística modela la tasa de crecimiento de una población. Usar la ecuación diferencial para *a*) encontrar el valor de *k*, *b*) encontrar la capacidad de soporte, *c*) usar un sistema algebraico por computadora para trazar la gráfica de un campo de pendientes y *d*) determinar el valor de *P* en el cual la tasa del crecimiento de población es el más alto.**

77. $\dfrac{dP}{dt} = 3P\left(1 - \dfrac{P}{100}\right)$

78. $\dfrac{dP}{dt} = 0.1P - 0.0004P^2$

En los ejercicios 79 a 82, encontrar la ecuación logística que satisface la condición inicial.

	Ecuación diferencial logística	*Condición inicial*
79.	$\dfrac{dy}{dt} = y\left(1 - \dfrac{y}{36}\right)$	(0, 4)
80.	$\dfrac{dy}{dt} = 2.8y\left(1 - \dfrac{y}{10}\right)$	(0, 7)
81.	$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{4y}{5} - \dfrac{y^2}{150}$	(0, 8)
82.	$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3y}{20} - \dfrac{y^2}{1\,600}$	(0, 15)

83. ***Especies en peligro*** Una organización de conservación libera 25 panteras de Florida en una zona de refugio. Después de 2 años, hay 39 panteras en la zona. El refugio tiene una capacidad límite o de soporte de 200 panteras.

a) Escribir una ecuación logística que modele la población de las panteras en el refugio.

b) Encontrar la población después de 5 años.

c) ¿Cuándo la población será de 100 panteras?

d) Escribir una ecuación diferencial logística que modele la tasa de crecimiento de la población de las panteras. Entonces repetir el apartado *b*) mediante el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 1$. Comparar la aproximación con las respuestas exactas.

e) ¿En qué tiempo la población de las panteras crecerá más rápidamente? Explicar.

84. ***Crecimiento de bacterias*** En el tiempo $t = 0$, un cultivo bacteriano pesa 1 gramo. Dos horas después, el cultivo pesa 4 gramos. El peso máximo del cultivo es de 20 gramos.

a) Escribir una ecuación logística que modele el peso del cultivo bacteriano.

b) Encontrar el peso del cultivo después de 5 horas.

c) ¿Cuándo el peso del cultivo será de 18 gramos?

d) Escribir una ecuación diferencial logística que modele la razón de crecimiento del peso del cultivo. Entonces repetir el inciso *b*) mediante el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 1$. Comparar la aproximación con los resultados exactos.

e) ¿En qué tiempo se incrementará el peso más rápidamente? Explicar.

Desarrollo de conceptos

85. Describir cómo reconocer y resolver ecuaciones diferenciales que se pueden resolver por separación de variables.

86. Establecer la prueba para determinar si una ecuación diferencial es homogénea. Dar un ejemplo.

87. Describir la relación entre dos familias de curvas que son mutuamente ortogonales.

Para discusión

88. Suponer que el crecimiento de una población está modelada por una ecuación logística. Conforme la población se incrementa, su razón de crecimiento decrece. ¿Ocurre esto en situaciones reales, como en poblaciones de animales o humanos?

89. Demostrar que si $y = \dfrac{1}{1+be^{-kt}}$, entonces $\dfrac{dy}{dt} = ky(1-y)$.

90. ***Navegación*** Un bote de navegación, que parte del reposo, acelera (dv/dt) a una tasa proporcional a la diferencia entre las velocidades del viento y el bote. Se ignora la resistencia del aire.

a) El viento sopla a 20 nudos, y después de media hora el bote se mueve a 10 nudos. Escribir la velocidad v como función del tiempo t.

b) Usar el resultado del inciso *a*) para escribir la distancia que se desplazó el bote como función del tiempo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 91 a 94, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o dar un contraejemplo.**

91. La función $y = 0$ es siempre una solución de una ecuación diferencial que puede resolverse por separación de variables.

92. La ecuación diferencial $y' = xy - 2y + x - 2$ se puede escribir en forma de variables separadas.

93. La función $f(x, y) = x^2 - 4xy + 6y^2 + 1$ es homogénea.

94. Las familias $x^2 + y^2 = 2Cy$ y $x^2 + y^2 = 2Kx$ son mutuamente ortogonales.

Preparación del examen Putnam

95. En un error de cálculo muy común, se cree que la regla del producto para derivadas dice que $(fg)' = f'g'$. Si $f(x) = e^{x^2}$, determinar, con prueba, si existe un intervalo abierto (a, b) y una función distinta de cero g definida en (a, b) tal que esta regla errónea del producto sea verdadera para x en (a, b).

6.4 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

- **Resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden.**
- **Usar ecuaciones diferenciales lineales para resolver problemas de aplicación.**
- **Resolver una ecuación diferencial de Bernoulli.**

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

En esta sección se estudiará cómo resolver una clase muy importante de ecuaciones diferenciales de primer orden: las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** es una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones continuas de x. Se dice que esta ecuación diferencial lineal de primer orden es de la **forma normal**.

NOTA Es útil ver por qué el factor integrante ayuda a resolver una ecuación diferencial lineal de la forma $y' + P(x)y = Q(x)$. Cuando ambos miembros de la ecuación se multiplican por el factor integrante $u(x) = e^{\int P(x)dx}$, el primer miembro se convierte en la derivada de un producto.

$$y'e^{\int P(x)\,dx} + P(x)ye^{\int P(x)\,dx} = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$
$$\left[ye^{\int P(x)\,dx}\right]' = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

Al integrar ambos miembros de la segunda ecuación y dividir entre $u(x)$ se produce la solución general. ■

Para resolver una ecuación diferencial lineal, hay que escribirla en forma normal para identificar las funciones $P(x)$ y $Q(x)$. Después integrar $P(x)$ y formar la expresión

$$u(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \text{Factor integrante.}$$

el cual se denomina **factor integrante**. La solución general de la ecuación es

$$y = \frac{1}{u(x)}\int Q(x)u(x)\,dx. \qquad \text{Solución general.}$$

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación diferencial lineal

Encontrar la solución general de

$$y' + y = e^x.$$

Solución Para esta ecuación, $P(x) = 1$ y $Q(x) = e^x$. Así, el factor integrante es

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\int P(x)\,dx} && \text{Factor integrante.}\\ &= e^{\int dx}\\ &= e^x. \end{aligned}$$

Esto implica que la solución general es

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{u(x)}\int Q(x)u(x)\,dx\\ &= \frac{1}{e^x}\int e^x(e^x)\,dx\\ &= e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)\\ &= \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}. && \text{Solución general.} \end{aligned}$$

TEOREMA 6.3 SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Un factor integrante para la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

es $u(x) = e^{\int P(x)dx}$. La solución de la ecuación diferencial es

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C.$$

ANNA JOHNSON PELL WHEELER (1883-1966)

Anna Johnson Pell Wheeler obtuvo su maestría en la Universidad de Iowa con su tesis *La extensión de la teoría de Galois a ecuaciones diferenciales* en 1904. Influida por David Hilbert, trabajó en ecuaciones diferenciales mientras estudiaba espacios lineales infinitos.

AYUDA DE ESTUDIO Más que memorizar la fórmula del teorema 6.3, basta con recordar que al multiplicar por el factor integrante $e^{\int P(x)dx}$, se convierte el miembro izquierdo de la ecuación diferencial en la derivada del producto $ye^{\int P(x)dx}$.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

Encontrar la solución de

$$xy' - 2y = x^2.$$

Solución La forma normal de la ecuación dada es

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$y' - \left(\frac{2}{x}\right)y = x. \qquad \text{Forma normal.}$$

Así, $P(x) = -2/x$, y se tiene

$$\int P(x)\,dx = -\int \frac{2}{x}\,dx$$
$$= -\ln x^2$$
$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{-\ln x^2}$$
$$= \frac{1}{e^{\ln x^2}}$$
$$= \frac{1}{x^2}. \qquad \text{Factor integrante.}$$

Así, al multiplicar cada miembro de la forma normal por $1/x^2$ se llega a

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{x^2}\right] = \frac{1}{x}$$
$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{1}{x}\,dx$$
$$\frac{y}{x^2} = \ln|x| + C$$
$$y = x^2(\ln|x| + C). \qquad \text{Solución general.}$$

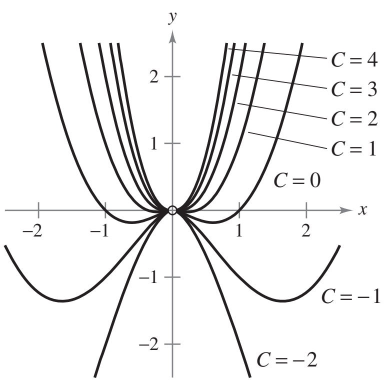


Figura 6.19

En la figura 6.19 se muestran varias curvas solución (para $C = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4) .

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

Encontrar la solución general de $y' - y \tan t = 1, -\pi/2 < t < \pi/2$.

Solución La ecuación ya está en la forma normal $y' + P(t)y = Q(t)$. Así, $P(t) = -\tan t$, y

$$\int P(t)\,dt = -\int \tan t\,dt = \ln|\cos t|$$

Como $-\pi/2 < t < \pi/2$, se pueden dejar los signos de valor absoluto y concluir que el factor integrante es

$$e^{\int P(t)\,dt} = e^{\ln(\cos t)} = \cos t. \qquad \text{Factor integrante.}$$

Así, al multiplicar $y' - y \tan t = 1$ por $\cos t$ se obtiene

$$\frac{d}{dt}[y \cos t] = \cos t$$

$$y \cos t = \int \cos t\,dt$$

$$y \cos t = \operatorname{sen} t + C$$

$$y = \tan t + C \sec t. \qquad \text{Solución general.}$$

Varias curvas solución se muestran en la figura 6.20.

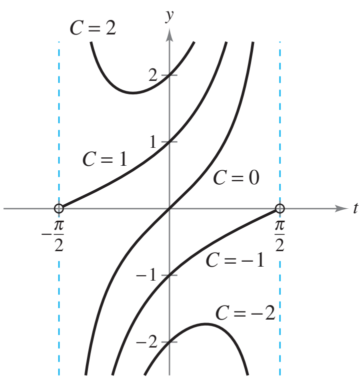


Figura 6.20

Aplicaciones

Un tipo de problema que se puede describir en términos de una ecuación diferencial involucra mezclas químicas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Un problema de mezcla

Un tanque contiene 50 galones de una disolución compuesta por 90% agua y 10% alcohol. Una segunda disolución que contiene 50% agua y 50% alcohol se agrega al tanque a una tasa de 4 galones por minuto. Conforme se añade la segunda, el tanque empieza a drenar a una tasa de 5 galones por minuto, como se muestra en la figura 6.21. Si se supone que la disolución en el tanque se agita constantemente, ¿cuánto alcohol permanecerá en el tanque después de 10 minutos?

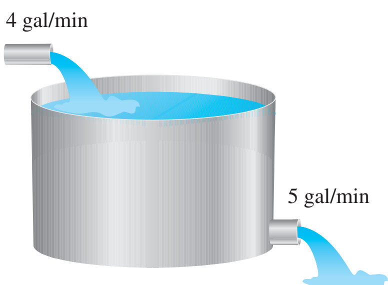


Figura 6.21

Solución Sea y el número de galones de alcohol en el tanque en cualquier instante t. Se sabe que $y = 5$ cuando $t = 0$. Dado que el número de galones en el tanque en cualquier tiempo es $50 - t$, y que el tanque pierde 5 galones por minuto, se debe perder $[5/(50 - t)]y$ galones de alcohol por minuto. Además, ya que el tanque gana 2 galones de alcohol por minuto, el ritmo o velocidad de cambio de alcohol en el tanque está dada por

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \left(\frac{5}{50 - t}\right)y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} + \left(\frac{5}{50 - t}\right)y = 2.$$

Para resolver esta ecuación lineal, sea $P(t) = 5/(50 - t)$ y se obtiene

$$\int P(t)\,dt = \int \frac{5}{50 - t}\,dt = -5 \ln|50 - t|.$$

Ya que $t < 50$, se puede eliminar el signo del valor absoluto y concluir que

$$e^{\int P(t)\,dt} = e^{-5\ln(50 - t)} = \frac{1}{(50 - t)^5}.$$

Así, la solución general es

$$\frac{y}{(50-t)^5} = \int \frac{2}{(50-t)^5}\,dt = \frac{1}{2(50-t)^4} + C$$

$$y = \frac{50-t}{2} + C(50-t)^5.$$

Dado que $y = 5$ cuando $t = 0$, se tiene

$$5 = \frac{50}{2} + C(50)^5 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{20}{50^5} = C$$

lo cual significa que la solución particular es

$$y = \frac{50-t}{2} - 20\left(\frac{50-t}{50}\right)^5.$$

Por último, cuando $t = 10$, la cantidad de alcohol en el tanque es

$$y = \frac{50-10}{2} - 20\left(\frac{50-10}{50}\right)^5 \approx 13.45 \text{ gal}$$

lo cual representa una solución que contiene 33.6% de alcohol.

Hasta ahora en problemas relacionados con la caída de un cuerpo se ha despreciado la resistencia del aire. El siguiente ejemplo incluye este factor. En el ejemplo, la resistencia del aire sobre el objeto que cae se supone proporcional a su velocidad v. Si g es la constante gravitacional, la fuerza descendente F sobre el objeto que cae de masa m se da por medio de la diferencia $mg - kv$. Pero, por la segunda ley de movimiento de Newton, se sabe que

$$F = ma = m(dv/dt) \qquad a = \text{aceleración.}$$

lo cual lleva a la siguiente ecuación diferencial.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

EJEMPLO 5 Un objeto que cae con resistencia al aire

Un objeto de masa m cae desde un helicóptero. Encontrar su velocidad en función del tiempo t, si se supone que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto.

Solución La velocidad v satisface la ecuación

$$\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g. \qquad \begin{array}{l} g = \text{constante gravitacional.} \\ k = \text{constante de proporcionalidad.} \end{array}$$

Si $b = k/m$, se pueden *separar variables* para obtener

$$dv = (g - bv)\,dt$$

$$\int \frac{dv}{g - bv} = \int dt$$

$$-\frac{1}{b}\ln|g - bv| = t + C_1$$

$$\ln|g - bv| = -bt - bC_1$$

$$g - bv = Ce^{-bt}. \qquad C = e^{-bC_1}$$

Dado que el objeto cayó, $v = 0$ cuando $t = 0$; así $g = C$, y se deduce que

$$-bv = -g + ge^{-bt} \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{g - ge^{-bt}}{b} = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}).$$

NOTA Observar en el ejemplo 5 que la velocidad se aproxima al límite mg/k como resultado de la resistencia al aire. Para problemas de objetos que caen y en los que la resistencia al aire es despreciada, la velocidad se incrementa sin límite.

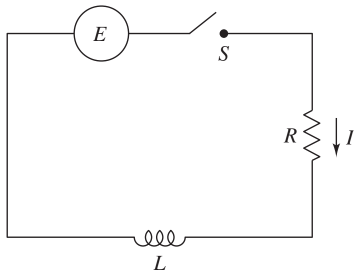


Figura 6.22

Un circuito eléctrico simple consta de una corriente eléctrica I (en amperes), una resistencia R (en ohms), una inductancia L (en henrys), y una fuerza electromotriz E constante (en volts), como se muestra en la figura 6.22. Con base en la segunda ley de Kirchhoff, si el interruptor S se cierra cuando $t = 0$, la fuerza electromotriz aplicada (voltaje) es igual a la suma de la caída de voltaje en el resto del circuito. De hecho, esto significa que la corriente I satisface la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

EJEMPLO 6 Un problema de circuitos eléctricos

Encontrar la corriente I como función del tiempo t (en segundos), dado que I satisface la ecuación diferencial

$$L(dI/dt) + RI = \operatorname{sen} 2t,$$

donde R y L son constantes diferentes de cero.

Solución En forma normal, la ecuación lineal dada es

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{1}{L}\operatorname{sen} 2t.$$

Sea $P(t) = R/L$, tal que $e^{\int P(t)\,dt} = e^{(R/L)t}$, y, por el teorema 6.3,

$$\begin{aligned} Ie^{(R/L)t} &= \frac{1}{L}\int e^{(R/L)t}\operatorname{sen} 2t\,dt \\ &= \frac{1}{4L^2 + R^2}e^{(R/L)t}(R\operatorname{sen} 2t - 2L\cos 2t) + C. \end{aligned}$$

Así, la solución general es

$$I = e^{-(R/L)t}\left[\frac{1}{4L^2 + R^2}e^{(R/L)t}(R\operatorname{sen} 2t - 2L\cos 2t) + C\right]$$

$$I = \frac{1}{4L^2 + R^2}(R\operatorname{sen} 2t - 2L\cos 2t) + Ce^{-(R/L)t}.$$

TECNOLOGÍA La integral del ejemplo 6 se encontró mediante un software de álgebra simbólica. Si se tiene acceso a *Maple*, *Mathematica*, o *TI-89*, tratar de usarlo para integrar

$$\frac{1}{L}\int e^{(R/L)t}\operatorname{sen} 2t\,dt.$$

En el capítulo 8 se estudiará cómo integrar funciones de ese tipo mediante integración por partes.

Ecuación de Bernoulli

La también conocida ecuación no lineal que reduce a una lineal con una apropiada sustitución, es la **ecuación de Bernoulli**, llamada así por James Bernoulli (1654-1705).

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \qquad \text{Ecuación de Bernoulli.}$$

Esta ecuación es lineal si $n = 0$, y tiene variables separadas si $n = 1$. Así, en el siguiente desarrollo se supone que $n \neq 0$ y $n \neq 1$. Al multiplicar por y^{-n} y $(1 - n)$ se obtiene

$$\begin{aligned} y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} &= Q(x) \\ (1-n)y^{-n}y' + (1-n)P(x)y^{1-n} &= (1-n)Q(x) \\ \frac{d}{dx}[y^{1-n}] + (1-n)P(x)y^{1-n} &= (1-n)Q(x) \end{aligned}$$

la cual es una ecuación lineal en la variable y^{1-n}. Considerar que $z = y^{1-n}$ produce la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Por último, mediante el teorema 6.3, la *solución general de la ecuación de Bernoulli* es

$$y^{1-n}e^{\int(1-n)P(x)\,dx} = \int (1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)\,dx}\,dx + C.$$

EJEMPLO 7 Solución de una ecuación de Bernoulli

Encontrar la solución de $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$.

Solución Para esta ecuación de Bernoulli, sea $n = -3$, y usar la sustitución

$$\begin{aligned} z &= y^4 && \text{Sea } z = y^{1-n} = y^{1-(-3)}. \\ z' &= 4y^3y'. && \text{Derivar.} \end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación original por $4y^3$ se produce

$$\begin{aligned} y' + xy &= xe^{-x^2}y^{-3} && \text{Escribir la ecuación original.} \\ 4y^3y' + 4xy^4 &= 4xe^{-x^2} && \text{Multiplicar cada miembro por } 4y^3. \\ z' + 4xz &= 4xe^{-x^2}. && \text{Ecuación lineal: } z' + P(x)z = Q(x). \end{aligned}$$

Esta ecuación es lineal en z. Mediante $P(x) = 4x$ se produce

$$\begin{aligned} \int P(x)\,dx &= \int 4x\,dx \\ &= 2x^2 \end{aligned}$$

lo cual implica que e^{2x^2} es un factor integrante. Al multiplicar la ecuación lineal por este factor se produce

$$\begin{aligned} z' + 4xz &= 4xe^{-x^2} && \text{Ecuación lineal.} \\ z'e^{2x^2} + 4xze^{2x^2} &= 4xe^{x^2} && \text{Multiplicar por el factor integrante.} \\ \frac{d}{dx}[ze^{2x^2}] &= 4xe^{x^2} && \text{Escribir el miembro izquierdo como una derivada.} \\ ze^{2x^2} &= \int 4xe^{x^2}\,dx && \text{Integrar cada miembro.} \\ ze^{2x^2} &= 2e^{x^2} + C && \\ z &= 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}. && \text{Dividir cada miembro entre } e^{2x^2}. \end{aligned}$$

Por último, al sustituir $z = y^4$, la solución general es

$$y^4 = 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}. \qquad \text{Solución general.}$$

Hasta aquí se han estudiado varios tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden. De éstas, el caso de las variables separables es usualmente el más simple, y la solución por factor integrante es ordinariamente usada sólo como último recurso.

Resumen de ecuaciones diferenciales de primer orden

Método	*Forma de ecuación*
1. Variables separables:	$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$
2. Homogéneas:	$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, donde M y N son homogéneas de n-ésimo grado
3. Lineal:	$y' + P(x)y = Q(x)$
4. Ecuación de Bernoulli:	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$

6.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, determinar si la ecuación diferencial es lineal. Explicar las razones.

1. $x^3y' + xy = e^x + 1$

2. $2xy - y' \ln x = y$

3. $y' - y \operatorname{sen} x = xy^2$

4. $\dfrac{2 - y'}{y} = 5x$

En los ejercicios 5 a 14, resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden.

5. $\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = 6x + 2$

6. $\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{2}{x}\right)y = 3x - 5$

7. $y' - y = 16$

8. $y' + 2xy = 10x$

9. $(y + 1)\cos x\,dx - dy = 0$

10. $(y - 1)\operatorname{sen} x\,dx - dy = 0$

11. $(x - 1)y' + y = x^2 - 1$

12. $y' + 3y = e^{3x}$

13. $y' - 3x^2y = e^{x^3}$

14. $y' + y \tan x = \sec x$

Campos de pendientes **En los ejercicios 15 y 16, *a*) representar manualmente una solución gráfica aproximada de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial sobre el campo de pendientes, *b*) encontrar la solución particular que satisface la condición inicial y *c*) usar una herramienta de graficación para representar la solución particular. Comparar la gráfica con la realizada manualmente en el inciso *a*).**

15. $\dfrac{dy}{dx} = e^x - y$

$(0, 1)$

16. $y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = \operatorname{sen} x^2$

$(\sqrt{\pi}, 0)$

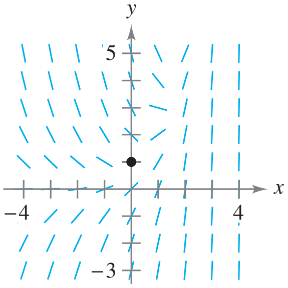


Figura para 15

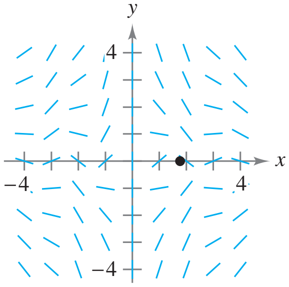


Figura para 16

En los ejercicios 17 a 24, encontrar la solución particular de la ecuación diferencial que satisface las condiciones de frontera iniciales especificadas.

	Ecuación diferencial	*Condición límite o de frontera*
17.	$y'\cos^2 x + y - 1 = 0$	$y(0) = 5$
18.	$x^3y' + 2y = e^{1/x^2}$	$y(1) = e$
19.	$y' + y \tan x = \sec x + \cos x$	$y(0) = 1$
20.	$y' + y \sec x = \sec x$	$y(0) = 4$
21.	$y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = 0$	$y(2) = 2$
22.	$y' + (2x - 1)y = 0$	$y(1) = 2$
23.	$x\,dy = (x + y + 2)\,dx$	$y(1) = 10$
24.	$2x\,y' - y = x^3 - x$	$y(4) = 2$

25. ***Crecimiento de población*** Cuando se predice el crecimiento de una población, los demógrafos deben considerar tasa de natalidad y mortalidad (mortandad) así como el cambio neto causado por la diferencia entre las tasas de inmigración y emigración. Sea P la población en un tiempo t y N el incremento neto por unidad de tiempo resultante de la diferencia entre inmigración y emigración. Así, la tasa de crecimiento de la población está dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP + N, \qquad N \text{ es constante.}$$

Resolver esta ecuación diferencial para encontrar P como función del tiempo si en $t = 0$ el tamaño de la población es P_0.

26. ***Aumento de inversión*** Una gran corporación inicia en $t = 0$ para invertir parte de sus ingresos continuamente a una razón de P dólares por año, en un fondo para una futura expansión corporativa. Suponer que el fondo gana r por ciento de interés compuesto continuo por año. Así, la tasa de crecimiento de la cantidad A en el fondo está dada por

$$\frac{dA}{dt} = rA + P$$

donde $A = 0$ cuando $t = 0$. Resolver esta ecuación diferencial para A como función de t.

Aumento de inversión **En los ejercicios 27 y 28, use el resultado del ejercicio 26.**

27. Encontrar A para los siguientes casos.

a) $P = \$275\,000$, $r = 8\%$ y $t = 10$ años

b) $P = \$550\,000$, $r = 5.9\%$ y $t = 25$ años

28. Encontrar t si la corporación necesita \$1 000 000 y se pueden invertir \$125 000 por año en un fondo que gana 8% de interés compuesto en forma continua.

29. ***Alimentación intravenosa*** La glucosa se agrega por vía intravenosa al flujo sanguíneo a una tasa de q unidades por minuto, y el cuerpo elimina glucosa del flujo sanguíneo a una tasa proporcional a la cantidad presente. Suponer que $Q(t)$ es la cantidad de glucosa en el flujo sanguíneo en un tiempo t.

a) Determinar la ecuación diferencial que describe la razón de cambio de glucosa en el flujo sanguíneo con respecto al tiempo.

b) Resolver la ecuación diferencial del inciso *a*) y considerar $Q = Q_0$ cuando $t = 0$.

c) Encontrar el límite de $Q(t)$ cuando $t \to \infty$.

30. ***Curva de aprendizaje*** El gerente de una empresa ha encontrado que el número máximo de unidades que un trabajador puede producir en un día es 75. La tasa de incremento en el número N de unidades producido con respecto al tiempo t en días por un nuevo empleado es proporcional a $75 - N$.

a) Determinar la ecuación diferencial que describe la razón de cambio con respecto al tiempo.

b) Resolver la ecuación diferencial del inciso *a*).

c) Encontrar la solución particular para un nuevo empleado que produce 20 unidades en el primer día y 35 unidades en el día 20.

Mezcla **En los ejercicios 31 a 35, considerar un tanque que en el tiempo $t = 0$ contiene v_0 galones de una disolución de la cual, por peso, q_0 libras es disolución concentrada. Otra disolución que contiene q_1 libras del concentrado por galón fluye dentro del tanque a una tasa de r_1 galones por minuto. La disolución en el tanque se conserva bien mezclada y está concentrada a una tasa de r_2 galones por minuto.**

31. Si Q es la cantidad de concentrado en la disolución en cualquier tiempo t, demostrar que

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{r_2 Q}{v_0 + (r_1 - r_2)t} = q_1 r_1.$$

32. Si Q es la cantidad de concentración en la disolución en cualquier tiempo t, escribir la ecuación diferencial para la razón de cambio de Q respecto de t si $r_1 = r_2 = r$.

33. Un tanque de 200 galones se llena con una disolución que contiene 25 libras de concentración. Al iniciar en el tiempo $t = 0$, se añade agua destilada en el tanque a una tasa de 10 galones por minuto, y la disolución mezclada se elimina con la misma tasa.

a) Encontrar la cantidad de concentración Q en la disolución como función de t.

b) Encontrar el tiempo en el cual la cantidad de concentración en el tanque alcanza 15 libras.

c) Encontrar la cantidad de concentración en la disolución cuando $t \to \infty$.

34. Repetir el ejercicio 33, si se supone que la disolución entera del tanque contiene 0.04 libras de concentrado por galón.

35. Un tanque de 200 galones está lleno a la mitad de agua destilada. En el tiempo $t = 0$, una solución que contiene 0.5 libras de concentrado por galón entra al tanque a razón de 5 galones por minuto, y la mezcla bien agitada es eliminada a una tasa de 3 galones por minuto.

a) ¿En qué tiempo se llenará el tanque?

b) En el tiempo en que el tanque se llena, ¿cuántas libras de concentrado contendrá?

c) Repetir los incisos *a*) y *b*), suponiendo que la solución entrante al tanque contiene una libra de concentrado por galón.

Para discusión

36. Suponiendo que la expresión $u(x)$ es un factor integrante para $y' + P(x)y = Q(x)$, ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a $u'(x)$? Verificar su respuesta.

a) $P(x)\,u(x)$

b) $P'(x)\,u(x)$

c) $Q(x)\,u(x)$

d) $Q'(x)\,u(x)$

Objeto que cae **En los ejercicios 37 y 38, considerar un objeto de ocho libras que cae desde una altura de 5 000 pies, donde la resistencia al aire es proporcional a la velocidad.**

37. Escribir la velocidad en función del tiempo si su velocidad después de 5 segundos es, aproximadamente, 101 pies por segundo. ¿Cuál es el valor limitante de la función velocidad?

38. Usar el resultado del ejercicio 37 para escribir la posición del objeto como función del tiempo. Aproximar la velocidad del objeto cuando éste alcance el suelo.

Circuitos eléctricos **En los ejercicios 39 y 40, usar la ecuación diferencial para circuitos eléctricos dada por**

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

En esta ecuación, I es la corriente, R es la resistencia, L es la inductancia y E es la fuerza electromotriz (voltaje).

39. Resolver la ecuación diferencial dado un voltaje constante E_0.

40. Usar el resultado del ejercicio 39 para encontrar la ecuación para la corriente si $I(0) = 0$, $E_0 = 120$ volts, $R = 600$ ohms y $L = 4$ henrys. ¿Cuándo alcanzará la corriente 90% de su valor limitante?

Desarrollo de conceptos

41. Se da la forma normal de una ecuación diferencial lineal de primer orden. ¿Cuál es su factor integrante?

42. Se da la forma normal de la ecuación de Bernoulli. Describir cómo ésta se reduce a una ecuación lineal.

En los ejercicios 43 a 46, marcar la ecuación diferencial con su respectiva solución.

Ecuación diferencial	*Solución*
43. $y' - 2x = 0$	*a)* $y = Ce^{x^2}$
44. $y' - 2y = 0$	*b)* $y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$
45. $y' - 2xy = 0$	*c)* $y = x^2 + C$
46. $y' - 2xy = x$	*d)* $y = Ce^{2x}$

En los ejercicios 47-54, resolver la ecuación diferencial de Bernoulli.

47. $y' + 3x^2y = x^2y^3$

48. $y' + xy = xy^{-1}$

49. $y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = xy^2$

50. $y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = x\sqrt{y}$

51. $xy' + y = xy^3$

52. $y' - y = y^3$

53. $y' - y = e^x\sqrt[3]{y}$

54. $yy' - 2y^2 = e^x$

Campo de pendientes **En los ejercicios 55 a 58, *a*) usar una herramienta de graficación para representar el campo de pendientes para la ecuación diferencial, *b*) encontrar la solución particular de la ecuación diferencial que pasa a través de los puntos dados y *c*) usar una herramienta de graficación para representar la solución particular sobre el campo de pendientes.**

Ecuación diferencial	*Puntos*
55. $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2$	$(-2, 4),\ (2, 8)$
56. $\frac{dy}{dx} + 4x^3y = x^3$	$\left(0, \frac{7}{2}\right),\ \left(0, -\frac{1}{2}\right)$
57. $\frac{dy}{dx} + (\cot x)y = 2$	$(1, 1),\ (3, -1)$
58. $\frac{dy}{dx} + 2xy = xy^2$	$(0, 3),\ (0, 1)$

En los ejercicios 59 a 70, resolver la ecuación diferencial por el método apropiado.

59. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x+y}}{e^{x-y}}$

60. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-3}{y(y+4)}$

61. $y\cos x - \cos x + \frac{dy}{dx} = 0$

62. $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$

63. $(3y^2 + 4xy)\,dx + (2xy + x^2)\,dy = 0$

64. $(x + y)\,dx - x\,dy = 0$

65. $(2y - e^x)\,dx + x\,dy = 0$

66. $(y^2 + xy)\,dx - x^2\,dy = 0$

67. $(x^2y^4 - 1)\,dx + x^3y^3\,dy = 0$

68. $y\,dx + (3x + 4y)\,dy = 0$

69. $3(y - 4x^2)\,dx + x\,dy = 0$

70. $x\,dx + (y + e^y)(x^2 + 1)\,dy = 0$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 71 y 72, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué, o dar un contraejemplo.**

71. $y' + x\sqrt{y} = x^2$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

72. $y' + xy = e^xy$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

PROYECTO DE TRABAJO

Pérdida de peso

El peso de una persona depende tanto del número de calorías consumidas como de la energía utilizada. Además, la cantidad de energía usada depende del peso de una persona; la cantidad media de energía usada por una persona es 17.5 calorías por libra por día. Así, entre mayor peso pierde una persona, es menor la energía que una persona usa (se supone que la persona mantiene un nivel de actividad constante). Para calcular el peso perdido se puede usar la siguiente ecuación

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) = \frac{C}{3\,500} - \frac{17.5}{3\,500}w$$

donde w es el peso de la persona (en libras), t es el tiempo en días, y C es el consumo diario de calorías, que es constante.

a) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

b) Considerar una persona que pesa 180 libras e inicia una dieta de 2 500 calorías por día. ¿Cuánto tiempo tardará la persona en perder 10 libras? ¿Cuánto tiempo le tomará a la persona en perder 35 libras?

c) Usar una herramienta de graficación para presentar la solución. ¿Cuál es el peso límite de la persona?

d) Repetir los incisos *b*) y *c*) para una persona que pesa 200 libras cuando inició la dieta.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para una mejor información sobre el modelo de pérdida de peso, ver el artículo "Un modelo lineal de dieta", por Arthur C. Segal en *The College Mathematics Journal*.

6 Ejercicios de repaso

1. Determinar si la función $y = x^3$ es una solución de la ecuación diferencial $2xy' + 4y = 10x^3$.
2. Determinar si la función $y = 2 \operatorname{sen} 2x$ es una solución de la ecuación diferencial $y''' - 8y = 0$.

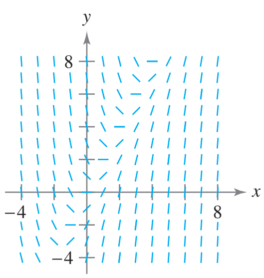
En los ejercicios 3 a 10, usar integración para encontrar una solución general de la ecuación diferencial.

3. $\dfrac{dy}{dx} = 4x^2 + 7$
4. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^3 - 8x$
5. $\dfrac{dy}{dx} = \cos 2x$
6. $\dfrac{dy}{dx} = 2 \operatorname{sen} x$
7. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{x - 5}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{x - 7}$
9. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2-x}$
10. $\dfrac{dy}{dx} = 3e^{-x/3}$

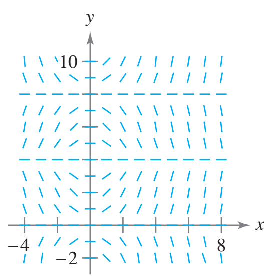
Campos de pendientes **En los ejercicios 11 y 12, una ecuación diferencial y su campo de pendientes son dados. Determinar las pendientes (si es posible) en el campo de pendientes en los puntos dados en la tabla.**

x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx						

11. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - y$



12. $\dfrac{dy}{dx} = x \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi y}{4}\right)$



Campos de pendientes **En los ejercicios 13 a 18, *a*) trazar la gráfica del campo de pendientes dado por la ecuación diferencial y *b*) usar el campo de pendientes para graficar la solución que pasa a través del punto dado. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.**

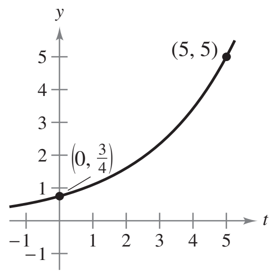
	Ecuación diferencial	*Punto*
13.	$y' = 3 - x$	$(2, 1)$
14.	$y' = 2x^2 - x$	$(0, 2)$
15.	$y' = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x$	$(0, 3)$
16.	$y' = y + 4x$	$(-1, 1)$
17.	$y' = \dfrac{xy}{x^2 + 4}$	$(0, 1)$
18.	$y' = \dfrac{y}{x^2 + 1}$	$(0, -2)$

En los ejercicios 19 a 24, resolver la ecuación diferencial.

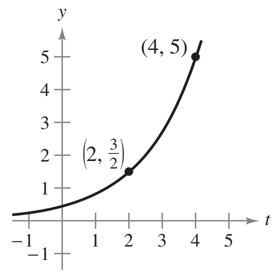
19. $\dfrac{dy}{dx} = 8 - x$
20. $\dfrac{dy}{dx} = y + 8$
21. $\dfrac{dy}{dx} = (3 + y)^2$
22. $\dfrac{dy}{dx} = 10\sqrt{y}$
23. $(2 + x)y' - xy = 0$
24. $xy' - (x + 1)y = 0$

En los ejercicios 25 a 28, encontrar la función exponencial $y = Ce^{kt}$ que pasa a través de los dos puntos.

25.



26.



27. $(0, 5), \left(5, \dfrac{1}{6}\right)$
28. $(1, 9), (6, 2)$

29. ***Presión del aire*** Bajo condiciones ideales, la presión del aire decrece continuamente en relación con la altura sobre el nivel del mar a una tasa proporcional a la presión a esa altura. El barómetro marca 30 pulgadas al nivel del mar y 15 pulgadas a 18 000 pies. Encontrar la presión barométrica a 35 000 pies.

30. ***Desintegración radiactiva*** El radio radiactivo tiene una vida media de aproximadamente 1 599 años. La cantidad inicial es 15 gramos. ¿Qué cantidad permanece después de 750 años?

31. ***Ventas*** Las ventas S (en miles de unidades) de un nuevo producto después de que ha estado en el mercado por t años está dada por

$$S = Ce^{k/t}.$$

a) Encontrar S como una función de t si se han vendido 5 000 unidades después de 1 año y el punto de saturación del mercado es 30 000 unidades (es decir, $\lim_{t\to\infty} S = 30$).

b) ¿Cuántas unidades se han vendido después de 5 años?

c) Usar una herramienta de graficación para presentar esta función de ventas.

32. ***Ventas*** Las ventas S (en miles de unidades) de un nuevo producto después de que ha estado en el mercado durante t años están dadas por

$$S = 25(1 - e^{kt})$$

a) Encontrar S como función de t si se han vendido 4 000 unidades después de 1 año.

b) ¿Cuántas unidades saturarán este mercado?

c) ¿Cuántas unidades se habrán vendido después de 5 años?

d) Usar una herramienta de graficación para presentar esta función de ventas.

33. ***Crecimiento de población*** Una población crece continuamente a una tasa de 1.85%. ¿Cuánto tiempo tardará la población en duplicarse?

34. ***Ahorro de gasolina*** Un automóvil recorre 28 millas por galón de gasolina a velocidades superiores a 50 millas por hora. A más de 50 millas por hora, el número de millas por galones cae a una tasa de 12% por cada 10 millas por hora.

a) s es la velocidad y y es el número de millas por galón. Encontrar y como función de s mediante la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{ds} = -0.012y, \quad s > 50.$$

b) Usar la función del apartado *a*) para completar la tabla.

Velocidad	50	55	60	65	70
Millas por galón					

En los ejercicios 35 a 40, resolver la ecuación diferencial.

35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^5 + 7}{x}$ **36.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

37. $y' - 16xy = 0$ **38.** $y' - e^y \operatorname{sen} x = 0$

39. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ **40.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3(x + y)}{x}$

41. Verificar que la solución general $y = C_1x + C_2x^3$ satisface la ecuación diferencial $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$. Entonces, encontrar la solución particular que satisface la condición inicial $y = 0$ y $y' = 4$ cuando $x = 2$.

42. ***Movimiento vertical*** Un objeto que cae se encuentra con la resistencia al aire que es proporcional a su velocidad. La aceleración debida a la gravedad es -9.8 metros por segundo al cuadrado. El cambio neto en la velocidad es $dv/dt = kv - 9.8$.

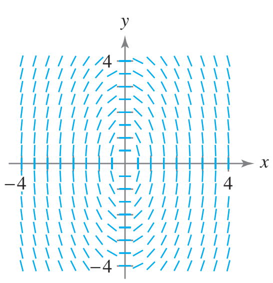
a) Encontrar la velocidad del objeto como función del tiempo si la velocidad inicial es v_0.

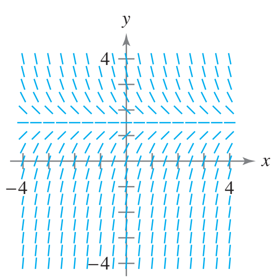
b) Usar el resultado del apartado *a*) para encontrar el límite de la velocidad cuando t se aproxima al infinito.

c) Integrar la función velocidad que se encontró en el inciso *a*) para encontrar la posición s.

Campos de pendientes **En los ejercicios 43 y 44, trazar la gráfica de algunas funciones de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes y encontrar la solución general de forma analítica.**

43. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{y}$ **44.** $\dfrac{dy}{dx} = 3 - 2y$





En los ejercicios 45 y 46, usar la ecuación logística para calcular el crecimiento de una población. Usar la ecuación para *a*) encontrar el valor de *k*, *b*) encontrar la capacidad límite o de soporte, *c*) calcular la población inicial, *d*) determinar cuándo la población alcanzará 50% de su capacidad límite o de soporte y *e*) escribir la ecuación diferencial logística que tiene la solución *P*(*t*).

45. $P(t) = \dfrac{5\,250}{1 + 34e^{-0.55t}}$ **46.** $P(t) = \dfrac{4\,800}{1 + 14e^{-0.15t}}$

En los ejercicios 47 y 48, encontrar la ecuación logística que satisfaga la condición inicial.

	Ecuación diferencial logística	*Condición inicial*
47.	$\dfrac{dy}{dt} = y\left(1 - \dfrac{y}{80}\right)$	(0, 8)
48.	$\dfrac{dy}{dt} = 1.76y\left(1 - \dfrac{y}{8}\right)$	(0, 3)

49. ***Medio ambiente*** Un departamento de conservación libera 1 200 truchas de río en un lago. Se estima que la capacidad límite o de soporte del lago para las especies es 20 400. Después del primer año, existen 2 000 truchas en el lago.

a) Escribir la ecuación logística que calcula el número de truchas en el lago.

b) Encontrar el número de truchas en el lago después de 8 años.

c) ¿Cuándo el número de truchas en el lago será de 10 000?

50. ***Medio ambiente*** Escribir la ecuación diferencial logística que calcula la tasa de crecimiento de la población de las truchas en el ejercicio 49. Entonces repetir el inciso *b*) mediante el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 1$. Comparar la aproximación con la respuesta exacta.

En los ejercicios 51 a 60, resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden.

51. $y^1 - y = 10$ **52.** $e^x y' + 4e^x y = 1$

53. $4y' = e^{x/4} + y$ **54.** $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{5y}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$

55. $(x - 2)y' + y = 1$

56. $(x + 3)y' + 2y = 2(x + 3)^2$

57. $(3y + \operatorname{sen} 2x)\, dx - dy = 0$

58. $dy = (y \tan x + 2e^x)\, dx$

59. $y' + 5y = e^{5x}$

60. $xy' - ay = bx^4$

En los ejercicios 61 a 64, resolver la ecuación diferencial de Bernoulli.

61. $y' + y = xy^2$ $\left[\textit{Sugerencia: } \int xe^{-x}\, dx = (-x - 1)e^{-x}\right]$

62. $y' + 2xy = xy^2$

63. $y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = \dfrac{y^3}{x^2}$

64. $xy' + y = xy^2$

En los ejercicios 65 a 68, escribir un ejemplo de la ecuación diferencial dada. A continuación resolver la ecuación.

65. Ecuación diferencial homogénea.

66. Ecuación diferencial logística.

67. Ecuación diferencial lineal de primer orden.

68. Ecuación diferencial de Bernoulli.

SP Solución de problemas

1. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+\varepsilon}$$

donde k y ε son constantes positivas, se denomina como la **ecuación del día final**.

a) Resolver la ecuación del día final

$$\frac{dy}{dt} = y^{1.01}$$

dado que $y(0) = 1$. Encontrar el tiempo T en el cual

$$\lim_{t\to T^-} y(t) = \infty.$$

b) Resolver la ecuación del día final

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+\varepsilon}$$

dado que $y(0) = y_0$. Explicar por qué esta ecuación se denomina ecuación del día final.

2. Un termómetro se lleva desde una habitación a 72° F hacia el exterior, donde la temperatura es 20° F. La lectura cae a 48° F después de 1 minuto. Determinar la lectura del termómetro después de 5 minutos.

3. Considerar que S representa las ventas de un nuevo producto (en miles de unidades), L es el nivel máximo de ventas (en miles de unidades) y t el tiempo (en meses). La razón de cambio de S con respecto a t varía al mismo tiempo que el producto S y $L - S$.

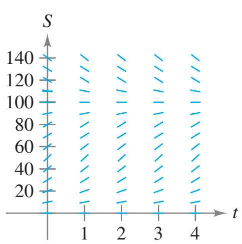
a) Escribir la ecuación diferencial para el modelo de ventas si $L = 100$, $S = 10$ cuando $t = 0$ y $S = 20$ cuando $t = 1$. Verificar que

$$S = \frac{L}{1 + Ce^{-kt}}.$$

b) ¿En qué tiempo se incrementa más rápidamente el crecimiento en ventas?

c) Usar una herramienta de graficación para representar la función de ventas.

d) Representar gráficamente la solución del inciso *a*) sobre el campo de pendiente mostrado en la figura de abajo.



e) Si el nivel máximo de ventas estimado es correcto, usar el campo de pendientes para describir la forma de las curvas solución para ventas si, en algún periodo, las ventas exceden a L.

4. Otro modelo que se puede usar para representar el crecimiento de la población es la **ecuación de Gompertz**, la cual es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = k \ln\left(\frac{L}{y}\right)y$$

donde k es una constante y L es la capacidad límite o de soporte.

a) Resolver la ecuación diferencial.

b) Utilizar una herramienta de graficación para presentar el campo de pendientes para la ecuación diferencial cuando $k = 0.05$ y $L = 1\,000$.

c) Describir el comportamiento de la gráfica cuando $t \to \infty$.

d) Trazar la gráfica de la ecuación diferencial que se encontró en el apartado *a*) para $L = 5\,000$, $y_0 = 500$ y $k = 0.02$. Determinar la concavidad de la gráfica y cómo se compara con la solución general de la ecuación diferencial logística.

5. Demostrar que la ecuación logística $y = L/(1 + be^{-kt})$ se puede escribir como

$$y = \frac{1}{2}L\left[1 + \tanh\left(\frac{1}{2}k\left(t - \frac{\ln b}{k}\right)\right)\right].$$

¿Qué se puede concluir acerca de la gráfica de la ecuación logística?

6. Aunque es verdad para algunas funciones f y g, un error común en el cálculo es creer que la regla del producto en derivadas es $(fg)' = f'g'$.

a) Dado $g(x) = x$, encontrar f tal que $(fg)' = f'g'$.

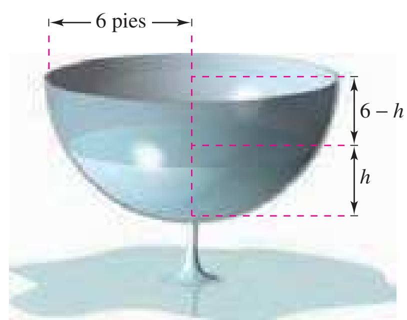
b) Dada una función arbitraria g, encontrar una función f tal que $(fg)' = f'g'$.

c) Describir qué pasa si $g(x) = e^x$.

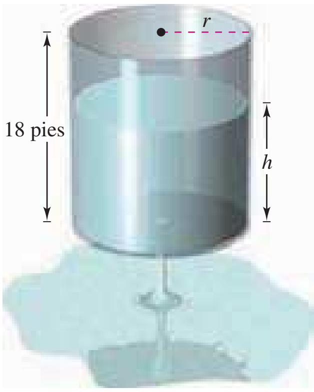
7. **La ley de Torricelli** establece que el agua fluirá desde una abertura en la parte inferior del tanque con la misma velocidad que alcanzaría al caer desde la superficie del agua a la abertura. Una de las formas de la ecuación de Torricelli es

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{2gh}$$

donde h es la altura del agua en el tanque, k es el área de la abertura de la parte inferior del tanque, $A(h)$ es el área de la sección transversal a la altura h, y g es la aceleración debida a la gravedad ($g \approx 32$ pies/s^2). Un tanque de agua hemisférico tiene un radio de 6 pies. Cuando el tanque está lleno, una válvula circular con un radio de 1 pulgada se abre en la parte inferior, como se muestra en la figura. ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?



8. El tanque cilíndrico de agua mostrado en la figura tiene una altura de 18 pies. Cuando el tanque está lleno, una válvula circular se abre en la parte inferior del tanque. Después de 30 minutos, la profundidad del agua es de 12 pies.



a) ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?
b) ¿Cuál es la profundidad del agua en el tanque después de 1 hora?

9. Suponer que el tanque del ejercicio 8 tiene una altura de 20 pies, un radio de 8 pies, y la válvula circular tiene un radio de 2 pulgadas. El tanque está completamente lleno cuando la válvula está abierta. ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?

10. En áreas montañosas, la recepción de la radio puede ser débil. Considerar una situación donde una emisora de FM se localiza en el punto (–1, 1) detrás de un monte representado por la gráfica de

$$y = x - x^2$$

y el receptor de radio está en el lado opuesto del monte. (Suponer que el eje *x* representa el nivel de referencia en la base del monte.)

a) ¿Cuál es la posición más cercana de la radio $(x, 0)$ respecto al monte para que no haya interferencias?
b) Escribir la posición de la radio más cercana $(x, 0)$ con x representada como una función de h si la emisora se localiza a $(-1, h)$.
c) Usar una herramienta de graficación para x en el inciso *b*). Determinar la asíntota vertical de la función e interpretar el resultado.

11. La biomasa es una medida de la cantidad de la materia viviente en un ecosistema. Suponer que la biomasa $s(t)$ en un ecosistema dado se incrementa a una tasa aproximada de 3.5 toneladas por año, y decrece, aproximadamente, 1.9% por año. La situación se puede calcular mediante la ecuación diferencial

$$\frac{ds}{dt} = 3.5 - 0.019s.$$

a) Resolver la ecuación diferencial.
b) Usar una herramienta de graficación para presentar el campo de pendientes de la ecuación diferencial. ¿Qué se observa?
c) Explicar qué sucede cuando $t \to \infty$.

En los ejercicios 12 a 14, un investigador médico quiere determinar la concentración *C* (en moles por litro) de un medicamento marcador inyectado en un fluido en movimiento. Resolver este problema al considerar un modelo de dilución de un compartimento simple (ver la figura). Suponer que el fluido está siendo mezclado y que el volumen de éste en el compartimento es constante.

Figura para 12 a 14

12. Si el marcador es inyectado instantáneamente en el tiempo $t = 0$, entonces la concentración del fluido en el compartimento se empieza a diluir según la ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = \left(-\frac{R}{V}\right)C, \quad C = C_0 \text{ cuando } t = 0.$$

a) Resolver la ecuación diferencial para encontrar la concentración *C* como función de *t*.
b) Encontrar el límite de *C* cuando $t \to \infty$.

13. Usar la solución de la ecuación diferencial en el ejercicio 12 para encontrar la concentración *C* como función del tiempo *t* y usar una herramienta de graficación para presentar la función.

a) $V = 2$ litros, $R = 0.5$ litros por minuto y $C_0 = 0.6$ moles por litro.
b) $V = 2$ litros, $R = 1.5$ litros por minuto y $C_0 = 0.6$ moles por litro.

14. En los ejercicios 12 y 13, se supuso que había una inyección simple inicial del medicamento marcador dentro del compartimento. Ahora considerar el caso en el cual el marcador es continuamente inyectado (iniciando en $t = 0$) a una tasa de *Q* moles por minuto. Si considera *Q* despreciable comparada con *R*, usar la ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q}{V} - \left(\frac{R}{V}\right)C, \quad C = 0 \text{ cuando } t = 0.$$

a) Resolver esta ecuación diferencial para encontrar la concentración *C* como función del tiempo *t*.
b) Encontrar el límite de *C* cuando $t \to \infty$.

7 Aplicaciones de la integral

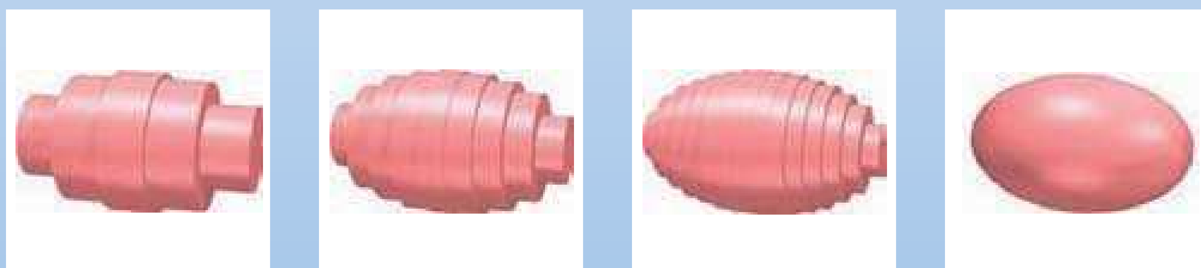
La integral tiene una amplia variedad de aplicaciones. Para cada una de las aplicaciones presentadas en este capítulo, se comenzará con una fórmula conocida, tal como el área de una región rectangular, el volumen de un disco circular o el trabajo realizado por una fuerza constante. Entonces el lector aprenderá cómo el límite de una suma da lugar a nuevas fórmulas que involucran la integral.

En este capítulo se aprenderá:

- Cómo usar una integral definida para encontrar el área de una región acotada por dos curvas. (7.1)
- Cómo encontrar el volumen de un sólido de revolución por el método de los discos y el método de las capas. (7.2 y 7.3)
- Cómo encontrar la longitud de una curva y el área de una superficie de revolución. (7.4)
- Cómo encontrar el trabajo realizado por una fuerza constante y una fuerza variable. (7.5)
- Cómo encontrar centros de masa y centroides. (7.6)
- Cómo encontrar la presión y la fuerza de un fluido. (7.7)

Eddie Hironaka/Getty Images

Un cable eléctrico se cuelga entre dos torres que están a 200 pies de distancia. El cable tiene la forma de catenaria. ¿Cuál es la longitud del cable entre las dos torres? (Ver sección 7.4, ejemplo 5.)



El *método de los discos* es un método que se usa para encontrar el volumen de un sólido. Este método requiere encontrar la suma de los volúmenes de discos representativos para aproximar el volumen del sólido. Cuando se incrementa el número de discos, la aproximación tiende a ser más exacta. En la sección 7.2 se usarán los límites para escribir el volumen exacto del sólido como una integral definida.

7.1 Área de una región entre dos curvas

- **Encontrar el área de una región entre dos curvas usando integración.**
- **Encontrar el área de una región entre curvas que se intersecan usando integración.**
- **Describir la integración como un proceso de acumulación.**

Área de una región entre dos curvas

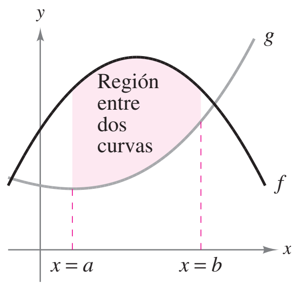
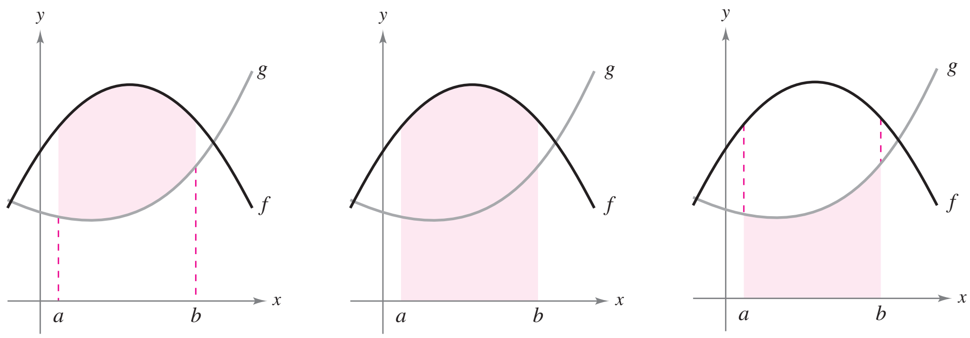


Figura 7.1

A partir de unas modificaciones se puede extender la aplicación de las integrales definidas para el área de una región *bajo* una curva al área de una región *entre* dos curvas. Considerar dos funciones f y g que son continuas en el intervalo $[a, b]$. Si, como en la figura 7.1, las gráficas de f y g están sobre el eje x y la gráfica de g debajo de la gráfica de f, se puede interpretar geométricamente el área de la región entre las gráficas como el área de la región bajo la gráfica de g sustraída del área de la región bajo la gráfica f, como se muestra en la figura 7.2.



Área de la región entre f y g = Área de la región bajo f − Área de la región bajo g

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;-\; \int_a^b g(x)\,dx$$

Figura 7.2

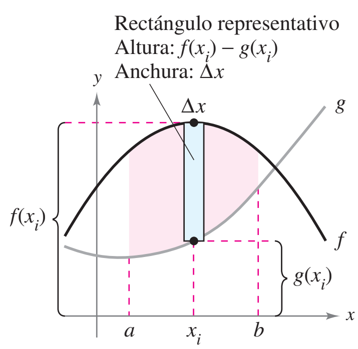


Figura 7.3

Para verificar que el resultado mostrado en la figura 7.2 es razonable, se puede dividir el intervalo $[a, b]$ entre n subintervalos, cada uno de anchura Δx. Entonces, como se muestra en la figura 7.3, se traza un **rectángulo representativo** de anchura Δx y altura $f(x_i) - g(x_i)$, donde x_i es un punto del i-ésimo subintervalo. El área de este rectángulo representativo es

$$\Delta A_i = (\text{altura})(\text{anchura}) = [f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x.$$

Por adición de las áreas de los n rectángulos y tomando el límite cuando $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$, se obtiene

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x.$$

Porque f y g son continuas en $[a, b]$, $f - g$ también es continua en $[a, b]$ y el límite existe. Así que, el área de la región dada es

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.\end{aligned}$$

ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

En la figura 7.1, las gráficas de f y g se muestran sobre el eje x. Esto, sin embargo, no es necesario. El mismo integrando $[f(x) - g(x)]$ puede usarse con tal de que f y g sean continuas y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en el intervalo $[a, b]$. Este resultado se resume en la figura 7.4. Observar en la figura 7.4 que la altura de un rectángulo representativo es $f(x) - g(x)$ con respecto de la posición relativa del eje x.

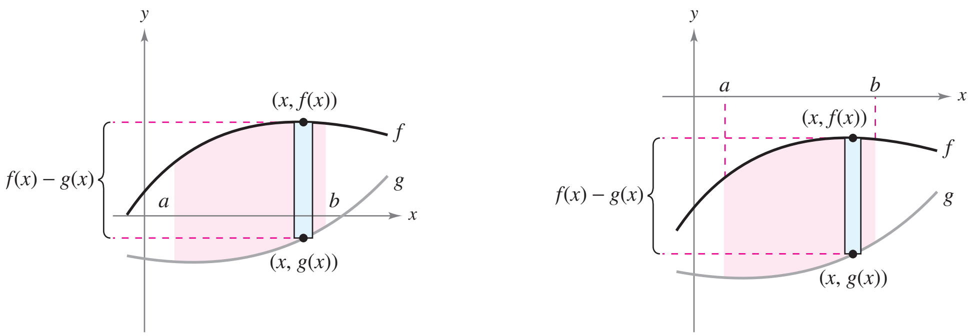


Figura 7.4

Se usan los rectángulos representativos a lo largo de este capítulo en varias aplicaciones de la integral. Un rectángulo vertical (de anchura Δx) implica la integral con respecto a x, mientras que un rectángulo horizontal (de anchura Δy) implica la integral con respecto a y.

EJEMPLO 1 Encontrar el área de una región entre dos curvas

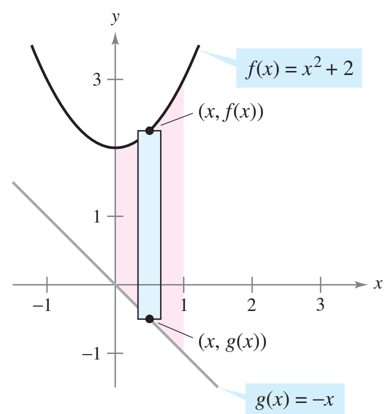
Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución Sean $g(x) = -x$ y $f(x) = x^2 + 2$. Entonces $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[0, 1]$, como se muestra en la figura 7.5. Así, el área del rectángulo representativo es

$$\begin{aligned}\Delta A &= [f(x) - g(x)]\,\Delta x \\ &= [(x^2 + 2) - (-x)]\,\Delta x\end{aligned}$$

y el área de la región es

$$\begin{aligned}A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx &= \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)]\, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 \\ &= \frac{17}{6}.\end{aligned}$$



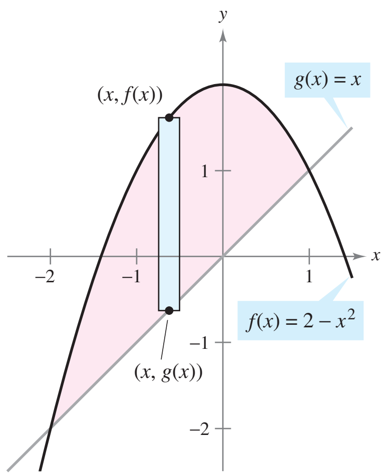
Región comprendida por la gráfica de f, la gráfica de g, $x = 0$ y $x = 1$
Figura 7.5

Área de una región entre curvas que se intersecan

En el ejemplo 1, las gráficas de $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -x$ no se intersecan, y los valores de a y b se dan explícitamente. Un problema más común involucra el área de una región comprendida entre dos gráficas que se *intersecan* donde los valores de a y b deben calcularse.

EJEMPLO 2 Región determinada por dos gráficas que se intersecan

Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x$.



Región comprendida por la gráfica de f y la gráfica de g
Figura 7.6

Solución En la figura 7.6 se observa que las gráficas de f y g tienen dos puntos de intersección. Para encontrar las coordenadas x de estos puntos, se hace $f(x)$ y $g(x)$ iguales y se resuelve para x.

$$2 - x^2 = x \qquad \text{Igualar } f(x) \text{ con } g(x).$$

$$-x^2 - x + 2 = 0 \qquad \text{Escribir en forma general.}$$

$$-(x + 2)(x - 1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x = -2 \text{ o } 1 \qquad \text{Despejar para } x.$$

Así, $a = -2$ y $b = 1$. Porque $g(x) \le f(x)$ para todo x en el intervalo $[-2, 1]$, el rectángulo representativo tiene un área de

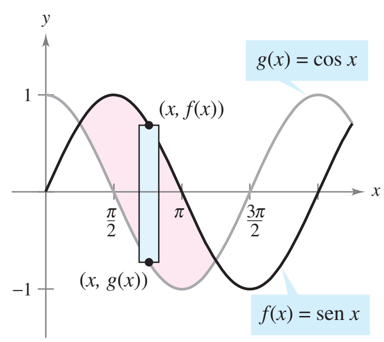
$$\begin{aligned}\Delta A &= [f(x) - g(x)]\,\Delta x \\ &= [(2 - x^2) - x]\,\Delta x\end{aligned}$$

y el área de la región es

$$\begin{aligned}A = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]\,dx &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} \\ &= \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Región determinada por dos gráficas que se intersecan

El seno y coseno de las curvas se intersecan infinitas veces, acotando regiones de áreas iguales, como se muestra en la figura 7.7. Encontrar el área de una de estas regiones.



Una de las regiones acotada por las gráficas de las funciones del seno y coseno
Figura 7.7

Solución

$$\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \text{Igualar } f(x) \text{ a } g(x).$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1 \qquad \text{Dividir cada lado por el coseno de } x.$$

$$\tan x = 1 \qquad \text{Identidad trigonométrica.}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ o } \frac{5\pi}{4}, \quad 0 \le x \le 2\pi \qquad \text{Despejar para } x.$$

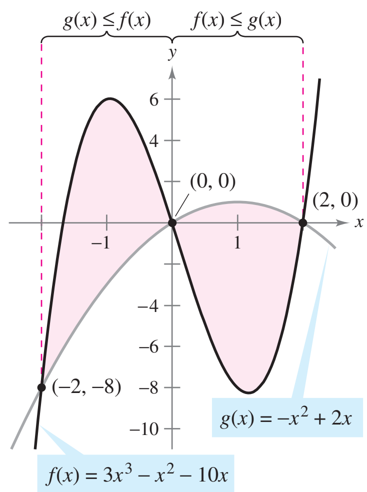
Así, $a = \pi/4$ y $b = 5\pi/4$. Porque $\operatorname{sen} x \ge \cos x$ para todo x en el intervalo $[\pi/4, 5\pi/4]$, el área de la región es

$$\begin{aligned}A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} [\operatorname{sen} x - \cos x]\,dx &= \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Si dos curvas se intersecan en más de dos puntos, entonces para encontrar el área de la región comprendida entre las curvas, se deben encontrar todos los puntos de intersección y verificar en cada uno de los intervalos determinados por esos puntos, cuál de las gráficas está encima de la otra.

EJEMPLO 4 Curvas que se intersecan en más de dos puntos

Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.



Sobre $[-2, 0]$, $g(x) \le f(x)$, y sobre $[0, 2]$, $f(x) \le g(x)$

Figura 7.8

Solución Empezar igualando $f(x)$ y $g(x)$ y resolviendo para x. Así se obtienen las coordenadas de x en cada punto de intersección de las dos gráficas.

$$\begin{aligned} 3x^3 - x^2 - 10x &= -x^2 + 2x && \text{Igualar } f(x) \text{ a } g(x). \\ 3x^3 - 12x &= 0 && \text{Escribir en forma general.} \\ 3x(x-2)(x+2) &= 0 && \text{Factorizar.} \\ x &= -2, 0, 2 && \text{Despejar para } x. \end{aligned}$$

Así, las dos gráficas se cortan cuando $x = -2$, 0 y 2. En la figura 7.8 se observa que $g(x) \le f(x)$ en el intervalo $[-2, 0]$. Sin embargo, las dos gráficas cambian en el origen, y $f(x) \le g(x)$ en el intervalo $[0, 2]$. Así, se necesitan dos integrales, una para el intervalo $[-2, 0]$ y otra para el intervalo $[0, 2]$.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx \\ &= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)\,dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)\,dx \\ &= \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-3x^4}{4} + 6x^2\right]_{0}^{2} \\ &= -(12 - 24) + (-12 + 24) = 24 \end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 4 se observa que se obtiene un resultado incorrecto si se integra de -2 a 2. Tal integral produce

$$\int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-2}^{2} (3x^3 - 12x)\,dx = 0.$$

Si la gráfica de una función de y es una frontera de una región, es a menudo conveniente usar rectángulos representativos *horizontales* y encontrar el área integrando en la variable y. En general, para determinar el área entre dos curvas, se usan

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{[(\text{curva de arriba}) - (\text{curva de abajo})]}_{\text{en la variable } x}\,dx \qquad \text{Rectángulos verticales.}$$

$$A = \int_{y_1}^{y_2} \underbrace{[(\text{curva derecha}) - (\text{curva izquierda})]}_{\text{en la variable } y}\,dy \qquad \text{Rectángulos horizontales.}$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son los puntos adyacentes de intersección de las dos curvas implicadas o puntos sobre las rectas de la frontera especificadas.

EJEMPLO 5 Rectángulos representativos horizontales

Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $x = 3 - y^2$ y $x = y + 1$.

Solución Considerar

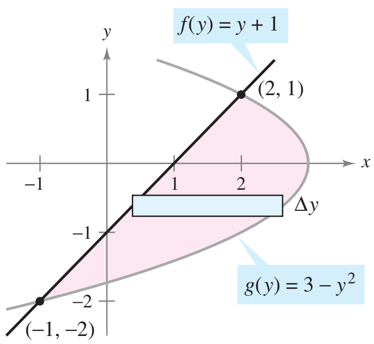
$$g(y) = 3 - y^2 \quad \text{y} \quad f(y) = y + 1.$$

Estas dos curvas se intersecan cuando $y = -2$ y $y = 1$, como se muestra en la figura 7.9. Porque $f(y) \le g(y)$ en este intervalo, se tiene

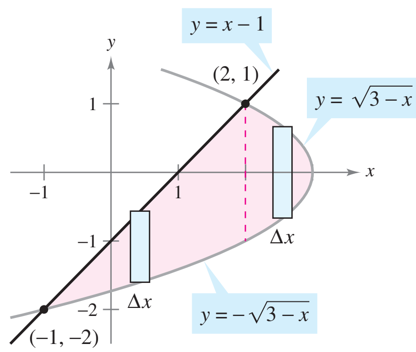
$$\Delta A = [g(y) - f(y)]\,\Delta y = [(3 - y^2) - (y + 1)]\,\Delta y.$$

Así, el área es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} [(3 - y^2) - (y + 1)]\,dy \\ &= \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)\,dy \\ &= \left[\frac{-y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-2}^{1} \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



Rectángulos horizontales (integración con respecto a y)
Figura 7.9



Rectángulos verticales (integración con respecto a x)
Figura 7.10

En el ejemplo 5 se observa que integrando con respecto a y se necesita sólo una integral. Si se integran con respecto a x, se necesitarían dos integrales porque la frontera superior habría cambiado en $x = 2$, como se muestra en la figura 7.10.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} \left[(x - 1) + \sqrt{3 - x}\right] dx + \int_{2}^{3} \left(\sqrt{3 - x} + \sqrt{3 - x}\right) dx \\ &= \int_{-1}^{2} [x - 1 + (3 - x)^{1/2}]\,dx + 2\int_{2}^{3} (3 - x)^{1/2}\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{(3 - x)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^{2} - 2\left[\frac{(3 - x)^{3/2}}{3/2}\right]_{2}^{3} \\ &= \left(2 - 2 - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{16}{3}\right) - 2(0) + 2\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

La integración como un proceso de acumulación

En esta sección, la fórmula de la integral para el área entre dos curvas se desarrolló usando un rectángulo como el *elemento representativo*. Para cada nueva aplicación en las secciones restantes de este capítulo, se construirá un elemento representativo apropiado a partir de las fórmulas previas al cálculo que ya se conocen. Cada fórmula de la integración se obtendrá sumando o acumulando estos elementos representativos.

Fórmula conocida previa al cálculo ⇨ Elemento representativo ⇨ Nueva fórmula de integración

Por ejemplo, en esta sección la fórmula del área se desarrolla como sigue.

$A = (\text{altura})(\text{ancho})$ ⇨ $\Delta A = [f(x) - g(x)]\,\Delta x$ ⇨ $A = \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

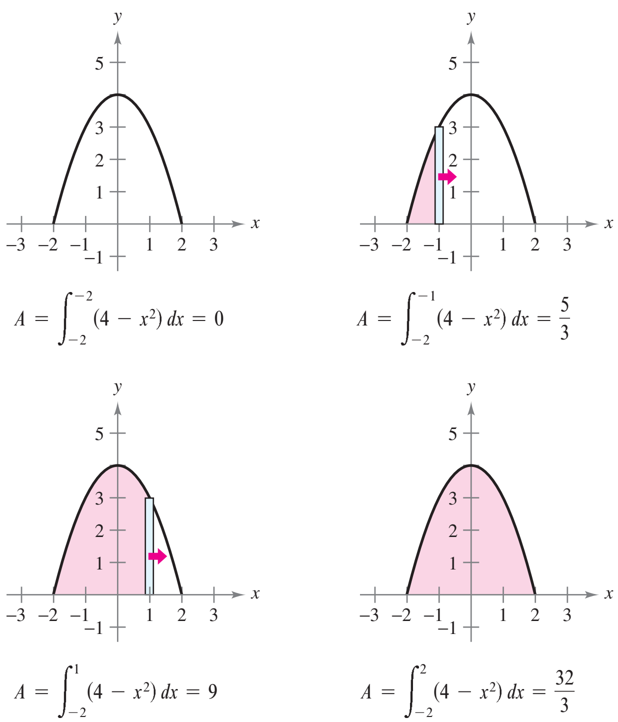
EJEMPLO 6 Descripción de la integración como un proceso de acumulación

Encontrar el área de la región acotada por la gráfica de $y = 4 - x^2$ y el eje x. Describir la integración como un proceso de acumulación.

Solución El área de la región está dada por

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx.$$

Se piensa en la integración como una acumulación de las áreas de los rectángulos formados al ir desplazando los rectángulos representativos de $x = -2$ a $x = 2$, como se muestra en la figura 7.11.



$A = \int_{-2}^{-2} (4 - x^2)\, dx = 0$

$A = \int_{-2}^{-1} (4 - x^2)\, dx = \frac{5}{3}$

$A = \int_{-2}^{0} (4 - x^2)\, dx = \frac{16}{3}$

$A = \int_{-2}^{1} (4 - x^2)\, dx = 9$

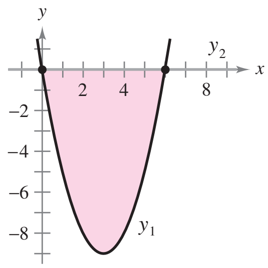
$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \frac{32}{3}$

Figura 7.11

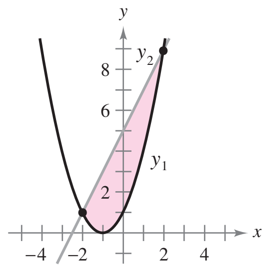
7.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, formular la integral definida que da el área de la región.

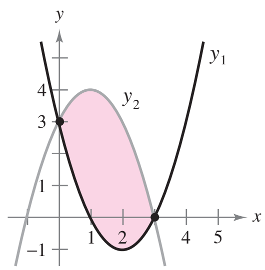
1. $y_1 = x^2 - 6x$
$y_2 = 0$



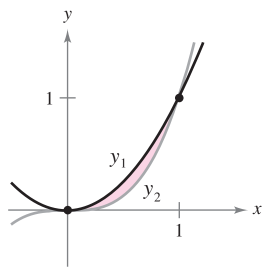
2. $y_1 = x^2 + 2x + 1$
$y_2 = 2x + 5$



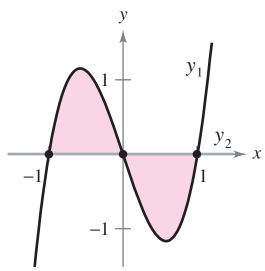
3. $y_1 = x^2 - 4x + 3$
$y_2 = -x^2 + 2x + 3$



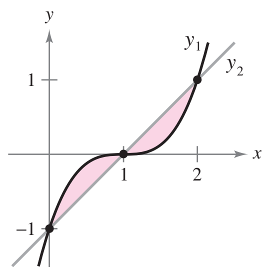
4. $y_1 = x^2$
$y_2 = x^3$



5. $y_1 = 3(x^3 - x)$
$y_2 = 0$



6. $y_1 = (x - 1)^3$
$y_2 = x - 1$



En los ejercicios 7 a 14, el integrando de la integral definida es una diferencia de dos funciones. Dibujar la gráfica de cada función y sombrear la región cuya área está representada por la integral.

7. $\displaystyle\int_0^4 \left[(x+1) - \frac{x}{2}\right] dx$

8. $\displaystyle\int_{-1}^1 [(2 - x^2) - x^2]\, dx$

9. $\displaystyle\int_0^6 \left[4(2^{-x/3}) - \frac{x}{6}\right] dx$

10. $\displaystyle\int_2^3 \left[\left(\frac{x^3}{3} - x\right) - \frac{x}{3}\right] dx$

11. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2 - \sec x)\, dx$

12. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec^2 x - \cos x)\, dx$

13. $\displaystyle\int_{-2}^1 [(2 - y) - y^2]\, dy$

14. $\displaystyle\int_0^4 \left(2\sqrt{y} - y\right) dy$

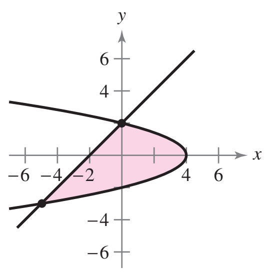
Para pensar **En los ejercicios 15 y 16, determinar qué valor se aproxima mejor al área de la región acotada por las gráficas de *f* y *g*. (Hacer la selección con base en un dibujo de la región sin haber hecho algún cálculo.)**

15. $f(x) = x + 1, \quad g(x) = (x - 1)^2$
a) -2 *b)* 2 *c)* 10 *d)* 4 *e)* 8

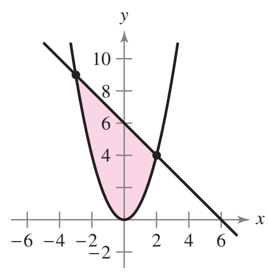
16. $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x, \quad g(x) = 2 - \sqrt{x}$
a) 1 *b)* 6 *c)* -3 *d)* 3 *e)* 4

En los ejercicios 17 y 18, encontrar el área de la región integrando *a)* con respecto a *x* y *b)* con respecto a *y*. *c)* comparar sus resultados. ¿Cuál método es más simple? En general, este método siempre será más sencillo en uno que en otro. ¿Por qué sí o por qué no?

17. $x = 4 - y^2$
$x = y - 2$



18. $y = x^2$
$y = 6 - x$



En los ejercicios 19 a 36, trazar la región acotada por las gráficas de las funciones algebraicas y encontrar el área de la región.

19. $y = x^2 - 1, y = -x + 2, x = 0, x = 1$
20. $y = -x^3 + 3, y = x, x = -1, x = 1$
21. $y = \frac{1}{2}x^3 + 2, \ y = x + 1, \ x = 0, \ x = 2$
22. $y = -\frac{3}{8}x(x - 8), \ y = 10 - \frac{1}{2}x, \ x = 2, \ x = 8$
23. $f(x) = x^2 - 4x, \ \ g(x) = 0$
24. $f(x) = -x^2 + 4x + 1, \ g(x) = x + 1$
25. $f(x) = x^2 + 2x, g(x) = x + 2$
26. $f(x) = -x^2 + \frac{9}{2}x + 1, g(x) = \frac{1}{2}x + 1$
27. $y = x, \ \ y = 2 - x, \ \ y = 0$
28. $y = 1/x^2, \ \ y = 0, \ \ x = 1, \ \ x = 5$
29. $f(x) = \sqrt{x} + 3, g(x) = \frac{1}{2}x + 3$
30. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}, \ g(x) = x - 1$
31. $f(y) = y^2, \ \ g(y) = y + 2$
32. $f(y) = y(2 - y), \ \ g(y) = -y$
33. $f(y) = y^2 + 1, \ \ g(y) = 0, \ \ y = -1, \ \ y = 2$
34. $f(y) = \dfrac{y}{\sqrt{16 - y^2}}, \ \ g(y) = 0, \ \ y = 3$
35. $f(x) = \dfrac{10}{x}, \ x = 0, \ y = 2, \ y = 10$
36. $g(x) = \dfrac{4}{2 - x}, \ \ y = 4, \ \ x = 0$

En los ejercicios 37 a 46, *a*) usar una herramienta de graficación para representar la región comprendida por las gráficas de las ecuaciones, *b*) encontrar el área de la región y *c*) usar las capacidades de integración de una herramienta de graficación para verificar los resultados.

37. $f(x) = x(x^2 - 3x + 3), \quad g(x) = x^2$

38. $f(x) = x^3 - 2x + 1, \quad g(x) = -2x, \quad x = 1$

39. $y = x^2 - 4x + 3, \quad y = 3 + 4x - x^2$

40. $y = x^4 - 2x^2, \quad y = 2x^2$

41. $f(x) = x^4 - 4x^2, \quad g(x) = x^2 - 4$

42. $f(x) = x^4 - 4x^2, \quad g(x) = x^3 - 4x$

43. $f(x) = 1/(1 + x^2), \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2$

44. $f(x) = 6x/(x^2 + 1), \quad y = 0, \quad 0 \le x \le 3$

45. $y = \sqrt{1 + x^3}, \quad y = \frac{1}{2}x + 2, \quad x = 0$

46. $y = x\sqrt{\dfrac{4 - x}{4 + x}}, \quad y = 0, \quad x = 4$

En los ejercicios 47 a 52, trazar la región acotada por las gráficas de las funciones, y encontrar el área de la región.

47. $f(x) = \cos x, \quad g(x) = 2 - \cos x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

48. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos 2x, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

49. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \tan x, \quad -\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{3}$

50. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{4} \tan \dfrac{\pi x}{4}, \quad g(x) = \left(\sqrt{2} - 4\right)x + 4, \quad x = 0$

51. $f(x) = xe^{-x^2}, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le 1$

52. $f(x) = 3^x, \quad g(x) = 2x + 1$

En los ejercicios 53 a 56, *a*) usar una herramienta de graficación para trazar la gráfica de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, *b*) encontrar el área de la región y *c*) usar las funciones de integración de la herramienta de graficación para verificar los resultados.

53. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le \pi$

54. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x, \quad y = 0, \quad 0 < x \le \pi$

55. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{1/x}, \quad y = 0, \quad 1 \le x \le 3$

56. $g(x) = \dfrac{4 \ln x}{x}, \quad y = 0, \quad x = 5$

En los ejercicios 57 a 60, *a*) usar una herramienta de graficación para trazar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, *b*) explicar por qué el área de la región es difícil de encontrar a mano y *c*) usar las funciones de integración de la herramienta de graficación para verificar los resultados con cuatro decimales significativos.

57. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{4 - x}}, \quad y = 0, \quad x = 3$

58. $y = \sqrt{x}\, e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

59. $y = x^2, \quad y = 4 \cos x$

60. $y = x^2, \quad y = \sqrt{3 + x}$

En los ejercicios 61 a 64, encontrar la función de acumulación *F*. Entonces evaluar *F* en cada valor de la variable independiente y gráficamente mostrar el área dada por cada valor de *F*.

61. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\tfrac{1}{2}t + 1\right) dt$ *a*) $F(0)$ *b*) $F(2)$ *c*) $F(6)$

62. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\tfrac{1}{2}t^2 + 2\right) dt$ *a*) $F(0)$ *b*) $F(4)$ *c*) $F(6)$

63. $F(\alpha) = \displaystyle\int_{-1}^{\alpha} \cos \frac{\pi\theta}{2}\, d\theta$ *a*) $F(-1)$ *b*) $F(0)$ *c*) $F\left(\tfrac{1}{2}\right)$

64. $F(y) = \displaystyle\int_{-1}^{y} 4e^{x/2}\, dx$ *a*) $F(-1)$ *b*) $F(0)$ *c*) $F(4)$

En los ejercicios 65 a 68, usar la integración para encontrar el área de la figura que tiene los vértices dados.

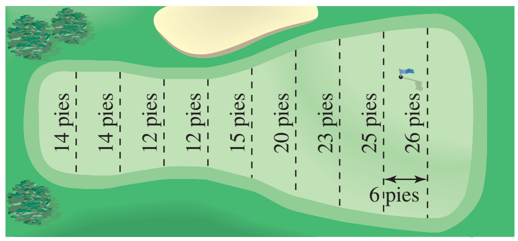
65. $(2, -3), (4, 6), (6, 1)$

66. $(0, 0), (a, 0), (b, c)$

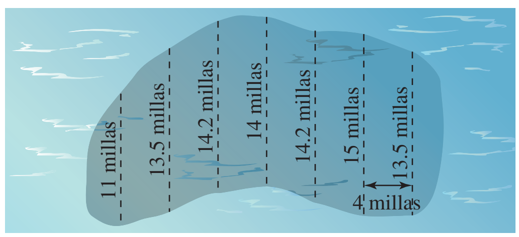
67. $(0, 2), (4, 2), (0, -2), (-4, -2)$

68. $(0, 0), (1, 2), (3, -2), (1, -3)$

69. ***Integración numérica*** Estimar el área de la superficie del *green* de golf usando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.



70. ***Integración numérica*** Estimar el área de la superficie del derrame de petróleo usando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.



En los ejercicios 71 y 72, evaluar la integral e interpretar ésta como el área de la región. Después usar una computadora para graficar la región.

71. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} |\operatorname{sen} 2x - \cos 4x|\, dx$

72. $\displaystyle\int_0^{2} \left|\sqrt{x + 3} - 2x\right|\, dx$

En los ejercicios 73 a 76, formular y evaluar la integral definida que da el área de la región acotada por la gráfica de la función y la recta tangente para la gráfica en el punto dado.

73. $f(x) = x^3, \quad (1, 1)$

74. $y = x^3 - 2x, \quad (-1, 1)$

75. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}, \quad \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

76. $y = \dfrac{2}{1 + 4x^2}, \quad \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$

Desarrollo de conceptos

77. Las gráficas $y = x^4 - 2x^2 + 1$ y $y = 1 - x^2$ se intersecan en tres puntos. Sin embargo, el área entre las curvas *puede* encontrarse por una sola integral. Explicar por qué es así, y escribir una integral para esta área.

78. El área de la región acotada por las gráficas de $y = x^3$ y $y = x$ *no puede* encontrarse por una integral única $\int_{-1}^{1}(x^3 - x)\,dx$. Explicar por qué esto es así. Usar la simetría para escribir una sola integral que representa el área.

79. Un graduado de la universidad tiene dos ofertas de trabajo. El sueldo de arranque para cada una es \$32 000 y después de 8 años de servicio cada una pagará \$54 000. El aumento del sueldo para cada oferta se muestra en la figura. Dar un punto de vista estrictamente monetario de qué oferta es mejor. Explicar.

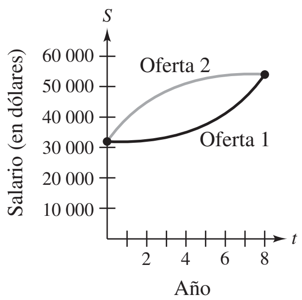


Figura para 79

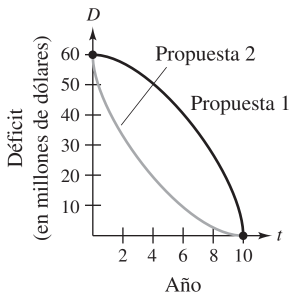


Figura para 80

80. Una legislatura estatal está debatiendo dos propuestas para eliminar el déficit del presupuesto anual para el año 2010. La tasa de disminución del déficit para cada propuesta se muestra en la figura. Desde el punto de vista de minimizar el déficit estatal acumulativo ¿cuál es la mejor propuesta? Explicar.

81. Se prueban dos coches en una pista recta con velocidades v_1 y v_2 (en metros por segundo). Considerar lo siguiente.

$$\int_0^5 [v_1(t) - v_2(t)]\,dt = 10 \qquad \int_0^{10} [v_1(t) - v_2(t)]\,dt = 30$$

$$\int_{20}^{30} [v_1(t) - v_2(t)]\,dt = -5$$

a) Escribir una interpretación verbal de cada integral.

b) ¿Es posible determinar la distancia entre los dos coches cuando $t = 5$ segundos? ¿Por qué sí? o ¿por qué no?

c) Suponiendo que ambos coches arrancan al mismo tiempo y lugar, ¿qué coche va por delante en $t = 10$ segundos? ¿Qué tan adelante está el coche?

d) Suponiendo que el coche 1 tiene una velocidad v_1 y está al frente del coche 2 por 13 metros en $t = 20$ segundos, ¿qué tan adelante o atrás está el coche 1 cuando $t = 30$ segundos?

Para discusión

82. Sean f y g una función continua en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para toda x en $[a, b]$. Escribir el área obtenida para $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$. ¿La interpretación del área de esta integral cambia cuando $f(x) \geq 0$ y $g(x) \leq 0$?

En los ejercicios 83 y 84, encontrar b tal que la recta $y = b$ divide la región intersecada por las gráficas de las dos ecuaciones en dos regiones de área igual.

83. $y = 9 - x^2, \quad y = 0$ **84.** $y = 9 - |x|, \quad y = 0$

En los ejercicios 85 y 86, encontrar a tal que la recta $x = a$ divida la región intersecada por las gráficas de las ecuaciones en dos regiones de área igual.

85. $y = x, \quad y = 4, \quad x = 0$ **86.** $y^2 = 4 - x, \quad x = 0$

En los ejercicios 87 y 88, evaluar el límite y dibujar la gráfica de la región cuya área se representa por el límite.

87. $\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^2)\,\Delta x$, donde $x_i = i/n$ y $\Delta x = 1/n$

88. $\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (4 - x_i^2)\,\Delta x$, donde $x_i = -2 + (4i/n)$ y $\Delta x = 4/n$

En los ejercicios 89 y 90, *a*) encontrar los dos puntos de inflexión de la gráfica de f, *b*) determinar la ecuación de la recta que interseca ambos puntos y *c*) calcular el área de las tres regiones acotada por la gráfica de f y la recta. ¿Qué se observa?

89. $f(x) = x^4 + 4x^3 + x + 7$ **90.** $f(x) = 2x^4 - 12x^2 + 3x - 1$

Ingresos **En los ejercicios 91 y 92 se dan dos modelos R_1 y R_2 para el ingreso (en miles de millones de dólares por año) para una corporación grande. El modelo R_1 da los ingresos anuales proyectados de 2008 a 2013, con $t = 8$ que corresponden a 2008, y R_2 da los ingresos proyectados si hay una disminución en la proporción de crecimiento de ventas corporativas sobre el periodo. Aproximar la reducción total en el ingreso si las ventas corporativas son realmente más cercanas al ejemplo R_2.**

91. $R_1 = 7.21 + 0.58t$
$R_2 = 7.21 + 0.45t$

92. $R_1 = 7.21 + 0.26t + 0.02t^2$
$R_2 = 7.21 + 0.1t + 0.01t^2$

93. ***Curva de Lorenz*** Los economistas usan la *curva de Lorenz* para ilustrar la distribución del ingreso en un país. Una curva de Lorenz, $y = f(x)$, representa la distribución del ingreso real en el país. En este modelo, x representa el porcentaje de familias en el país y y representa el porcentaje de ingreso total. El modelo $y = x$ representa un país en que cada familia tiene el mismo ingreso. El área entre estos dos modelos, donde $0 \leq x \leq 100$, indica la “desigualdad del ingreso” de un país. La tabla muestra el porcentaje de ingreso y para los porcentajes seleccionados de x familias en un país.

x	10	20	30	40	50
y	3.35	6.07	9.17	13.39	19.45

x	60	70	80	90
y	28.03	39.77	55.28	75.12

a) Usar una herramienta de graficación para encontrar un modelo cuadrático para la curva de Lorenz.

b) Trazar una gráfica de los datos y del modelo.

c) Representar el modelo $y = x$. ¿Cómo se compara este modelo con respecto al modelo *a*)?

d) Usar las capacidades de la integración de una calculadora para aproximar la “desigualdad del ingreso”.

94. ***Beneficios*** El departamento de contabilidad de una compañía informa que los beneficios durante el último año fiscal fueron de 15.9 millones de dólares. El departamento predice que los beneficios por crecimiento continuo durante los próximos 5 años generarán una tasa anual continua entre $3\frac{1}{2}$ y 5%. Estimar la diferencia acumulativa en los beneficios durante los 5 años basados en el rango predicho de tasas de crecimiento.

95. ***Área*** La región sombreada en la figura consiste en todos los puntos cuyas distancias del centro del cuadrado es menor que las distancias a los bordes del cuadrado. Encontrar el área de la región.

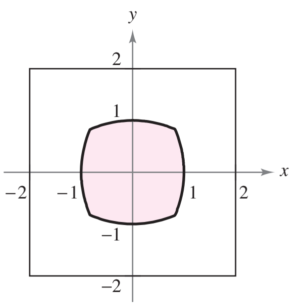


Figura para 95

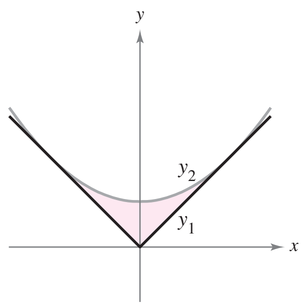


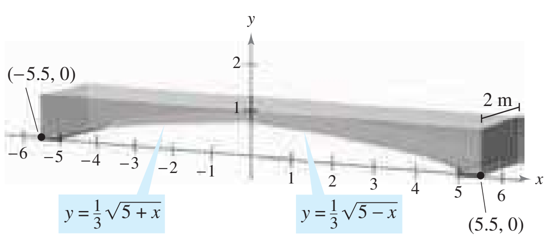
Figura para 96

96. ***Diseño mecánico*** La superficie de una parte de una máquina es la región entre las gráficas de $y_1 = |x|$ y $y_2 = 0.08x^2 + k$ (véase la figura).

a) Encontrar k si la parábola es tangente a la gráfica de y_1.

b) Encontrar el área de la superficie de la parte de la máquina.

97. ***Diseño de construcción*** Las secciones de concreto (hormigón) para un nuevo edificio tienen las dimensiones (en metros) y la forma mostrada en la figura.



a) Encontrar el área de la cara adosada en el sistema de la coordenada rectangular.

b) Encontrar el volumen de concreto en una de las secciones multiplicando el área obtenida en el apartado *a*) por 2 metros.

c) Un metro cúbico de concreto pesa 5 000 libras. Encontrar el peso de la sección.

98. ***Diseño de construcción*** Para disminuir el peso y ayudar en el proceso del endurecimiento, las secciones de concreto en el ejercicio 97 no son a menudo sólidas. Rehacer el ejercicio 97 haciendo orificios cilíndricos como los mostrados en la figura.

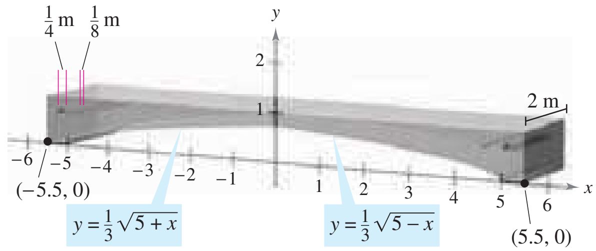


Figura para 98

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 99 a 102, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un contraejemplo.**

99. Si el área de la región limitada por las gráficas de f y g es 1, entonces el área de la región acotada por las gráficas de $h(x) = f(x) + C$ y $k(x) = g(x) + C$ también es 1.

100. Si $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = A$, entonces $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = -A$.

101. Si las gráficas de f y g se intersecan a la mitad del camino entre $x = a$ y $x = b$, entonces, $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = 0$.

102. La recta $y = \left(1 - \sqrt[3]{0.5}\right)x$ divide la región debajo de la curva $f(x) = x(1 - x)$ para $[0, 1]$ en dos regiones de igual área.

103. ***Área*** Encontrar el área entre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y el segmento de recta que une los puntos (0, 0) y $\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$, como se muestra en la figura.

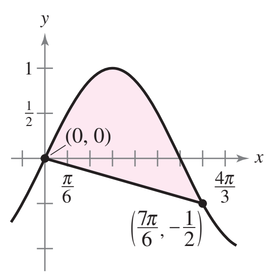


Figura para 103

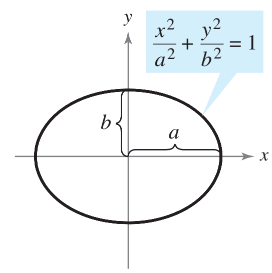
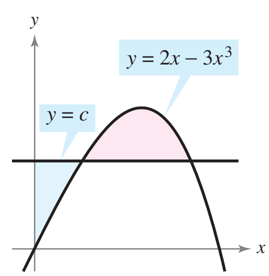


Figura para 104

104. ***Área*** Sea $a > 0$ y $b > 0$. Mostrar que el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es πab (ver la figura).

Preparación del examen Putnam

105. La recta horizontal $y = c$ interseca la curva $y = 2x - 3x^3$ en el primer cuadrante como se muestra en la figura. Encontrar c para que las áreas de las dos regiones sombreadas sean iguales.



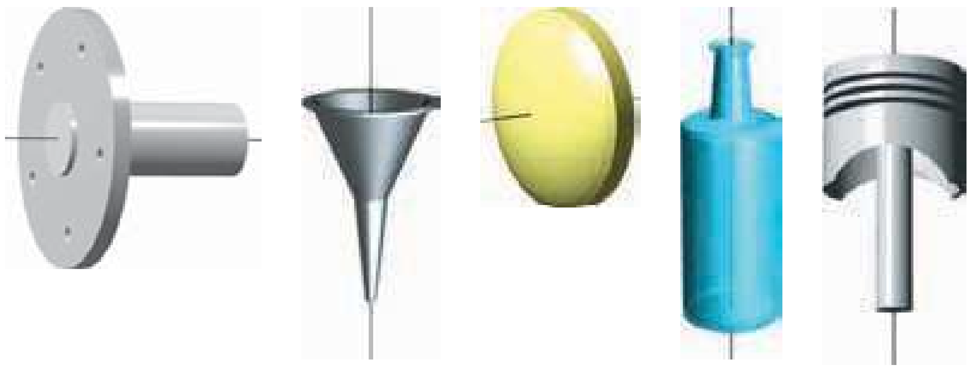
Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.

7.2 Volumen: el método de los discos

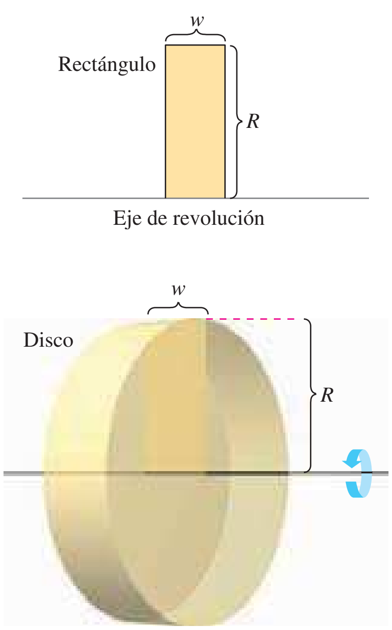
- **Encontrar el volumen de un sólido de revolución usando el método de los discos.**
- **Encontrar el volumen de un sólido de revolución usando el método de las arandelas.**
- **Encontrar el volumen de un sólido con las secciones transversales conocidas.**

Método de los discos

Anteriormente se mencionó que el área es una de las *muchas* aplicaciones de la integral definida. Otra aplicación importante es su uso para encontrar el volumen de un sólido tridimensional. En esta sección se estudiará un tipo particular de un sólido tridimensional cuyas secciones transversales son similares. Por lo común se emplean sólidos de revolución en ingeniería y manufactura. Algunos ejemplos son ejes, embudos, píldoras, botellas y pistones, como se muestra en la figura 7.12.



Sólidos de revolución
Figura 7.12



Volumen de un disco: $\pi R^2 w$
Figura 7.13

Si una región en el plano gira alrededor de una recta, el sólido resultante es un **sólido de revolución**, y la recta se llama **eje de revolución**. El sólido más simple es un cilindro circular recto o **disco** que se forma al girar un rectángulo en torno a uno de sus lados como se muestra en la figura 7.13. El volumen de tal disco es

$$\begin{aligned}\text{Volumen del disco} &= (\text{área de disco})(\text{anchura de disco})\\ &= \pi R^2 w\end{aligned}$$

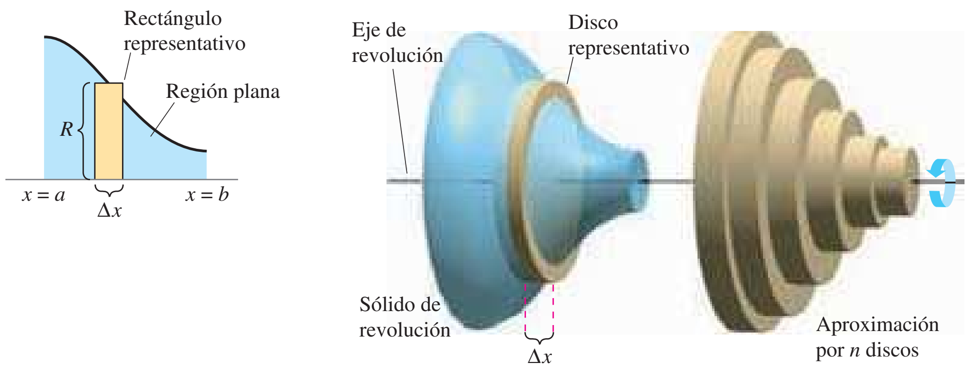
donde R es el radio del disco y w es la anchura.

Para observar cómo usar el volumen de un disco para encontrar el volumen de un sólido general de revolución, considerar un sólido de revolución formado al girar la región plana en la figura 7.14 alrededor del eje indicado. Para determinar el volumen de este sólido, considerar un rectángulo representativo en la región plana. Cuando este rectángulo gira alrededor del eje de revolución, genera un disco representativo cuyo volumen es

$$\Delta V = \pi R^2 \Delta x.$$

Aproximando el volumen del sólido por el de los n discos de anchura Δx y radio $R(x_i)$ produce

$$\begin{aligned}\text{Volumen del sólido} &\approx \sum_{i=1}^{n} \pi [R(x_i)]^2 \,\Delta x\\ &= \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2 \,\Delta x.\end{aligned}$$



Método de los discos
Figura 7.14

Esta aproximación parece mejor y aún más cuando $\|\Delta\| \to 0 (n \to \infty)$. Así, se puede definir el volumen del sólido como

$$\text{Volumen del disco} = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2 \, \Delta x = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx.$$

Esquemáticamente, el método del disco es como sigue

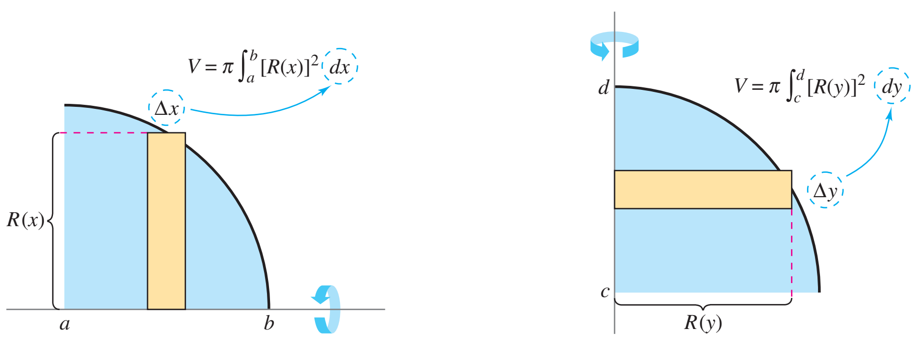
Fórmula conocida		*Elemento representativo*		*Nueva fórmula de integración*
Volumen del disco $V = \pi R^2 w$	⇨	$\Delta V = \pi [R(x_i)]^2 \, \Delta x$	⇨	Sólido de revolución $V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$

Una fórmula similar puede derivarse si el eje de revolución es vertical.

Método de los discos

Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el **método de los discos**, usar una de las fórmulas siguientes, como se muestra en la figura 7.15.

Eje de revolución horizontal	*Eje de revolución vertical*
$\text{Volumen} = V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$	$\text{Volumen} = V = \pi \int_c^d [R(y)]^2 \, dy$



Eje de revolución horizontal
Eje de revolución vertical
Figura 7.15

NOTA En la figura 7.15, observar que se puede determinar la variable de integración tomando un rectángulo representativo en la región plana “perpendicular” al eje de revolución. Si la anchura del rectángulo es Δx, integrar con respecto a x, y si la anchura del rectángulo es Δy, integrar con respecto a y.

La aplicación más simple del método de los discos involucra una región plana acotada por la gráfica de f y el eje x. Si el eje de revolución es el eje x, el radio $R(x)$ simplemente es $f(x)$.

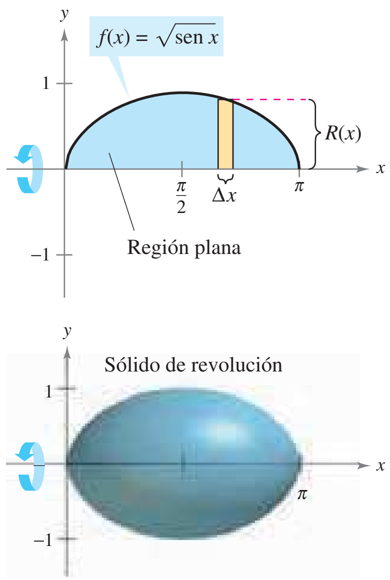


Figura 7.16

EJEMPLO 1 Uso del método de los discos

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de

$$f(x) = \sqrt{\text{sen } x}$$

y el eje x ($0 \leq x \leq \pi$) alrededor del eje x.

Solución Del rectángulo representativo en la gráfica superior en la figura 7.16, se puede ver que el radio de este sólido es

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) \\ &= \sqrt{\text{sen } x}. \end{aligned}$$

Así, el volumen del sólido de revolución es

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx &= \pi \int_0^\pi \left(\sqrt{\text{sen } x}\right)^2 dx && \text{Aplicar el método de los discos.} \\ &= \pi \int_0^\pi \text{sen } x\, dx && \text{Simplificar.} \\ &= \pi \Big[-\cos x\Big]_0^\pi && \text{Integrar.} \\ &= \pi(1 + 1) \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Eje de revolución alrededor de una recta que no es un eje de coordenadas

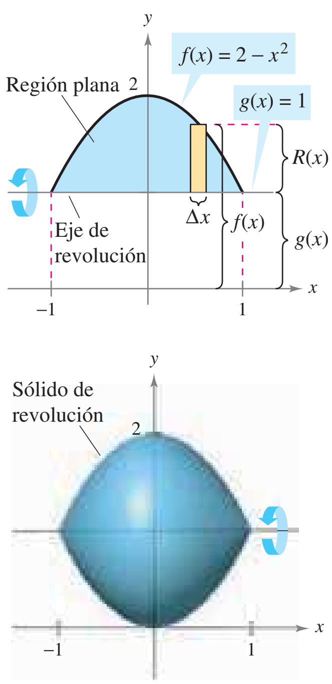


Figura 7.17

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por

$$f(x) = 2 - x^2$$

y $g(x) = 1$ alrededor de la recta $y = 1$, como se muestra en la figura 7.17.

Solución Al igualar $f(x)$ y $g(x)$, se puede determinar que las dos gráficas se intersecan cuando $x = \pm 1$. Para encontrar el radio, restar $g(x)$ de $f(x)$.

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (2 - x^2) - 1 \\ &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

Por último, integrar entre -1 y 1 para encontrar el volumen.

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx &= \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2\, dx && \text{Aplicar el método de los discos.} \\ &= \pi \int_{-1}^1 (1 - 2x^2 + x^4)\, dx && \text{Simplificar.} \\ &= \pi \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1 && \text{Integrar.} \\ &= \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

Método de las arandelas (anillos)

El método de los discos puede extenderse para cubrir sólidos de revolución huecos reemplazando el disco con una **arandela** (anillos). La arandela se forma al girar un rectángulo alrededor del eje, como se muestra en la figura 7.18. Si r y R son los radios interiores y exteriores de la arandela y w es la anchura, el volumen está dado por

$$\text{Volumen de la arandela} = \pi(R^2 - r^2)w.$$

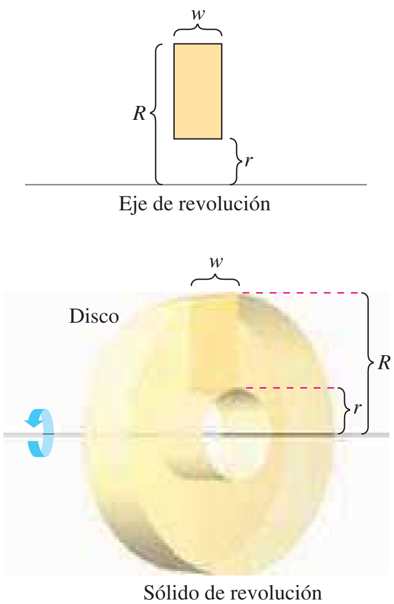


Figura 7.18

Para ver cómo este concepto puede usarse para encontrar el volumen de un sólido de revolución, considerar una región acotada por un **radio exterior** $R(x)$ y un **radio interior** $r(x)$, como se muestra en la figura 7.19. Si la región se gira alrededor de su eje de revolución, el volumen del sólido resultante está dado por

$$V = \pi\int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx.$$

Método de las arandelas.

Observar que la integral que contiene el radio interior representa el volumen del hueco y se *resta* de la integral que contiene el radio exterior.

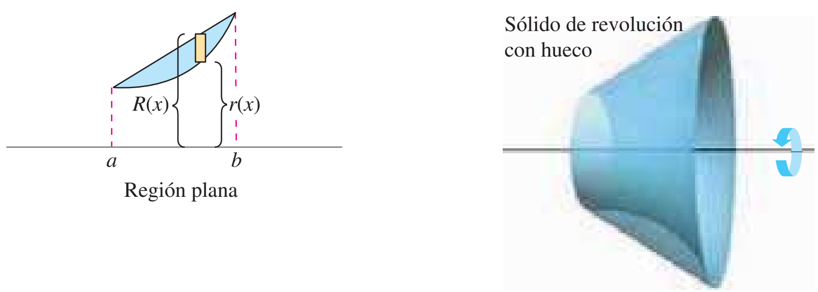


Figura 7.19

EJEMPLO 3 Uso del método de las arandelas (anillos)

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ alrededor del eje x, como se muestra en la figura 7.20.

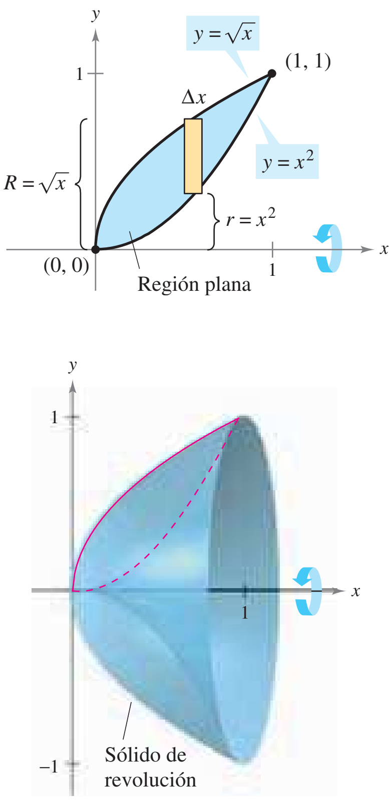
Solución En la figura 7.20 se puede observar que los radios exteriores e interiores son:

$$R(x) = \sqrt{x} \qquad \text{Radio exterior.}$$

$$r(x) = x^2 \qquad \text{Radio interior.}$$

Integrando entre 0 y 1 produce

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx && \text{Aplicar el método de las arandelas.}\\
&= \pi\int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^2)^2\right] dx\\
&= \pi\int_0^1 (x - x^4)\,dx && \text{Simplificar.}\\
&= \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 && \text{Integrar.}\\
&= \frac{3\pi}{10}.
\end{aligned}$$



Sólido de revolución
Figura 7.20

Hasta ahora, en cada ejemplo el eje de revolución ha sido *horizontal* y se integraba con respecto a x. En el próximo ejemplo, el eje de revolución será *vertical* y se integrará con respecto a y. En este ejemplo, se necesita efectuar dos integrales separadas para calcular el volumen.

EJEMPLO 4 Integración con respecto a y, con dos integrales

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje y, como se muestra en la figura 7.21.

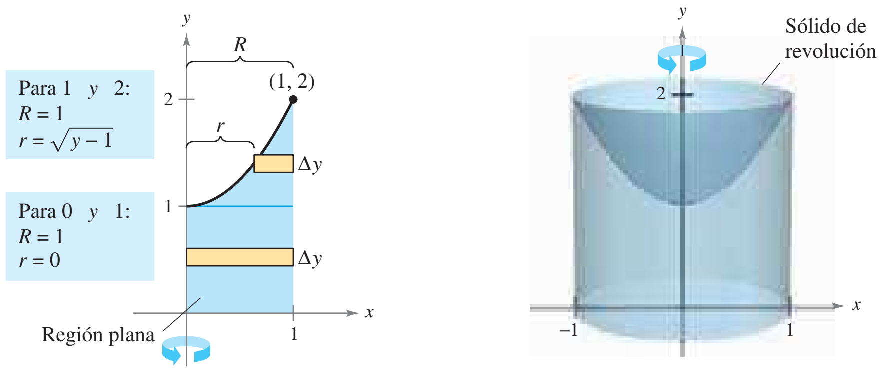


Figura 7.21

Solución Para la región mostrada en la figura 7.21, el radio exterior es $R = 1$. No hay, sin embargo, una fórmula única que represente el radio interior. Cuando $0 \le y \le 1$, $r = 0$, pero cuando $1 \le y \le 2$, r es determinado por la ecuación $y = x^2 + 1$ lo cual implica que $r = \sqrt{y-1}$.

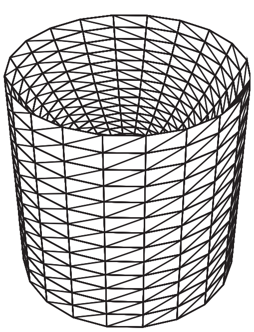
$$r(y) = \begin{cases} 0, & 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y-1}, & 1 \le y \le 2 \end{cases}$$

Con esta definición del radio interior se utilizan dos integrales para encontrar el volumen.

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1 (1^2 - 0^2)\,dy + \pi\int_1^2 \left[1^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2\right]dy && \text{Aplicar el método de las arandelas.} \\ &= \pi\int_0^1 1\,dy + \pi\int_1^2 (2-y)\,dy && \text{Simplificar.} \\ &= \pi\Big[y\Big]_0^1 + \pi\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 && \text{Integrar.} \\ &= \pi + \pi\left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

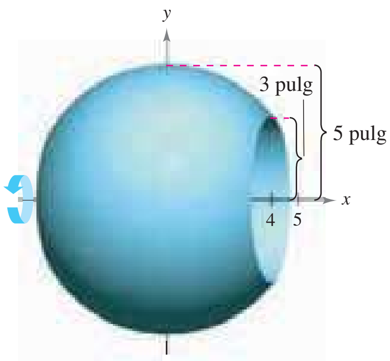
Observar que la primera integral $\pi\int_0^1 1\,dy$ representa el volumen de un cilindro circular recto de radio 1 y altura 1. Esta porción del volumen podría ser determinada sin recurrir a la integración.

TECNOLOGÍA Algunas herramientas de graficación tienen la capacidad para generar (o tienen el software capaz de generar) un sólido de revolución. Si tiene acceso a tal herramienta, usarla para hacer la gráfica de algunos de los sólidos de revolución descritos en esta sección. Por ejemplo, el sólido en el ejemplo 4 podría aparecer como el mostrado en la figura 7.22.



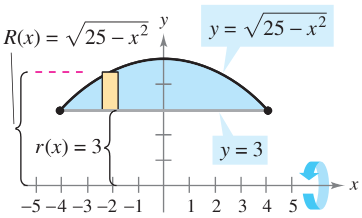
Generado por Mathematica

Figura 7.22



Sólido de revolución

a)



Región plana

b)

Figura 7.23

EJEMPLO 5 Diseño de manufactura

Un fabricante taladra un orificio a través del centro de una esfera de metal de 5 pulgadas de radio, como se muestra en la figura 7.23*a*. El orificio tiene un radio de 3 pulgadas. ¿Cuál es el volumen del objeto de metal resultante?

Solución Suponer el objeto generado por un segmento de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 25$, como se muestra en la figura 7.23*b*). Porque el radio del orificio es 3 pulgadas, sea $y = 3$ resolver la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ para determinar que los límites de integración son $x = \pm 4$. Así que, los radios interiores y exteriores son $r(x) = 3$ y $R(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y el volumen está dado por

$$
\begin{aligned}
V = \pi\int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx &= \pi\int_{-4}^{4} \left[\left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 - (3)^2\right] dx \\
&= \pi\int_{-4}^{4} (16 - x^2)\,dx \\
&= \pi\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4} \\
&= \frac{256\pi}{3} \text{ pulgadas cúbicas.}
\end{aligned}
$$

Sólidos con secciones transversales conocidas

Con el método de los discos, se puede encontrar el volumen de un sólido teniendo una sección transversal circular cuya área es $A = \pi R^2$. Este método puede generalizarse para los sólidos cuyas secciones, que son arbitrarias, sean de área conocida. Algunas secciones transversales comunes son cuadrados, rectángulos, triángulos, semicírculos y trapecios.

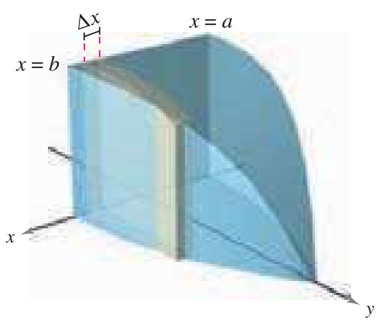
Volumen de sólidos con secciones transversales conocidas

1. Para secciones transversales de área $A(x)$ perpendiculares al eje x,

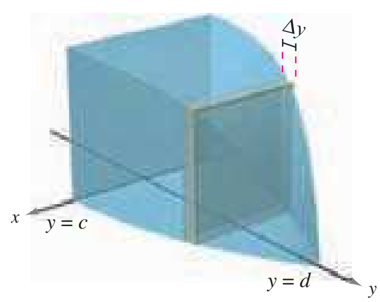
$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x)\,dx.$$ Ver figura 7.24*a*.

2. Para secciones transversales de área $A(y)$ perpendiculares al eje y,

$$\text{Volumen} = \int_c^d A(y)\,dy.$$ Ver figura 7.24*b*.

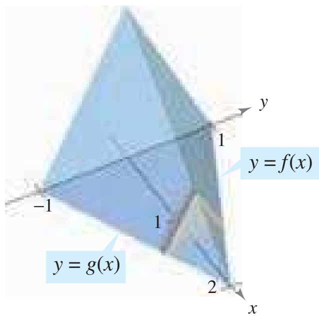


a) Secciones transversales perpendiculares al eje x

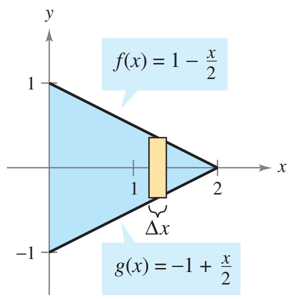


b) Secciones transversales perpendiculares al eje y

Figura 7.24



Las secciones transversales son triángulos equiláteros



Base triangular en el plano xy

Figura 7.25

EJEMPLO 6 Secciones transversales triangulares

Encontrar el volumen del sólido mostrado en la figura 7.25. La base del sólido es la región acotada por las rectas

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \qquad g(x) = -1 + \frac{x}{2}, \qquad \text{y} \qquad x = 0.$$

Las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros.

Solución La base y el área de cada sección transversal triangular son:

$$\text{Base} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(-1 + \frac{x}{2}\right) = 2 - x \qquad \text{Longitud de la base.}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{base})^2 \qquad \text{Área de triángulo equilátero.}$$

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2 \qquad \text{Área de sección transversal.}$$

Porque x varía entre 0 a 2, el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2\,dx$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{(2 - x)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

EJEMPLO 7 Una aplicación geométrica

Demostrar que el volumen de una pirámide con una base cuadrada es $V = \frac{1}{3}hB$, donde h es la altura de la pirámide y B es el área de la base.

Solución Como se muestra en la figura 7.26, se puede cortar o intersecar la pirámide con un plano de altura paralelo a la base a la altura y para formar una sección transversal cuadrada cuyos lados son de longitud b'. Por semejanza de triángulos, se puede mostrar que

$$\frac{b'}{b} = \frac{h - y}{h} \qquad \text{o} \qquad b' = \frac{b}{h}(h - y)$$

donde b es la longitud de los lados de la base de la pirámide. Así,

$$A(y) = (b')^2 = \frac{b^2}{h^2}(h - y)^2.$$

Integrando entre 0 y h se obtiene

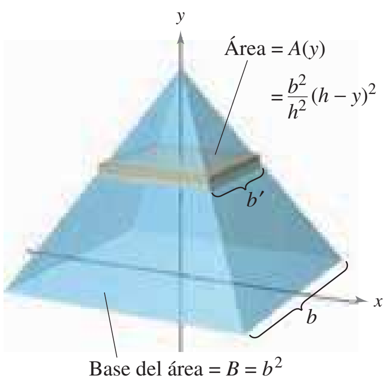
$$V = \int_0^h A(y)\,dy = \int_0^h \frac{b^2}{h^2}(h - y)^2\,dy$$

$$= \frac{b^2}{h^2}\int_0^h (h - y)^2\,dy$$

$$= -\left(\frac{b^2}{h^2}\right)\left[\frac{(h - y)^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{b^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}hB. \qquad B = b^2.$$



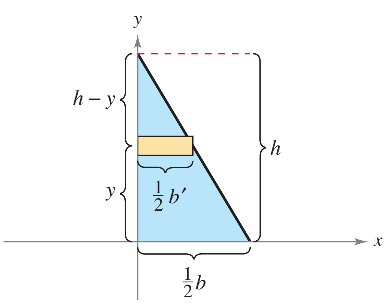
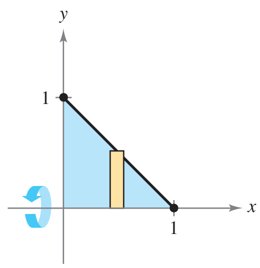


Figura 7.26

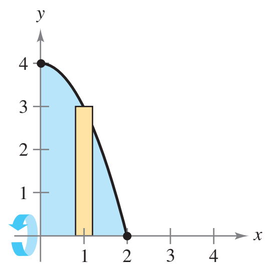
7.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje *x*.

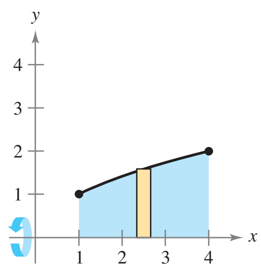
1. $y = -x + 1$



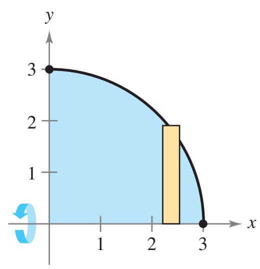
2. $y = 4 - x^2$



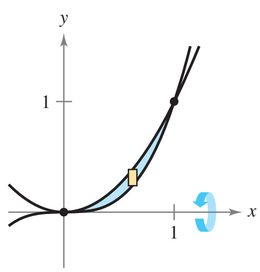
3. $y = \sqrt{x}$



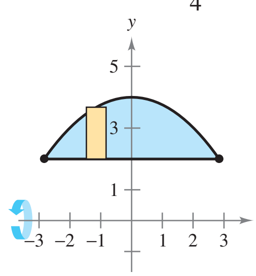
4. $y = \sqrt{9 - x^2}$



5. $y = x^2,\ y = x^3$

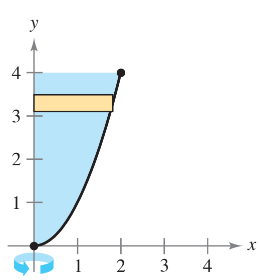


6. $y = 2,\ y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$

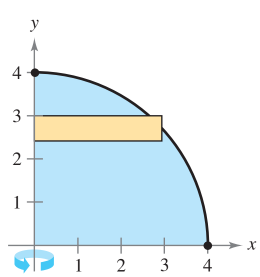


En los ejercicios 7 a 10, formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje *y*.

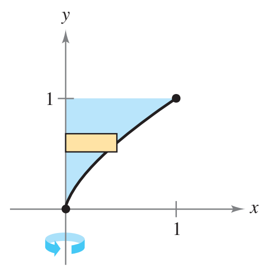
7. $y = x^2$



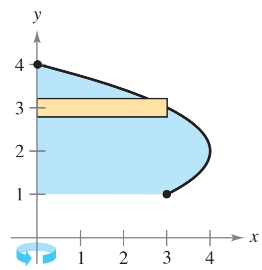
8. $y = \sqrt{16 - x^2}$



9. $y = x^{2/3}$



10. $x = -y^2 + 4y$



En los ejercicios 11 a 14, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de las rectas dadas.

11. $y = \sqrt{x},\quad y = 0,\quad x = 3$

a) el eje x *b*) el eje y
c) la recta $x = 3$ *d*) la recta $x = 6$

12. $y = 2x^2,\quad y = 0,\quad x = 2$

a) el eje y *b*) el eje x
c) la recta $y = 8$ *d*) la recta $x = 2$

13. $y = x^2,\quad y = 4x - x^2$

a) el eje x *b*) la recta $y = 6$

14. $y = 6 - 2x - x^2,\quad y = x + 6$

a) el eje x *b*) la recta $y = 3$

En los ejercicios 15 a 18, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de la recta $y = 4$.

15. $y = x,\quad y = 3,\quad x = 0$

16. $y = \frac{1}{2}x^3,\quad y = 4,\quad x = 0$

17. $y = \dfrac{3}{1 + x},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 3$

18. $y = \sec x,\quad y = 0,\quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$

En los ejercicios 19 a 22, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de la recta $x = 5$.

19. $y = x,\quad y = 0,\quad y = 4,\quad x = 5$

20. $y = 5 - x,\quad y = 0,\quad y = 4,\quad x = 0$

21. $x = y^2,\quad x = 4$

22. $xy = 5,\quad y = 2,\quad y = 5,\quad x = 5$

En los ejercicios 23 a 30, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor del eje *x*.

23. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 4$

24. $y = x\sqrt{9 - x^2},\quad y = 0$

25. $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3$

26. $y = \frac{2}{x+1}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 6$

27. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

28. $y = e^{x/2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 4$

29. $y = x^2 + 1, \quad y = -x^2 + 2x + 5, \quad x = 0, \quad x = 3$

30. $y = \sqrt{x}, \quad y = -\frac{1}{2}x + 4, \quad x = 0, \quad x = 8$

En los ejercicios 31 y 32, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor del eje *y*.

31. $y = 3(2 - x), \quad y = 0, \quad x = 0$

32. $y = 9 - x^2, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 3$

En los ejercicios 33 a 36, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor del eje *x*. Verificar los resultados usando las capacidades de integración de una herramienta de graficación.

33. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi$

34. $y = \cos 2x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}$

35. $y = e^{x-1}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

36. $y = e^{x/2} + e^{-x/2}, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 2$

En los ejercicios 37 a 40, usar las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones alrededor de *x*.

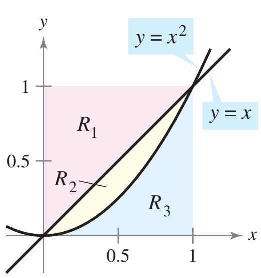
37. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$

38. $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3$

39. $y = 2 \arctan(0.2x), \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 5$

40. $y = \sqrt{2x}, \quad y = x^2$

En los ejercicios 41 a 48, encontrar el volumen generado por el giro de la región sobre la recta especificada.



41. R_1 sobre $x = 0$

42. R_1 sobre $x = 1$

43. R_2 sobre $y = 0$

44. R_2 sobre $y = 1$

45. R_3 sobre $x = 0$

46. R_3 sobre $x = 1$

47. R_2 sobre $x = 0$

48. R_2 sobre $x = 1$

Para pensar **En los ejercicios 49 y 50, determinar qué valor se aproxima mejor al volumen de un sólido generado por el giro de una región acotada por las gráficas de la ecuación sobre el eje *x* (marcar su selección sobre la base de un esbozo de los sólidos y *no* por el desempeño de cualquier cálculo).**

49. $y = e^{-x^2/2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$

a) 3 *b*) -5 *c*) 10 *d*) 7 *e*) 20

50. $y = \arctan x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

a) 10 *b*) $\frac{3}{4}$ *c*) 5 *d*) -6 *e*) 15

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 51 y 52, la integral representa el volumen de un sólido. Describir el sólido.

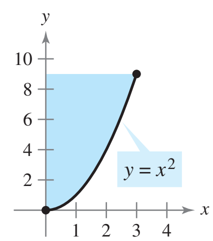
51. $\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx$

52. $\pi \int_2^4 y^4 \, dy$

53. Una región acotada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje x gira alrededor del eje x. Una segunda región acotada por la parábola $y = 4 - x^2$ y el eje x se gira alrededor del eje x. Sin integrar, ¿cómo se comparan los volúmenes de los sólidos? Explicar.

54. La región en la figura se gira alrededor del eje y recta indicada. Ordenar los volúmenes de los sólidos resultantes de menor a mayor. Explicar el razonamiento.

a) eje x *b*) eje y *c*) $x = 3$



55. Discutir la validez de los siguientes enunciados.

a) Para un sólido formado mediante el giro de la región bajo una gráfica alrededor del eje x, las secciones transversales perpendiculares al eje x son discos circulares.

b) Para un sólido formado mediante el giro de la región entre dos gráficas alrededor del eje x, las secciones transversales perpendiculares al eje x son discos circulares.

Para discusión

56. Identificar la integral que representa el volumen del sólido obtenido por rotación del área entre $y = f(x)$ y $y = g(x)$, $a \le x \le b$, sobre el eje x. [Suponiendo que $f(x) \ge g(x) \ge 0$.]

a) $\pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx$ *b*) $\pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx$

57. Si la porción de la recta $y = \frac{1}{2}x$ que queda en el primer cuadrante se gira alrededor del eje x, se genera un cono. Encontrar el volumen del cono que se extiende de $x = 0$ a $x = 6$.

58. Usar el método de los discos para verificar que el volumen de un cono circular recto es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h es la altura.

59. Usar el método de los discos para verificar que el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

60. Una esfera de radio r es cortada por un plano situado h $(h < r)$ unidades sobre el ecuador. Encontrar el volumen del sólido (el segmento esférico) sobre el plano.

61. Un cono de altura H con una base de radio r es cortado en un plano paralelo a la base y situado h unidades sobre ella. Encontrar el volumen del sólido (el tronco de un cono) que queda debajo del plano.

62. La región acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$ se gira alrededor del eje x.

a) Encontrar el valor de x en el intervalo $[0, 4]$ que divide el sólido en dos partes de volumen igual.

b) Encontrar los valores de x en el intervalo $[0, 4]$ que divide al sólido en tres partes de volumen igual.

63. ***El volumen de un tanque de combustible*** Un tanque en el ala de un avión de motor de reacción tiene la forma de un sólido de revolución generado al girar la región acotada por la gráfica $y = \frac{1}{8}x^2\sqrt{2 - x}$ y el eje x $(0 \le x \le 2)$ alrededor del eje x, donde x y y son medidos en metros. Utilizar una calculadora para graficar la función y calcular el volumen del tanque.

64. ***El volumen de un recipiente de vidrio*** Un recipiente de vidrio se modela al girar la gráfica de

$$y = \begin{cases} \sqrt{0.1x^3 - 2.2x^2 + 10.9x + 22.2}, & 0 \le x \le 11.5 \\ 2.95, & 11.5 < x \le 15 \end{cases}$$

alrededor del eje x donde x y y son medidos en centímetros. Representar la función en la computadora y encontrar el volumen del recipiente.

65. Encontrar el volumen del sólido generado si la mitad superior de la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ se gira sobre *a*) el eje x para formar un esferoide prolato (en forma de un balón de futbol americano), y *b*) el eje y para formar un esferoide oblato (en forma de la mitad de un dulce).

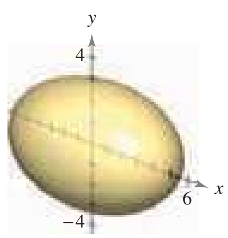


Figura para 65*a*

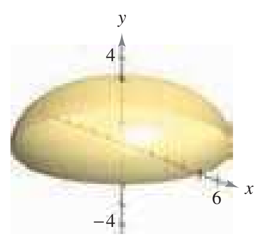


Figura para 65*b*

66. ***Profundidad del agua en un tanque*** Un tanque de agua es una esfera de 50 pies de radio. Determinar las profundidades del agua cuando el tanque se llena a un cuarto y tres cuartos de su capacidad total. (*Nota:* Calcular la raíz con una herramienta de graficación después de evaluar la integral definida.)

67. ***Volumen mínimo*** El arco de $y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$ en el intervalo $[0, 4]$ se gira alrededor de la recta $y = b$ (ver la figura).

a) Encontrar el volumen del sólido resultante como una función de b.

b) Representar la función en una calculadora para el apartado *a*), y usar la gráfica para aproximar el valor de b que hace mínimo el volumen del sólido.

c) Usar cálculo para encontrar el valor de b que hace mínimo el volumen del sólido, y comparar el resultado con la respuesta del apartado *b*).

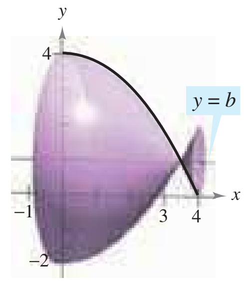


Figura para 67

Figura para 68

68. ***Modelo matemático*** A un dibujante se le pide determinar la cantidad de material requerida para producir una pieza de una máquina (véase la figura en la primera columna). Los diámetros d de la pieza en los puntos x uniformemente espaciados se listan en la tabla. Las medidas están dadas en centímetros.

x	0	1	2	3	4	5
d	4.2	3.8	4.2	4.7	5.2	5.7

x	6	7	8	9	10
d	5.8	5.4	4.9	4.4	4.6

a) Usar estos datos con la regla de Simpson para aproximar el volumen de la pieza.

b) Usar regresión en una calculadora para encontrar un polinomio de cuarto grado a través de los puntos que representan el radio del sólido. Trazar los datos y el modelo.

c) Usar una herramienta de graficación para aproximar la integral definida que da el volumen de la pieza. Comparar el resultado con la respuesta del apartado *a*).

69. ***Para pensar*** Emparejar cada integral con el sólido cuyo volumen representa, y dar las dimensiones de cada sólido.

a) Cilindro circular recto *b*) Elipsoide

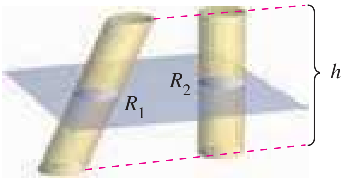
c) Esfera *d*) Cono circular recto *e*) Toro

i) $\pi\displaystyle\int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$ *ii*) $\pi\displaystyle\int_0^h r^2\, dx$

iii) $\pi\displaystyle\int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$ *iv*) $\pi\displaystyle\int_{-b}^{b} \left(a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\right)^2 dx$

v) $\pi\displaystyle\int_{-r}^{r} \left[\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\right] dx$

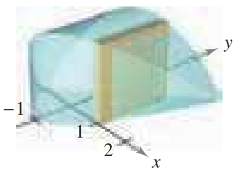
70. ***El teorema de Cavalieri*** Demostrar que si la altura de dos sólidos son iguales y todas las secciones del plano paralelas a sus bases y a distancias iguales de sus bases tienen áreas iguales, entonces los sólidos tienen el mismo volumen (ver la figura).



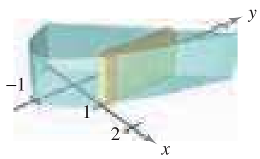
Área de R_1 = área de R_2

71. Encontrar el volumen del sólido cuya base es acotada por las gráficas de $y = x + 1$ y $y = x^2 - 1$, con las secciones transversales indicadas perpendiculares al eje x.

a) Cuadrados



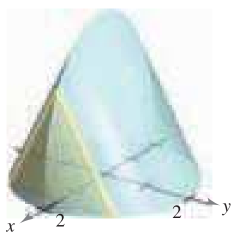
b) Rectángulos de altura 1



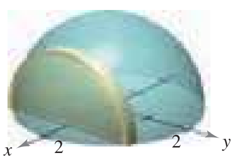
72. Encontrar el volumen del sólido cuya base es acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 4$ con las secciones transversales indicadas perpendiculares al eje x.

a) Cuadrados

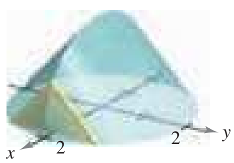
b) Triángulos equiláteros



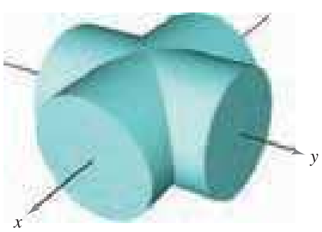
c) Semicírculos



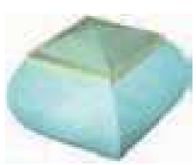
d) Triángulos isósceles rectos



73. Encontrar el volumen del sólido de intersección (el sólido común a ambos) de los cilindros circulares rectos de radio r cuyos ejes se encuentran en los ángulos rectos (ver la figura).



Intersección de dos cilindros



Sólido de intersección

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este problema, ver el artículo "Estimating the Volumes of Solid Figures with Curves Surfaces", de Donald Cohen en *Mathematics Teacher*.

74. La base de un sólido es limitada por $y = x^3$, $y = 0$ y $x = 1$. Encontrar el volumen del sólido para cada una de las secciones transversales siguientes (perpendiculares al eje y): *a*) cuadrados, *b*) semicírculos, *c*) triángulos equiláteros y *d*) semielipses cuyas alturas son dos veces las longitudes de sus bases.

75. Un operador taladra un orificio a través del centro de una esfera de metal de radio R. El orificio tiene un radio r. Encontrar el volumen del anillo resultante.

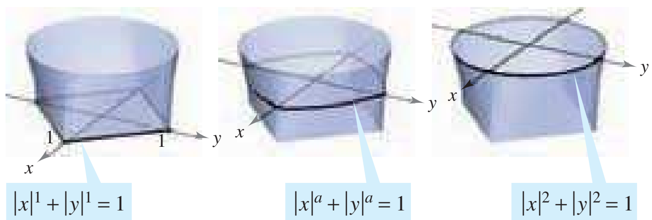
76. Para la esfera de metal del ejercicio 75, sea $R = 6$. ¿Qué valor de r producirá un anillo cuyo volumen es exactamente la mitad del volumen de la esfera?

77. La región acotada por las gráficas $y = 8x/(9 + x^2)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 5$ se gira sobre el eje x. Usar una computadora y la regla de Simpson (con $n = 10$) para aproximar el volumen del sólido.

78. El sólido mostrado en la figura tiene las secciones transversales acotadas por la gráfica $|x|^a + |y|^a = 1$, donde $1 \le a \le 2$.

a) Describir la sección tranversal cuando $a = 1$ y $a = 2$.

b) Describir un procedimiento para aproximar el volumen del sólido.



79. Dos planos cortan un cilindro circular recto para formar una cuña. Un plano es perpendicular al eje del cilindro y el segundo forma un ángulo de θ grados con el primero (ver la figura).

a) Encontrar el volumen de la cuña si $\theta = 45°$.

b) Encontrar el volumen de la cuña para un ángulo θ arbitrario. Asumiendo que el cilindro tiene la longitud suficiente, ¿cómo cambia el volumen de la cuña cuando θ aumenta de 0° a 90°?

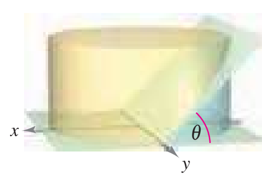


Figura para 79

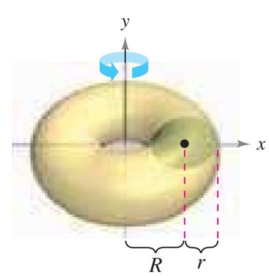


Figura para 80

80. *a*) Demostrar que el volumen del toro está dado por la integral

$$8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\, dy, \text{ donde } R > r > 0.$$

b) Encontrar el volumen del toro.

7.3 Volumen: el método de las capas

- **Encontrar el volumen de un sólido de revolución mediante el método de las capas.**
- **Comparar los usos del método de los discos y el método de las capas.**

Método de las capas

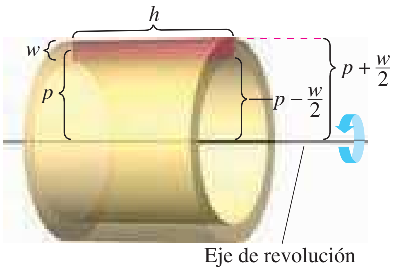


Figura 7.27

En esta sección se estudiará un método alternativo para encontrar el volumen de un sólido de revolución. Este método se llama el **método de las capas** porque usa capas cilíndricas. Una comparación de las ventajas de los métodos de los discos y de las capas se da más adelante en esta sección.

Para empezar, considerar un rectángulo representativo como se muestra en la figura 7.27, donde w es la anchura del rectángulo, h es la altura, y p es la distancia entre el eje de revolución y el *centro* del rectángulo. Cuando este rectángulo gira alrededor de su eje de revolución, forma una capa cilíndrica (o tubo) de espesor w. Para encontrar el volumen de esta capa, considerar dos cilindros. El radio del cilindro más grande corresponde al radio exterior de la capa y el radio del cilindro más pequeño corresponde al radio interno de la capa. Porque p es el radio medio de la capa, se sabe que el radio exterior es $p + (w/2)$ y el radio interno es $p - (w/2)$.

$$p + \frac{w}{2} \qquad \text{Radio externo.}$$

$$p - \frac{w}{2} \qquad \text{Radio interno.}$$

Así que, el volumen de la capa es

$$\begin{aligned}
\text{Volumen de la capa} &= (\text{volumen del cilindro}) - (\text{volumen del hueco}) \\
&= \pi\left(p + \frac{w}{2}\right)^2 h - \pi\left(p - \frac{w}{2}\right)^2 h \\
&= 2\pi phw \\
&= 2\pi\,(\text{radio medio})(\text{altura})(\text{espesor})
\end{aligned}$$

Esta fórmula se puede usar para encontrar el volumen de un sólido de revolución. Asumir que la región plana en la figura 7.28 gira alrededor de una recta para formar el sólido indicado. Si se considera un rectángulo horizontal de anchura Δy, entonces, cuando la región plana gira alrededor de una recta paralela al eje x, el rectángulo genera una capa representativa cuyo volumen es

$$\Delta V = 2\pi[p(y)h(y)]\,\Delta y.$$

Se puede aproximar el volumen del sólido por n capas de espesor Δy, de altura $h(y_i)$ y radio medio $p(y_i)$.

$$\text{Volumen del sólido} \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi[p(y_i)h(y_i)]\,\Delta y = 2\pi \sum_{i=1}^{n} [p(y_i)h(y_i)]\,\Delta y$$

Esta aproximación parece mejorar al hacer $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Así, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned}
\text{Volumen del sólido} &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} [p(y_i)h(y_i)]\,\Delta y \\
&= 2\pi \int_c^d [p(y)h(y)]\,dy.
\end{aligned}$$

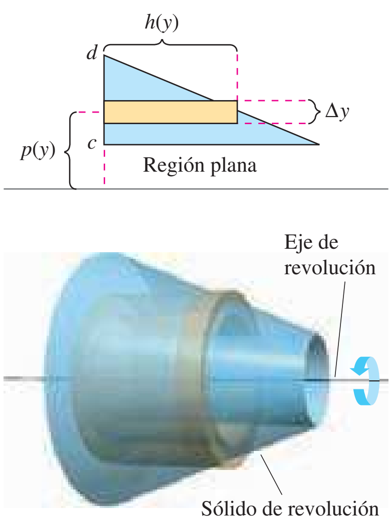
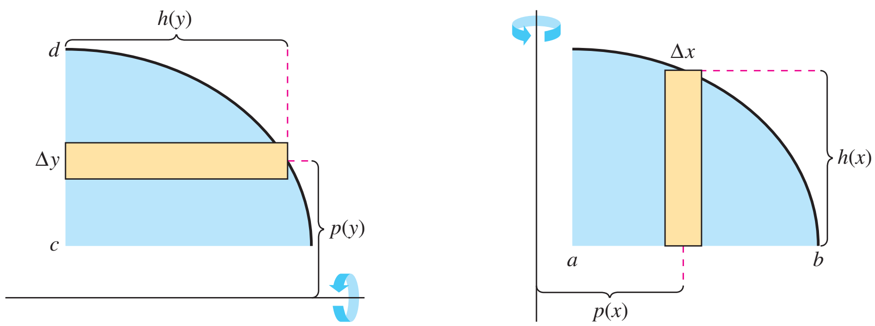


Figura 7.28

Método de las capas

Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el **método de las capas**, usar alguna de las fórmulas siguientes, como se muestra en la figura 7.29.

Eje de revolución horizontal	*Eje de revolución vertical*
Volumen $= V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\,dy$	Volumen $= V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx$



Eje de revolución horizontal
Figura 7.29

Eje de revolución vertical

EJEMPLO 1 Uso del método de las capas para encontrar un volumen

Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por

$$y = x - x^3$$

y el eje x $(0 \le x \le 1)$ alrededor del eje y.

Solución Porque el eje de revolución es vertical, usar un rectángulo representativo vertical, como se muestra en la figura 7.30. La anchura Δx indica que x es la variable de integración. La distancia del centro del rectángulo al eje de revolución es $p(x) = x$, y la altura del rectángulo es

$$h(x) = x - x^3.$$

Porque x varía de 0 a 1, el volumen del sólido es

$$V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx = 2\pi \int_0^1 x(x - x^3)\,dx \qquad \text{Aplicar el método de las capas.}$$

$$= 2\pi \int_0^1 (-x^4 + x^2)\,dx \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \qquad \text{Integrar.}$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{15}.$$

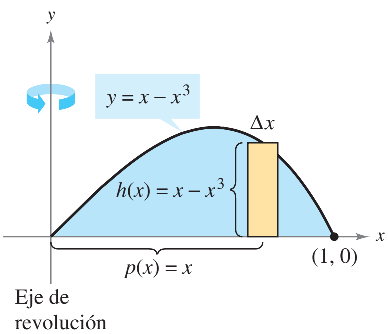


Figura 7.30

EJEMPLO 2 Uso del método de las capas para encontrar un volumen

Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por la gráfica de

$$x = e^{-y^2}$$

y el eje y $(0 \leq y \leq 1)$ alrededor del eje x.

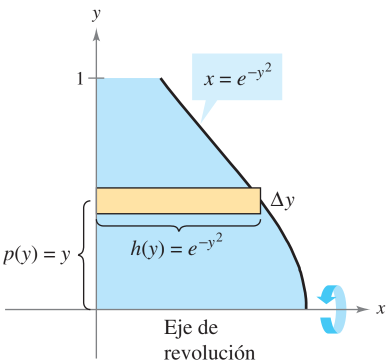


Figura 7.31

Solución Porque el eje de revolución es horizontal, usar un rectángulo representativo horizontal, como se muestra en la figura 7.31. La anchura Δy indica que y es la variable de integración. La distancia del centro del rectángulo al eje de revolución es $p(y) = y$, y la altura del rectángulo es $h(y) = e^{-y^2}$. Porque y va de 0 a 1, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\, dy = 2\pi \int_0^1 ye^{-y^2}\, dy && \text{Aplicar el método de las capas.} \\ &= -\pi\Big[e^{-y^2}\Big]_0^1 && \text{Integrar.} \\ &= \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right) \\ &\approx 1.986. \end{aligned}$$

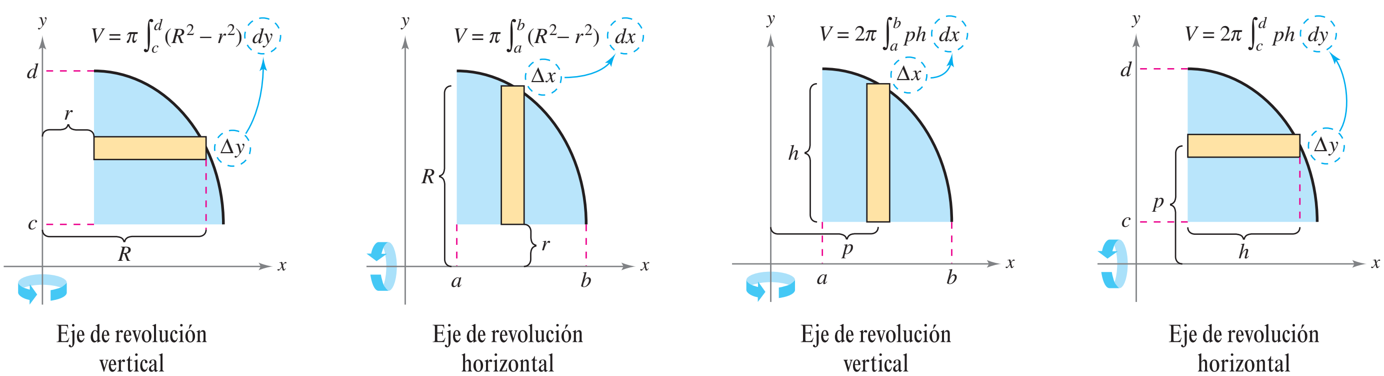
NOTA Para apreciar la ventaja de usar el método de las capas en el ejemplo 2, resolver la ecuación $x = e^{-y^2}$ para y.

$$y = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/e \\ \sqrt{-\ln x}, & 1/e < x \leq 1 \end{cases}$$

Entonces usar esta ecuación para encontrar el volumen del sólido utilizando el método de los discos.

Comparación de los métodos de los discos y de las capas

Los métodos de los discos y de las capas pueden distinguirse porque para usar el método de los discos, el rectángulo representativo siempre es *perpendicular* al eje de revolución, y para el método de las capas, el rectángulo representativo siempre es *paralelo* al eje de revolución, como se muestra en la figura 7.32.



Método del disco: El rectángulo representativo es perpendicular al eje de revolución

Método de las capas: El rectángulo representativo es paralelo al eje de revolución

Figura 7.32

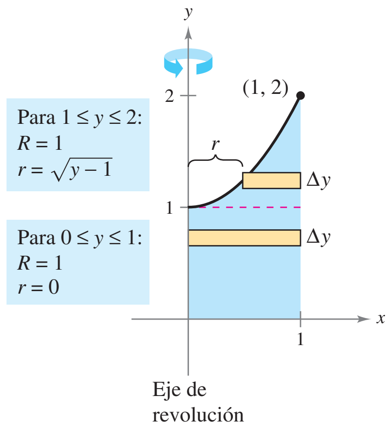
A menudo, es más conveniente usar un método que el otro. El ejemplo siguiente ilustra un caso en que el método de las capas es preferible.

EJEMPLO 3 Caso en que es preferible el método de las capas

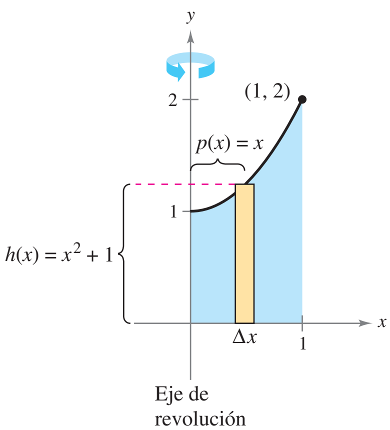
Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de

$$y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 1$$

alrededor del eje y.



a) Método de los discos



b) Método de las capas

Figura 7.33

Solución En el ejemplo 4 en la sección precedente, se observó que el método de las arandelas requiere dos integrales para determinar el volumen de este sólido. Ver la figura 7.33*a*.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 (1^2 - 0^2)\, dy + \pi \int_1^2 \left[1^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2\right] dy && \text{Aplicar el método de las arandelas o del anillo.}\\
&= \pi \int_0^1 1\, dy + \pi \int_1^2 (2 - y)\, dy && \text{Simplificar.}\\
&= \pi \Big[y\Big]_0^1 + \pi \left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 && \text{Integrar.}\\
&= \pi + \pi\left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

En la figura 7.33*b* se puede observar que el método de las capas requiere sólo una integral para encontrar el volumen.

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\, dx && \text{Aplicar el método de las capas o del anillo.}\\
&= 2\pi \int_0^1 x(x^2 + 1)\, dx\\
&= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 && \text{Integrar.}\\
&= 2\pi\left(\frac{3}{4}\right)\\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

Si la región del ejemplo 3 se hiciese girar alrededor de la recta vertical $x = 1$, ¿el sólido de revolución resultante habría tenido un volumen mayor o un volumen menor que el sólido en el ejemplo 3? Sin integrar, se puede razonar que el sólido resultante tendría un volumen menor porque "más" de la región que gira quedaría más cercana al eje de revolución. Para confirmar esto, se debe calcular la integral siguiente, la cual da el volumen del sólido.

$$V = 2\pi \int_0^1 (1 - x)(x^2 + 1)\, dx \qquad p(x) = 1 - x$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre los métodos de los discos y de las capas, ver el artículo "The Disk and Shell Method" de Charles A. Cable en *The American Mathematical Monthly*.

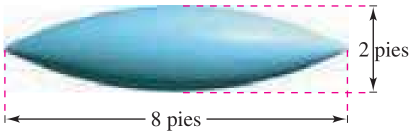


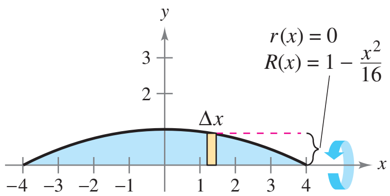
Figura 7.34

EJEMPLO 4 Volumen de un pontón

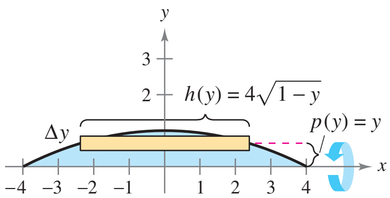
Un pontón se ha hecho en la forma mostrada en la figura 7.34. El pontón se diseña girando la gráfica de

$$y = 1 - \frac{x^2}{16}, \qquad -4 \le x \le 4$$

alrededor del eje x donde x y y son medidos en pies. Encontrar el volumen del pontón.



a) Método de los discos



b) Método de las capas

Figura 7.35

Solución Ver la figura 7.35*a* y usar

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-4}^{4} \left(1 - \frac{x^2}{16}\right)^2 dx && \text{Aplicar el método de los discos.} \\ &= \pi \int_{-4}^{4} \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{256}\right) dx && \text{Simplificar.} \\ &= \pi \left[x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{1\,280}\right]_{-4}^{4} && \text{Integrar.} \\ &= \frac{64\pi}{15} \approx 13.4 \text{ pies cúbicos} \end{aligned}$$

Probar usando la figura 7.35*b* para formular la integral para el volumen mediante el método de las capas. ¿La integral parece más complicada?

Para el método de las capas en el ejemplo 4, se tendría que resolver para x en términos de y en la ecuación

$$y = 1 - (x^2/16).$$

A veces, despejar x es muy difícil (o incluso imposible). En tales casos se debe usar un rectángulo vertical (de anchura Δx), haciendo así la variable de integración a x. La posición (horizontal o vertical) del eje de revolución determina el método a utilizar. Esto se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Caso en que es necesario el método de las capas

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^3 + x + 1$, $y = 1$, y $x = 1$ alrededor de la recta $x = 2$, como se muestra en la figura 7.36.

Solución En la ecuación $y = x^3 + x + 1$, no se puede resolver fácilmente para x en términos de y. (Ver la sección 3.8 en el método de Newton.) Por consiguiente, la variable de integración debe ser x, y elegir un rectángulo representativo vertical. Porque el rectángulo es paralelo al eje de revolución, usar el método de las capas y obtener

$$\begin{aligned} V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx &= 2\pi \int_0^1 (2-x)(x^3 + x + 1 - 1)\,dx && \text{Aplicar el método de las capas.} \\ &= 2\pi \int_0^1 (-x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x)\,dx && \text{Simplificar.} \\ &= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 && \text{Integrar.} \\ &= 2\pi\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) \\ &= \frac{29\pi}{15}. \end{aligned}$$

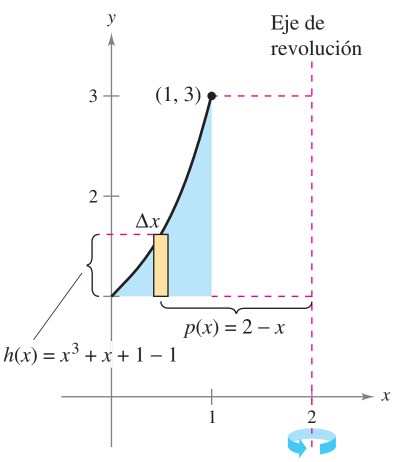
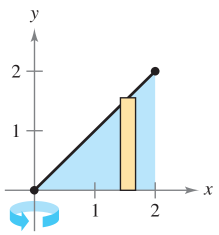


Figura 7.36

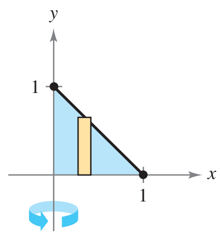
7.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 14, usar el método de las capas para formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido generado al girar la región plana alrededor del eje y.

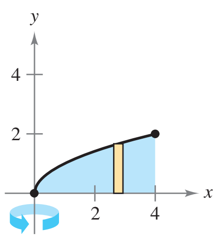
1. $y = x$



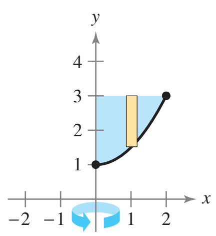
2. $y = 1 - x$



3. $y = \sqrt{x}$



4. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$



5. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 3$

6. $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 0, \quad x = 6$

7. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

8. $y = 4 - x^2, \quad y = 0$

9. $y = 4x - x^2, \quad x = 0, \quad y = 4$

10. $y = 3x, \quad y = 6, \quad x = 0$

11. $y = \sqrt{x - 2}, \quad y = 0, \quad x = 4$

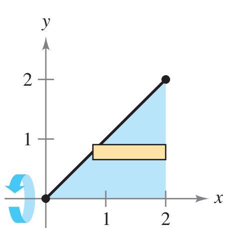
12. $y = -x^2 + 1, \quad y = 0$

13. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

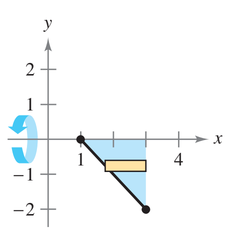
14. $y = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi$

En los ejercicios 15 a 22, usar el método de las capas para formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido generado al girar la región plana alrededor del eje x.

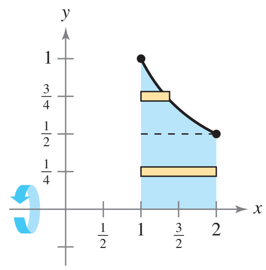
15. $y = x$



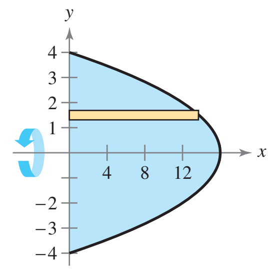
16. $y = 1 - x$



17. $y = \dfrac{1}{x}$



18. $x + y^2 = 16$



19. $y = x^3, \quad x = 0, \quad y = 8$

20. $y = x^2, \quad x = 0, \quad y = 9$

21. $x + y = 4, \quad y = x, \quad y = 0$

22. $y = \sqrt{x + 2}, \quad y = x, \quad y = 0$

En los ejercicios 23 a 26, usar el método de las capas para encontrar el volumen del sólido generado al girar la región plana alrededor de la recta dada.

23. $y = 4x - x^2, \quad y = 0$, alrededor de la recta $x = 5$

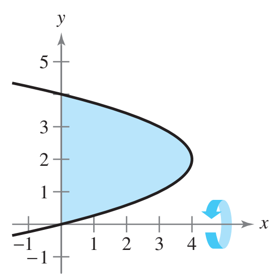
24. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4$, alrededor de la recta $x = 6$

25. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$, alrededor de la recta $x = 4$

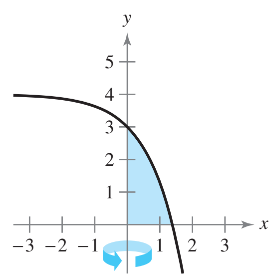
26. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$, alrededor de la recta $x = 2$

En los ejercicios 27 y 28, decidir si es más conveniente usar el método de los discos o el método de las capas para encontrar el volumen del sólido de revolución. Explicar el razonamiento. (No encontrar el volumen.)

27. $(y - 2)^2 = 4 - x$



28. $y = 4 - e^x$



En los ejercicios 29 a 32, usar el método de los discos *o* el de las capas para encontrar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones alrededor de cada recta dada.

29. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2$

a) el eje x *b)* el eje y *c)* la recta $x = 4$

30. $y = \dfrac{10}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 5$

a) el eje x *b)* el eje y *c)* la recta $y = 10$

31. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}, \quad x = 0, \quad y = 0$

a) el eje x *b)* el eje y *c)* la recta $x = a$

30. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$ (hipocicloide)

a) el eje x *b*) el eje y

En los ejercicios 33 a 36, *a*) usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la región plana limitada por las gráficas de las ecuaciones, y *b*) usar calculadora para aproximar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje *y*.

33. $x^{4/3} + y^{4/3} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, primer cuadrante

34. $y = \sqrt{1 - x^3}$, $y = 0$, $x = 0$

35. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2(x-6)^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$

36. $y = \dfrac{2}{1 + e^{1/x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

Para pensar **En los ejercicios 37 y 38, determinar qué valor se aproxima mejor al volumen del sólido generado al girar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones alrededor del eje *y*. (Hacer la selección con base en un esquema del sólido y *sin* realizar ningún cálculo.)**

37. $y = 2e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

a) $\frac{3}{2}$ *b*) -2 *c*) 4 *d*) 7.5 *e*) 15

38. $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$

a) 3.5 *b*) $-\frac{9}{4}$ *c*) 8 *d*) 10 *e*) 1

Desarrollo de conceptos

39. La región en la figura está girada alrededor de los ejes y las rectas indicadas. Ordenar los volúmenes de los sólidos resultantes desde el menor al mayor. Explicar el razonamiento.

a) eje x *b*) eje y *c*) $x = 4$

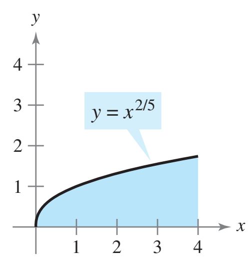


Figura para 39

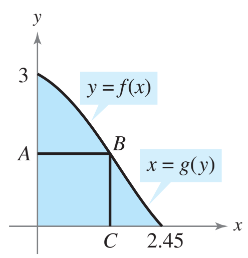


Figura para 40

40. *a*) Describir la figura generada por el giro del segmento AB alrededor del eje y (ver figura).

b) Describir la figura generada por el giro del segmento BC alrededor del eje y.

c) Suponer que la curva en la figura se puede describir como $y = f(x)$ o $x = g(y)$. Un sólido es generado por el giro de la región comprendida por la curva, $y = 0$ y $x = 0$ alrededor del eje y. Crear integrales para encontrar el volumen de este sólido usando el método de los discos y el método de las capas (no integrar).

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

En los ejercicios 41 y 42, dar un argumento geométrico que explique por qué las integrales tienen valores iguales.

41. $\pi \displaystyle\int_1^5 (x - 1)\, dx = 2\pi \int_0^2 y[5 - (y^2 + 1)]\, dy$

42. $\pi \displaystyle\int_0^2 [16 - (2y)^2]\, dy = 2\pi \int_0^4 x\left(\frac{x}{2}\right) dx$

43. Considerar un sólido que se genera al girar una región plana alrededor del eje y. Describir la posición de un rectángulo representativo al usar *a*) el método de las capas y *b*) el método de los discos para encontrar el volumen del sólido.

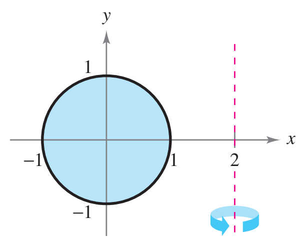
Para discusión

44. Considerar la región plana acotada por las gráficas $y = k$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$, donde $k > 0$ y $b > 0$. ¿Cuáles son las alturas y radios de los cilindros generados cuando esta región gira alrededor de *a*) el eje x y *b*) el eje y?

45. ***Diseño industrial*** Un sólido se genera al girar la región acotada por $y = \frac{1}{2}x^2$ y $y = 2$ alrededor del eje y. Un hueco, centrado a lo largo del eje de revolución, se taladra a través de este sólido tal que se pierde un cuarto del volumen. Encontrar el diámetro del hueco.

46. ***Diseño industrial*** Un sólido se genera al girar la región acotada por $y = \sqrt{9 - x^2}$ y $y = 0$ alrededor del eje y. Un hueco, centrado a lo largo del eje de revolución, se taladra a través de este sólido tal que se pierde un tercio del volumen. Encontrar el diámetro del hueco.

47. ***Volumen de un toro*** Un toro se forma al girar la región acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ alrededor de la recta $x = 2$ (ver la figura). Encontrar el volumen de este sólido en "forma de rosquilla". (*Sugerencia:* La integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ representa el área de un semicírculo.)



48. ***Volumen de un toro*** Repetir el ejercicio 47 para un toro formado al girar la región limitada por $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de la recta $x = R$, donde $r < R$.

En los ejercicios 49 a 52, la integral representa el volumen de un sólido de revolución. Identificar *a*) la región plana que se gira y *b*) el eje de revolución.

49. $2\pi \displaystyle\int_0^2 x^3\, dx$

50. $2\pi \displaystyle\int_0^1 y - y^{3/2}\, dy$

51. $2\pi \displaystyle\int_0^6 (y + 2)\sqrt{6 - y}\, dy$

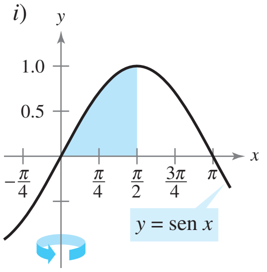
52. $2\pi \displaystyle\int_0^1 (4 - x)e^x\, dx$

53. *a*) Usar la derivada para verificar que

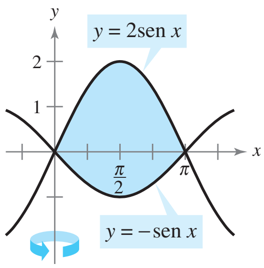
$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C.$$

b) Usar el resultado del apartado *a*) para encontrar el volumen del sólido generado al girar cada región plana alrededor del eje y.

i)



ii)

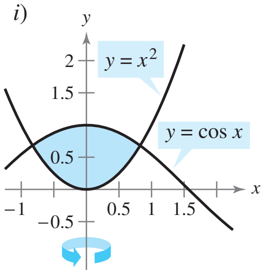


54. *a*) Usar la derivada para verificar que

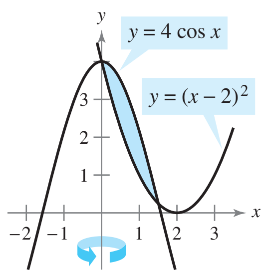
$$\int x \cos x\, dx = \cos x + x \operatorname{sen} x + C.$$

b) Usar el resultado del inciso *a*) para encontrar el volumen del sólido generado al girar cada región plana alrededor del eje y. (*Sugerencia:* Empezar aproximando los puntos de intersección.)

i)



ii)



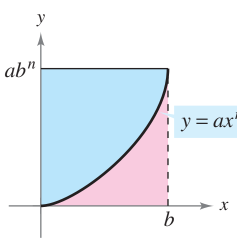
55. ***Volumen de un casquete de una esfera*** Sea una esfera de radio r que se corta por un plano, formando un casquete esférico de altura h. Mostrar que el volumen de este segmento es $\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

56. ***Volumen de un elipsoide*** Considerar el plano acotado por la región

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

donde $a > 0$ y $b > 0$. Mostrar que el volumen del elipsoide formado cuando esta región se gira alrededor del eje y es $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. ¿Cuál es el volumen cuando la región está girada alrededor del eje x?

57. ***Exploración*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = ax^n$ y $y = ab^n$ y $x = 0$ (ver la figura).



a) Encontrar la razón $R_1(n)$ entre el área de la región y el área del rectángulo circunscrito.

b) Encontrar $\lim\limits_{n\to\infty} R_1(n)$ y comparar el resultado con el área del rectángulo circunscrito.

c) Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región alrededor del eje y. Encontrar la razón $R_2(n)$ entre este volumen y el volumen del cilindro circular recto circunscrito.

d) Encontrar $\lim\limits_{n\to\infty} R_2(n)$ y comparar el resultado con el volumen del cilindro circunscrito.

e) Usar los resultados de los apartados *b*) y *d*) para hacer una conjetura sobre la forma de la gráfica de $y = ax^n$ $(0 \le x \le b)$ como $n \to \infty$.

58. ***Para pensar*** Emparejar cada integral con el sólido cuyo volumen representa, y dar las dimensiones de cada sólido.

a) Cono circular recto *b*) Toro *c*) Esfera
d) Cilindro circular recto *e*) Elipsoide

i) $2\pi \displaystyle\int_0^r hx\, dx$ *ii*) $2\pi \displaystyle\int_0^r hx\left(1 - \frac{x}{r}\right) dx$

iii) $2\pi \displaystyle\int_0^r 2x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ *iv*) $2\pi \displaystyle\int_0^b 2ax\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\, dx$

v) $2\pi \displaystyle\int_{-r}^r (R - x)\left(2\sqrt{r^2 - x^2}\right) dx$

59. ***El volumen de un cobertizo de almacenamiento*** Un cobertizo de almacenamiento tiene una base circular con diámetro de 80 pies (ver la figura). A partir del centro, su profundidad es medida cada 10 pies y registrada en la tabla.

x	0	10	20	30	40
Altura	50	45	40	20	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el volumen del cobertizo.

b) Observar que la recta del tejado consiste en dos segmentos de la recta. Encontrar las ecuaciones de los segmentos de la recta y usar la integración para encontrar el volumen del cobertizo.

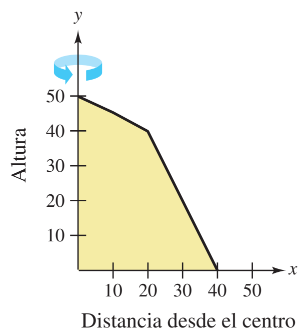


Figura para 59

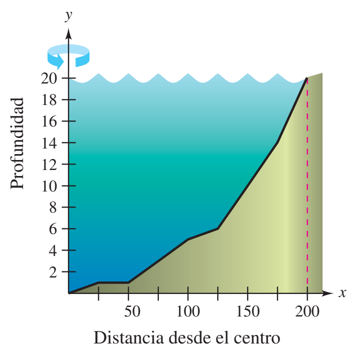


Figura para 60

60. ***Modelo matemático*** Un estanque es aproximadamente circular, con un diámetro de 400 pies (ver la figura). Empezando en el centro, la profundidad del agua es medida cada 25 pies y registrada en la tabla.

x	0	25	50	75	100	125	150	175	200
Profundidad	20	19	19	17	15	14	10	6	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el volumen de agua en el estanque.

b) Usar las capacidades de la regresión en una calculadora para encontrar un modelo cuadrático para las profundidades registradas en la tabla. Usar una herramienta de graficación para trazar las profundidades y la gráfica del modelo.

c) Usar las capacidades de la integración en una herramienta de graficación y el modelo en el apartado *b*) para aproximar el volumen de agua en el estanque.

d) Usar el resultado del apartado *c*) para aproximar el número de galones de agua en el estanque si un pie cúbico de agua es aproximadamente 7.48 galones.

61. Sean V_1 y V_2 los volúmenes de los sólidos que resultan cuando la región plana limitada por $y = 1/x$, $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, y $x = c$ $(c > \frac{1}{4})$ se gira alrededor del eje x y el eje y, respectivamente. Encontrar el valor de c para el cual $V_1 = V_2$.

62. La región acotada por $y = r^2 - x^2$, $y = 0$ y $x = 0$ está girada alrededor del eje y para formar un paraboloide. Un orificio, centrado a lo largo del eje de revolución, está taladrado alrededor de este sólido. El orificio tiene un radio k, $0 < k < r$. Encontrar el volumen del anillo resultante *a*) mediante integración con respecto a x y *b*) mediante integración con respecto a y.

63. Considerar la gráfica $y^2 = x(4 - x)^2$ (ver la figura). Encontrar los volúmenes de los sólidos que se generan cuando la espira de esta gráfica se gira alrededor *a*) del eje x, *b*) del eje y y *c*) la recta $x = 4$.

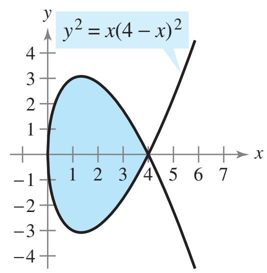


Figura para 63

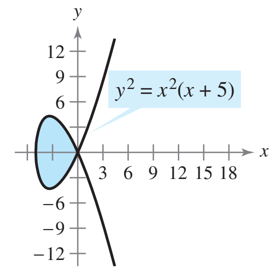


Figura para 64

64. Considerar la gráfica de $y^2 = x^2(x + 5)$ (ver la figura). Encontrar el volumen del sólido que se genera cuando la espira de esta gráfica se gira alrededor *a*) del eje x, *b*) del eje y y *c*) la recta $x = -5$.

PROYECTO DE TRABAJO

Saturno

La no esfericidad de Saturno Saturno es el menos esférico de los nueve planetas en nuestro sistema solar. Su radio ecuatorial es 60 268 kilómetros y su radio polar es 54 364 kilómetros. El color acentuado en la fotografía de Saturno se tomó por el Voyager 1. En la fotografía, la no esfericidad de Saturno es claramente visible.

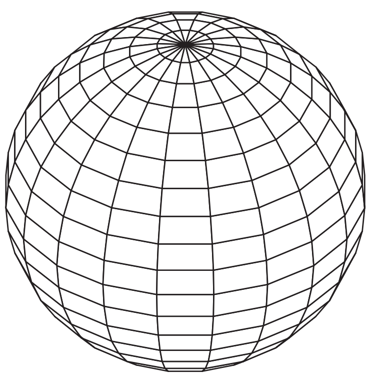
a) Encontrar la razón entre los volúmenes de la esfera y el elipsoide achatado mostrado abajo.

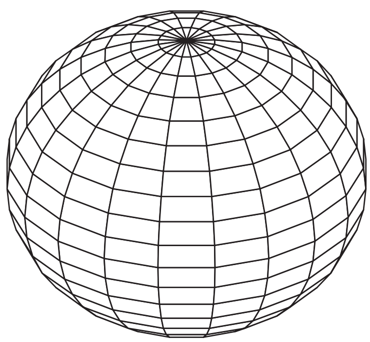
b) Si un planeta esférico tuviera el mismo volumen que Saturno, ¿qué radio tendría?

NSSDC

Modelo de computadora de un "Saturno esférico" cuyo radio ecuatorial es igual que su radio polar. La ecuación de la sección transversal que atraviesa el polo es

$$x^2 + y^2 = 60\,268^2.$$





Modelo de computadora de un "Saturno achatado" cuyo radio ecuatorial es mayor que su radio polar. La ecuación de la sección transversal que atraviesa el polo es

$$\frac{x^2}{60\,268^2} + \frac{y^2}{54\,364^2} = 1.$$

7.4 Longitud de arco y superficies de revolución

- **Encontrar la longitud del arco de una curva suave.**
- **Encontrar el área de una superficie de revolución.**

Longitud de arco

fin effa fiección fie fifian fafi infefirafefi fiefinifiafi fiara encfinfrar fafi ffinfiiffiefi fie arcfi fie fafi cfirvafi fi fafi áreafi fie fiifierficiefi fie revfifficiónfifin afi fififi caffiffifin arcfi ffin fiefifi enffi fie fina cfirvafi fie afirfifiifi a fifir fiefifi enffifi fie recfa cfifiafi ffinfiiffiefi ffin fiafiafi fifir fa fórfi fifa fie fa fiiffancia cfinficifia

$$d = \sqrt{\text{fi}x_2 - x_{\text{fi}}\text{ff}^2 + \text{fi}y_2 - y_{\text{fi}}\text{ff}^2}\ \text{fi}$$

Una cfirva **rectificable** efi afifieffa fifie fiene fina ffinfiiffifi fie arcfi finifafifie verá fifie fina cfinfiición fiififiicienfe fiara fifie fa firáfica fie fina ffinción f fiea recfificafifie enfre fa a fif fa a ffi fi fb b fif fb b ffi efi fifie f' fiea cfinfinfia fiifire fa a fi b ffiDicfia ffinción fiene fierivafia cfinfinfia fiifire fa a fi b ffi fifi firáfica en efi infervaffi fa a fi b fiefi fina **curva suave**fi

Christian Huygens (1629-1695)
El matemátic h landés Christian Huygens, invent r del rel j de péndul , y el matemátic esc cés James Greg ry (163 -1675), c ntribuyer n decisivamente a res lver el pr blema de hallar la l ngitud de arc de una curva rectificable.

Cfinfiifierar fina ffinción $y = f$ fixfi fafifie fiene fierivafia cfinfinfia en efi infervaffi fa a fi b ffi fie fifiefie afirfifiifi ar fa firáfica fie f fifir n fiefifi enffifi fie recfa cfififi fifinffifi ferfi inafefi ffin fieferfi inafiifi fifir fa fiarfición

$$a = x_{\text{fi}} < x_{\text{fi}} < x_2 < \ \text{fi fi fi} < x_n = b$$

cfifi fi fie fi fieffira en fa fififira fiffififiea $\Delta x_i = x_i - x_{i-\text{fi}}$ fi $\Delta y_i = yi - y_{i-\text{fi}}$ fifie fifiefie afirfifiifi ar fa ffinfiiffifi fie fa firáfica fifir

$$\begin{aligned}
s &\approx \sum_{i=\text{fi}}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-\text{fi}})^2 + (y_i - y_{i-\text{fi}})^2} \\
&= \sum_{i=\text{fi}}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\
&= \sum_{i=\text{fi}}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2} \\
&= \sum_{i=\text{fi}}^{n} \sqrt{\text{fi} + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,(\Delta x_i)\text{fi}
\end{aligned}$$

fiffa afirfifiifi ación fiarece fier fi effir afi fiacer $\|\Delta\| \to$ fi fi $n \to \infty$ ffiAfí fi fa ffinfiiffifi fie fa firáfica efi

$$s = \lim_{\|\Delta\| \to \text{fi}} \sum_{i=\text{fi}}^{n} \sqrt{\text{fi} + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,(\Delta x_i)\text{fi}$$

Pfirfifie f' fixfiefiifie fiara fififi x en fi $x_{i-\text{fi}}$ fi x_i ffiefifiefirefi a fie vaffir fi efifi fiaranfiia fa efiiffencia fie c_i en fi $x_{i-\text{fi}}$ fi x_i fi fiafifie

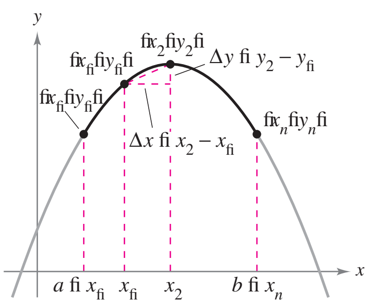
$$f(x_i) - f(x_{i-\text{fi}}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-\text{fi}})$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)\text{fi}$$

Pfirfifie f' efi cfinfinfia en fa a fi b ffifie fiene fifie $\sqrt{\text{fi} + \text{fi}f'(x)\text{ff}^2}$ fafi fiién efi cfinfinfia ffi fifir cfinfiifi fiiienfe infefirafifiefien fa a fi b ffi fifie ifi fiica fifie

$$\begin{aligned}
s &= \lim_{\|\Delta\| \to \text{fi}} \sum_{i=\text{fi}}^{n} \sqrt{\text{fi} + [f'(c_i)]^2}\,(\Delta x_i) \\
&= \int_a^b \sqrt{\text{fi} + [f'(x)]^2}\,dx
\end{aligned}$$

fifinfie s efi ffiafi afia fa **longitud del arco** fie f enfre a fi $b$fi



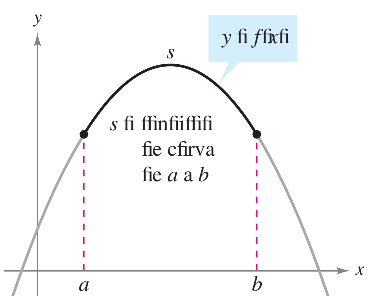


Figura 7.37

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para ver cófi fi fa ffinfiiffifi fie arcfi fifiefie fier fifiafia fiara fiefinir fafi ffinfi cifinefi frififinfifi éfricaffiver efiarfícfiffi "Trififinfifi efrfi fi efifiirefi Cafcfiffififi fifi fi ice fierfia" fie fi vefi fi ieverfieffien ffifi *UMAP Modules*fi

DEFINICIÓN DE LONGITUD DE ARCO

fiea fa ffinción fiafia fifir $y = f$fixfififie refirefienfe fina cfirva fifiave en efiinfervaffi fi$a$fi$b$ffi La **longitud de arco** fie f enfre a fi b efi

$$s = \int_a^b \sqrt{\text{fi} + [f'(x)]^2}\, dx\text{fi}$$

fiifi ifarfi enfefifiara fina cfirva fifiave fiafia fifir $x = g$fi$y$ffifia **longitud de arco** fie g enfre c fi d efi

$$s = \int_c^d \sqrt{\text{fi} + [g'(y)]^2}\, dy\text{fi}$$

Pfirfifie fa fiefinición fie ffinfiiffifi fie arcfi fifiefie afificarfie a fina ffinción fineaffiefififififie cfifi firfifiar fifie effia nfieva fiefinición fie cfirreffifinfie cfin fa fórfi fifa effiánfiar fie fa fiiffiancia fiara fa ffinfiiffifi fie fin fiefifi enffi fie fa recfafififfi fie fi fiefifira en efiefefi fiffi fifi

EJEMPLO 1 Longitud de un segmento de recta

fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fie fix_{fi}fiy_{fi}fia fi$x_2$fi$y_2$fien fa firáfica fie $f$fi$x$fi$= mx + b$ficfifi fi fie fi fiefifira en fa fififira fifififi

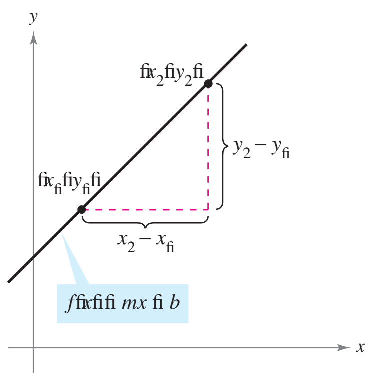
Solución Pfirfifie

$$m = f'(x) = \frac{y_2 - y_{\text{fi}}}{x_2 - x_{\text{fi}}}$$

fie fiene fifie

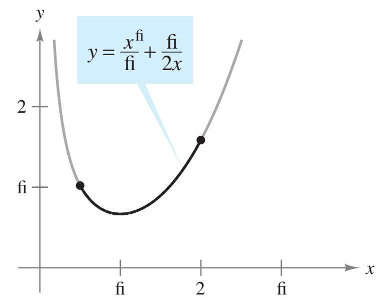
$$
\begin{aligned}
s &= \int_{x_{\text{fi}}}^{x_2} \sqrt{\text{fi} + [f'(x)]^2}\, dx && \text{fiórfi fifa fiara ffinfiiffifi fie arcfi}\\
&= \int_{x_{\text{fi}}}^{x_2} \sqrt{\text{fi} + \left(\frac{y_2 - y_{\text{fi}}}{x_2 - x_{\text{fi}}}\right)^2}\, dx\\
&= \sqrt{\frac{(x_2 - x_{\text{fi}})^2 + (y_2 - y_{\text{fi}})^2}{(x_2 - x_{\text{fi}})^2}}\,(x)\Big]_{x_{\text{fi}}}^{x_2} && \text{finfefirar fi fiifi fifificarfi}\\
&= \sqrt{\frac{(x_2 - x_{\text{fi}})^2 + (y_2 - y_{\text{fi}})^2}{(x_2 - x_{\text{fi}})^2}}\,(x_2 - x_{\text{fi}})\\
&= \sqrt{(x_2 - x_{\text{fi}})^2 + (y_2 - y_{\text{fi}})^2}
\end{aligned}
$$

fifie efi fa fórfi fifa fiara fa fiiffiancia enfre fifi fifinffifi en efifianfi



La l ngitud de arc de la gráfica f de (x_1, y_1) a (x_2, y_2) es igual que la fórmula estándar de la distancia
Figura 7.38

TECNOLOGÍA Lafiinfefirafiefifiefinifiafififie refirefienfen fa ffinfiiffifi fie arcfi a fi enfifi ffin fi fifi fiificifiefi fie evaffiarfifin effia fiección fie firefienfan efiefi fiffififin efifirófiifi fi cafiifi fiffificfin fafi fécnicafi fie infefiración fi áfi avanfiafiafifie fififirán enfrenfar ffi firfififiefi afi fie ffinfiiffifi fie arcfi fi áfi fiificiefiffi fi nfrefianffi recfirfiar fifie fiefi fire fie fifiefie fifiar fin firfifirafi a fie infefiración nfifi éricfi fiara afirfififi ar fina ffinfiiffifi fie arcfiPfir efefi fiffi fifiar efirecfirffi fie *integración numérica* fie fina cafcfifafifira fiara afirfififi ar fafiffinfiiffifiefi fie arcfi en ffifi efefi fiffifi 2 fi fifi



L ngitud de arc de la gráfica de y en $[\frac{1}{2}, 2]$
Figura 7.39

EJEMPLO 2 Cálculo de la longitud de arco

fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fiefi

$$y = \frac{x^{fi}}{fi} + \frac{fi}{2x}$$

en efiinfervaffi fi$\frac{1}{2}$fi2ffficfifi fi fie fi fieffira en fa fiffira ffiffifi

Solución Ufianfifi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{fix^2}{fi} - \frac{fi}{2x^2} = \frac{fi}{2}\left(x^2 - \frac{fi}{x^2}\right)$$

fie fiene fina ffinfiiffifi fie arcfi fie

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{fi + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_{fi/2}^{2} \sqrt{fi + \left[\frac{fi}{2}\left(x^2 - \frac{fi}{x^2}\right)\right]^2}\,dx && \text{fiórfi fiffa fie ffinfiiffifi fie arcfi} \\ &= \int_{fi/2}^{2} \sqrt{\frac{fi}{fi}\left(x^{fi} + 2 + \frac{fi}{x^{fi}}\right)}\,dx \\ &= \int_{fi/2}^{2} \frac{fi}{2}\left(x^2 + \frac{fi}{x^2}\right)dx && \text{fiifi fifificarfi} \\ &= \frac{fi}{2}\left[\frac{x^{fi}}{fi} - \frac{fi}{x}\right]_{fi/2}^{2} && \text{finfefirarfi} \\ &= \frac{fi}{2}\left(\frac{fifi}{fi} + \frac{fifi}{2fi}\right) \\ &= \frac{fifi}{fifi}fi \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Cálculo de la longitud de arco

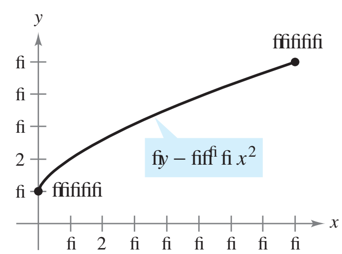
fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fiefifi$y$ − fiff^{fi} = x^2 en efiinfervaffi ffifififfificfifi fi fie fi fieffira en fa fififira fiffifi

Solución fifi fiefiar reffiffivienfifi fiara x en férfi infifi fie $y$fi$x = \pm$ fi$y$ − fiff$^{fi/2}$fifi fefiir efivaffir fififififivfi fie x firfififice

$$\frac{dx}{dy} = \frac{fi}{2}(y - fi)^{fi/2}fi$$

fifiinfervaffi x ffififificfirreffifinfie afiinfervaffi y ffifififi fi fa ffinfiiffifi fie arcfi efi

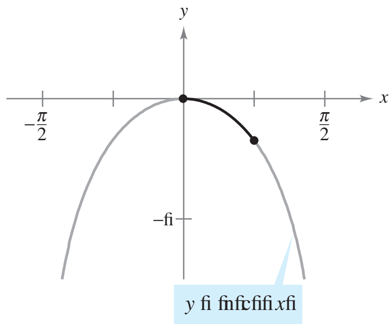
$$\begin{aligned} s &= \int_c^d \sqrt{fi + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_{fi}^{fi} \sqrt{fi + \left[\frac{fi}{2}(y - fi)^{fi/2}\right]^2}\,dy && \text{fiórfi fiffa fiara ffinfiiffifi fie arcfi} \\ &= \int_{fi}^{fi} \sqrt{\frac{fi}{fi}y - \frac{fi}{fi}}\,dy \\ &= \frac{fi}{2}\int_{fi}^{fi} \sqrt{fiy - fi}\,dy && \text{fiifi fifificarfi} \\ &= \frac{fi}{fifi}\left[\frac{(fiy - fi)^{fi/2}}{fi/2}\right]_{fi}^{fi} && \text{finfefirarfi} \\ &= \frac{fi}{2fi}(fifi^{fi/2} - fi^{fi/2}) \\ &\approx fififififi \end{aligned}$$



L ngitud de arc de la gráfica de y en [0,]
Figura 7.40

EJEMPLO 4 Cálculo de la longitud de arco

fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fie $y =$ finfcfifixfifie $x =$ fi fiara $x = \pi/$fi cfifi fi fie fi fiefffra en fa fififira fifififi



L ngitud de arc de la gráfica de y en $[0, \frac{\pi}{4}]$

Figura 7.41

Solución Ufianfifi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\text{fien } x}{\text{cfifi } x} = -\text{fian } x$$

fie fiene fina ffinfiiffifi fie arcfi fie

$$\begin{aligned}
s &= \int_a^b \sqrt{\text{fi} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{\text{fi}}^{\pi/\text{fi}} \sqrt{\text{fi} + \text{fian}^2 x}\, dx && \text{fiórfi fifa fiara ffinfiiffifi fie arcfi} \\
&= \int_{\text{fi}}^{\pi/\text{fi}} \sqrt{\text{fiec}^2 x}\, dx && \text{ffienfifiafi frififinfifi éfricafi} \\
&= \int_{\text{fi}}^{\pi/\text{fi}} \text{fiec } x\, dx && \text{fiifi fifificarfi} \\
&= \Big[\text{fin}\left|\text{fiec } x + \text{fian } x\right|\Big]_{\text{fi}}^{\pi/\text{fi}} && \text{finfefirarfi} \\
&= \text{fin}\left(\sqrt{2} + \text{fi}\right) - \text{fin fi} \\
&\approx \text{fififififi}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Longitud de un cable

Un cafife efécfricfi cfieffia enfre fifififfirrefifie efffán a 2fifi fiiefifie fiiffanciafcfifi fi fie fi fieffra en fa fififira fifi2fifificafife fffi a fa ffirfi a fie fina cafenaria cfiffa ecfiación efi

$$y = \text{fifi}(e^{x/\text{fififi}} + e^{-x/\text{fififi}}) = \text{fififi cfififi} \frac{x}{\text{fififi}}\text{fi}$$

fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fieficafife enfre fafi fififi ffirrefi

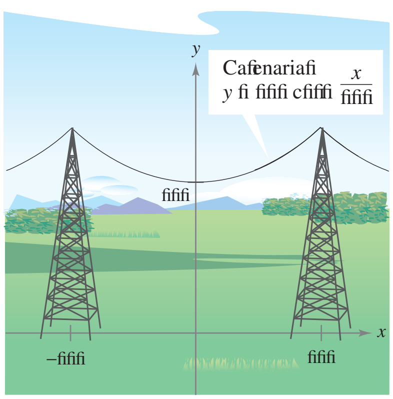


Figura 7.42

Solución Pfirfiie $y' = \frac{\text{fi}}{2}(e^{x/\text{fififi}} - e^{-x/\text{fififi}})$fififiefie eficrifiir

$$(y')^2 = \frac{\text{fi}}{\text{fi}}(e^{x/\text{fifi}} - 2 + e^{-x/\text{fifi}})$$

fi

$$\text{fi} + (y')^2 = \frac{\text{fi}}{\text{fi}}(e^{x/\text{fifi}} + 2 + e^{-x/\text{fifi}}) = \left[\frac{\text{fi}}{2}(e^{x/\text{fififi}} + e^{-x/\text{fififi}})\right]^2 \text{fi}$$

Pfir cfinfifififienfefifa ffinfiiffifi fie arcfi fieficafife efi

$$\begin{aligned}
s &= \int_a^b \sqrt{\text{fi} + (y')^2}\, dx = \frac{\text{fi}}{2}\int_{-\text{fififi}}^{\text{fififi}} (e^{x/\text{fififi}} + e^{-x/\text{fififi}})\, dx && \text{fiórfi fifa fiara ffinfiiffifi fie arcfi} \\
&= \text{fifi}\Big[e^{x/\text{fififi}} - e^{-x/\text{fififi}}\Big]_{-\text{fififi}}^{\text{fififi}} && \text{finfefirarfi} \\
&= \text{fififi}\left(e^{2/\text{fi}} - e^{-2/\text{fi}}\right) \\
&\approx 2\text{fifi fiiefifi}
\end{aligned}$$

Área de una superficie de revolución

fin fafi feccifinefi fif2 fi fifififa infefiración ffie fifafia fiara cafcfifar efivfififi en fie fin fiófifi fie revfifficiónfifie efiffifiiará fin firficefiifi ienffi fiara encfinfrar efiárea fie fina fifiierficie fie revfifficiónfi

DEFINICIÓN DE SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

fii fa firáfica fie fina ffinción cfinfinfia fiira afrefiefifir fie fina recfafifa fifiierficie refiffifanfe efi fina **superficie de revoluciónfi**

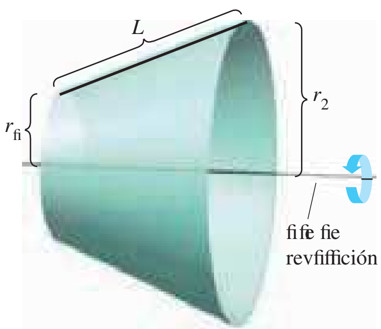


Figura 7.43

fifiárea fie fina fifiierficie fie revfiffición fie fieriva fie fa fiórfi fifa fiara efiárea fie fa fifiierficie fafera fifie fin frfincfi fie fin cfinfi refifinfifi recfifiiCfinfiifierar efifiefifi enffi fie fa recfa en fa fififira fifififififinfie L efi fa ffinfiiffifi fiefiefifi enffi fie fa recfafi r_{fi} efi efirafiifi en efiefifrefi fi ififiierfifi fiefiefifi enffi fie fa recfafifi r_2 efi efirafiifi en efiefifrefi fi fierecfifi fiefifiefifi enffi fie fa recfafiCfianfifi efifiefifi enffi fie fa recfa fiira afrefiefifir fie fifi efe fie revfifficiónfifirfi a fin frfincfi fie fin cfinfi refifinfifi recfifiicfin

$$S = 2\pi r L \qquad \text{Área fafera fifiefifirfincfifi}$$

n e

$$r = \frac{}{2}(r \;\; + r_2) \qquad \text{a i e i e r nc}$$

ffin efiefercicifi fi2fife fiifie verificar fa fiórfi fifa fiara Sffi

fifififiner fifie fa firáfica fie fina ffinción $f$fi fiene fina fierivafia cfinfinfia en efi infervaffi fa$a$fi$b$ffifiifie fe fiira afrefiefifir fiefiefe x fiara ffirfi ar fina fifiierficie fie revfifficiónficfifi fi fe fi fiefifra en fa fififira fifififiifiea Δ fina fiarfición fie fa$a$fi$b$fficfin fifiinfervaffifi fie ancfiifra Δx_ifi finfincefi efifiefifi enffi fie fa recfa fie ffinfiiffifi

$$\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

fienera fin frfincfi fie fin cfinfifiiea r_i efirafiifi fi efiifi fie effe frfincfifiPfir efifiefirefi a fiefivaffir inferfi efiifififin fiinffi d_i efiifife fien efi $i$éfiifi fi fifiinfervaffifi fafifie $r_i = f$ fi$d_i$ffifi fiárea fie fa fifiierficie fafera fiΔS_i fiefifrfincfi efi

$$\begin{aligned}\Delta S_i &= 2\pi r_i \, \Delta L_i \\ &= 2\pi f(d_i)\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\ &= 2\pi f(d_i)\sqrt{\text{fi} + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i \text{fi}\end{aligned}$$

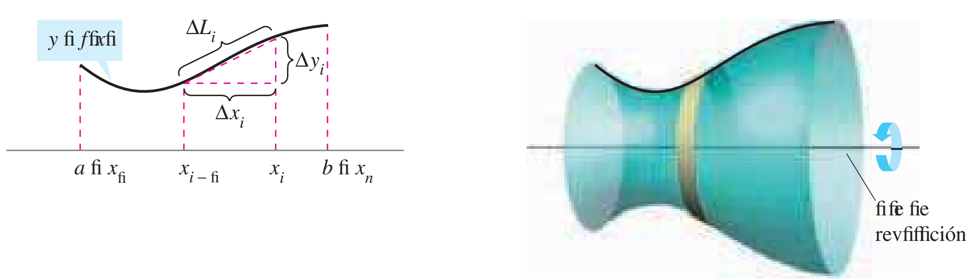
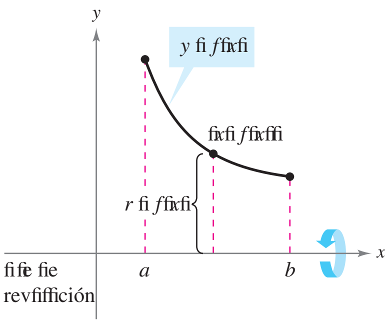


Figura 7.44



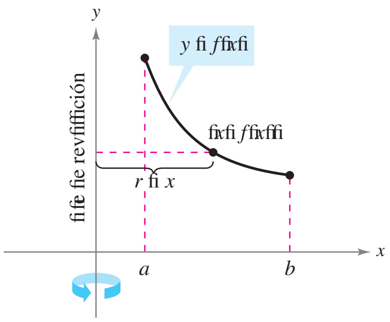


Figura 7.45

Pfir efiefirefi a fiefivaffir fi efiifififin fifinffi c_i efiiffie en fix$_{i-fi}$fix$_i$fi fiafifie

$$\begin{aligned} f'(c_i) &= \frac{f(x_i) - f(x_{i-fi})}{x_i - x_{i-fi}} \\ &= \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}fi \end{aligned}$$

Afífi $\Delta S_i = 2\pi f$fid$_i$fi$\sqrt{fi + fif'fic_i fiff^2}\,\Delta x_i$fi fi efi área fie fa fffifierficie fffafi fifiefie afirfifiifi arfie fifir

$$S \approx 2\pi \sum_{i=fi}^{n} f(d_i)\sqrt{fi + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i fi$$

Pfiefie fi fiffrarfie fifie efiffi ife fiefifi iefi firfi fie fa fierecfia cfifi fi $\|\Delta\| \to$ fi fi$n \to \infty$fiefi

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{fi + [f'(x)]^2}\,dx fi$$

De fina fi anera fifi ifarfifii fa firáfica fie f fie fiira afrefiefifir fiefiefe $y$fienffincefi S efi

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{fi + [f'(x)]^2}\,dx fi$$

fin afi fiafi fórfi fifafi fiara Sfife fifiefien cfinfiifierar ffifi firfififficffifi $2\pi\,f$fixfi fi $2\pi x$ cfifi fi fa cirficfinferencia fieficírcfiffi frafiafia fifir fin fifinffi fixfiyfien fa firáfica fie f afifiirar afrefiefifir fiefi efe x fi y fffifira fifififfifin fin caffi efirafiifi efi $r = f$fixffifi en efififrfi caffi efirafiifi efi $r = x$fi fifi fi áffi affififfanfifi r afirfifiiafiafi enfefife fifiefie fienerafifiar fa fórfi fifa fiara efi área fie fa fffifierficie fiara cfifirir *cualquier* efe fifirififinfafifi verficafie revffficiónficfifi fi fe infiica en fa fiefinición fifififienfefi

---

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

fiea $y = f$fixficfin fierivafia cfinfinfia en efiinfervaffi fi$a$fi$b$fffifi fiárea S fie fa fffifierficie fie refivfffición ffirfi afia afifiirar fa firáfica fie f afrefiefifir fie fin efe fifirififinfafifi verficafiefi

$$S = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{fi + [f'(x)]^2}\,dx \qquad \text{\textcolor{magenta}{y efi fina ffinción fie $x$fi}}$$

fifinfie $r$fixfiefi fa fiiffancia enfre fa firáfica fie f fi efiefe fie revfffiiciónfifii $x = g$fiyfien efi infervaffi fi$c$fi$d$ffienffincefi efiárea fie fa fffifierficie efi

$$S = 2\pi \int_c^d r(y)\sqrt{fi + [g'(y)]^2}\,dy \qquad \text{\textcolor{magenta}{x efi fina ffinción fie $y$fi}}$$

fifinfie $r$fiyfiefi fa fiiffancia enfre fa firáfica fie g fi efiefe fie revfffiiciónfi

---

Lafi fórfi fifafi en effa fiefinición a vecefi fe eficrifien cfifi fi

$$S = 2\pi \int_a^b r(x)\,ds \qquad \text{y efi fina ffinción fie $x$fi}$$

fi

$$S = 2\pi \int_c^d r(y fi ds \qquad \text{x efi fina ffinción fie $y$fi}$$

fifinfie $ds = \sqrt{fi + [f'(x)]^2}\,dx$ fi $ds = \sqrt{fi + [g'(y)]^2}\,dy$firefifiecfivafi enfefi

EJEMPLO 6 Área de una superficie de revolución

fincfinfrar efiárea fie fa fiifierficie fiirfi afia afifiirar fa firáfica fie

$$f(x) = x^{fi}$$

en efiinfervafi fifififiafifiirar afrefiefifir fiefiefe $x$ficfifi fi fie fi fiefira en fa fififira fifififi

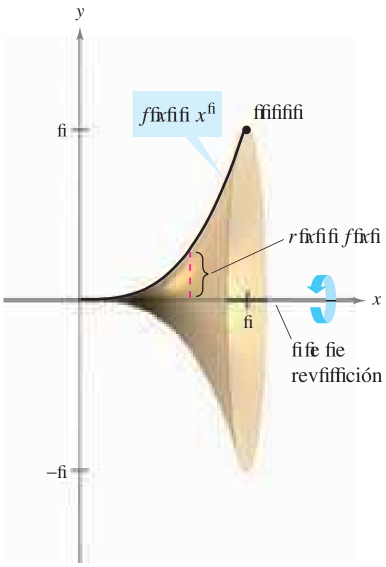


Figura 7.46

Solución La fiififancia enfre efiefe x fi fa firáfica fie f efi $r$fixfi = f fixfifi fifirfiefie $f\,'$fixfi = fix^2fi efiárea fie fa fiifierficie efi

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_a^b r(x)\sqrt{fi + [f'(x)]^2}\,dx && \text{fiórfi fifa fiefiárea fie fina fiifierficiefi}\\
&= 2\pi\int_{fi}^{fi} x^{fi}\sqrt{fi + (fix^2)^2}\,dx\\
&= \frac{2\pi}{fifi}\int_{fi}^{fi}(fifix^{fi})(fi + fix^{fi})^{fi/2}\,dx && \text{fifi fifificarfi}\\
&= \frac{\pi}{fifi}\left[\frac{(fi + fix^{fi})^{fi/2}}{fi/2}\right]_{fi}^{fi} && \text{fnfefirarfi}\\
&= \frac{\pi}{2fi}(fifi^{fi/2} - fi)\\
&\approx fifififi
\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Área de una superficie de revolución

fincfinfrar efiárea fie fa fiifierficie fiirfi afia afifiirar fa firáfica fie

$$f(x) = x^2$$

en efiinfervafi $\left[fifi\sqrt{2}\right]$ afrefiefifir fiefiefe $y$ficfifi fi fie fi fiefira en fa fififira fifififi

Solución fin efife cafifiifa fiififancia enfre fa firáfica fie f fi efiefe y efi $r$fixfi = $x$fiUfanfifi $f\,'$fixfi = 2$x$fife fifiefie fiefierfi inar fiie efiárea fie fa fiifierficie efi

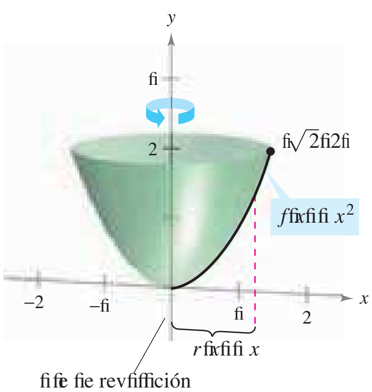


Figura 7.47

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_a^b r(x)\sqrt{fi + [f'(x)]^2}\,dx && \text{fiórfi fifa fiefiárea fie fina fiifierficiefi}\\
&= 2\pi\int_{fi}^{\sqrt{2}} x\sqrt{fi + (2x)^2}\,dx\\
&= \frac{2\pi}{fi}\int_{fi}^{\sqrt{2}}(fi + fix^2)^{fi/2}(fix)\,dx && \text{fifi fifificarfi}\\
&= \frac{\pi}{fi}\left[\frac{(fi + fix^2)^{fi/2}}{fi/2}\right]_{fi}^{\sqrt{2}} && \text{fnfefirarfi}\\
&= \frac{\pi}{fi}\left[(fi + fi)^{fi/2} - fi\right]\\
&= \frac{fifi\pi}{fi}\\
&\approx fififififi
\end{aligned}$$

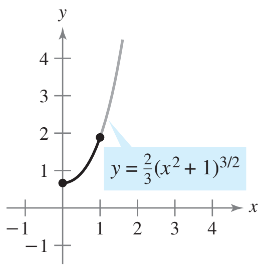
7.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, encontrar la distancia entre los puntos usando *a*) la fórmula de la distancia y *b*) la integraciónfi

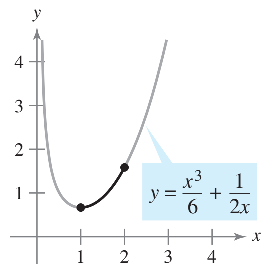
1. fififififi fififififi **2.** fifi2fifi fififififi

En los ejercicios 3 a 16, encontrar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicadofi

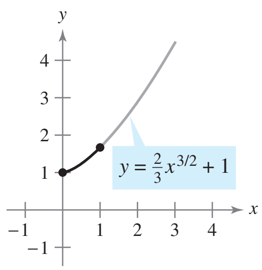
3. $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$



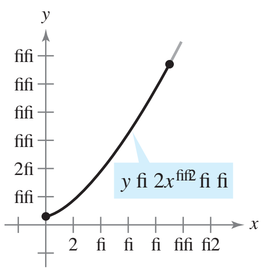
4. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$



5. $y = \frac{2}{3}x^{3/2} + 1$



6. $y = 2x^{fi/2} + fi$



7. $y = \frac{3}{2}x^{2/3}, \quad [1, 8]$

8. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}, \quad [1, 3]$

9. $y = \frac{x^{fi}}{fifi} + \frac{fi}{fix^{fi}}$fi [2fifi]

10. $y = \frac{fi}{2}x^{2/fi} + fifi$ [fifi2fi]

11. $y = $ fin(fien x)fi $\left[\frac{\pi}{fi}fi\frac{fi\pi}{fi}\right]$

12. $y = $ fin(cfifi x)fi $\left[fifi\frac{\pi}{fi}\right]$

13. $y = \frac{fi}{2}(e^x + e^{-x})$fi [fifi2]

14. $y = $ fin$\left(\frac{e^x + fi}{e^x - fi}\right)$fi [fin 2fifin fi]

15. $x = \frac{fi}{fi}(y^2 + 2)^{fi/2}$fi $fi \le y \le fi$

16. $x = \frac{fi}{fi}\sqrt{y}(y - fi)$fi $fi \le y \le fi$

En los ejercicios 17 a 26, *a*) representar la función, resaltando la parte indicada por el intervalo dado, *b*) encontrar una integral definida que represente la longitud de arco de la curva sobre el intervalo indicado y observar que la integral no puede evaluarse con las técnicas estudiadas hasta ahora y *c*) usar las capacidades de la integración en una calculadora para aproximar la longitud de arcofi

17. $y = fi - x^2$fi fi x 2

18. $y = x^2 + x - 2$fi $-2 \le x \le fi$

19. $y = \frac{fi}{x}$fi $fi \le x \le fi$

20. $y = \frac{fi}{x + fi}$fi $fi \le x \le fi$

21. $y = $ fien $x$fi $fi \le x \le \pi$

22. $y = $ cfifi $x$fi $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

23. $x = e^{-y}$fi $fi \le y \le 2$

24. $y = $ fi $x$fi $fi \le x \le fi$

25. $y = 2$ arcfian $x$fi $fi \le x \le fi$

26. $x = \sqrt{fifi - y^2}$fi $fi \le y \le fi$

Aproximación **En los ejercicios 27 y 28, determinar qué valor se aproxima mejor a la longitud de arco representada por la integral. (Hacer la selección con base en un esquema del arco y *no* realizando cualquier cálculo.)**

27. $\int_{fi}^{2} \sqrt{fi + \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{fi}{x^2 + fi}\right)\right]^2}\, dx$

*a*fi 2fi *b*fi fi *c*fi 2 *d*fi $-$fi *e*fi fi

28. $\int_{fi}^{\pi/fi} \sqrt{fi + \left[\frac{d}{dx}(\text{fian } x)\right]^2}\, dx$

*a*fi fi *b*fi -2 *c* fi fi *d*fi $\frac{fi\pi}{fi}$ *e*fi fi

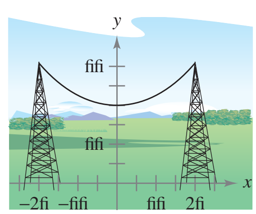
Aproximación **En los ejercicios 29 y 30, aproximar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo [0, 4] de cuatro maneras. *a*) Usar la fórmula de la distancia para encontrar la distancia entre los puntos terminales del arco. *b*) Usar la fórmula de la distancia para encontrar las longitudes de los cuatro segmentos de recta que conectan los puntos en el arco cuando $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$ y $x = 4$. Encontrar la suma de las cuatro longitudes. *c*) Usar la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral que dé la longitud del arco indicada. *d*) Usar las capacidades de la integración de una calculadora para aproximar la integral que dé la longitud del arco indicadafi**

29. $f(x) = x^{fi}$ **30.** $f(x) = (x^2 - fi)^2$

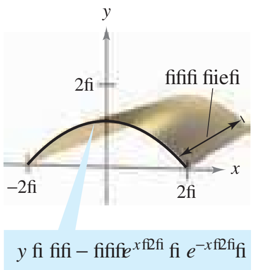
31. ***Longitud de una catenaria*** Cafifiefiefécfricfififififienfiififienfre fifififirrefifirfi an fina cafenaria fiver fifirafi fiefafia fi efiianfe fa ecfiación

$$y = 20 \cosh \frac{x}{20}, \quad -20 \le x \le 20$$

fifinfie x fi y fie fi ifien en fi efrfifiLa fiefiaración fie fafi firrefi efi fie fifi fi efrfififincfinfrar fa ffinfiifi fiefiicafie fififienfiififi



32. ***Área de un techo*** Un firanerfi fiene fififi fiiefi fie farfifi fi fifi fie ancfifi fver fa fififirafifiUna fección franfiverfafifiefiefafifi efi fina cafenaria inverfifia $y = fifi - fififie^{x/2fi} + e^{-x/2fi}$fifi fincfinfrar efi núfi erfi fie fiiefi cfiafirafififi fie fecfifi en efifiranerfifi



33. ***Longitud del arco Gateway*** fifiArcfi fie fi afefi afi en fififiLfifiifi fi ififififirifie fi fifiefa fifir

$y = fififififififi - fififififi2 \text{ cfifi } fififififififififi x$fi

$-2fififi22fifi \le x \le 2fififi22fififi$

fifier fa fección fififiPrfifiecfifi fie frafiafifiArcfi fifiLfifiifi fi nfi cfinfrar fa ffinfiififi fie efifa cfirva fver fa fififirafifi

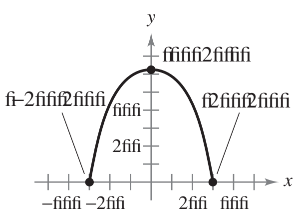


Figura para 33

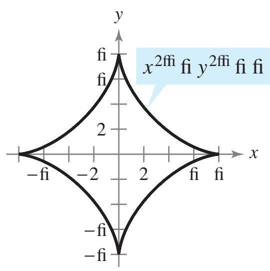


Figura para 34

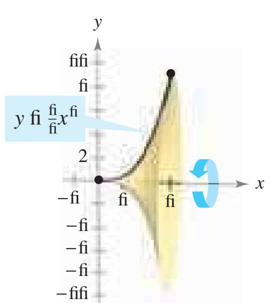
34. ***Astroide*** fincfinfrar fa ffinfiififi fififafie fa firáfica fiefiafifrfiifie $x^{2/fi} + y^{2/fi} = fifi$

35. fincfinfrar fa ffinfiififi fie arcfi fiefifie fififififi en fienfififi fifirarifi fiafifia $(2fi\sqrt{fi})$ a fifi farfifi fieficírcfififi $x^2 + y^2 = fifi$

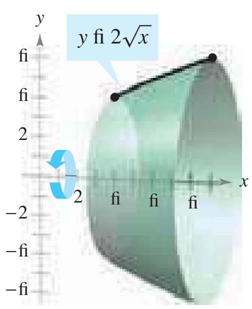
36. fincfinfrar fa ffinfiififi fie arcfi fiefifie fi−fififififi en fienfififi fifirarifi fiafifia fififififia fifi farfifi fieficírcfififi $x^2 + y^2 = 2fifi$ fifirar fiie efi refifififiafifi efi fin cfiarfifi fie fa circfinferencia fieficírcfififi

En los ejercicios 37 a 42, formular y evaluar la integral definida para el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje ***x*****fi**

37. $y = \frac{fi}{fi}x^{fi}$



38. $y = 2\sqrt{x}$



39. $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}, \quad 1 \le x \le 2$

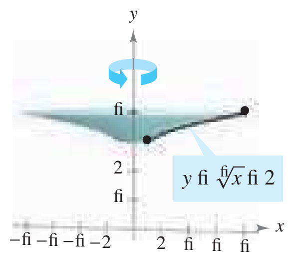
40. $y = \dfrac{x}{2}, \quad 0 \le x \le 6$

41. $y = \sqrt{4 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1$

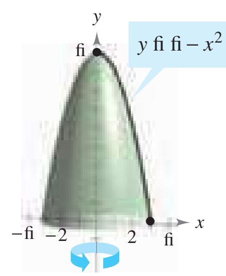
42. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad -2 \le x \le 2$

En los ejercicios 43 a 46, formular y evaluar la integral definida para el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje ***y*****fi**

43. $y = \sqrt[fi]{x} + 2$



44. $y = fi - x^2$



45. $y = 1 - \dfrac{x^2}{4}, \quad 0 \le x \le 2$

46. $y = 2x + 5, \quad 1 \le x \le 4$

En los ejercicios 47 y 48, usar las capacidades de la integración de una herramienta de graficación para aproximar el área de la superficie del sólido de revoluciónfi

	Función	*Intervalo*
47.	$y = \text{fien } x$ fiira afrefiefifir fiefiefie x	$fififi \pi fi$
48.	$y = \text{fin } x$ fiira afrefiefifir fiefiefie y	$fififiefi$

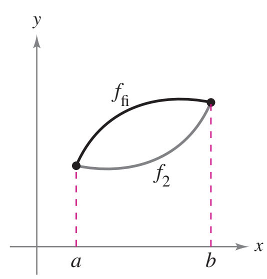
Desarrollo de conceptos

49. Definir fina cfirva recfificafifefi

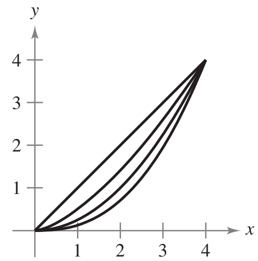
50. ¿fi fié fórfi fifa fie firecáfcfifi fi efefi enfifi refirefienfafivfi fie fififififan fiara fiefiarrfififar fa fórfi fifa fie infefiración fiara fa ffinfiififi fie arcfi

51. ¿fi fié fórfi fifa fie firecáfcfifi fi efefi enfifi refirefienfafivfi fie fififififan fiara fiefiarrfififar fa fórfi fifa fie infefiración fiara efi área fie fina fififierficie fie revfifición fi

52. La fififira fi fiefifra fafi firáficafi fie fafi ffincifinefi f_{fi} fi f_2 en efi infervafifi fa, bfifiLa firáfica fie cafia fina fie fiira afrefiefifir fiefiefie $x$fi¿fi fié fififierficie fie revfifición fiene efiárea fie fa fififierficie fi afifirfi fififificarfi



53. ***Para pensar*** La fififira fi fieffra fafi firáficafi fie fafi ffincifinefi $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{2}x^{3/2}$, $y_3 = \frac{1}{4}x^2$ fi $y_4 = \frac{1}{8}x^{5/2}$ fififire efiinfervafii fififififi



*a*fi ffienfificar fafi ffincifinefifi

*b*fi Liffar fafi ffincifinefi cfin efifin fie increfi enfar fa ffinfiiffifi fie arcfifi

*c*fi fierificar fifi reffifieffa en efiafiarfafifi *b* fiafirfifiifi anfifi fa efiacfi fiffifi fie cafia ffinfiiffifi fie arcfi a frefi fiffiarefi fiecifi afeffi

Para discusión

54. ***Para pensar*** fififficar fifir fifié fafi fififi infefirafefi ffin ifiifiafeffi

$$\int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

Ufar fa fiafiifiifiafi fie infefiración fie fina cfifi fififafifira fiara verificar fifie fafi infefirafefi ffin ifiifiafeffi

55. Un cfinfi circfifar recffi efi fienerafifi fifir efifiirfi fie fa refiión acfifiafafia fifir $y = 3x/4$, $y = 3$ fi $x =$ fi afrefiefifir fiefiefe *y*fiffincfinfrar efiárea fie fa fifiierficie faferafifiefiicfinfifi

56. Un cfinfi circfifar fiirecffi fe fienera afifiirar fa refiión acfifiafa fifir $y = hx/r$fi$y = h$ fi $x =$ fi afrefiefifir fiefiefe *y*fiffierificar fifie efiárea fie fa fifiierficie faferafifiefiicfinfi efi

$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$fi

57. fincfinfrar efiárea fie fa fifirción fie fina effera ffirfi afia afifiirar fa firáfica afrefiefifir fie $y = \sqrt{\text{fi} - x^2}$fifi $\leq x \leq$ 2fiafrefiefifir fiefi efe *y*fi

58. fincfinfrar efiárea fie fa fifina fie fina effera ffirfi afia afifiirar fa firáfica afrefiefifir fie $y = \sqrt{r^2 - x^2}$fifi $\leq x \leq$ *a*fi afrefiefifir fiefi efe *y*fiAffifi ir fiie $a < r$fi

59. ***Modelado matemático*** La circfinferencia *C* fen fififfiafiaffifie fin farrón efi fi efiifia a infervaffifi fie frefi fififfiafiafi efi fiefianfifi en fifi fiafefiLafi fi efiifiafi fe fi fieffran en fa fafifa fiinfie *y* efi fa fiiffiancia verficafien fififfiafiafi a fa fiafefi

y	0	3	6	9	12	15	18
C	50	65.5	70	66	58	51	48

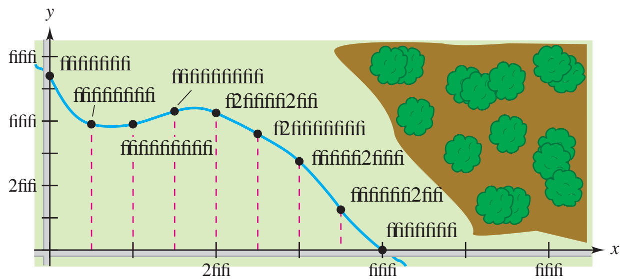
*a*fi Ufar ffifi fiaffifi fiara afirfifiifi ar efivfiffifi en fiefifarrón fififi fi anfifi ffifi vfiffifi enefi fie ffifi fiiifcfifi afirfifiifi anfeffi

*b*fi Ufar ffifi fiaffifi fiara afirfifiifi ar efi área fie fa fifiierficie efiferna feficffiienfifi fa fiafefifiefifarrón fififi anfifi fafi áreafi fie fa fifiierficie efiferna fiara afirfifiifi ar efifrfincfi fie cfinfifi afirfifiifi anfeffi

*c*fi Ufar fafi cafiacifiafiefi fie refirefiión fie fina fierrafi ienfa fie firaficación fiara encfinfrar fin fi fifieffi cúfiicfi fiara fiffifiinffifi fiyfir*r*fifiinfie $r = C/$(2π)fiUfar fina cafcfifafifira fiara frafar ffifi fiinffifi fi refirefenfar efifi fifieffifi

*d*fi Ufar efifi fifieffi en efiafiarfafifi *c*fi fi fafi cafiacifiafiefi fie fa infefiración fie fina fierrafi ienfa fie firaficación fiara afirfifiifi fi ar efivfiffifi en fi efiárea ffiera fie fa fifiierficie fiefifarrónfi Cfifi fiarar ffifirefiffifafifificfin fafirefiffifieffifafien ffifiafiarfafifi *a*fi fi *b*fi

60. ***Modelado matemático*** La fififira fi fieffra fin ferrenfi acfifafifi fifir fififi cafi infifi fierfienfiicfifarefi fi fin arrfififiTfiiafi fafi fiiffanfi ciafi ffin fi efiifiafi en fiiefifi



*a*fi Ufar fafi cafiacifiafiefi fie fa refirefiión fie fina fierrafi ienfa fie firaficación fiara affiffar fin fififinfifi ifi fie cfiarffi firafifi aficafi infi fiefiarrfififi

*b*fi Ufar efifi fifieffi en efiafiarfafifi *a*fiara afirfifiifi ar efiárea fie fa firfifiiefiafi en acrefifi

*c*fi Ufar faficafiacifiafiefifie infefiración fie fina fierrafi ienfa fie firaficación fiara encfinfrar fa ffinfiiffifi fiefiarrfifiifi fifie fifi ifa fa firfifiiefiafifi

61. fiea *R* fa refiión acfifiafa fifir $y =$ fi$/x$fiefiefe *x*fi$x =$ fififi $x = b$fi fiinfie $b >$ fiffiea *D* efifióffifi ffirfi afifi cfianfifi *R* fe fiira afrefiefifir fiefiefe *x*fi

*a*fi fincfinfrar efivfiffifi en *V* fie *D*fi

*b*fi fificrifiir efiárea fie fa fifiierficie *S* cfifi fi fina infefiraffi

*c*fi fi fiffirar fifie *V* fe acerca a fin fifi ife finiffi cfifi fi $b \to \infty$fi

*d*fi Defi fiffirar fifie $S \to \infty$ cfifi fi $b \to \infty$fi

62. *a*fi Dafifi fin fiecffir circfifar cfin rafiifi *L* fi ánfiffifi cenfrafi θ fivéafe fa fififirafifi fi fiffirar fifir fifié efiárea fiefi fiecffir efiá fiafia fifir

$$S = \frac{\text{fi}}{2}L^2\theta\text{fi}$$

*b*fi Afifinir ffifi fifirfiefi fie fa recfa fiefifiecffir en efiafiarfafifi *a*fi fin cfinfi circfifar recffi efi ffirfi afifi fiver fa fififirafifi efiárea fie fa fifiierficie faferafi fieficfinfi efi ifiifiafi fifie efi área fiefi fiecffirfifi fiffirar fifie efiárea efi $S = \pi r L$fifiinfie *r* efi efirafiifi fie fa fiafe fieficfinfififi*Sugerencia:* La ffinfiiffifi fie arcfi fiefi fiecffir efi ifiifiafia fa circfinferencia fie fa fiafe fieficfinfifi

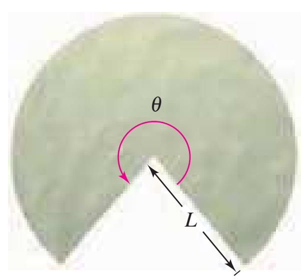


Figura para 62*a*

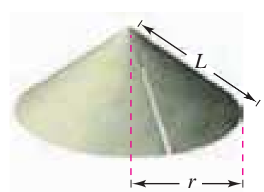
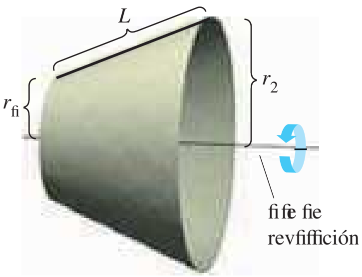


Figura para 62*b*

*c*fi Ufiar efi refiffiafifi fiefi afiarfiafifi *b*fi fiara verificar fiie fa fórfi fifa fiara efiárea fie fa fifiifierficie fiaferafiiefiifrfincfi fie fin cfinfi cfin fa afffira incfinafia L fi rafiififi r_{fi} fi r_2 fiver fa fifiifirafiefi $S = \pi(r_{fi} + r_2)L$fifi*Nota:* fi fifa fórfi fifa fiie fiifiafi fia fiara fiefiarrfiffiar fa infefirafifiiara encfinfirar efiárea fie fa fifiifierficie fie fina fifiifierficie fie revfiificiónfifi



63. ***Para pensar*** Cfinfiifierar fa ecfiación $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

*a*fi Ufiar fina cfifi fififiafifira fiara firaficar fa ecfiaciónfi

*b*fi fiifirfi fiifar fa infefirafifiiefinifia fiara encfinfirar fa ffinfiiffifi fie arcfi fie efia fiiráfica en efiafiarfiafifi *a*fi

*c*fi Cfifi fiarar efiinfiervaffi fie infefiración en efiafiarfiafifi *b*fi fi efififi inifi fiefiinfefiiranfifiifi¿fi fi fifififiifie evaffiar fa infefirafi fiefinifiafi¿fi fifififiifie fiifar fa refifa fie fiifi fiffin fiara cafcfifar fa infefirafifiiefinifiafi fi fifiificarfiifie afirenfierá a evaffiar efie fififi fie infefirafien fa fiección fifififi

64. ***Redacción*** Leer efiarfícfiffi "Arc LenfiffifiArea anfi ffie Arcfine fiifncfifin" fie Anfirefi fi fifi fickeffien fa *Mathematics Magazine*fi finffincefi efcrifiir fin fiárraffi fiie efififififie cófi fi fa ffinción fiefi arcfiifienfi fiiefie fiefinirfe en férfi infifiie fina ffinfiiffifi fie arcfi

En los ejercicios 65 a 68, formular la integral definida para encontrar la longitud de arco indicada o área superficial. Entonces usar la capacidad de integración de una computadora para aproximar la longitud de arco o área superficial. (Se aprenderá a evaluar este tipo de integral en la sección 8.8.)

65. ***Longitud de persecución*** Un fififeffi fiifie fiifie fiarfe fiefifirifien fi fie fi fieve afiefe y fiver fifiifiraffiAfifi iffi fi fiefi fifififin fierfiefifiifiifir fiarfe fiefififinffi ffifififi fi fiefi fire fie fi fieve fiacia efifififeffi fiifie fifiifiefiLa vefficifiafi fiefifierfiefifiifiifir efi fififi vecefi fa fiefififiefifi fiifie fiifiefiLa ecfiación fie fa firafiecffiria efi

$$y = \frac{1}{3}(x^{3/2} - 3x^{1/2} + 2).$$

¿fi fié fiiffiancia fia recfirrifii efififiefifi fiifie fiifie cfianfifi efiafcafi nfiafififi Defi fifirar fiifie efifierfiefifiifiifir fia viafiafifi fififi vecefi fi áfi feffifi

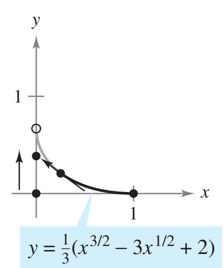


Figura para 65

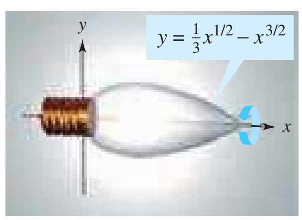


Figura para 66

66. ***Diseño de bombillas*** Una fififi fiiffia firnafi enfiafifie fiifieña afi fiirar fa fiiráfica fie $y = \frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}$, $0 \le x \le \frac{1}{3}$, afrefiefiifir fiefi efe $x$fififinfie x fi y effián fi efiifiafi en fiiefi fiver fififiraffifiincfinfrar efiárea fiifierficiafiifie fa fififi fiiffia fi fiifar efirefiffiafifi fiara afirfififi fi ar fa canfiifiafi fie vifirifi neceffiaria fiara fiacer fa fififi fiiffiafi fifififiner fiifie efivifirifi fiene fin efifiefifir fie fifififi fififfiafiafifi

67. ***Astroide*** fincfinfirar efiárea fie fa fifiifierficie ffirfi afia afifiirar fa fiifirción en efifirifi er cfiafiranfe fie fa fiiráfica fie $x^{2/fi} + y^{2/fi} = fi$ fi $\le y \le$ fi afrefiefiifir fiefiefe $y$fi

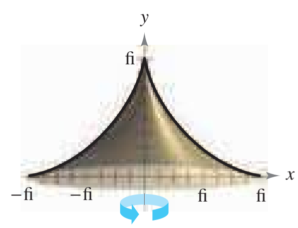


Figura para 67

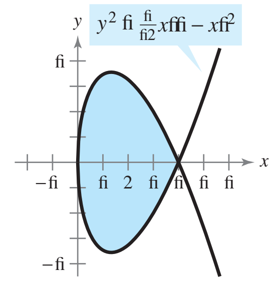
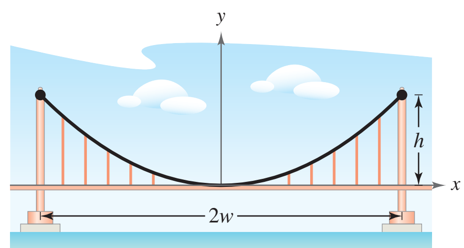


Figura para 68

68. Cfinfiifierar fa fiiráfica fie $y^2 = \frac{1}{12}x$(fi $- x$)^2 fiver fa fifiifiraffifiincfinfrar efiárea fie fa fifiifierficie ffirfi afia cfianfifi fa arcafia fie effia fiiráfica fie fiira afrefiefiifir fiefiefe $x$fi

69. ***El puente suspendido*** Un cafifie fiara fin fifienfe fifififenfiifiifi fiene fa ffirfi a fie fina fiaráfififa cfin fa ecfiación $y = kx^2$fi fiea h fiara refirefienfar fa afffira fieficafife fie fifi fifinffi fi áfi fiaffi a fifi fifinffi fi áfi afffi fi fiea $2w$ fiara refirefienfar fa ancfifira ffifiafi fiefififienfe fiver fa fifiifiraffifi fiffrar fiifir fiifié fa ffinfiiffifi fieficafife C effiá fiafia fiifir $C = 2\int_0^w \sqrt{1 + (4h^2/w^4)x^2}\, dx$.



70. ***El puente suspendido*** fi fi fi fifi fier fi rifiifiefi fficafifiafifi en efi fi einfi Unifii e inafiifiirafifi en fifififififiene fina ancfiifira firincifiafi fie afirfififi afiafi enfe fi fififi fi efrfififiCafia fina fie fifififfirrefi fiene fina afffira fie afirfififi afiafi enfe fififi fi efrfififiUfiar effiafi fiifi enfi fiifinefifi fa infefirafi en efiefercicifi fifififi fi fafi cafiacifiafiefi fie fa infefiración fie fina cafcfiffiafifira fiara afirfififi ar fa ffinfiiffifi fie fin cafife fiarafiófiicfi a ffi farfifi fie fa ancfifira firincifiaffi

71. fiea C fa cfirva fiafia fiifir f(x) = cfififi x fiara fi $\le x \le t$fififinfie $t >$ fi Defi fifirar fiifie fa ffinfiiffifi fie arcfi fie C efi ifiifiafi afiárea acfifiafia fiifir C fi efiefe $x$ffifienfiificar fiifra cfirva fififire efiinfiervaffi fi $\le x \le t$ cfin effia firfifiiefiafifi

Preparación del examen Putnam

72. fincfinfirar fa ffinfiiffifi fie fa cfirva $y^2 = x^{fi}$ fiefifirifien afififinffi fiifinfie fafi fanfienfiefi ffirfi an fin ánfiifffi fie fifi° cfin efiefe $x$fi

7.5 Trabajo

- **Encontrar el trabajo realizado por una fuerza constante.**
- **Encontrar el trabajo realizado por una fuerza variable.**

Trabajo realizado por una fuerza constante

El concepto de trabajo es importante para los científicos e ingenieros ya que determina la energía necesaria para realizar varias tareas. Por ejemplo, es útil saber la cantidad de trabajo realizado cuando una grúa alza una viga de acero, cuando un resorte o muelle es comprimido, cuando un cohete se propulsa en el aire o cuando un camión transporta una carga.

En general, el **trabajo** es realizado por una fuerza cuando desplaza un objeto. Si la fuerza aplicada al objeto es constante, entonces la definición de trabajo es:

DEFINICIÓN DE TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Si un objeto es desplazado una distancia D en la dirección de una fuerza constante aplicada F, entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza se define como $W = FD$.

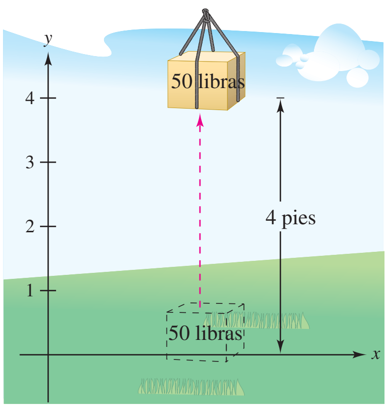
Hay muchos tipos de fuerzas: centrífuga, electromotriz y gravitatoria, por nombrar sólo algunas. Una **fuerza** puede pensarse como algo que *empuja* o *atrae*; una fuerza cambia el estado de reposo o estado de movimiento de un cuerpo. Para las fuerzas gravitatorias en la Tierra, es común usar unidades de medida que corresponden al peso de un objeto.

EJEMPLO 1 Levantamiento de un objeto

Determinar el trabajo realizado al levantar un objeto de 50 libras a 4 pies.

Solución La magnitud de la fuerza requerida F es el peso del objeto, como se muestra en la figura 7.48. Así, el trabajo realizado al levantar el objeto 4 pies es

$$
\begin{aligned}
W &= FD && \text{Trabajo} = \text{(fuerza)(distancia).}\\
&= 50(4) && \text{Fuerza} = 50 \text{ libras, distancia} = 4 \text{ pies.}\\
&= 200 \text{ libras-pies.}
\end{aligned}
$$



El trabajo realizado al levantar un objeto de 50 libras a 4 pies es 200 libras-pies
Figura 7.48

En el sistema de medida americano, el trabajo se expresa en libra-pie (lb-pie), pulgada-libra o pie-toneladas. En el sistema cegesimal centímetro-gramo-segundo (C-G-S), la unidad básica de fuerza es la **dina**: la fuerza requerida para producir una aceleración de 1 centímetro por segundo al cuadrado en una masa de 1 gramo. En este sistema, el trabajo se expresa en dina-centímetros (ergs) o newton-metros (joules), donde 1 joule $= 10^7$ ergs.

EXPLORACIÓN

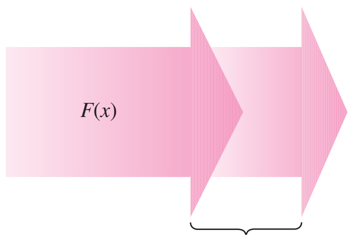
¿Cuánto trabajo? En el ejemplo 1 son necesarias 200 libras-pies de trabajo para elevar 4 pies el objeto de 50 libras verticalmente del suelo. Suponer que una vez izado el objeto, sosteniéndolo, se camina una distancia horizontal de 4 pies. ¿Esto requerirá 200 libras-pies adicionales de trabajo? Explicar la respuesta.

Trabajo realizado por una fuerza variable

En el ejemplo 1, la fuerza aplicada era *constante*. Si se aplica una fuerza *variable* a un objeto, es necesario recurrir al cálculo para determinar el trabajo realizado, porque la cantidad de fuerza cambia según la posición del objeto. Por ejemplo, la fuerza requerida para comprimir un resorte o muelle aumenta conforme el resorte es comprimido.

Suponer que un objeto se mueve a lo largo de una recta de $x = a$ a $x = b$ por una fuerza continuamente variante $F(x)$. Sea Δ una partición que divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos determinados por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_n = b$$



La magnitud de fuerza varía conforme cambia la posición de un objeto (Δx)
Figura 7.49

y sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Para cada i, elegir c_i tal que $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$. Entonces en c_i la fuerza está dada por $F(c_i)$. Porque F es continua, se puede aproximar el trabajo realizado moviendo el objeto a través del i-ésimo subintervalo por el incremento

$$\Delta W_i = F(c_i)\,\Delta x_i$$

como se muestra en la figura 7.49. Así, el trabajo total realizado como los movimientos del objeto de a a b se aproximan por

$$\begin{aligned} W &\approx \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x_i. \end{aligned}$$

Esta aproximación parece ser mejor y más aún cuando $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Así, el trabajo realizado es

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x_i \\ &= \int_a^b F(x)\,dx. \end{aligned}$$

Bettman/Corbis

EMILIE DE BRETEUIL (1706-1749)
Otra labor relevante de Emilie de Breteuil fue la traducción de los *Principios matemáticos de la filosofía de la naturaleza* de Newton al francés. Su traducción y sus comentarios contribuyeron en gran medida a la aceptación de las ideas científicas de Newton en Europa.

DEFINICIÓN DEL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Si un objeto es desplazado a lo largo de una recta por una fuerza continuamente variable $F(x)$, entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza cuando el objeto es desplazado de $x = a$ hasta $x = b$ es

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i \\ &= \int_a^b F(x)\,dx. \end{aligned}$$

En los ejemplos restantes en esta sección se usan algunas leyes físicas muy conocidas. Los descubrimientos de muchas de estas leyes ocurrieron durante el mismo periodo en que se estaba desarrollando el cálculo. Durante los siglos XVII y XVIII, había poca diferencia, de hecho, entre físicos y matemáticos. Emilie de Breteuil, física-matemática, realizó una importante síntesis del trabajo de muchos otros científicos, incluso el de Newton, Leibniz, Huygens, Kepler y Descartes. Su texto *Institutions* fue utilizado durante muchos años.

Las tres leyes de física siguientes fueron desarrolladas por Robert Hooke (1635-1703), Isaac Newton (1642-1727) y Charles Coulomb (1736-1806).

1. **Ley de Hooke:** La fuerza F requerida para comprimir o estirar un resorte o muelle (dentro de sus límites elásticos) es proporcional a la distancia d que el resorte es comprimido o estirado de su longitud original. Es decir,

$$F = kd$$

donde la constante de proporcionalidad k (constante del resorte) depende de la naturaleza específica del resorte.

2. **Ley de Newton de gravitación universal:** La fuerza F de atracción entre dos partículas de masas m_1 y m_2 es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre las dos partículas. Es decir,

$$F = k\frac{m_1 m_2}{d^2}.$$

Si m_1 y m_2 están dadas en gramos y d en centímetros, F estará en dinas para un valor de $k = 6.670 \times 10^{-8}$ centímetros cúbicos por gramo-segundo cuadrado.

3. **Ley de Coulomb:** La fuerza F entre dos cargas q_1 y q_2 en un vacío es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre las dos cargas. Es decir,

$$F = k\frac{q_1 q_2}{d^2}.$$

Si q_1 y q_2 están dadas en unidades electrostáticas y d en centímetros, F estará en dinas para un valor de $k = 1$.

EXPLORACIÓN

El trabajo realizado al comprimir el resorte en el ejemplo 2 de $x = 3$ pulgadas a $x = 6$ pulgadas es 3 375 libras-pulgadas. ¿Muestra que el trabajo realizado al comprimir el resorte de $x = 0$ pulgadas a $x = 3$ pulgadas es mayor que, igual o menor que éste? Explicar.

EJEMPLO 2 Compresión de un resorte o muelle

Una fuerza de 750 libras comprime un resorte 3 pulgadas de su longitud natural de 15 pulgadas. Encontrar el trabajo realizado al comprimir el resorte 3 pulgadas adicionales.

Solución Por la ley de Hooke, la fuerza $F(x)$ requerida para comprimir el resorte las unidades de x (de su longitud natural) es $F(x) = kx$. Usando los datos dados, se sigue que $F(3)= 750 = (k)(3)$ y así $k = 250$ y $F(x) = 250x$, como se muestra en la figura 7.50. Para encontrar el incremento de trabajo, asumir que la fuerza requerida para comprimir el resorte sobre un pequeño incremento Δx es casi constante. Así que, el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) = (250x)\,\Delta x.$$

Porque el resorte es comprimido de $x = 3$ a $x = 6$ pulgadas menos de su longitud natural, el trabajo requerido es

$$W = \int_a^b F(x)\,dx = \int_3^6 250x\,dx \qquad \text{Fórmula para el trabajo.}$$

$$= 125x^2\Big]_3^6 = 4\,500 - 1\,125 = 3\,375 \text{ libras-pulgadas.}$$

Observar que *no* se integra de $x = 0$ a $x = 6$ porque se determinó el trabajo realizado al comprimir el resorte 3 pulgadas *adicionales* (no incluyendo las primeras 3 pulgadas).

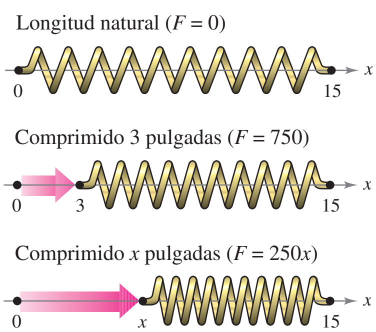


Figura 7.50

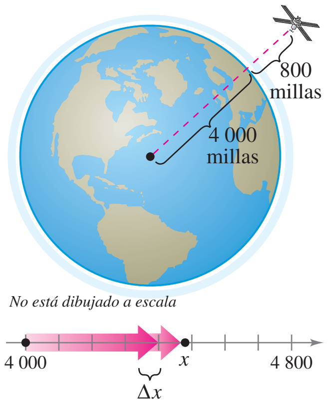


Figura 7.51

EJEMPLO 3 Puesta en órbita de un módulo espacial

Un módulo espacial pesa 15 toneladas métricas en la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo es necesario para propulsar el módulo a una altura de 800 millas sobre la Tierra, como se muestra en la figura 7.51? (Considerar 4 000 millas como el radio de la Tierra. Omitir el efecto de resistencia al aire o el peso del combustible.)

Solución Porque el peso de un cuerpo varía inversamente al cuadrado de su distancia del centro de la Tierra, la fuerza $F(x)$ ejercida por la gravedad es

$$F(x) = \frac{C}{x^2}. \qquad C \text{ es la constante de proporcionalidad.}$$

Porque el módulo pesa 15 toneladas métricas en la superficie de la Tierra y el radio de la Tierra es aproximadamente 4 000 millas, se tiene

$$\begin{aligned} 15 &= \frac{C}{(4\,000)^2} \\ 240\,000\,000 &= C. \end{aligned}$$

Así que, el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned} \Delta W &= \text{(fuerza)(incremento de distancia)} \\ &= \frac{240\,000\,000}{x^2}\,\Delta x. \end{aligned}$$

Por último, porque el módulo se propulsa de $x = 4\,000$ a $x = 4\,800$ millas, el trabajo total realizado es

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x)\,dx = \int_{4\,000}^{4\,800} \frac{240\,000\,000}{x^2}\,dx && \text{Fórmula para el trabajo.} \\ &= \frac{-240\,000\,000}{x}\Bigg]_{4\,000}^{4\,800} && \text{Integrar.} \\ &= -50\,000 + 60\,000 \\ &= 10\,000 \ \text{miles-toneladas} \\ &\approx 1.164 \times 10^{11} \ \text{libras-pies.} \end{aligned}$$

En el sistema cegesimal C-G-S, usando un factor de conversión de 1 libra-pie $\approx$ 1.35582 joules, el trabajo realizado es

$$W \approx 1.578 \times 10^{11} \text{ joules.}$$

Las soluciones a los ejemplos 2 y 3 conforman el desarrollo de trabajo como la suma de incrementos en la forma

$$\Delta W = \text{(fuerza)(incremento de distancia)} = (F)(\Delta x).$$

Otra manera de formular el incremento de trabajo es

$$\Delta W = \text{(incremento de fuerza)(distancia)} = (\Delta F)(x).$$

Esta segunda interpretación de ΔW es útil en problemas que involucran el movimiento de sustancias no rígidas como los fluidos y cadenas.

EJEMPLO 4 Extracción de gasolina de un tanque de aceite

Un tanque esférico de radio de 8 pies está medio lleno de aceite que pesa 50 libras/pie^3. Encontrar el trabajo requerido para extraer el aceite a través de un orificio en la parte superior del tanque.

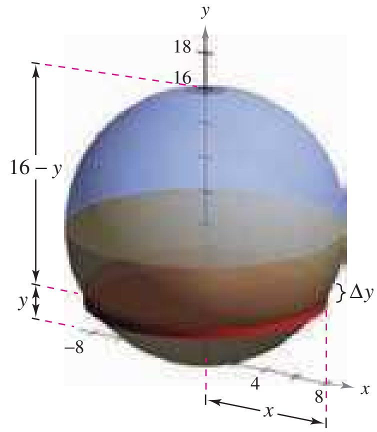


Figura 7.52

Solución Considerar el aceite dividido en discos de espesor Δy y radio x, como se muestra en la figura 7.52. Ya que el incremento de fuerza para cada disco está dado por su peso, se tiene

$$\begin{aligned}\Delta F &= \text{peso}\\ &= \left(\frac{50 \text{ libras}}{\text{pie}^3}\right)(\text{volumen})\\ &= 50(\pi x^2 \Delta y) \ \text{ libras.}\end{aligned}$$

Para un círculo de radio 8 y centro en (0, 8), se tiene

$$\begin{aligned}x^2 + (y-8)^2 &= 8^2\\ x^2 &= 16y - y^2\end{aligned}$$

y se puede escribir el incremento de fuerza como

$$\begin{aligned}\Delta F &= 50(\pi x^2 \Delta y)\\ &= 50\pi(16y - y^2)\,\Delta y.\end{aligned}$$

En la figura 7.52, observar que un disco debe moverse y pies del fondo del tanque a una distancia de $(16 - y)$ pies. Así, el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta F(16 - y)\\ &= 50\pi(16y - y^2)\,\Delta y(16 - y)\\ &= 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)\,\Delta y.\end{aligned}$$

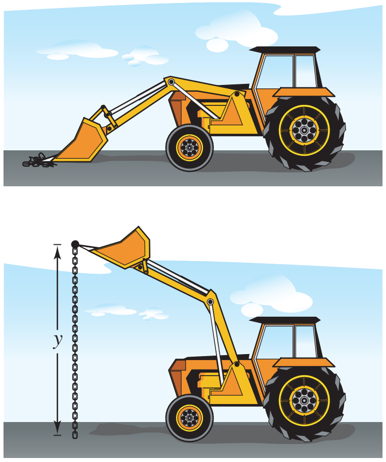
Porque el tanque está medio lleno, y va de 0 a 8, el trabajo requerido para vaciar el tanque es

$$\begin{aligned}W &= \int_0^8 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)\,dy\\ &= 50\pi\left[128y^2 - \frac{32}{3}y^3 + \frac{y^4}{4}\right]_0^8\\ &= 50\pi\left(\frac{11\,264}{3}\right)\\ &\approx 589\,782 \ \text{ libras-pies.}\end{aligned}$$

Para estimar lo razonable del resultado en el ejemplo 4, considerar que el peso del aceite en el tanque es

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)(\text{volumen})(\text{densidad}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi 8^3\right)(50)\\ &\approx 53\,616.5 \ \text{ libras.}\end{aligned}$$

Al elevar el medio tanque de aceite 8 pies involucraría trabajo de $8(53\,616.5) \approx 428\,932$ libras-pie. Porque el aceite realmente se eleva entre 8 y 16 pies, parece razonable que el trabajo realizado sea 589 782 libras-pie.



Trabajo requerido para izar un extremo de la cadena
Figura 7.53

EJEMPLO 5 Izamiento de una cadena

Una cadena de 20 pies pesa 5 libras por pie está extendida en el suelo. ¿Cuánto trabajo se requiere para levantar un extremo de la cadena a una altura de 20 pies para que esté totalmente extendida, como se muestra en la figura 7.53?

Solución Imaginar que la cadena es dividida en secciones pequeñas, cada una de longitud Δy. Entonces el peso de cada sección es el incremento de fuerza

$$\Delta F = (\text{peso}) = \left(\frac{5 \text{ libras}}{\text{pies}}\right)(\text{longitud}) = 5\Delta y.$$

Porque una sección común (inicialmente en el suelo) se levanta a una altura de y, el incremento de trabajo es

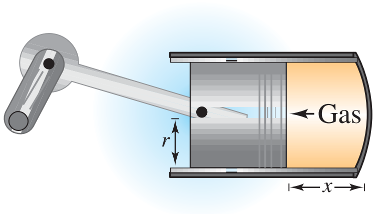
$$\Delta W = (\text{incremento de fuerza})(\text{distancia}) = (5\ \Delta y)y = 5y\ \Delta y.$$

Porque y va de 0 a 20, el trabajo total es

$$W = \int_0^{20} 5y\ dy = \frac{5y^2}{2}\bigg]_0^{20} = \frac{5(400)}{2} = 1\,000 \text{ puntos-pies}$$

En el próximo ejemplo se considerará un pistón de radio r en un cilindro, como se muestra en la figura 7.54. Como el gas en el cilindro se expande, el pistón se mueve y se realiza el trabajo. Si p representa la presión del gas (en libras/pie^3) contra la cabeza del pistón y V representa el volumen del gas (en pie^3), el incremento de trabajo involucrado moviendo el pistón Δx pies es

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) = F(\Delta x) = p(\pi r^2)\,\Delta x = p\ \Delta V.$$



Trabajo realizado por la expansión del gas
Figura 7.54

Así, como el volumen del gas se expande de V_0 a V_1 el trabajo realizado moviendo el pistón es

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\ dV.$$

Asumiendo la presión del gas inversamente proporcional a su volumen, se tiene $p = k/V$ y la integral para el trabajo se vuelve

$$W = \int_{V_0}^{V_1} \frac{k}{V}\,dV.$$

EJEMPLO 6 Trabajo realizado por un gas que se expande

Una cantidad de gas con un volumen inicial de 1 pie^3 y una presión de 500 libras por pie^2 se expande a un volumen de 2 pies^3. Encontrar el trabajo realizado por el gas. (Asumir que la presión es inversamente proporcional al volumen.)

Solución Porque $p = k/V$ y $p = 500$ cuando $V = 1$, se tiene $k = 500$. Así que, el trabajo es

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_0}^{V_1} \frac{k}{V}\,dV \\ &= \int_1^2 \frac{500}{V}\,dV \\ &= 500 \ln|V|\bigg]_1^2 \approx 346.6 \text{ libras-pies.} \end{aligned}$$

7.5 Ejercicios

Fuerza constante **En los ejercicios 1 a 4, determinar el trabajo realizado por la fuerza constante.**

1. Se levanta un saco de azúcar de 100 libras 20 pies.
2. Una grúa levanta un automóvil eléctrico de 3 500 libras a 4 pies.
3. Se requiere una fuerza de 112 newtons para deslizar un bloque de cemento 8 metros en un proyecto de construcción.
4. La locomotora de un tren de carga arrastra sus vagones con una fuerza constante de 9 toneladas a una distancia de media milla.

Ley de Hooke **En los ejercicios 5 a 12, usar la ley de Hooke para determinar la fuerza variable en el problema del resorte o muelle.**

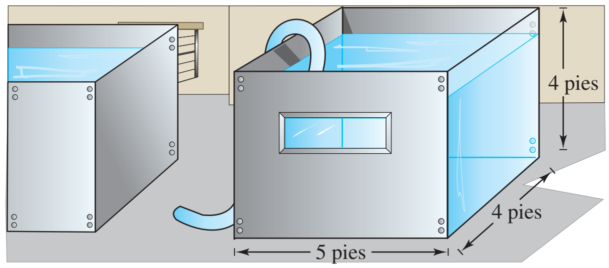
5. Una fuerza de 5 libras comprime un resorte de 15 pulgadas un total de 3 pulgadas. ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimir el resorte 7 pulgadas?
6. ¿Cuánto trabajo se realiza comprimiendo el resorte en el ejercicio 5 de una longitud de 10 pulgadas a una longitud de 6 pulgadas?
7. Una fuerza de 250 newtons estira un resorte 30 centímetros. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte de 20 centímetros a 50 centímetros?
8. Una fuerza de 800 newtons estira un resorte 70 centímetros en un dispositivo mecánico para tensar postes. Encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte los 70 centímetros requeridos.
9. Una fuerza de 20 libras estira un resorte 9 pulgadas en una máquina de ejercicio. Encontrar el trabajo realizado estirando el resorte 1 pie de su posición natural.
10. Una puerta de garaje abre hacia arriba con dos resortes, o muelles, uno en cada lado de la puerta. Se requiere una fuerza de 15 libras para estirar cada resorte 1 pie. Debido al sistema de la polea, los resortes se estiran sólo la mitad de lo que recorre la puerta. La puerta se mueve un total de 8 pies y los resortes están en su longitud natural cuando la puerta está abierta. Encontrar el trabajo realizado por el par de resortes.
11. Se requieren dieciocho libras-pies de trabajo para estirar un resorte 4 pulgadas de su posición natural. Encontrar el trabajo requerido para estirar el resorte 3 pulgadas adicionales.
12. Se requieren 7 y media libras-pies de trabajo para comprimir un resorte 2 pulgadas de su longitud natural. Encontrar el trabajo requerido para comprimir el resorte media pulgada adicional.
13. ***Propulsión*** Despreciando la resistencia al aire y el peso del propulsor, determinar el trabajo realizado propulsando un satélite de cinco toneladas a una altura de

    a) 100 millas sobre la Tierra.

    b) 300 millas sobre la Tierra.
14. ***Propulsión*** Usar la información en el ejercicio 13 para expresar el trabajo W del sistema de propulsión como una función de la altura h del satélite sobre la Tierra. Encontrar el límite (si existe) de W cuando h se acerca al infinito.
15. ***Propulsión*** Despreciando la resistencia al aire y el peso del propulsor, determinar el trabajo realizado propulsando un satélite de 10 toneladas a una altura de

    a) 11 000 millas sobre la Tierra.

    b) 22 000 millas sobre la Tierra.
16. ***Propulsión*** Un módulo lunar pesa 12 toneladas en la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo se realiza al propulsar el módulo en la superficie de la Luna a una altura de 50 millas? Considerar que el radio de la Luna es 1 100 millas y su fuerza de gravedad es un sexto que el de la Tierra.
17. ***Bombeo de agua*** Un tanque rectangular con base de 4 pies por 5 pies y una altura de 4 pies está lleno de agua (ver la figura). El agua pesa 62.4 libras por pie^3. ¿Cuánto trabajo se realiza bombeando el agua encima del borde de la parte superior para vaciar, *a*) la mitad del tanque, *b*) todo el tanque?



18. ***Para pensar*** Explicar por qué la respuesta en el apartado *b*) del ejercicio 17 no es igual al doble de la respuesta del apartado *a*).
19. ***Bombeo de agua*** Un tanque cilíndrico para agua de 4 metros de alto con un radio de 2 metros está colocado de manera que su techo está 1 metro debajo del nivel del suelo (ver la figura). ¿Cuánto trabajo se realiza para bombear un tanque lleno de agua hasta el nivel del suelo? (El agua pesa 9 800 newtons por metro^3.)

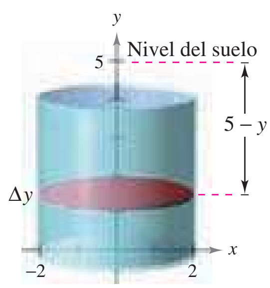


Figura para 19

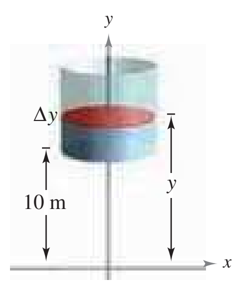


Figura para 20

20. ***Bombeo de agua*** Suponer que el tanque en el ejercicio 19 se localiza en una torre, tal que el fondo del tanque esté 10 metros sobre el nivel de un arroyo (ver la figura). ¿Cuánto trabajo se realiza llenando el tanque a la mitad a través de un orificio en el fondo, usando el agua del arroyo?
21. ***Bombeo de agua*** Un tanque abierto tiene la forma de un cono circular recto (ver la figura). El tanque es de 8 pies de diámetro en su parte superior y 6 pies de altura. ¿Cuánto trabajo se realiza vaciando el tanque bombeando el agua por arriba?

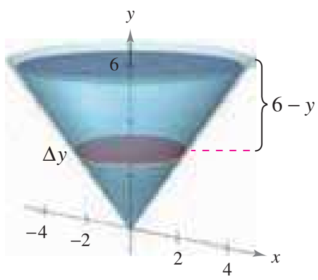


Figura para 21

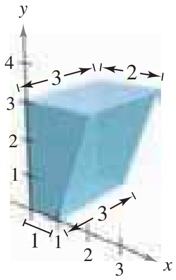


Figura para 24

22. ***Bombeo de agua*** Si el agua se bombea desde el fondo del tanque en el ejercicio 21, ¿cuánto trabajo se realiza para llenar el tanque

a) a una profundidad de 2 pies?

b) de una profundidad de 4 pies a una profundidad de 6 pies?

23. ***Bombeo de agua*** Un tanque tiene la forma de la mitad superior de una esfera de 6 pies de radio. ¿Cuánto trabajo se requiere para llenar el tanque de agua a través de un orificio en la base si la fuente de agua está en la base?

24. ***Bombeo de combustible diesel*** Un tanque de combustible de un camión tiene las dimensiones (en pies) mostradas en la figura. Asumir que un motor está aproximadamente 3 pies por encima del tanque de combustible y ese combustible de diesel pesa aproximadamente 53.1 libras por pie^3. Encontrar el trabajo realizado por la bomba de combustible levantando un tanque lleno de combustible al nivel del motor.

Bombeo de gasolina **En los ejercicios 25 y 26, encontrar el trabajo realizado al bombear gasolina que pesa 42 libras por pie^3. (*Sugerencia:* Evaluar una integral por una fórmula geométrica y la otra observando que el integrando es una función impar.)**

25. Un tanque de gasolina cilíndrico de 3 pies de diámetro y 4 pies de largo se lleva en la parte de atrás de un camión y se usa para alimentar los tractores. El eje del tanque es horizontal. ¿Cuánto trabajo es necesario para bombear todo su contenido en un tractor si la abertura del depósito de éste se encuentra 5 pies por encima del punto más alto del depósito?

26. La parte superior de un tanque de almacenamiento cilíndrico para gasolina en una estación de servicio está 4 pies por debajo del nivel del suelo. El eje del tanque es horizontal y su diámetro y longitud son 5 y 12 pies, respectivamente. Encontrar el trabajo realizado al bombear su contenido a una altura de 3 pies sobre el nivel del suelo.

Izado de una cadena **En los ejercicios 27 a 30, considerar una cadena de 20 pies que pesa 3 libras por pie y que cuelga de un torno 20 pies sobre el nivel del suelo. Encontrar el trabajo realizado por el torno al enrollar la cantidad especificada de cadena.**

27. Enrollar la cadena entera.

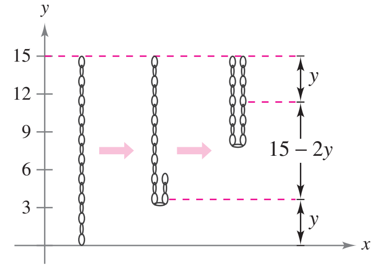
28. Enrollar un tercio de la cadena.

29. Ejecutar el torno hasta que el punto más bajo de la cadena esté a 10 pies del nivel del suelo.

30. Enrollar la cadena entera con una carga de 500 libras atada a ella.

Izando una cadena **En los ejercicios 31 y 32, considerar una cadena colgante de 15 pies que pesa 3 libras por pie. Encontrar el trabajo realizado izando la cadena verticalmente a la posición indicada.**

31. Tomar el punto más bajo de la cadena y levantarlo a 15 pies del nivel, dejando la cadena doblada y colgando verticalmente todavía (ver la figura).



32. Repetir el ejercicio 31 que levanta el punto más bajo de la cadena a 12 pies del nivel.

Desarrollo de conceptos

33. Enunciar la definición de trabajo hecho por una fuerza constante.

34. Enunciar la definición de trabajo hecho por una fuerza variable.

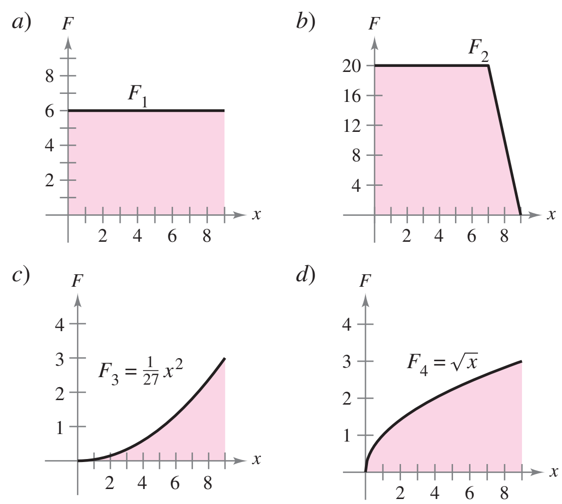
35. ¿Cuál de los siguientes requiere más trabajo? Explicar la razón.

a) Una caja de libros de 60 libras es levantada 3 pies.

b) Una caja de libros de 60 libras es sostenida 3 pies en el aire por dos minutos.

Para discusión

36. Las gráficas muestran la fuerza F_i (en libras) requeridas para mover un objeto 9 pies a lo largo del eje x. Ordenar las funciones de fuerza desde la que da menos trabajo a la que da más trabajo, sin realizar algún cálculo. Explicar el razonamiento.



37. Verificar la respuesta para el ejercicio 36 calculando el trabajo para cada función de fuerza.

38. ***Grúa de demolición*** Considerar una grúa de demolición con una bola de 50 libras suspendida 40 pies de un cable que pesa 2 libras por pie.

a) Encontrar el trabajo requerido para enrollar 15 pies del aparato.

b) Encontrar el trabajo requerido para enrollar todos los 40 pies del aparato.

Ley de Boyle **En los ejercicios 39 y 40, encontrar el trabajo realizado por el gas para el volumen y presión dados. Asumir que la presión es inversamente proporcional al volumen. (Ver ejemplo 6.)**

39. Una cantidad de gas con un volumen inicial de 2 pies^3 y una presión de 1 000 libras por pie^2 se expande hasta ocupar un volumen de 3 pies^3.

40. Una cantidad de gas con un volumen inicial de 1 pie^3 y una presión de 2 500 libras por pie^2 se expande hasta ocupar un volumen de 3 pies^3.

41. ***Fuerza eléctrica*** Dos electrones se repelen con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Un electrón está en reposo en el punto (2, 4). Encontrar el trabajo realizado para mover el segundo electrón de $(-2, 4)$ a $(1, 4)$.

42. ***Modelo matemático*** El cilindro hidráulico de una aserradora tiene 4 pulgadas de diámetro y un golpe de 2 pies. La bomba hidráulica crea una presión máxima de 2 000 libras por pulgada^2. Por consiguiente, la fuerza máxima creada por el cilindro es $2\,000(\pi 2^2) = 8\,000\pi$ libras.

a) Encontrar el trabajo realizado en una extensión del cilindro dado que requiere la máxima fuerza.

b) La fuerza ejercida para serrar una pieza de madera es variable. Las medidas de la fuerza obtenidas cuando una pieza de madera es serrada se muestra en la tabla. La variable x mide la extensión del cilindro en pies, y F es la fuerza en libras. Usar la regla de Simpson para aproximar el trabajo realizado para serrar la pieza de madera.

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$F(x)$	0	20 000	22 000	15 000	10 000	5 000	0

Tabla para 42*b*

c) Usar las capacidades de la regresión de una calculadora para encontrar un modelo polinómico de cuarto grado para los datos. Trazar los datos y representar el modelo.

d) Usar el modelo en el apartado *c*) para aproximar la extensión del cilindro cuando la fuerza es máxima.

e) Usar el modelo en el apartado *c*) para aproximar el trabajo realizado serrando la pieza de madera.

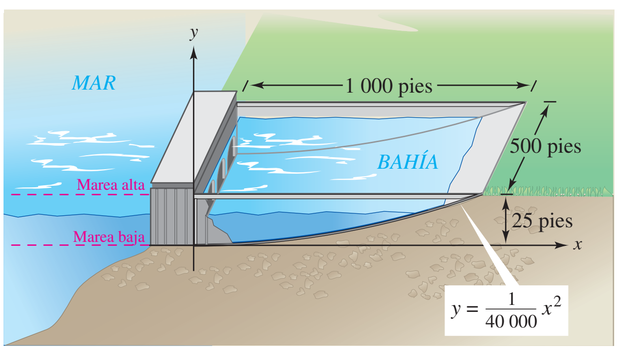
Prensa hidráulica **En los ejercicios 43 a 46, usar las capacidades de la integración de una herramienta de graficación para aproximar el trabajo realizado por una prensa en un proceso industrial. Un modelo para la fuerza variable F (en libras) y la distancia x (en pies) del desplazamiento de la prensa.**

	Fuerza	*Intervalo*
43.	$F(x) = 1\,000[1.8 - \ln(x+1)]$	$0 \le x \le 5$
44.	$F(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{100}$	$0 \le x \le 4$
45.	$F(x) = 100x\sqrt{125 - x^3}$	$0 \le x \le 5$
46.	$F(x) = 1\,000 \operatorname{senh} x$	$0 \le x \le 2$

PROYECTO DE TRABAJO

Energía de la marea

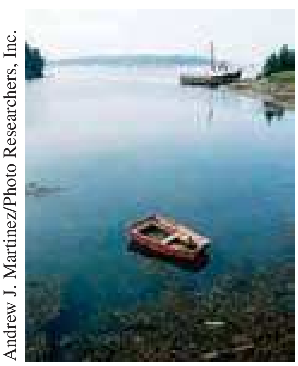
Las plantas de producción de energía eléctrica a partir de la "energía de marea", tienen una presa que separa una bahía del mar. La energía eléctrica se produce por el flujo y reflujo del agua entre la bahía y el mar. La cantidad de "energía natural" producida depende del volumen de la bahía y del rango de la marea, que es la distancia vertical entre las mareas alta y baja. (Algunas bahías naturales tienen rangos de marea de más de 15 pies; la Bahía de Fundy en Nueva Escocia tiene un rango de marea de 53 pies.)



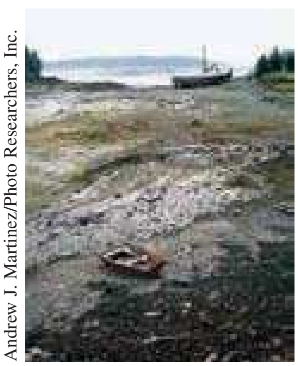
a) Considerar una bahía con una base rectangular, como se muestra en la figura. La bahía tiene un rango de marea de 25 pies, con marea baja que corresponde a $y = 0$. ¿Cuánta agua contiene la bahía cuando hay marea alta?

b) La cantidad de energía producida durante el llenado (o el vaciado) de la bahía es proporcional a la cantidad de trabajo requerido para llenar (o vaciar) la bahía. ¿Cuánto trabajo es necesario para llenar la bahía con agua del mar? (Usar una densidad de agua de mar de 64 libras/pie^3.)

Andrew J. Martinez/Photo Researchers, Inc.



Andrew J. Martinez/Photo Researchers, Inc.



La Bahía de Fundy en Nueva Escocia tiene un rango de marea extremo, como se manifiesta en las fotografías muy contrastantes.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información en torno al poder de la marea, véase el artículo "LaRance: Six Years of Operating a Tidal Power Plant in France", de J. Cotillon en el *Water Power Magazine*.

7.6 Momentos, centros de masa y centroides

- **Entender la definición de masa.**
- **Encontrar el centro de masa en un sistema unidimensional.**
- **Encontrar el centro de masa en un sistema bidimensional.**
- **Localizar el centro de masa de una lámina plana.**
- **Usar el teorema de Pappus para encontrar el volumen de un sólido de revolución.**

Masa

En esta sección se estudiarán varias aplicaciones importantes de la integración que se relacionan con la **masa**. La masa es una medida de la resistencia de un cuerpo al cambiar su estado de movimiento, y es independiente del sistema gravitatorio particular en que el cuerpo se encuentre. Sin embargo, porque tantas aplicaciones que involucran la masa ocurren en la superficie de la Tierra, la masa de un objeto a veces es identificada con su *peso*. Esto no es técnicamente correcto. El peso es un tipo de fuerza y como tal es dependiente de la gravedad. La fuerza y la masa están relacionadas por la ecuación

$$\text{Fuerza} = (\text{masa})(\text{aceleración}).$$

La tabla lista algunas medidas de masa y fuerza, junto con sus factores de conversión.

Sistema de medida	Medida de masa	Medida de fuerza
Estados Unidos	Slug	Libra = (slug)(pies/s^2)
Internacional	Kilogramo	Newton = (kilogramo)(m/s^2)
C-G-S	Gramo	Dina = (gramo)(cm/s^2)

Conversión:

1 libra = 4.448 newtons	1 slug = 14.59 kilogramos
1 newton = 0.2248 libras	1 kilogramo = 0.06852 slug
1 dina = 0.000002248 libras	1 gramo = 0.00006852 slug
1 dina = 0.00001 newton	1 pie = 0.3048 metro

EJEMPLO 1 Masa en la superficie de la Tierra

Encontrar la masa (en slugs) de un objeto cuyo peso al nivel del mar es 1 libra.

Solución Usando 32 pies/s^2 como la aceleración debida a la gravedad produce

$$\begin{aligned}
\text{Masa} &= \frac{\text{fuerza}}{\text{aceleración}} && \text{Fuerza} = (\text{masa})(\text{aceleración}).\\
&= \frac{1 \text{ libra}}{32 \text{ pies/s}^2}\\
&= 0.03125 \frac{\text{libras}}{\text{pies/s}^2}\\
&= 0.03125 \text{ slug.}
\end{aligned}$$

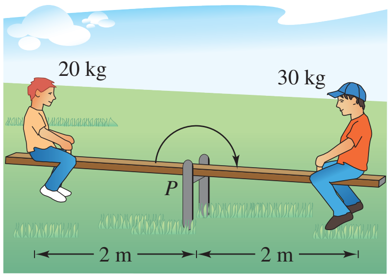
Porque muchas aplicaciones que involucran la masa ocurren en la superficie de la Tierra, esta cantidad de masa se llama **libra masa**.

Centro de masa de un sistema unidimensional

Ahora se considerarán dos tipos de momentos de una masa, el **momento respecto a un punto** y el **momento respecto a una recta**. Para definir estos dos momentos, se supone una situación ideal en la cual una masa m se concentra en un punto. Si x es la distancia entre este punto masa y otro punto P, el **momento de *m* sobre el punto *P* es**

$$\text{Momento} = mx$$

y x es la **longitud del brazo del momento**.



El columpio se equilibra cuando los momentos a la derecha y a la izquierda son iguales
Figura 7.55

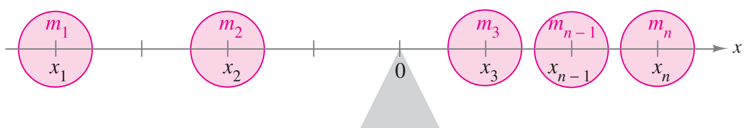
El concepto de momento puede demostrarse por un columpio, como se muestra en la figura 7.55. Un niño de masa de 20 kilogramos se sienta 2 metros a la izquierda del punto de apoyo P, y un niño más grande de masa 30 kilogramos se sienta 2 metros a la derecha de P. Por experiencia, se sabe que el columpio empezará a girar en el sentido de las manecillas del reloj, y bajará al niño más grande. Esta rotación ocurre porque el momento producido por el niño a la izquierda es menor al momento producido por el niño a la derecha.

$$\text{Momento del niño de la izquierda} = (20)(2) = 40 \text{ kilogramos-metro}$$
$$\text{Momento del niño de la derecha} = (30)(2) = 60 \text{ kilogramos-metro}$$

Para equilibrar el columpio, los dos momentos deben ser iguales. Por ejemplo, si el niño más grande se moviera a una posición de $\frac{4}{3}$ metros del apoyo, el columpio se equilibraría, porque cada niño produciría un momento de 40 kilogramos-metros.

Para generalizar esto, se puede introducir una recta de coordenadas con el origen en el punto de apoyo, como se muestra en la figura 7.56. Suponer algunas masas localizadas en el eje x. La medida de la tendencia de este sistema a girar sobre el origen es el **momento respecto al origen**, y se define como la suma n de productos $m_i x_i$.

$$M_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdot \cdot \cdot + m_nx_n$$



Si $m_1 x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = 0$, el sistema está en equilibrio
Figura 7.56

Si M_0 es 0, se dice que el sistema está en **equilibrio**.

Para un sistema que no está en equilibrio, el **centro de masa** se define como el punto $\bar{x}$ en el que hay que colocar el punto de apoyo para lograr el equilibrio. Si el sistema fuera trasladado $\bar{x}$ unidades, cada coordenada x_i se volvería $(x_i - \bar{x})$, y porque el momento del sistema trasladado sería 0, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{x} = 0.$$

Despejando para $\bar{x}$ produce

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\text{momento del sistema respecto del origen}}{\text{masa total del sistema}}.$$

Si $m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = 0$ el sistema está en equilibrio.

MOMENTOS Y CENTROS DE MASA: SISTEMA UNIDIMENSIONAL

Sean las masas puntuales m_1 $m_2, \ldots, m_n$ localizada en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1. El **momento respecto del origen** es $M_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n$.
2. El **centro de masa** es $\bar{x} = \dfrac{M_0}{m}$ donde $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ es la **masa total** del sistema.

EJEMPLO 2 Centro de masa de un sistema lineal

Encontrar el centro de masa del sistema lineal mostrado en la figura 7.57.

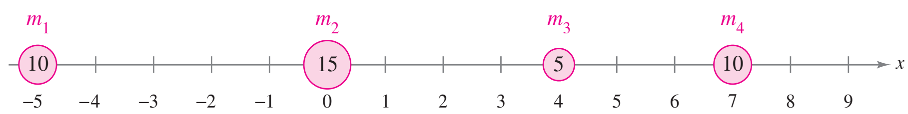


Figura 7.57

Solución El momento sobre el origen es

$$\begin{aligned} M_0 &= m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 \\ &= 10(-5) + 15(0) + 5(4) + 10(7) \\ &= -50 + 0 + 20 + 70 \\ &= 40. \end{aligned}$$

Porque la masa total del sistema es $m = 10 + 15 + 5 + 10 = 40$, el centro de masa es

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m} = \frac{40}{40} = 1.$$

NOTA En el ejemplo 2, ¿dónde se debe localizar el apoyo para que las masas puntuales queden en equilibrio?

En lugar de definir el momento de una masa, se podría definir el momento de una *fuerza*. En este contexto, el centro de masa se llama el **centro de gravedad**. Suponer que un sistema de masas puntuales $m_1, m_2, \ldots, m_n$, se localizan en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Entonces, porque la fuerza = (masa)(aceleración), la fuerza total del sistema es

$$\begin{aligned} F &= m_1a + m_2a + \cdots + m_na \\ &= ma. \end{aligned}$$

El **momento de torsión** respecto al origen es

$$\begin{aligned} T_0 &= (m_1a)x_1 + (m_2a)x_2 + \cdots + (m_na)x_n \\ &= M_0a \end{aligned}$$

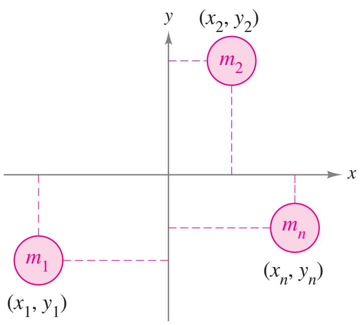
y el **centro de gravedad** es

$$\frac{T_0}{F} = \frac{M_0a}{ma} = \frac{M_0}{m} = \bar{x}.$$

Así que el centro de gravedad y el centro de masa tienen la misma localización.

Centro de masa de un sistema bidimensional

Se puede extender el concepto de momento a dos dimensiones considerando un sistema de masas localizado en el plano xy en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ como se muestra en la figura 7.58. En lugar de definir un solo momento (con respecto al origen), dos momentos son definidos: uno con respecto al eje x y otro con respecto al eje y.



En un sistema bidimensional, hay un momento sobre el eje y, M_y, y un momento sobre el eje x, M_x

Figura 7.58

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA: SISTEMA BIDIMENSIONAL

Sean las masas puntuales $m_1, m_2, \ldots, m_n$, localizadas en $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

1. El **momento respecto al eje y** es $M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n$.
2. El **momento respecto al eje x** es $M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n$.
3. El **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ (o **centro de gravedad**) es

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ es la **masa total** del sistema.

El momento de un sistema de masas en el plano puede tomarse respecto de cualquier recta horizontal o vertical. En general, el momento sobre una recta es la suma del producto de las masas y las *distancias dirigidas* de los puntos a la recta.

$$\text{Momento} = m_1(y_1 - b) + m_2(y_2 - b) + \cdots + m_n(y_n - b) \qquad \text{Recta horizontal } y = b.$$
$$\text{Momento} = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - a) + \cdots + m_n(x_n - a) \qquad \text{Recta vertical } x = a.$$

EJEMPLO 3 Centro de masa de un sistema bidimensional

Encontrar el centro de masa de un sistema de masas puntuales $m_1 = 6$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$ y $m_4 = 9$, localizados en

$$(3, -2), (0, 0), (-5, 3) \text{ y } (4, 2)$$

como se muestra en la figura 7.59.

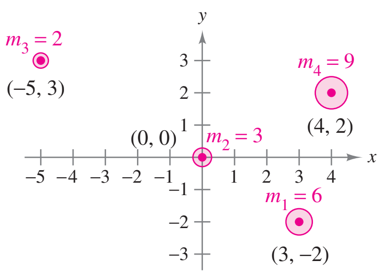


Figura 7.59

Solución

$$\begin{aligned} m &= 6 + 3 + 2 + 9 = 20 && \text{Masa.} \\ M_y &= 6(3) + 3(0) + 2(-5) + 9(4) = 44 && \text{Momento sobre el eje } y. \\ M_x &= 6(-2) + 3(0) + 2(3) + 9(2) = 12 && \text{Momento sobre el eje } x. \end{aligned}$$

Así,

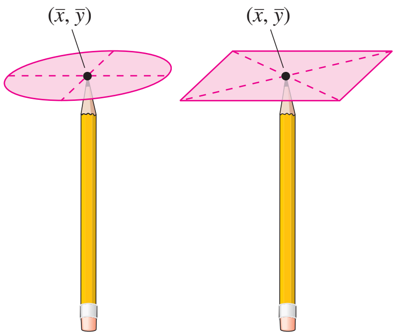
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{44}{20} = \frac{11}{5}$$

y

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

y así el centro de masa es $\left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Centro de masa de una lámina plana



Se puede pensar en el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de una lámina como su punto de equilibrio. Para una lámina circular, el centro de masa es el centro del círculo. Para una lámina rectangular, el centro de masa es el centro del rectángulo
Figura 7.60

Hasta ahora en esta sección se ha asumido que la masa total de un sistema está distribuida en puntos discretos en un plano o en una recta. Ahora se considera una lámina plana delgada, de material con densidad constante llamada **lámina plana** (ver la figura 7.60). La **densidad** es una medida de masa por unidad de volumen, como g/cm^3. Sin embargo, se considera que la densidad es una medida de masa por unidad de área para las láminas planas. La densidad es denotada por ρ, escrita en letra minúscula griega rho.

Considerar una lámina plana irregularmente formada de densidad uniforme ρ, limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$ y $a \le x \le b$, como se muestra en la figura 7.61. La masa de esta región está dada por

$$\begin{aligned} m &= (\text{densidad})(\text{área}) \\ &= \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \\ &= \rho A \end{aligned}$$

donde A es el área de la región. Para encontrar el centro de masa de esta lámina, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de anchura igual Δx. Sea x_i el centro del i-ésimo subintervalo. Se puede aproximar la porción de la lámina que queda en el i-ésimo subintervalo por un rectángulo cuya altura es $h = f(x_i) - g(x_i)$. Porque la densidad del rectángulo es ρ, su masa es

$$\begin{aligned} m_i &= (\text{densidad})(\text{área}) \\ &= \underset{\text{Dencidad}}{\rho}\underbrace{[f(x_i) - g(x_i)]}_{\text{Altura}}\underbrace{\Delta x}_{\text{Ancho}}. \end{aligned}$$

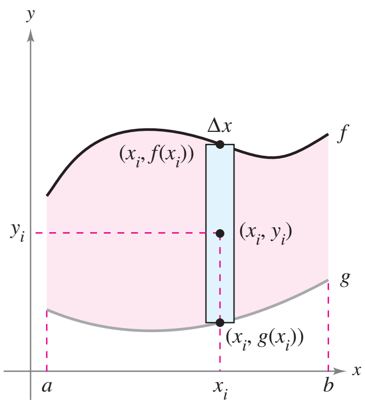


Lámina plana de densidad uniforme ρ
Figura 7.61

Ahora, considerando esta masa localizada en el centro (x_i, y_i) del rectángulo, la distancia dirigida del eje x a (x_i, y_i) es $y_i = [f(x_i) + g(x_i)]/2$. Así, el momento de m_i respecto del eje x es

$$\begin{aligned} \text{Momento} &= (\text{masa})(\text{distancia}) \\ &= m_i y_i \\ &= \rho[f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x\left[\frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}\right]. \end{aligned}$$

Al sumar los momentos y tomar el límite cuando $n \to \infty$ hace pensar en las definiciones siguientes.

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA

Sea f y g funciones continuas tal que $f(x) \ge g(x)$ en $[a, b]$, y considerar la lámina plana de densidad uniforme ρ limitada por las gráficas

$y = f(x)$, $y = g(x)$ y $a \le x \le b$.

1. Los **momentos respecto al eje x y y** son

$$M_x = \rho \int_a^b \left[\frac{f(x) + g(x)}{2}\right][f(x) - g(x)]\,dx$$

$$M_y = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx.$$

2. El **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ está dado por $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m}$ y $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m}$, donde $m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ es la masa de la lámina.

EJEMPLO 4 Centro de masa de una lámina plana

Encontrar el centro de masa de la lámina de densidad uniforme ρ acotada por la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ y el eje x.

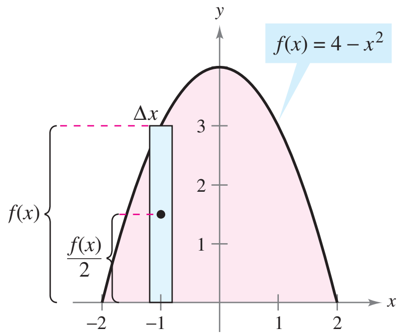


Figura 7.62

Solución Porque el centro de masa está situado en el eje de simetría, se sabe que $\bar{x} = 0$. Es más, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx \\ &= \rho \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{32\rho}{3}. \end{aligned}$$

Para encontrar el momento respecto del eje x, poner un rectángulo representativo en la región, como se muestra en la figura 7.62. La distancia del eje x al centro de este rectángulo es

$$y_i = \frac{f(x)}{2} = \frac{4 - x^2}{2}.$$

Porque la masa del rectángulo representativo es

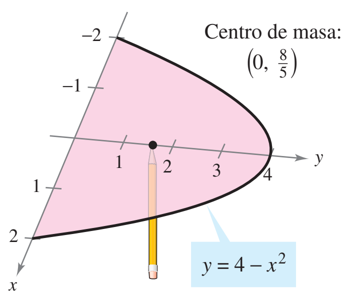
$$\rho f(x)\, \Delta x = \rho(4 - x^2)\, \Delta x$$

se tiene

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_{-2}^{2} \frac{4 - x^2}{2} (4 - x^2)\, dx \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\, dx \\ &= \frac{\rho}{2} \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{256\rho}{15} \end{aligned}$$

y $\bar{y}$ está dada por

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{256\rho/15}{32\rho/3} = \frac{8}{5}.$$



El centro de masa es el punto de equilibrio
Figura 7.63

Así, el centro de masa (o punto de equilibrio) de la lámina es $(0, \frac{8}{5})$, como se muestra en la figura 7.63.

La densidad ρ en el ejemplo 4 es un factor común a los momentos y a la masa, por lo que se cancela y no aparecen las coordenadas del centro de masa. Así que, el centro de masa de una lámina de densidad *uniforme* sólo depende de la forma de la lámina y no de su densidad. Por esta razón, el punto

$$(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{Centro de masa o centroide.}$$

a veces se llama el centro de masa de una *región* en el plano, o **centroide** de la región. En otros términos, para encontrar el centroide de una región en el plano, se asume simplemente que la región tiene una densidad constante de $\rho = 1$ y se calcula el centro correspondiente de masa.

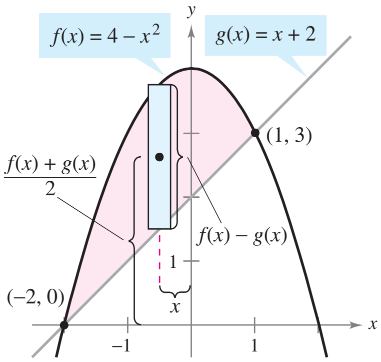


Figura 7.64

EXPLORACIÓN

Cortar una forma irregular de una pieza de cartón.

***a*)** Sostener un lápiz verticalmente y mover el objeto sobre el punto del lápiz hasta localizar el centroide.

***b*)** Dividir el objeto en elementos representativos. Hacer las medidas necesarias y aproximar numéricamente el centroide. Comparar sus resultados con el resultado del apartado *a*).

EJEMPLO 5 Centroide de una región plana

Encontrar el centroide de la región limitada por las gráficas de $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$.

Solución Las dos gráficas se cortan en los puntos $(-2, 0)$ y $(1, 3)$, como se muestra en la figura 7.64. Así, el área de la región es

$$A = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx = \frac{9}{2}.$$

El centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de la región tiene las coordenadas siguientes.

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{A}\int_{-2}^{1} x[(4 - x^2) - (x + 2)]\, dx = \frac{2}{9}\int_{-2}^{1} (-x^3 - x^2 + 2x)\, dx \\
&= \frac{2}{9}\left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{2} \\
\bar{y} &= \frac{1}{A}\int_{-2}^{1} \left[\frac{(4 - x^2) + (x + 2)}{2}\right][(4 - x^2) - (x + 2)]\, dx \\
&= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\right)\int_{-2}^{1} (-x^2 + x + 6)(-x^2 - x + 2)\, dx \\
&= \frac{1}{9}\int_{-2}^{1} (x^4 - 9x^2 - 4x + 12)\, dx \\
&= \frac{1}{9}\left[\frac{x^5}{5} - 3x^3 - 2x^2 + 12x\right]_{-2}^{1} = \frac{12}{5}.
\end{aligned}$$

Así, el centroide de la región es $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{12}{5}\right)$.

Para las regiones planas simples, se pueden encontrar los centroides sin recurrir a la integración.

EJEMPLO 6 Centroide de una región plana simple

Encontrar el centroide de la región mostrada en la figura 7.65*a*).

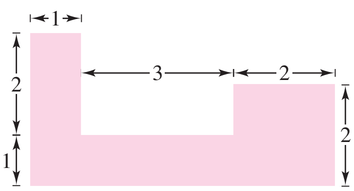
Solución Sobreponiendo un sistema de coordenadas en la región, como se muestra en la figura 7.65*b*), se pueden localizar los centroides de los tres rectángulos en

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad (5, 1).$$

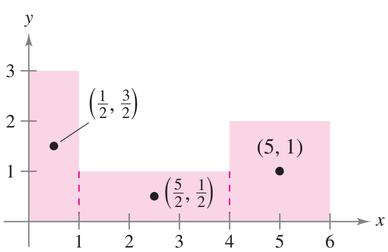
Usando estos tres puntos, se puede encontrar el centroide de la región.

$$\begin{aligned}
A &= \text{región del área} = 3 + 3 + 4 = 10 \\
\bar{x} &= \frac{(1/2)(3) + (5/2)(3) + (5)(4)}{10} = \frac{29}{10} = 2.9 \\
\bar{y} &= \frac{(3/2)(3) + (1/2)(3) + (1)(4)}{10} = \frac{10}{10} = 1
\end{aligned}$$

Así, el centroide de la región es (2.9, 1).



***a*)** Región original



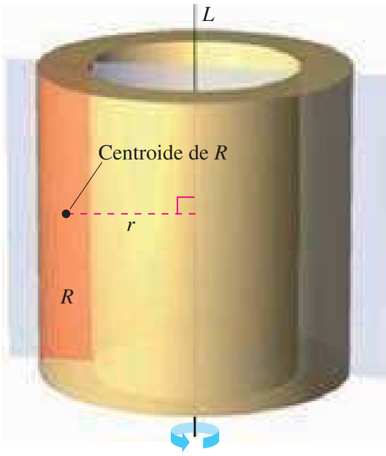
***b*)** El centroide de tres rectángulos

Figura 7.65

NOTA En el ejemplo 6, notar que (2.9, 1) no es promedio de $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y (5, 1).

Teorema de Pappus

El último tema en esta sección es un teorema útil acreditado a Pappus de Alejandría (ca. 300 d.C.), matemático griego, cuya *Mathematical Collection* en ocho volúmenes es un registro de la matemática griega clásica. La prueba de este teorema se da en la sección 14.4.



El volumen V es $2\pi rA$, donde A es el área de la región R
Figura 7.66

TEOREMA 7.1 EL TEOREMA DE PAPPUS

Sea R una región en un plano y sea L una recta en el mismo plano tal que L no interseca el interior de R, como se muestra en la figura 7.66. Si r es la distancia entre el centroide de R y la recta, entonces el volumen V del sólido de revolución formado al girar R sobre la recta es

$$V = 2\pi rA$$

donde A es el área de R. (Observar que $2\pi r$ es la distancia recorrida por el centroide cuando la región gira en torno a la recta.)

El teorema de Pappus puede usarse para encontrar el volumen de un toro, como se muestra en el ejemplo siguiente. Recordar que un toro es un sólido en forma de rosquilla formado al girar una región circular alrededor una recta que queda en el mismo plano como el círculo (pero no corta el círculo).

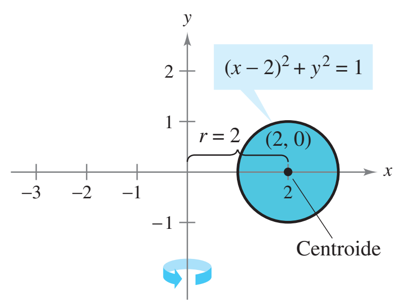
EJEMPLO 7 Encontrar el volumen por el teorema de Pappus

Encontrar el volumen del toro que se muestra en la figura 7.67*a* que es formado al girar la región circular limitada por

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

alrededor del eje y, como se muestra en la figura 7.67*b*.

a)



b)

Figura 7.67

Solución En la figura 7.67*b* se puede ver que el centroide de la región circular es (2, 0). Así, la distancia entre el centroide y el eje de revolución es $r = 2$. Dado que el área de la región circular es $A = \pi$, el volumen del toro es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi rA \\ &= 2\pi(2)(\pi) \\ &= 4\pi^2 \\ &\approx 39.5. \end{aligned}$$

EXPLORACIÓN

Usar el método de las capas para mostrar que el volumen del toro está dado por

$$V = \int_1^3 4\pi x\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx.$$

Evaluar esta integral usando calculadora. ¿Coincide la respuesta con la del ejemplo 7?

7.6 Ejercicios

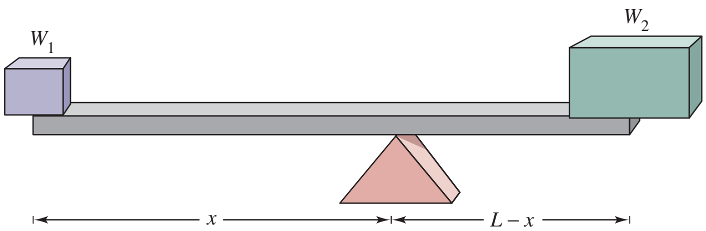
En los ejercicios 1 a 4, encontrar el centro de masa de la masa puntual situado en el eje x.

1. $m_1 = 7, m_2 = 3, m_3 = 5$
   $x_1 = -5, x_2 = 1, x_3 = 3$
2. $m_1 = 7, m_2 = 4, m_3 = 3, m_4 = 8$
   $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 5, x_4 = 4$
3. $m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, m_5 = 1$
   $x_1 = 7, x_2 = 8, x_3 = 12, x_4 = 15, x_5 = 18$
4. $m_1 = 12, m_2 = 1, m_3 = 6, m_4 = 3, m_5 = 11$
   $x_1 = -6, x_2 = -4, x_3 = -2, x_4 = 0, x_5 = 8$

5. ***Razonamiento gráfico***
   a) Trasladar cada masa del punto en el ejercicio 3 a las cinco unidades a la derecha y determinar el centro resultante de masa.
   b) Trasladar a la izquierda tres unidades cada masa del punto en el ejercicio 4 y determinar el centro de masa resultante.

6. ***Conjetura*** Usar el resultado del ejercicio 5 para hacer una conjetura sobre el cambio en el centro de masa que resulta cuando cada masa del punto se traslada k unidades horizontalmente.

Problemas de estática **En los ejercicios 7 y 8, considerar una viga de longitud L con un apoyo a x pies de un extremo (ver la figura). Se colocan los objetos con pesos W_1 y W_2 en los extremos opuestos de la viga. Encontrar x tal que el sistema esté en equilibrio.**



7. Dos niños que pesan 48 libras y 72 libras van a jugar en un columpio que tiene 10 pies de largo.
8. Para mover una roca de 600 libras, una persona que pesa 200 libras quiere balancearla con una viga que tiene 5 pies de longitud.

En los ejercicios 9 a 12, encontrar el centro de masa del sistema de las masas puntuales dado.

9.

m_i	5	1	3
(x_1, y_1)	(2, 2)	(−3, 1)	(1, −4)

10.

m_i	10	2	5
(x_1, y_1)	(1, −1)	(5, 5)	(−4, 0)

11.

m_i	12	6	4.5	5
(x_1, y_1)	(2, 3)	(−1, 5)	(6, 8)	(2, −2)

12.

m_i	3	4
(x_1, y_1)	(−2, −3)	(5, 5)

m_i	2	1	6
(x_1, y_1)	(7, 1)	(0, 0)	(−3, 0)

En los ejercicios 13 a 26, encontrar M_x, M_y y $(\bar{x}, \bar{y})$ para las láminas de densidad uniforme ρ acotadas por las gráficas de las ecuaciones.

13. $y = \frac{1}{2}x, y = 0, x = 2$
14. $y = -x + 3, y = 0, x = 0$
15. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$
16. $y = \frac{1}{3}x^2, y = 0, x = 3$
17. $y = x^2, y = x^3$
18. $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{2}x$
19. $y = -x^2 + 4x + 2, y = x + 2$
20. $y = \sqrt{x} + 1, y = \frac{1}{3}x + 1$
21. $y = x^{2/3}, y = 0, x = 8$
22. $y = x^{2/3}, y = 4$
23. $x = 4 - y^2, x = 0$
24. $x = 2y - y^2, x = 0$
25. $x = -y, x = 2y - y^2$
26. $x = y + 2, x = y^2$

En los ejercicios 27 a 30, formular y evaluar las integrales para encontrar el área y los momentos sobre los ejes x y y para la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. (Asumir $\rho = 1$.)

27. $y = x^2, y = 2x$
28. $y = \dfrac{1}{x}, y = 0, 1 \leq x \leq 4$
29. $y = 2x + 4, y = 0, 0 \leq x \leq 3$
30. $y = x^2 - 4, y = 0$

En los ejercicios 31 a 34, usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Usar las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar el centroide de la región.

31. $y = 10x\sqrt{125 - x^3}, y = 0$
32. $y = xe^{-x/2}, y = 0, x = 0, \ x = 4$
33. ***Sección prefabricada de un edificio.***
    $y = 5\sqrt[3]{400 - x^2}, y = 0$
34. ***Bruja de Agnesi.***
    $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}, y = 0, x = -2, x = 2$

En los ejercicios 35 a 40, encontrar y/o verificar el centroide de la región común usada en ingeniería.

35. ***Triángulo*** Mostrar que el centroide del triángulo con vértices $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y (b, c) es el punto de intersección de las medianas (ver la figura).

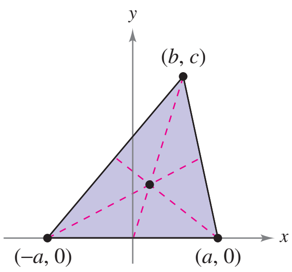


Figura para 35

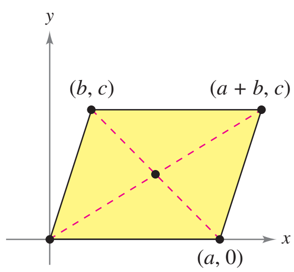


Figura para 36

36. ***Paralelogramo*** Mostrar que el centroide del paralelogramo con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, (b, c) y $(a + b, c)$ es el punto de intersección de las diagonales (ver la figura).

37. ***Trapecio*** Encontrar el centroide del trapecio con vértices $(0, 0)$, $(0, a)$, (c, b) y $(c, 0)$. Mostrar que es la intersección de la recta que conecta los puntos medios de los lados paralelos y la recta que conecta los lados paralelos extendidos, como se muestra en la figura.

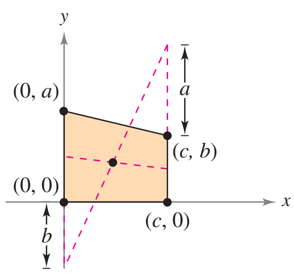


Figura para 37

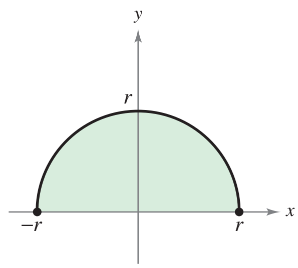


Figura para 38

38. ***Semicírculo*** Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $y = 0$ (ver la figura).

39. ***Semielipse*** Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = 0$ (ver la figura).

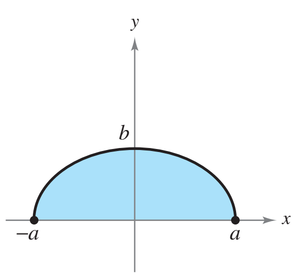


Figura para 39

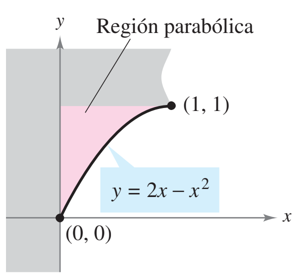


Figura para 40

40. ***Región parabólica*** Encontrar el centroide de la **región parabólica** mostrada en la figura.

41. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = b$, donde $b > 0$.

a) Dibujar una gráfica de la región.

b) Usar la gráfica del apartado *a*) para determinar $\bar{x}$. Explicar.

c) Formular la integral para encontrar M_y. Debido a la forma del integrando, el valor de la integral puede obtenerse sin integrar. ¿Cuál es la forma del integrando y cuál es el valor de la integral? Comparar con el resultado del apartado *b*).

d) Usar la gráfica del apartado *a*) para determinar si $\bar{y} > \dfrac{b}{2}$ o $\bar{y} < \dfrac{b}{2}$. Explicar.

e) Usar la integración para verificar la respuesta en el apartado *d*).

42. ***Razonamiento gráfico y numérico*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = x^{2n}$ $y = b$, donde $b > 0$ y n es un entero positivo.

a) Formular la integral para encontrar M_y. Debido a la forma del integrando, el valor de la integral puede obtenerse sin integrar. ¿Cuál es la forma del integrando y cuál es el valor de la integral? Comparar con el resultado *b*).

b) ¿Es $\bar{y} > \dfrac{b}{2}$ o $\bar{y} < \dfrac{b}{2}$? Explicar.

c) Usar integración para encontrar $\bar{y}$ como una función de n.

d) Usar el resultado del apartado *c*) para completar la tabla.

n	1	2	3	4
$\bar{y}$				

e) Encontrar $\lim_{n \to \infty} \bar{y}$.

f) Dar una explicación geométrica del resultado en el apartado *e*).

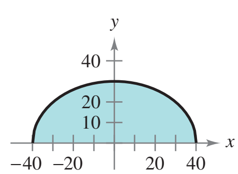
43. ***Modelado matemático*** Un fabricante de ventanas para camionetas modificadas necesita calcular el centro de masa. Para lo cual sobrepone un sistema de coordenadas en un prototipo del vidrio (ver la figura). Las medidas (en centímetros) para la mitad derecha del pedazo simétrico de vidrio se muestran en la tabla.

x	0	10	20	30	40
y	30	29	26	20	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el centro de masa del vidrio.

b) Usar las capacidades de regresión de una calculadora para encontrar un modelo polinómico de cuarto grado para los datos.

c) Usar las capacidades de integración de una calculadora y el modelo para aproximar el centro de masa del vidrio. Comparar con el resultado del apartado *a*).



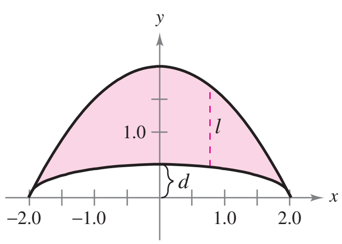
44. ***Modelado matemático*** El fabricante de un barco necesita aproximar el centro de masa de una sección del casco. Un sistema de coordenadas se sobrepone en un prototipo (ver la figura). Las medidas (en pies) para la mitad derecha del prototipo simétrico se listan en la tabla.

x	0	0.5	1.0	1.5	2
l	1.50	1.45	1.30	0.99	0
d	0.50	0.48	0.43	0.33	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el centro de masa de la sección del cascarón.

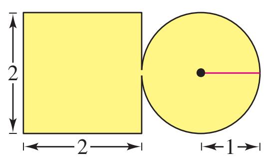
b) Usar las capacidades de la regresión en una calculadora para encontrar los modelos polinómicos de cuarto grado para ambas curvas mostradas en la figura. Trazar los datos y trazar la gráfica de los modelos.

c) Usar las capacidades de la integración en una herramienta de graficación y el modelo para aproximar el centro de masa de la sección del cascarón. Comparar el resultado con el apartado *a*).

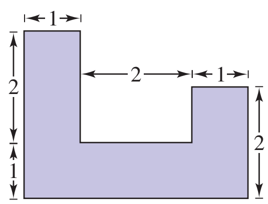


En los ejercicios 45 a 48, introducir un sistema de coordenadas apropiado y encontrar las coordenadas del centro de masa de la lámina plana. (La respuesta depende de la posición del sistema de coordenadas elegido.)

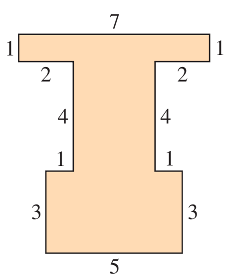
45.



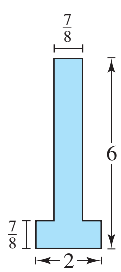
46.



47.



48.



49. Encontrar el centro de masa de la lámina, del ejercicio 45 si la sección circular tuviera el doble de la densidad de la cuadrada.

50. Encontrar el centro de masa de la lámina del ejercicio 45 si la sección cuadrada tuviera el doble de la densidad de la circular.

En los ejercicios 51 a 54, usar el teorema de Pappus para encontrar el volumen del sólido de revolución.

51. El toro formado al girar el círculo $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ alrededor del eje y.

52. El toro formado al girar el círculo $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ alrededor del eje x.

53. El sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x$, $y = 4$ y $x = 0$ alrededor del eje x.

54. El sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = 2\sqrt{x - 2}$, $y = 0$ y $x = 6$ alrededor del eje y.

Desarrollo de conceptos

55. Sea la masa puntual $m_1, m_2, \ldots, m_n$, localizada en (x_1, y_1) $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Definir el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$.

56. ¿Qué es una lámina plana? Describir lo que significa el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de una lámina plana.

57. Enumerar el teorema de Pappus.

Para discusión

58. El centroide de la región plana acotado por las gráficas de $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ es $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{18}\right)$. ¿Es posible encontrar el centroide de cada una de las regiones acotadas por las gráficas de los siguientes conjuntos de ecuaciones? En ese caso, identificar el centroide y explicar la respuesta.

a) $y = f(x) + 2$, $y = 2$, $x = 0$ y $x = 1$

b) $y = f(x - 2)$, $y = 0$, $x = 2$ y $x = 3$

c) $y = -f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$

d) $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ y $x = 1$

En los ejercicios 59 y 60, usar el *segundo teorema de Pappus* el cual se enuncia a continuación. Si un segmento de una curva plana *C* se gira alrededor de un eje que no corta la curva (posiblemente excepto a sus puntos finales), el área *S* de la superficie de revolución resultante está dada por el producto de la longitud de *C* por la distancia *d* recorrida por el centroide de *C*.

59. Una esfera se forma al girar la gráfica de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ alrededor del eje x. Usar la fórmula para el área de la superficie, $S = 4\pi r^2$, para encontrar el centroide del semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

60. Un toro se forma al girar la gráfica de $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje y. Encontrar el área de la superficie del toro.

61. Sea $n \geq 1$ constante, y considerar la región acotada por $f(x) = x^n$, el eje x y $x = 1$. Encontrar el centroide de esta región. Cuando $n \to \infty$ ¿qué aspecto tiene la región y dónde está su centroide?

Preparación del examen Putnam

62. Sea V la región en el plano cartesiano que consiste en todos los puntos (x, y) satisfaciendo las condiciones simultáneas $|x| \leq y \leq |x| + 3$ y $y \leq 4$. Encontrar el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de V.

7.7 Presión y fuerza de un fluido

■ **Encontrar la presión y la fuerza de un fluido.**

Presión y fuerza de un fluido

Los buceadores saben que mientras más profundo se sumerge un objeto en un fluido, es mayor la presión sobre el objeto. La **presión** se define como la fuerza ejercida por unidad de área en la superficie de un cuerpo. Por ejemplo, para una columna de agua que tiene 10 pies de altura y 1 pulg^2 pesa 4.3 libras, la *presión del fluido* ejercida a una profundidad de 10 pies de agua es 4.3/pulg^2.* A 20 pies, ésta aumentaría a 8.6 libras/pulg^2 y en general la presión será proporcional a la profundidad a la que esté el objeto en el fluido.

The Granger Collection

BLAISE PASCAL (1623-1662)

Pascal es conocido por sus contribuciones a diversas áreas de las matemáticas y de la física, así como por su influencia en Leibniz. Aunque buena parte de su obra en cálculo fue intuitiva y carente del rigor exigible en las matemáticas modernas, Pascal anticipó muchos resultados relevantes.

DEFINICIÓN DE PRESIÓN DE FLUIDO

La presión en un objeto a la profundidad h en un líquido es

$$\text{Presión} = P = wh$$

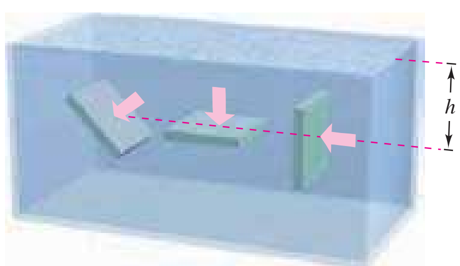
donde w es la densidad de peso del líquido por unidad de volumen.

A continuación se muestran varias densidades de peso de fluidos comunes en libras/pie^3.

Alcohol etílico	49.4
Gasolina	41.0-43.0
Glicerina	78.6
Keroseno	51.2
Mercurio	849.0
Agua de mar	64.0
Agua	62.4

Cuando se calcula la presión del fluido, se puede usar una importante (y sorprendente) ley física llamada el **principio de Pascal** en honor del matemático francés Blaise Pascal. El principio de Pascal establece que la presión ejercida por un fluido a una profundidad h es exactamente igual *en todas direcciones*. Por ejemplo, en la figura 7.68, la presión a la profundidad indicada es la misma para los tres objetos. Como se da la presión del fluido en términos de la fuerza por unidad de área ($P = F/A$), la fuerza del fluido en una superficie de área *A sumergida horizontalmente* es

$$\text{Fuerza del fluido} = F = PA = (\text{presión})(\text{área}).$$

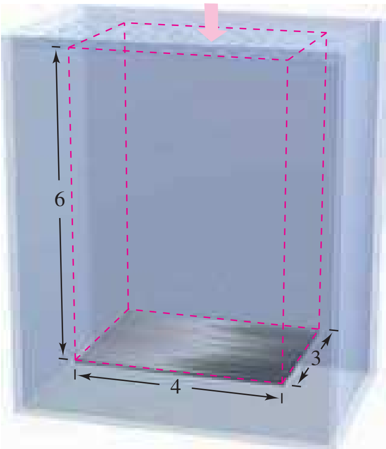


La presión en h es la misma para los tres objetos
Figura 7.68

**La presión total en un objeto sumergido a 10 pies de agua también incluiría la presión debida a la atmósfera de la Tierra. Al nivel del mar, la presión atmosférica es aproximadamente 14.7 libras/pulg^2.*

EJEMPLO 1 Fuerza de un fluido sobre una lámina sumergida

Encontrar la fuerza de un fluido sobre una lámina de metal rectangular que mide 3 pies por 4 pies que es sumergida a 6 pies en el agua, como se muestra en la figura 7.69.



La fuerza del fluido sobre una lámina de metal horizontal es igual a la presión del fluido por el área de la lámina
Figura 7.69

Solución Porque el peso por unidad de agua es 62.4 libras por pie^3 y la lámina se sumerge a 6 pies en el agua, la presión del fluido es

$$\begin{aligned} P &= (62.4)(6) \qquad\qquad P = wh \\ &= 374.4 \text{ libras por pie}^2 \end{aligned}$$

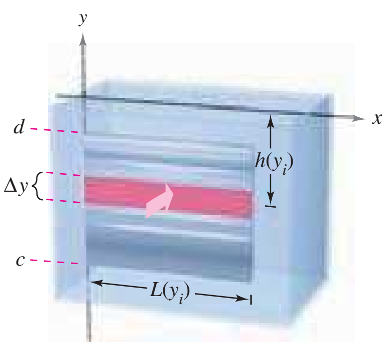
Porque el área total de la lámina es $A = (3)(4) = 12$ pies^2, la fuerza del fluido es

$$\begin{aligned} F = PA &= \left(374.4 \frac{\text{libras}}{\text{pie}^2}\right)(12 \text{ pies}^2) \\ &= 4\,492.8 \text{ libras} \end{aligned}$$

Este resultado es independiente del recipiente del agua. La fuerza del fluido sería la misma en una piscina que en un lago.

En el ejemplo 1, debido a que la lámina es rectangular y horizontal no son necesarios los métodos de cálculo para resolver el problema. Considerar una superficie que se sumerge verticalmente en un fluido. Este problema es más difícil porque la presión no es constante sobre la superficie.

Suponer que una lámina vertical se sumerge en un fluido de peso w (por unidad de volumen), como se muestra en la figura 7.70. Para determinar la fuerza total ejercida sobre *una cara* entre la profundidad c y la profundidad d, se puede subdividir el intervalo $[c, d]$ en n subintervalos, cada uno de anchura Δy. Luego, considerar el rectángulo representativo de anchura Δy y longitud $L(y_i)$, donde y_i está en el i-ésimo subintervalo. La fuerza ejercida contra este rectángulo representativo es



Los métodos de cálculo serán usados para encontrar la fuerza del fluido sobre una placa de metal vertical
Figura 7.70

$$\begin{aligned} \Delta F_i &= w(\text{profundidad})(\text{área}) \\ &= wh(y_i)L(y_i)\,\Delta y. \end{aligned}$$

La fuerza sobre los n rectángulos es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = w \sum_{i=1}^{n} h(y_i)L(y_i)\,\Delta y.$$

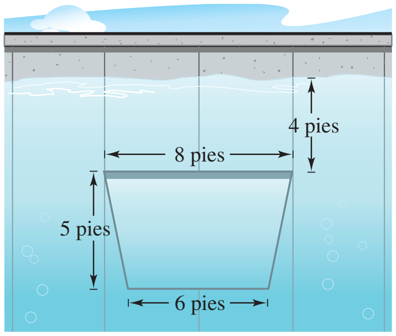
Observar que se considera que w es constante y se factoriza fuera de la suma. Por consiguiente, si el límite es $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$, sugiere la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE FUERZA EJERCIDA POR UN FLUIDO

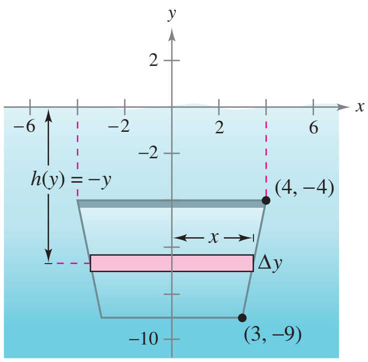
La **fuerza F ejercida por un fluido** de peso-densidad constante w (por unidad de volumen) sobre una región plana vertical sumergida desde $y = c$ hasta $y = d$ es

$$\begin{aligned} F &= w \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(y_i)L(y_i)\,\Delta y \\ &= w \int_c^d h(y)L(y)\,dy \end{aligned}$$

donde $h(y)$ es la profundidad del fluido en y y $L(y)$ es la longitud horizontal de la región en y.



a) Compuerta de una presa



b) La fuerza del fluido sobre la compuerta
Figura 7.71

EJEMPLO 2 Fuerza de un fluido en una superficie vertical

Una compuerta de una presa vertical en un dique tiene la forma de un trapecio, con 8 pies en la parte superior y 6 pies en el fondo, con una altura de 5 pies, como se muestra en la figura 7.71*a*. ¿Cuál es la fuerza del fluido en la compuerta cuando la parte superior está 4 pies debajo de la superficie del agua?

Solución Formular un modelo matemático para este problema, tiene libertad para localizar los ejes x y y de maneras diferentes. Una sugerencia conveniente es tomar el eje y, bisecar la compuerta y poner el eje x en la superficie del agua, como se muestra en la figura 7.71*b*. Así, la profundidad del agua en y, en pies, es

$$\text{Profundidad} = h(y) = -y.$$

Para encontrar la longitud $L(y)$ de la región en y, localizar la ecuación de la recta que forma el lado derecho de la compuerta. Porque esta recta atraviesa los puntos $(3, -9)$ y $(4, -4)$, su ecuación es

$$\begin{aligned} y - (-9) &= \frac{-4 - (-9)}{4 - 3}(x - 3) \\ y + 9 &= 5(x - 3) \\ y &= 5x - 24 \\ x &= \frac{y + 24}{5}. \end{aligned}$$

En la figura 7.71*b* se puede observar que la longitud de la región en y es

$$\begin{aligned} \text{Longitud} &= 2x \\ &= \frac{2}{5}(y + 24) \\ &= L(y). \end{aligned}$$

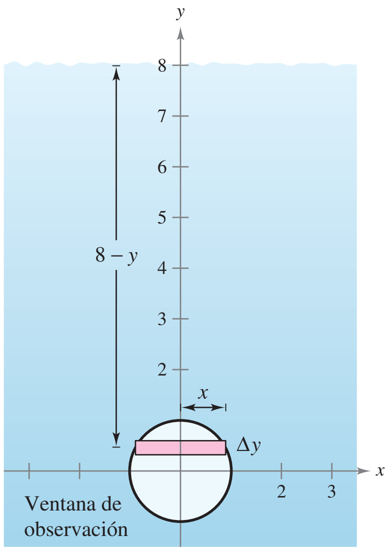
Por último, integrando de $y = -9$ a $y = -4$ se puede calcular la fuerza del fluido para ser

$$\begin{aligned} F &= w\int_c^d h(y)L(y)\,dy \\ &= 62.4\int_{-9}^{-4}(-y)\left(\frac{2}{5}\right)(y + 24)\,dy \\ &= -62.4\left(\frac{2}{5}\right)\int_{-9}^{-4}(y^2 + 24y)\,dy \\ &= -62.4\left(\frac{2}{5}\right)\left[\frac{y^3}{3} + 12y^2\right]_{-9}^{-4} \\ &= -62.4\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{-1\,675}{3}\right) \\ &= 13\,936 \text{ libras.} \end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 2, el eje x coincidió con la superficie del agua. Esto es conveniente, pero arbitrario. Al elegir un sistema de coordenadas para representar una situación física, se deben considerar varias posibilidades. A menudo puede simplificar los cálculos en un problema si localiza el sistema de coordenadas aprovechando las características especiales del problema, como la simetría.

EJEMPLO 3 Fuerza de un fluido sobre una superficie vertical

Una ventana circular para observación en un buque de investigación marina tiene un radio de 1 pie, y el centro de la ventana está a 8 pies de distancia del nivel del agua, como se muestra en la figura 7.72. ¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la ventana?



La fuerza del fluido en la ventana
Figura 7.72

Solución Para aprovechar la simetría, localizar un sistema de coordenadas tal que el origen coincida con el centro de la ventana, como se muestra en la figura 7.72. La profundidad en y es, entonces

$$\text{Profundidad} = h(y) = 8 - y.$$

La longitud horizontal de la ventana es $2x$, y se puede usar la ecuación para el círculo, $x^2 + y^2 = 1$, y resolver para x como sigue.

$$\begin{aligned}\text{Longitud} &= 2x\\ &= 2\sqrt{1-y^2} = L(y)\end{aligned}$$

Por último, dado que el rango de y va de -1 a 1, y la densidad del agua de mar es de 64 libras por pie^3, se tiene

$$\begin{aligned}F &= w\int_c^d h(y)L(y)\,dy\\ &= 64\int_{-1}^{1}(8-y)(2)\sqrt{1-y^2}\,dy.\end{aligned}$$

Inicialmente parece como si esta integral fuera difícil de resolver. Sin embargo, si se divide la integral en dos partes y se aplica la simetría, la solución es simple.

$$F = 64(16)\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy - 64(2)\int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2}\,dy$$

La segunda integral es 0 (porque el integrando es impar y los límites de integración son simétricos al origen). Es más, reconociendo que la primera integral representa el área de un semicírculo de radio 1, se obtiene

$$\begin{aligned}F &= 64(16)\left(\frac{\pi}{2}\right) - 64(2)(0)\\ &= 512\pi\\ &\approx 1\,608.5 \text{ libras}\end{aligned}$$

Así, la fuerza del fluido en la ventana es 1 608.5 libras.

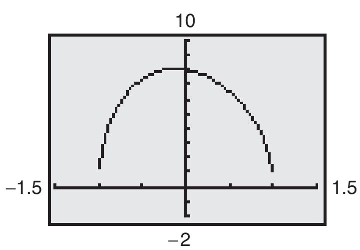
TECNOLOGÍA Para confirmar el resultado obtenido en el ejemplo 3, se podría considerar la regla de Simpson para aproximar el valor de

$$128\int_{-1}^{1}(8-x)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

De la gráfica de

$$f(x) = (8-x)\sqrt{1-x^2}$$

sin embargo, se puede observar que f no es derivable cuando $x = \pm 1$ (ver la figura 7.73). Esto significa que no se puede aplicar el teorema 4.19 de la sección 4.6 para determinar el error potencial en la regla de Simpson. Sin conocer el error potencial, la aproximación es de poca utilidad. Usar una calculadora para aproximar la integral.



f no es derivable en $x = \pm 1$
Figura 7.73

7.7 Ejercicios

Fuerza ejercida sobre una lámina sumergida **En los ejercicios 1 a 4, se da el área del lado superior de una lámina de metal. La lámina se sumerge horizontalmente a 5 pies del agua. Encontrar la fuerza del fluido en el lado de la parte superior.**

1. 3 pies^2

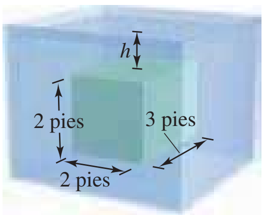
2. 16 pies^2

3. 10 pies^2

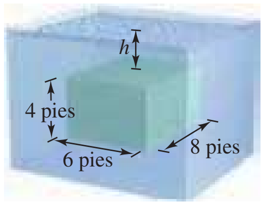
4. 22 pies^2

Fuerza de flotación **En los ejercicios 5 y 6, encontrar la fuerza de flotación de un sólido rectangular de las dimensiones dadas sumergido en el agua con su cara superior paralela a la superficie del agua. La fuerza de flotación es la diferencia entre las fuerzas del fluido en la parte superior y los lados del fondo del sólido.**

5.

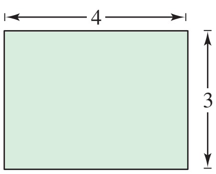


6.

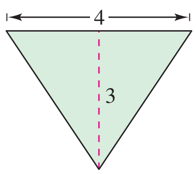


Fuerza de un fluido sobre la pared de un tanque **En los ejercicios 7 a 12, encontrar la fuerza del fluido en el lado vertical del tanque donde las dimensiones se dan en pies. Asumir que el tanque está lleno de agua.**

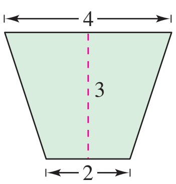
7. Rectángulo



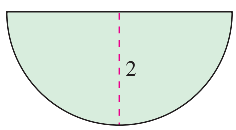
8. Triángulo



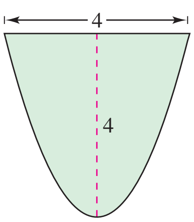
9. Trapezoide



10. Semicírculo

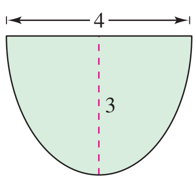


11. Parábola, $y = x^2$



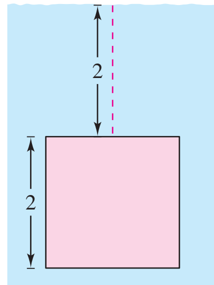
12. Semielipse

$y = -\frac{1}{2}\sqrt{36 - 9x^2}$

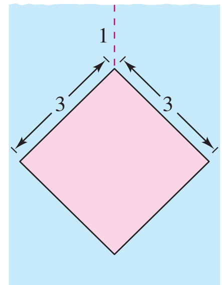


Fuerza de un fluido de agua **En los ejercicios 13 a 16, encontrar la fuerza de un fluido en la placa vertical sumergida en agua donde las dimensiones se dan en metros y la densidad de peso del agua es 9 800 newtons por metro^3.**

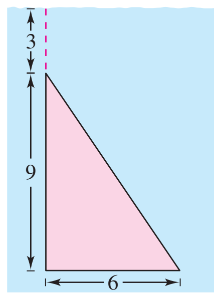
13. Cuadrado



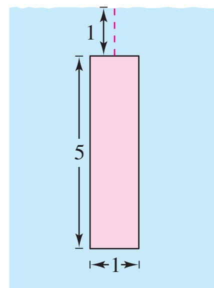
14. Cuadrado



15. Triángulo

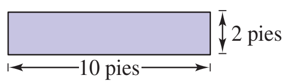


16. Rectángulo



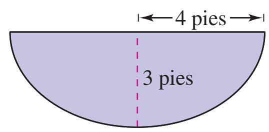
Fuerza ejercida en una estructura de concreto (hormigón) **En los ejercicios 17 a 20, la figura es el lado vertical de una estructura de concreto vertido que pesa 140.7 libras/pie^3. Determinar la fuerza en esta parte de la estructura de concreto.**

17. Rectángulo

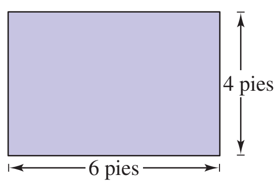


18. Semielipse

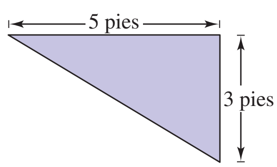
$y = -\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$



19. Rectángulo



20. Triángulo



21. ***Fuerza ejercida por la gasolina*** Un tanque de gasolina cilíndrico está colocado con su eje en posición horizontal. Encontrar la fuerza del fluido sobre una de las paredes del tanque si éste está medio lleno, asumiendo que su diámetro es de 3 pies y la gasolina pesa 42 libras/pie^3.

22. ***Fuerza de fluido de la gasolina*** Repetir el ejercicio 21 para un tanque que está lleno. (Evaluar una integral por una fórmula geométrica y el otro observando que el integrando es una función impar.)

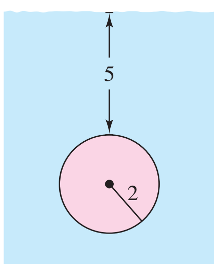
23. ***Fuerza de un fluido en una placa circular*** Una placa circular r pies es sumergida verticalmente en un tanque de un fluido que pesa w libras/pie^3. El centro del círculo es k ($k > r$) pies debajo de la superficie del fluido. Mostrar que la fuerza del fluido en la superficie de la placa es

$$F = wk(\pi r^2).$$

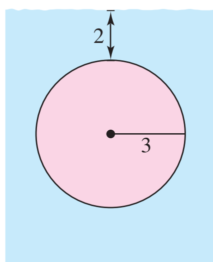
(Evaluar una integral por una fórmula geométrica y el otro observando que el integrando es una función impar.)

24. ***Fuerza de un fluido en una placa circular*** Usar el resultado del ejercicio 23 para encontrar la fuerza de un fluido en una placa circular como se muestra en cada figura. Asumir que las placas están en la pared de un tanque lleno de agua y las medidas están dadas en pies.

a)



b)

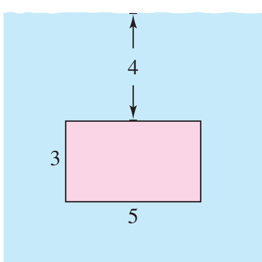


25. ***Fuerza de un fluido en una placa rectangular*** Una placa rectangular de altura h pies y base b se sumerge verticalmente en un tanque de fluido que pesa w libras por pie cúbico. El centro está k debajo de la superficie del fluido donde $k > h/2$. Mostrar que la fuerza del fluido en la superficie de la placa es

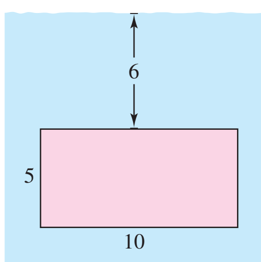
$$F = wkhb.$$

26. ***Fuerza de un fluido en una placa rectangular*** Usar el resultado del ejercicio 25 para encontrar la fuerza de un fluido en una placa rectangular como se muestra en cada figura. Asumir que las placas están en la pared de un tanque lleno de agua y las medidas están dadas en pies.

a)



b)

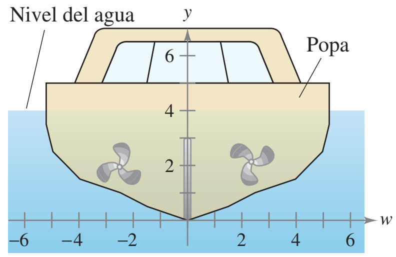


27. ***Portilla de un submarino*** Una portilla en un lado vertical de un submarino (sumergido en agua de mar) es un cuadrado de un pie de lado. Encontrar la fuerza del fluido en la portilla, asumiendo que el centro del cuadrado está 15 pies debajo de la superficie.

28. ***Portilla de un submarino*** Repetir el ejercicio 27 para una portilla circular que tiene un diámetro de un pie. El centro está 15 pies debajo de la superficie.

29. ***Modelo matemático*** La popa vertical de un barco con un sistema de coordenadas sobrepuesto se ilustra en la figura. La tabla muestra la anchura w de la popa en los valores indicados de y. Encontrar la fuerza del fluido contra la popa si las medidas se dan en pies.

y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
w	0	3	5	8	9	10	10.25	10.5	10.5



30. ***Compuerta de un canal de irrigación*** La sección transversal vertical de una compuerta de un canal de irrigación es diseñado por $f(x) = 5x^2/(x^2 + 4)$, donde x se mide en pies y $x = 0$ corresponden al centro del canal. Usar las capacidades de integración de una calculadora para aproximar la fuerza del fluido contra una compuerta vertical que detiene el flujo de agua si el agua está a 3 pies de profundidad.

En los ejercicios 31 y 32, usar las capacidades de integración en una calculadora para aproximar la fuerza de un fluido en la placa vertical acotada por el eje x y la mitad superior de la gráfica de la ecuación. Asumir que la base de la placa está 15 pies debajo de la superficie del agua.

31. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$

32. $\dfrac{x^2}{28} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Desarrollo de conceptos

33. ***Para pensar*** Aproximar la profundidad del agua en el tanque en el ejercicio 7, si la fuerza del fluido es una mitad más grande que cuando el tanque está lleno. Explicar por qué la respuesta no es $\frac{3}{2}$.

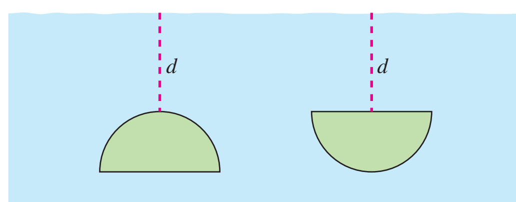
34. *a)* Definir la presión del fluido.

b) Definir la fuerza del fluido contra una región del plano vertical sumergida.

35. Explicar por qué la presión del fluido sobre una superficie se calcula usando rectángulos representativos horizontales en lugar de rectángulos representativos verticales.

Para discusión

36. Se colocan dos ventanas semicirculares idénticas a la misma profundidad en la pared vertical de un acuario (ver la figura). ¿Cuál tiene la fuerza del fluido mayor? Explicar.



7 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 a 10, esquematizar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, y determinar el área de la región.

1. $y = \dfrac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 5$

2. $y = \dfrac{1}{x^2},\ y = 4,\ x = 5$

3. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$

4. $x = y^2 - 2y,\ x = -1,\ y = 0$

5. $y = x,\ y = x^3$

6. $x = y^2 + 1,\ x = y + 3$

7. $y = e^x,\ y = e^2,\ x = 0$

8. $y = \csc x,\ y = 2$ (una región)

9. $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ \dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{5\pi}{4}$

10. $x = \cos y,\ x = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\pi}{3} \le y \le \dfrac{7\pi}{3}$

En los ejercicios 11 a 14, usar una herramienta de graficación para representar la región acotada por las gráficas de las funciones, y usar las capacidades de integración en una herramienta de graficación para encontrar el área de la región.

11. $y = x^2 - 8x + 3,\ y = 3 + 8x - x^2$

12. $y = x^2 - 4x + 3,\ y = x^3,\ x = 0$

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,\ y = 0,\ x = 0$

14. $y = x^4 - 2x^2,\ y = 2x^2$

En los ejercicios 15 a 18, usar los rectángulos representativos verticales y horizontales para formular las integrales para encontrar el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Encontrar el área de la región evaluando la más fácil de las dos integrales.

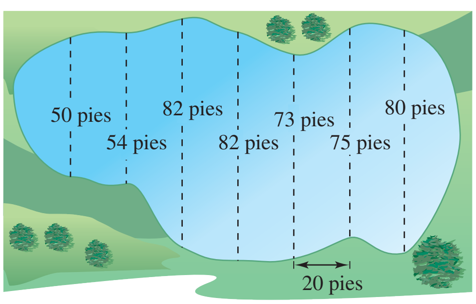
15. $x = y^2 - 2y,\ x = 0$

16. $y = \sqrt{x - 1},\ y = \dfrac{x - 1}{2}$

17. $y = 1 - \dfrac{x}{2},\ y = x - 2,\ y = 1$

18. $y = \sqrt{x - 1},\ y = 2,\ y = 0,\ x = 0$

19. Estimar el área de la superficie del estanque usando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.



20. ***Modelo matemático*** La tabla muestra el ingreso R_1 de servicio anual en miles de millones de dólares para la industria del teléfono celular durante los años 2000 a 2006. (*Fuente: Asociación de Telecomunicaciones Celulares e Internet*)

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
R_1	52.5	65.3	76.5	87.5	102.1	113.5	125.5

a) Usar las capacidades de regresión de una calculadora para encontrar un modelo exponencial para los datos. Sea t que represente el año, con $t = 10$ que corresponden a 2000. Usar una herramienta de graficación para trazar los datos y el modelo en la misma ventana.

b) Un consultor financiero considera que un modelo de ingreso de servicio para los años 2010 hasta 2015 es de $R_2 = 6 + 13.9e^{0.14t}$. ¿Cuál es la diferencia en el total de ingresos de servicios entre los dos modelos para los años 2010 hasta 2015?

En los ejercicios 21 a 28, encontrar el volumen del sólido generado al girar la región plana acotada por las ecuaciones alrededor de la(s) recta(s) indicada(s).

21. $y = x,\ y = 0,\ x = 3$

a) eje x *b*) eje y
c) recta $x = 3$ *d*) recta $x = 6$

22. $y = \sqrt{x},\ y = 2,\ x = 0$

a) eje x *b*) recta $y = 2$
c) eje y *d*) recta $x = -1$

23. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

a) eje y (esferoide oblongo)
b) eje x (esferoide prolato)

24. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

a) eje y (esferoide oblongo)
b) eje x (esferoide prolato)

25. $y = \dfrac{1}{x^4 + 1},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$
gira alrededor del eje y

26. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$
gira alrededor del eje x

27. $y = 1/(1 + \sqrt{x - 2}),\ y = 0,\ x = 2,\ x = 6$
gira alrededor del eje y

28. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$
gira alrededor del eje x

29. ***Área y volumen*** Considerar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x\sqrt{x + 1}$ y $y = 0$.

a) Encontrar el área de la región.

b) Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x.

c) Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje y.

30. ***Para pensar*** Un sólido es generado al girar una región acotada por $y = x^2 + 4$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$ alrededor del eje x. Crear la integral que obtiene el volumen del sólido usando *a*) el método de los discos y *b*) el método de las capas (no integrar). *c*) ¿Cada método da lugar a una integral con respecto a x?

31. ***Gasolina en un tanque*** Un tanque de gasolina es un esferoide de oblato generado al girar la región acotada por la gráfica de $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ alrededor del eje y donde x y y son medidos en pies. ¿A qué altura llega la gasolina en el tanque cuando se llena a un cuarto de su capacidad?

32. ***Tamaño de una base*** La base de un sólido es un círculo de radio a y sus secciones transversales verticales son triángulos equiláteros. El volumen del sólido es 10 metros cúbicos. Encontrar el radio del círculo.

En los ejercicios 33 y 34, encontrar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo dado.

33. $f(x) = \dfrac{4}{5}x^{5/4}, \quad [0, 4]$ **34.** $y = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2x}, \quad [1, 3]$

35. ***Longitud de una catenaria*** Un cable de suspensión de un puente forma una catenaria modelada por la ecuación

$$y = 300 \cosh\left(\frac{x}{2\,000}\right) - 280, \quad -2\,000 \le x \le 2\,000$$

donde x y y son medidos en pies. Usar una computadora para aproximar la longitud del cable.

36. ***Aproximación*** Determinar qué valor aproxima mejor la longitud de arco representada por la integral

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (\sec^2 x)^2}\, dx.$$

(Hacer la selección con base en un esquema de arco y *sin* hacer algún cálculo.)

a) -2 *b*) 1 *c*) π *d*) 4 *e*) 3

37. ***Área de una superficie*** Usar la integración para encontrar el área de la superficie lateral de un cono circular recto de altura 4 y radio 3.

38. ***Área de una superficie*** La región acotada por las gráficas de $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$ y $x = 8$ gira alrededor del eje x. Encontrar el área de la superficie del sólido generada.

39. ***Trabajo*** Se necesita una fuerza de 5 libras para estirar un resorte 1 pulgada de su posición natural. Encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural de 10 pulgadas a una longitud de 15 pulgadas.

40. ***Trabajo*** La fuerza requerida para estirar un resorte es 50 libras. Encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural de 10 pulgadas al doble de esa longitud.

41. ***Trabajo*** Un pozo de agua tiene ocho pulgadas de diámetro y 190 pies de profundidad. El agua llega a 25 pies de la parte superior del pozo. Determinar la cantidad de trabajo realizado al vaciar el pozo, asumiendo que el agua no entra en él mientras está bombeándose.

42. ***Trabajo*** Repetir el ejercicio 41, asumiendo que el agua entra al pozo a una velocidad de 4 galones por minuto y la bomba trabaja a una velocidad de 12 galones por minuto. ¿Cuántos galones se bombean en este caso?

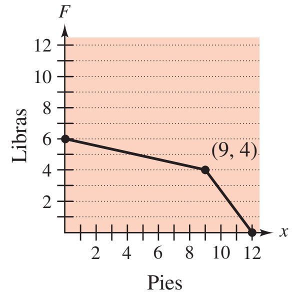
43. ***Trabajo*** Una cadena de 10 pies de largo pesa 4 libras por pie y está colgada de una plataforma situada 20 pies sobre el nivel del suelo. ¿Cuánto trabajo se requiere para levantar toda la cadena al nivel de 20 pies?

44. ***Trabajo*** Una grúa está a 200 pies sobre el nivel del suelo en la parte superior de un edificio, usa un cable que pesa 5 libras por pie. Encontrar el trabajo realizado para enrollar el cable si

a) un extremo está al nivel del suelo.
b) hay una carga de 300 libras atada al extremo del cable.

45. ***Trabajo*** El trabajo realizado por una fuerza variable en una prensa es 80 libras-pie. La prensa mueve una distancia de 4 pies y la fuerza es una ecuación cuadrática de la forma $F = ax^2$. Encontrar a.

46. ***Trabajo*** Encontrar el trabajo realizado por la fuerza F mostrada en la figura.



En los ejercicios 47 a 50, encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

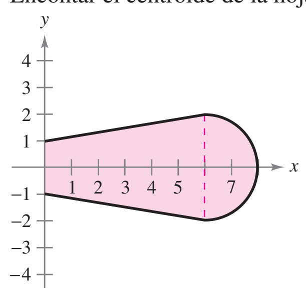
47. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \ x = 0, \ y = 0$

48. $y = x^2, \ y = 2x + 3$

49. $y = a^2 - x^2, \ y = 0$

50. $y = x^{2/3}, \ y = \frac{1}{2}x$

51. ***Centroide*** Un aspa de un ventilador industrial tiene la configuración de un semicírculo adosado a un trapecio (ver la figura). Encontar el centroide de la hoja.



52. ***Fuerza de un fluido*** Una piscina tiene 5 pies de profundidad en un extremo y 10 pies de profundidad en el otro, y el fondo es un plano inclinado. La longitud y anchura de la piscina son 40 y 20 pies. Si la piscina está llena de agua, ¿cuál es la fuerza del fluido en cada una de las paredes verticales?

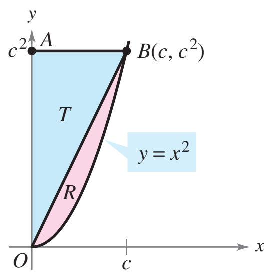
53. ***Fuerza de un fluido*** Mostrar que la fuerza de un fluido contra cualquier región vertical es el producto del peso por el volumen cúbico del líquido, el área de la región y la profundidad del centroide de la región.

54. ***Fuerza de un fluido*** Usar el resultado del ejercicio 53 para encontrar la fuerza del fluido en un lado de una placa circular de radio 4 pies que se sumerge verticalmente en el agua para que su centro esté 10 pies debajo de la superficie.

SP Solución de problemas

1. Sea R el área de la región en el primer cuadrante acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = cx$, $c > 0$. Sea T el área del triángulo AOB. Calcular el límite

$$\lim_{c \to 0^+} \frac{T}{R}.$$



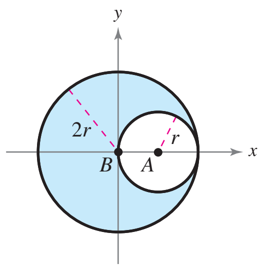
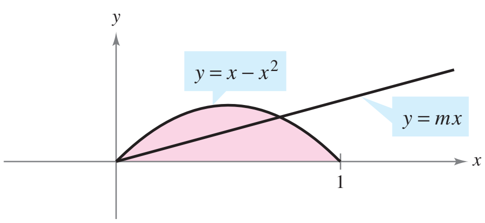


Figura para 1 **Figura para 2**

2. Sea L una lámina de densidad uniforme $\rho = 1$ obtenida por el giro del círculo A de radio r desde el círculo B de radio $2r$ (ver figura).
   a) Demostrar que $M_x = 0$ para L.
   b) Demostrar que M_y para L es igual a (M_y para B) $-$ (M_y para A).
   c) Encontrar M_y para B y M_y para A. Entonces usar el apartado *b*) para calcular M_y para L.
   d) ¿Cuál es el centro de masa de L?

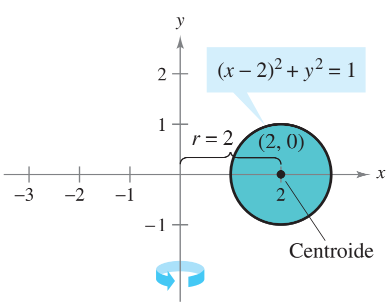
3. Sea R la región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x. Encontrar la ecuación de la recta $y = mx$ que divide esta región en dos regiones de área igual.



4. *a*) Un toro se forma al girar la región acotada por el círculo

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1$$

alrededor del eje y (véase la figura). Usar el método de los discos para calcular el volumen del toro.



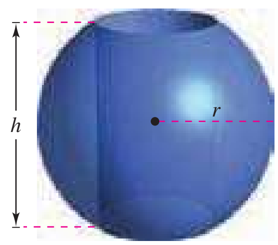
   b) Usar el método de los discos para encontrar el volumen del toro si el círculo tiene radio r y su centro está R unidades del eje de rotación.

CAS 5. Trazar la curva

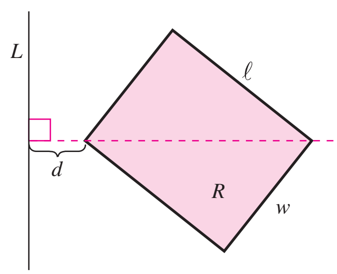
$$8y^2 = x^2(1 - x^2).$$

Usar un sistema algebraico por computadora para encontrar el área de la superficie del sólido de revolución obtenida al girar la curva alrededor del eje y.

6. Un orificio perforado en el centro de una esfera de radio r (ver la figura). La altura del anillo esférico restante es h. Encontrar el volumen del anillo y mostrar que es independiente del radio de la esfera.



7. Un rectángulo R de longitud l y anchura w se gira alrededor de la recta L (ver la figura). Encontrar el volumen del sólido resultante de revolución.



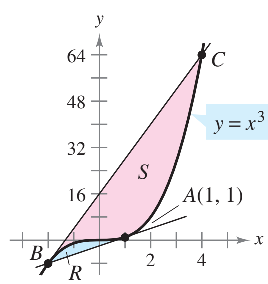


Figura para 7 **Figura para 8**

8. *a*) La recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto $A(1, 1)$ corta la curva en otro punto B. Sea R el área de la región acotada por la curva y la recta tangente. La recta tangente a B corta la curva en otro punto C (ver la figura). Sea S el área de la región limitada por la curva y esta segunda recta tangente. ¿Cómo se relacionan las áreas R y S?
   b) Repetir la construcción en el apartado *a*) seleccionando un punto arbitrario A en la curva $y = x^3$. Mostrar que las dos áreas, R y S, siempre están relacionadas de la misma manera.

9. La gráfica de $y = f(x)$ pasa a través del origen. La longitud de arco de la curva de $(0, 0)$ a $(x, f(x))$ se da por

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + e^t}\, dt.$$

Identificar la función f.

10. Sea f rectificable en el intervalo $[a, b]$, y sea

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt.$$

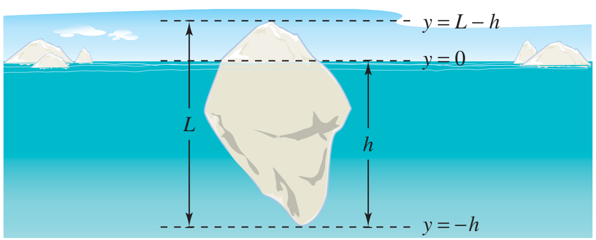
a) Encontrar $\dfrac{ds}{dx}$.

b) Encontrar ds y $(ds)^2$.

c) Si $f(x) = t^{3/2}$, encontrar $s(x)$ en $[1, 3]$.

d) Calcular $s(2)$ y describir qué significa.

11. El **principio de Arquímedes** establece que la fuerza ascendente o de flotación de un objeto dentro de un fluido es igual al peso del fluido que el objeto desplaza. Para un objeto parcialmente sumergido, se puede obtener información sobre las densidades relativas del objeto flotante y el fluido observando cuánto del objeto está sobre y debajo de la superficie. También se puede determinar el tamaño de un objeto flotante si se sabe la cantidad que está sobre la superficie y las densidades relativas. Puede verse la parte superior de un iceberg flotante (ver la figura). La densidad del agua de océano es 1.03×10^3 kilogramos por metro cúbico, y la del hielo es 0.92×10^3 kilogramos por metro cúbico. ¿Qué porcentaje del iceberg está debajo de la superficie?



12. Esquematizar la región acotada a la izquierda por $x = 1$, acotada por arriba por $y = 1/x^3$, y acotada por debajo por $y = -1/x^3$.

a) Encontrar el centroide de la región para $1 \le x \le 6$.

b) Encontrar el centroide de la región para $1 \le x \le b$.

c) ¿Dónde esta el centroide cuando $b \to \infty$?

13. Esquematizar la región a la derecha del eje y, acotada por arriba por $y = 1/x^4$ y acotada por debajo por $y = -1/x^4$.

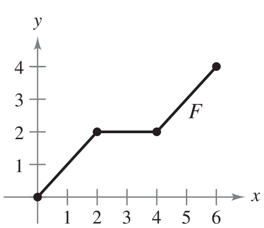
a) Encontrar el centroide de la región para $1 \le x \le 6$.

b) Encontrar el centroide de la región para $1 \le x \le b$.

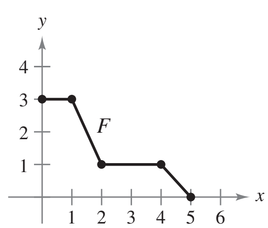
c) ¿Dónde está el centroide cuando $b \to \infty$?

14. Encontrar el trabajo realizado por cada fuerza F.

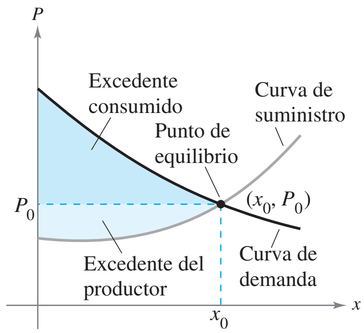
a)



b)



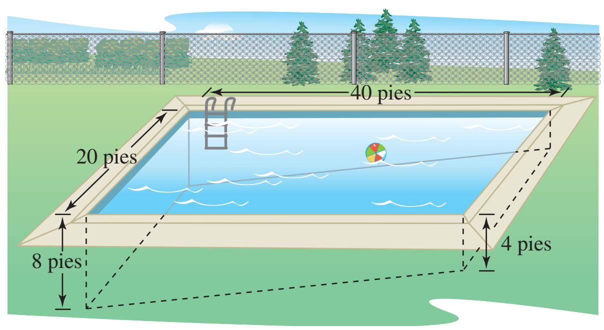
En los ejercicios 15 y 16, encontrar los excedentes de consumos para las curvas de oferta y demanda $[p_1(x)]$ dadas. El excedente del consumidor y excedente del productor son representados por las áreas mostradas en la figura.

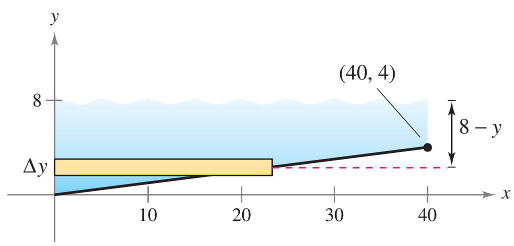


15. $p_1(x) = 50 - 0.5x, \quad p_2(x) = 0.125x$

16. $p_1(x) = 1\,000 - 0.4x^2, \quad p_2(x) = 42x$

17. Una piscina tiene 20 pies de ancho, 40 pies de largo y 4 pies de profundidad en un extremo y 8 pies de profundidad en el otro (ver la figura). El fondo es un plano inclinado. Encontrar la fuerza del fluido en cada pared vertical.





18. *a*) Encontrar por lo menos dos funciones continuas f que satisfagan cada condición.

i) $f(x) \ge 0$ en $[0, 1]$ *ii*) $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$

iii) El área acotada por la gráfica de f y el eje x para $0 \le x \le 1$ es igual a 1.

b) Para cada función encontrada en el apartado *a*), aproximar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo $[0, 1]$. (Usar una calculadora si es necesario.)

c) ¿Se puede encontrar una función f que satisfaga las condiciones dadas en el apartado *a*) donde la gráfica tiene una longitud de arco menor que 3 en el intervalo $[0, 1]$?

8 Técnicas de integración, regla de L'Hôpital e integrales impropias

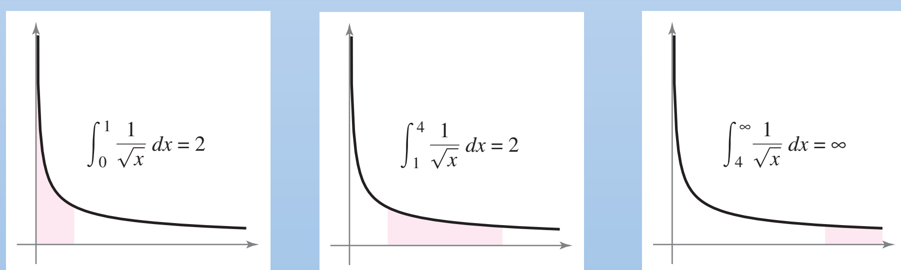
En los capítulos anteriores se estudiaron varias técnicas básicas para evaluar integrales simples. En este capítulo se analizarán otras técnicas de integración, como la integración por partes, que se usan para evaluar integrales más complejas. También se enseñará una regla importante para evaluar límites, denominada regla de L'Hôpital, la cual también ayuda en la evaluación de integrales impropias

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo relacionar un integrando con una de las reglas básicas de integración. (8.1)
- Cómo encontrar una antiderivada utilizando integración por partes. (8.2)
- Cómo evaluar integrales trigonométricas. (8.3)
- Cómo usar la sustitución trigonométrica para evaluar una integral. (8.4)
- Cómo utilizar la descomposición en fracciones parciales para integrar funciones racionales. (8.5)
- Cómo evaluar una integral indefinida usando tabla de integrales y fórmulas de reducción. (8.6)
- Cómo aplicar la regla de L'Hôpital para evaluar un límite. (8.7)
- Cómo evaluar una integral impropia. (8.8)

AP Photo/Topeka Capital-Journal, Anthony S. Bush/Wide World

La descomposición en fracciones parciales es una técnica de integración que puede utilizarse para evaluar integrales que incluyan funciones racionales. ¿Cómo puede usarse la descomposición en fracciones parciales para evaluar una integral que da el costo promedio de extraer un porcentaje específico de un compuesto químico del agua residual de una compañía? (Ver la sección 8.5, ejercicio 63.)



De los estudios de cálculo realizados hasta ahora, se sabe que una integral definida tiene límites de integración finitos y un integrando continuo. En la sección 8.8 se estudiarán las *integrales impropias*, las cuales tienen por lo menos un límite de integración infinito o un integrando con discontinuidad infinita. Se verá que las integrales impropias convergen o divergen.

8.1 Reglas básicas de integración

- **Revisión de procedimientos para adaptar un integrando a una de las reglas básicas de integración.**

Adaptación de integrandos a las reglas básicas

En este capítulo se estudiarán varias técnicas de integración que extienden el conjunto de integrales en que las reglas básicas de integración pueden aplicarse. Estas reglas se repasan en la página 522. Un paso importante para resolver cualquier problema de la integración consiste en reconocer qué regla básica de integración usar. Como se muestra en el ejemplo 1, las diferencias ligeras en el integrando pueden llevar a técnicas de solución muy diferentes.

EXPLORACIÓN

Comparación de tres integrales similares ¿Cuáles de las siguientes integrales pueden evaluarse usando las 20 reglas básicas de integración? Para las que sea posible, hacerlo así. Para las que no, explicar por qué.

a) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

EJEMPLO 1 Una comparación de tres integrales similares

Encontrar cada integral.

a) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+9}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2+9}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^2+9}\,dx$

Solución

a) Usar la regla del arcotangente y sea $u = x$ y $a = 3$.

$$\int \frac{4}{x^2+9}\,dx = 4\int \frac{1}{x^2+3^2}\,dx \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= 4\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right) + C \qquad \text{Regla del arcotangente.}$$

$$= \frac{4}{3}\arctan\frac{x}{3} + C \qquad \text{Simplificar.}$$

b) Aquí la regla del arcotangente no aplica porque el numerador contiene un factor de x. Considerar la regla log y sea $u = x^2 + 9$. Entonces $du = 2x\,dx$, y se tiene

$$\int \frac{4x}{x^2+9}\,dx = 2\int \frac{2x\,dx}{x^2+9} \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= 2\int \frac{du}{u} \qquad \text{Sustitución: } u = x^2+9.$$

$$= 2\ln|u| + C = 2\ln(x^2+9) + C. \qquad \text{Regla log.}$$

c) Ya que el grado del numerador es igual al grado del denominador, se debe usar la división primero para volver a escribir la función racional impropia como la suma de un polinomio y una función racional propia.

$$\int \frac{4x^2}{x^2+9}\,dx = \int \left(4 - \frac{36}{x^2+9}\right)dx \qquad \text{Reescribir usando la división grande.}$$

$$= \int 4\,dx - 36\int \frac{1}{x^2+9}\,dx \qquad \text{Escribir como dos integrales.}$$

$$= 4x - 36\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right) + C \qquad \text{Integrar.}$$

$$= 4x - 12\arctan\frac{x}{3} + C \qquad \text{Simplificar.}$$

NOTA En el ejemplo 1*c*) se señala que se requieren algunas simplificaciones algebraicas preliminares antes de aplicar las reglas para la integración, y que como consecuencia más que una regla, se necesita evaluar la integral resultante. ■

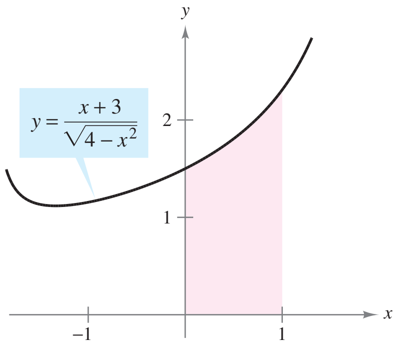
EJEMPLO 2 Uso de dos reglas básicas para resolver una sola integral

Evaluar $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$

Solución Escribir la integral como la suma de dos integrales. Entonces aplicar la regla de la potencia y la regla del arcoseno como sigue.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 (4-x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx + 3\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx \\
&= \Big[-(4-x^2)^{1/2} + 3\,\text{arcsen}\,\frac{x}{2}\Big]_0^1 \\
&= \left(-\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}\right) - (-2+0) \\
&\approx 1.839
\end{aligned}$$

Ver figura 8.1.



El área de la región es aproximadamente 1.839
Figura 8.1

TECNOLOGÍA La regla de Simpson puede usarse para dar una buena aproximación del valor de la integral en el ejemplo 2 (para $n = 10$, la aproximación es 1.839). Al usar la integración numérica, sin embargo, se debe estar consciente de que la regla de Simpson no siempre da buenas aproximaciones cuando algunos de los límites de integración están cercanos a una asíntota vertical. Por ejemplo, usando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene

$$\int_0^{1.99} \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \approx 6.213.$$

Aplicando la regla de Simpson (con $n = 10$) para esta integral se produce una aproximación de 6.889.

EJEMPLO 3 Una sustitución del tipo $a^2 - u^2$

Encontrar $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx.$

Solución Porque el radical en el denominador puede escribirse en la forma

$$\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{4^2-(x^3)^2}$$

se puede probar la sustitución $u = x^3$. Entonces $du = 3x^2\,dx$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{16-(x^3)^2}} && \text{Reescribir la integral.} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4^2-u^2}} && \text{Sustitución: } u = x^3. \\
&= \frac{1}{3}\,\text{arcsen}\,\frac{u}{4} + C && \text{Regla del arcoseno.} \\
&= \frac{1}{3}\,\text{arcsen}\,\frac{x^3}{4} + C. && \text{Reescribir como una función de } x.
\end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO Las reglas 18, 19 y 20 de la integración básica en la página siguiente tienen expresiones que implican la suma o diferencia de dos cuadrados:

$a^2 - u^2$

$a^2 + u^2$

$u^2 - a^2$

Estas expresiones suelen notarse después de sustituir u, como se muestra en el ejemplo 3.

Sorprendente, dos de las reglas de la integración normalmente pasadas por alto son la regla log y la regla de la potencia. Notar en los próximos dos ejemplos cómo estas dos reglas de la integración pueden ocultarse.

EJEMPLO 4 Una forma disfrazada de la regla log

Encontrar $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

Solución La integral no parece adaptarse a ninguna de las reglas básicas. Sin embargo, la forma del cociente hace pensar en la regla log. Si se expresa $u = 1 + e^x$, entonces $du = e^x\,dx$. Obtener el du requerido sumando y restando e^x en el numerador, como sigue.

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx \qquad \text{Sumar y restar } e^x \text{ en el numerador.}$$

$$= \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx \qquad \text{Reescribir como dos fracciones.}$$

$$= \int dx - \int \frac{e^x\,dx}{1+e^x} \qquad \text{Reescribir como dos integrales.}$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C \qquad \text{Integrar.}$$

NOTA Hay más de una manera de resolver un problema de integración. Así, el ejemplo 4 demuestra que multiplicando el numerador y denominador por e^{-x} se obtiene una integral de la forma $-\int du/u$. Ver si se puede conseguir la misma respuesta por este procedimiento. (Tener cuidado: la respuesta aparecerá en una forma diferente.)

Repaso de las reglas básicas de integración ($a > 0$)

1. $\displaystyle\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$
2. $\displaystyle\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$
3. $\displaystyle\int du = u + C$
4. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
5. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$
7. $\displaystyle\int a^u\,du = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^u + C$
8. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
9. $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
10. $\displaystyle\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
11. $\displaystyle\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
12. $\displaystyle\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
13. $\displaystyle\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$
14. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
15. $\displaystyle\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
16. $\displaystyle\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
17. $\displaystyle\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
18. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$
19. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$
20. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

EJEMPLO 5 Una forma disfrazada de la regla de la potencia

Encontrar $\displaystyle\int (\cot x)[\ln(\operatorname{sen} x)]\,dx$

Solución De nuevo, la integral no parece adaptarse a ninguna de las reglas básicas. Sin embargo, considerando las dos opciones primarias para $u[u = \cot x$ y $u = \ln(\operatorname{sen} x)]$, se puede ver que la segunda opción es la apropiada porque

$$u = \ln(\operatorname{sen} x) \qquad \text{y} \qquad du = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \cot x\,dx.$$

Así,

$$\int (\cot x)[\ln(\operatorname{sen} x)]\,dx = \int u\,du \qquad \text{Sustitución: } u = \ln(\operatorname{sen} x).$$

$$= \frac{u^2}{2} + C \qquad \text{Integrar.}$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(\operatorname{sen} x)]^2 + C. \qquad \text{Reescribir como una función de } x.$$

NOTA En el ejemplo 5, *verificar* que la derivada de

$$\frac{1}{2}[\ln(\operatorname{sen} x)]^2 + C$$

es el integrando de la integral original.

Pueden usarse a menudo las identidades trigonométricas para adaptar integrandos a una de las reglas básicas de la integración.

EJEMPLO 6 Uso de identidades trigonométricas

Encontrar $\displaystyle\int \tan^2 2x\, dx$.

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un sistema de cálculo algebraico, usarlo para evaluar las integrales en esta sección. Comparar la *forma* de la antiderivada dada por el software con la forma obtenida a mano. A veces las formas serán las mismas, pero a menudo diferirán. Por ejemplo, ¿por qué la antiderivada $\ln 2x + C$ es equivalente a la antiderivada $\ln x + C$?

Solución Notar que la $\tan^2 u$ no está en la lista de reglas básicas de integración. Sin embargo, $\sec^2 u$ está en la lista. Esto hace pensar en la identidad trigonométrica $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$. Si se hace $u = 2x$, entonces $du = 2\,dx$ y

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 2x\, dx &= \frac{1}{2}\int \tan^2 u\, du && \text{Sustitución: } u = 2x.\\
&= \frac{1}{2}\int (\sec^2 u - 1)\, du && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\, du - \frac{1}{2}\int du && \text{Reescribir como dos integrales.}\\
&= \frac{1}{2}\tan u - \frac{u}{2} + C && \text{Integrar.}\\
&= \frac{1}{2}\tan 2x - x + C. && \text{Reescribir como una función de } x.
\end{aligned}$$

Esta sección concluye con un resumen de los procedimientos comunes para adaptar los integrandos a las reglas básicas de integración.

Procedimientos para adaptar los integrandos a las reglas básicas

Técnica	*Ejemplo*
Desarrollar (el numerador).	$(1 + e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$
Separar el numerador.	$\dfrac{1+x}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{x}{x^2+1}$
Completar el cuadrado.	$\dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$
Dividir la función racional impropia.	$\dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$
Sumar y restar términos en el numerador.	$\dfrac{2x}{x^2+2x+1} = \dfrac{2x+2-2}{x^2+2x+1} = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$
Usar identidades trigonométricas.	$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$
Multiplicar y dividir por el conjugado pitagórico.	$\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}\right)\left(\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right) = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}$ $= \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

NOTA Recordar que se pueden separar los numeradores pero no los denominadores. Se debe tener cuidado con este error común cuando se adapten los integrandos a las reglas básicas.

$$\frac{1}{x^2+1} \neq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1} \qquad \text{No separar el denominador.}$$

8.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, seleccionar la antiderivada correcta.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

a) $2\sqrt{x^2+1} + C$ *b)* $\sqrt{x^2+1} + C$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + C$ *d)* $\ln(x^2+1) + C$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) $\ln\sqrt{x^2+1} + C$ *b)* $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} + C$

c) $\arctan x + C$ *d)* $\ln(x^2+1) + C$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2+1}$

a) $\ln\sqrt{x^2+1} + C$ *b)* $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} + C$

c) $\arctan x + C$ *d)* $\ln(x^2+1) + C$

4. $\dfrac{dy}{dx} = x\cos(x^2+1)$

a) $2x\,\text{sen}(x^2+1) + C$ *b)* $-\frac{1}{2}\,\text{sen}(x^2+1) + C$

c) $\frac{1}{2}\,\text{sen}(x^2+1) + C$ *d)* $-2x\,\text{sen}(x^2+1) + C$

En los ejercicios 5 a 14, seleccionar la fórmula de integración básica que puede usarse para encontrar la integral, e identificar *u* y *a* cuando sea apropiado.

5. $\displaystyle\int (5x-3)^4\,dx$ **6.** $\displaystyle\int \frac{2t+1}{t^2+t-4}\,dt$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1-2\sqrt{x}\right)}\,dx$ **8.** $\displaystyle\int \frac{2}{(2t-1)^2+4}\,dt$

9. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ **10.** $\displaystyle\int \frac{-2x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

11. $\displaystyle\int t\,\text{sen}\,t^2\,dt$ **12.** $\displaystyle\int \sec 5x \tan 5x\,dx$

13. $\displaystyle\int (\cos x)e^{\text{sen}\,x}\,dx$ **14.** $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$

En los ejercicios 15 a 52, encontrar la integral indefinida.

15. $\displaystyle\int 14(x-5)^6\,dx$ **16.** $\displaystyle\int \frac{9}{(t-8)^2}\,dt$

17. $\displaystyle\int \frac{7}{(z-10)^7}\,dz$ **18.** $\displaystyle\int t^2\sqrt[3]{t^3-1}\,dt$

19. $\displaystyle\int \left[v + \frac{1}{(3v-1)^3}\right]dv$ **20.** $\displaystyle\int \left[x - \frac{5}{(3x+5)^2}\right]dx$

21. $\displaystyle\int \frac{t^2-3}{-t^3+9t+1}\,dt$ **22.** $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$ **24.** $\displaystyle\int \frac{4x}{x-8}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \left(\frac{1}{7x-2} - \frac{1}{7x+2}\right)dx$

27. $\displaystyle\int (5+4x^2)^2\,dx$ **28.** $\displaystyle\int x\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 dx$

29. $\displaystyle\int x\cos 2\pi x^2\,dx$ **30.** $\displaystyle\int \sec 4x\,dx$

31. $\displaystyle\int \csc \pi x \cot \pi x\,dx$ **32.** $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

33. $\displaystyle\int e^{11x}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int \csc^2 x e^{\cot x}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{2}{e^{-x}+1}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int \frac{5}{3e^x-2}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx$ **38.** $\displaystyle\int (\tan x)[\ln(\cos x)]\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}\,dx$ **40.** $\displaystyle\int \frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\,d\alpha$

41. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta - 1}\,d\theta$ **42.** $\displaystyle\int \frac{2}{3(\sec x - 1)}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-(4t+1)^2}}\,dt$ **44.** $\displaystyle\int \frac{1}{9+5x^2}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{\tan(2/t)}{t^2}\,dt$ **46.** $\displaystyle\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,dt$

47. $\displaystyle\int \frac{6}{\sqrt{10x-x^2}}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{4x^2-8x+3}}\,dx$

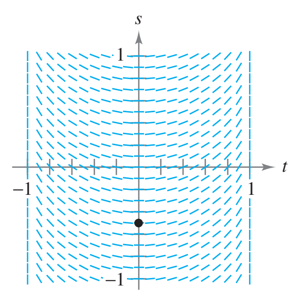
49. $\displaystyle\int \frac{4}{4x^2+4x+65}\,dx$ **50.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+9}\,dx$

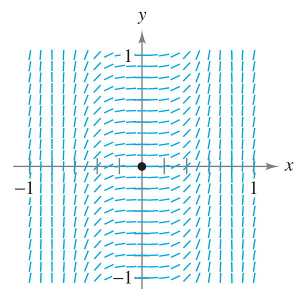
51. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx$ **52.** $\displaystyle\int \frac{12}{\sqrt{3-8x-x^2}}\,dx$

Campos de pendientes **En los ejercicios 53 a 56, se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la solución. Comparar el resultado con los dibujos en el apartado *a*).**

53. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^4}}$ **54.** $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2(2x)$

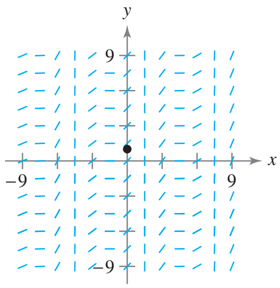
$\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$ $(0, 0)$





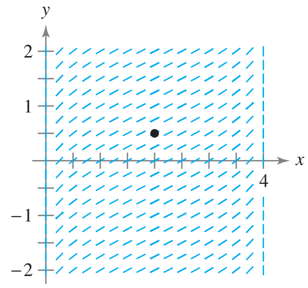
55. $\dfrac{dy}{dx} = (\sec x + \tan x)^2$

$(0, 1)$



56. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$

$\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$



CAS ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 57 y 58, usar un sistema algebraico por computadora para hacer la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y presentar la solución a través de la condición inicial especificada.**

57. $\dfrac{dy}{dx} = 0.8y,\ \ y(0) = 4$ **58.** $\dfrac{dy}{dx} = 5 - y,\ \ y(0) = 1$

En los ejercicios 59 a 64, resolver la ecuación diferencial.

59. $\dfrac{dy}{dx} = (e^x + 5)^2$ **60.** $\dfrac{dy}{dx} = (3 - e^x)^2$

61. $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{10e^t}{\sqrt{1 - e^{2t}}}$ **62.** $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{(1 + e^t)^2}{e^t}$

63. $(4 + \tan^2 x)y' = \sec^2 x$ **64.** $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$

En los ejercicios 65 a 72, evaluar la integral definida. Para verificar los resultados puede usarse integración en la herramienta de graficación.

65. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx$ **66.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt$

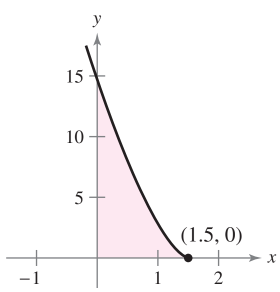
67. $\displaystyle\int_0^{1} xe^{-x^2}\, dx$ **68.** $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1 - \ln x}{x}\, dx$

69. $\displaystyle\int_0^{8} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}}\, dx$ **70.** $\displaystyle\int_1^{2} \frac{x - 2}{x}\, dx$

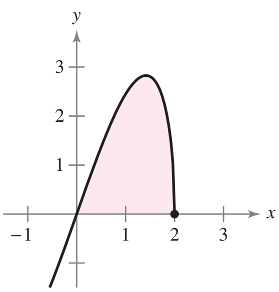
71. $\displaystyle\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4 + 9x^2}\, dx$ **72.** $\displaystyle\int_0^{4} \frac{1}{\sqrt{100 - x^2}}\, dx$

Área **En los ejercicios 73 a 78, encontrar el área de la región.**

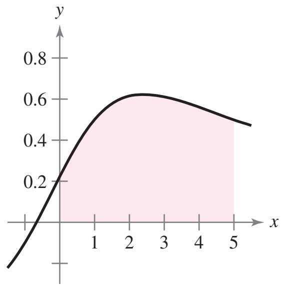
73. $y = (-4x + 6)^{3/2}$



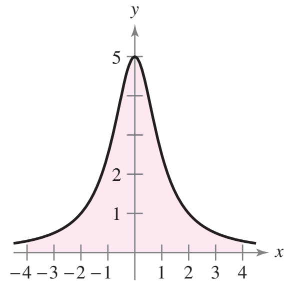
74. $y = x\sqrt{8 - 2x^2}$



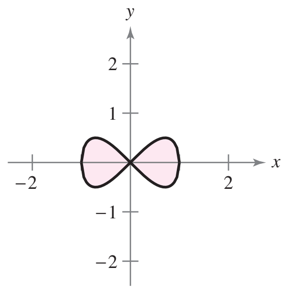
75. $y = \dfrac{3x + 2}{x^2 + 9}$



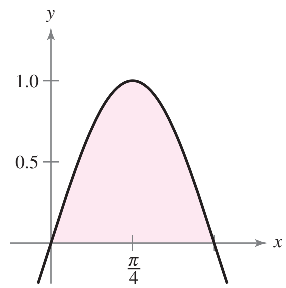
76. $y = \dfrac{5}{x^2 + 1}$



77. $y^2 = x^2(1 - x^2)$



78. $y = \operatorname{sen} 2x$



CAS **En los ejercicios 79 a 82, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la integral. Usar el sistema algebraico por computadora para hacer la gráfica de dos antiderivadas. Describir la relación entre las gráficas de las dos antiderivadas.**

79. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 4x + 13}\, dx$ **80.** $\displaystyle\int \frac{x - 2}{x^2 + 4x + 13}\, dx$

81. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta}\, d\theta$ **82.** $\displaystyle\int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 dx$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 83 a 86, enunciar la fórmula de integración que se usaría para cada integral. Explicar por qué se eligió esa fórmula. No integrar.

83. $\displaystyle\int x(x^2 + 1)^3\, dx$ **84.** $\displaystyle\int x \sec(x^2 + 1)\tan(x^2 + 1)\, dx$

85. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$ **86.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx$

87. Determinar las constantes a y b tal que

$\operatorname{sen} x + \cos x = a \operatorname{sen}(x + b)$.

Usar este resultado para integrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

88. Demostrar que $\sec x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$. Usar después esta identidad para derivar la regla básica de integración

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

89. ***Área*** Las gráficas de $f(x) = x$ y $g(x) = ax^2$ se intersecan en los puntos $(0, 0)$ y $(1/a, 1/a)$. Encontrar a $(a > 0)$ tal que el área de la región acotada por las gráficas de estas dos funciones sea $\frac{2}{3}$.

Para discusión

90. *a*) Explicar por qué la antiderivada $y_1 = e^{x + C_1}$ es equivalente a la antiderivada $y_2 = Ce^x$.

b) Explicar por qué la antiderivada $y_1 = \sec^2 x + C_1$ es equivalente a la antiderivada $y_2 = \tan^2 x + C$.

91. ***Para pensar*** Usar una herramienta de graficación para representar la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 7x^2 + 10x)$. Usar la gráfica para determinar si el valor de $\int_0^5 f(x)\, dx$ es positivo o negativo. Explicar.

92. ***Para pensar*** Al evaluar $\int_{-1}^{1} x^2\, dx$, ¿es apropiado sustituir

$$u = x^2,\ x = \sqrt{u} \ \text{ y } dx = \frac{du}{2\sqrt{u}} \ \text{para obtener } \frac{1}{2}\int_1^1 \sqrt{u}\, du = 0?$$

Explicar.

Aproximación **En los ejercicios 93 y 94, determinar qué valor aproxima mejor el área de la región entre el eje x y la función en el intervalo dado. (Hacer la selección con base en un dibujo de la región y *no* integrando.)**

93. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$, $[0, 2]$

a) 3 *b*) 1 *c*) -8 *d*) 8 *e*) 10

94. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$, $[0, 2]$

a) 3 *b*) 1 *c*) -4 *d*) 4 *e*) 10

Interpretación de integrales **En los ejercicios 95 y 96, *a*) dibujar la región cuya área está dada por la integral, *b*) dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral si se usa el método de los discos y *c*) dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral si se usa el método de las capas. (Hay más de una respuesta correcta para cada inciso.)**

95. $\displaystyle\int_0^2 2\pi x^2\, dx$

96. $\displaystyle\int_0^4 \pi y\, dy$

97. ***Volumen*** La región acotada por $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$ $(b > 0)$ gira alrededor del eje y.

a) Encontrar el volumen del sólido generado si $b = 1$.

b) Encontrar b tal que el volumen del sólido generado es $\frac{4}{3}$ unidades cúbicas.

98. ***Volumen*** Considerar la región acotada por las gráficas de $x = 0$, $y = \cos x^2$, $y = \operatorname{sen} x^2$ y $x = \sqrt{\pi}/2$. Encontrar el volumen de un sólido generado al girar la región alrededor del eje y.

99. ***Longitud de arco*** Encontrar la longitud de arco de la gráfica de $y = \ln(\operatorname{sen} x)$ de $x = \pi/4$ a $x = \pi/2$.

100. ***Longitud de arco*** Encontrar la longitud de arco de la gráfica de $y = \ln(\cos x)$ desde $x = 0$ a $x = \pi/3$.

101. ***Área de una superficie*** Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 9]$ alrededor del eje x.

102. ***Centroide*** Encontrar la coordenada x del centroide de la región acotada por las gráficas de

$$y = \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}}, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 4.$$

En los ejercicios 103 y 104, encontrar el valor medio de la función sobre el intervalo dado.

103. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $\quad -3 \quad x \quad 3$

104. $f(x) = \operatorname{sen} nx$, $0 \le x \le \pi/n$, n es un entero positivo.

Longitud de arco **En los ejercicios 105 y 106, usar la capacidad de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.**

105. $y = \tan \pi x$, $\left[0, \frac{1}{4}\right]$

106. $y = x^{2/3}$, $[1, 8]$

107. ***Encontrando un patrón***

a) Encontrar $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx$. *b*) Encontrar $\displaystyle\int \cos^5 x\, dx$.

c) Encontrar $\displaystyle\int \cos^7 x\, dx$.

d) Explicar cómo encontrar $\int \cos^{15} x\, dx$ sin realmente integrar.

108. ***Encontrando un patrón***

a) Escribir $\int \tan^3 x\, dx$ en términos de $\int \tan x\, dx$. Entonces encontrar $\int \tan^3 x\, dx$.

b) Escribir $\int \tan^5 x\, dx$ en términos de $\int \tan^3 x\, dx$.

c) Escribir $\int \tan^{2k+1} x\, dx$ donde k es un entero positivo, en términos de $\int \tan^{2k-1} x\, dx$.

d) Explicar cómo encontrar $\int \tan^{15} x\, dx$ sin realmente integrar.

109. ***Métodos de integración*** Mostrar que los resultados siguientes son equivalentes.

Integración por las tablas:

$$\int \sqrt{x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + 1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right|\right) + C$$

Integración por el sistema algebraico por computadora:

$$\int \sqrt{x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + 1} + \operatorname{arcsenh}(x)\right] + C$$

Preparación del examen Putnam

110. Evaluar

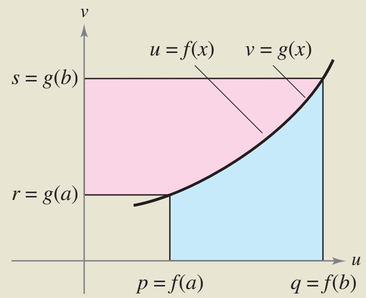
$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9 - x)}\, dx}{\sqrt{\ln(9 - x)} + \sqrt{\ln(x + 3)}}.$$

8.2 Integración por partes

- Encontrar una antiderivada o primitiva usando la integración por partes.
- Usar un método tabular para realizar la integración por partes.

EXPLORACIÓN

Demostración sin palabras He aquí una vía diferente para demostrar la fórmula de integración por partes, tomada con permiso del autor de "Proof Without Words: Integration by Parts", por Roger B. Nelsen, *Mathematics Magazine*, 64, núm. 2, abril 1991, p. 130.



Área + Área $= qs - pr$

$$\int_r^s u\,dv + \int_q^p v\,du = \Big[uv\Big]_{(p,r)}^{(q,s)}$$

$$\int_r^s u\,dv = \Big[uv\Big]_{(p,r)}^{(q,s)} - \int_q^p v\,du$$

Explicar cómo esta gráfica demuestra el teorema. ¿Qué notación usada en esta demostración no es familiar? ¿Cuál se cree que es su significado?

Integración por partes

En esta sección se estudiará una técnica importante de integración llamada **integración por partes**. Esta técnica puede aplicarse a una amplia variedad de funciones y es particularmente útil para integrandos que contengan *productos* de funciones algebraicas y trascendentes. Por ejemplo, la integración por partes funciona bien con integrales como

$$\int x \ln x\,dx, \quad \int x^2 e^x\,dx \quad \text{y} \quad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx.$$

La integración por partes está basada en la fórmula para la derivada de un producto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[uv] &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\\ &= uv' + vu'\end{aligned}$$

donde u y v son funciones derivables de x. Si u' y v' son continuas, se pueden integrar ambos lados de esta ecuación para obtener

$$\begin{aligned}uv &= \int uv'\,dx + \int vu'\,dx\\ &= \int u\,dv + \int v\,du.\end{aligned}$$

Volviendo a escribir esta ecuación, se obtiene el teorema siguiente.

TEOREMA 8.1 INTEGRACIÓN POR PARTES

Si u y v son funciones de x y tienen derivadas continuas, entonces

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Esta fórmula expresa la integral original en términos de otra integral. Dependiendo de la elección de u y dv, puede ser más fácil evaluar la segunda integral que la original. Porque la elección de u y dv es importante en la integración por el proceso de partes, se proporcionan las pautas siguientes.

Estrategia para integrar por partes

1. Intentar tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.
2. Intentar tomar como u la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que u, y como dv el factor restante del integrando.

Observe que dv siempre incluye dx del integrando original.

EJEMPLO 1 Integración por partes

Encontrar $\displaystyle\int xe^x\,dx$.

Solución Para aplicar la integración por partes, es necesario escribir la integral en la forma $\int u\,dv$. Hay varias maneras de hacer esto.

$$\int \underbrace{(x)}_{u}\underbrace{(e^x\,dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(e^x)}_{u}\underbrace{(x\,dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(1)}_{u}\underbrace{(xe^x\,dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(xe^x)}_{u}\underbrace{(dx)}_{dv}$$

Las estrategias de la página anterior hacen pensar en la elección de la primera opción porque la derivada de $u = x$ es más simple que x, y $dv = e^x\,dx$ es la porción más complicada del integrando que se adapta a una fórmula básica de la integración.

$$dv = e^x\,dx \quad\Rightarrow\quad v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x$$

$$u = x \quad\Rightarrow\quad du = dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$= xe^x - e^x + C. \qquad \text{Integrar.}$$

Para verificar esto, derivar $xe^x - e^x + C$ para ver que se obtiene el integrando original.

NOTA El ejemplo 1 muestra que no es necesario incluir una constante de integración al resolver

$$v = \int e^x\,dx = e^x + C_1.$$

Para ilustrar esto, reemplazar $v = e^x$ por $v = e^x + C_1$ y aplicar la integración por partes para ver que se obtiene el mismo resultado.

EJEMPLO 2 Integración por partes

Encontrar $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$.

Solución En este caso, x^2 se integra más fácil que $\ln x$. Además, la derivada de $\ln x$ es más simple que $\ln x$. Así, se debe hacer $dv = x^2\,dx$.

$$dv = x^2\,dx \quad\Rightarrow\quad v = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

$$u = \ln x \quad\Rightarrow\quad du = \frac{1}{x}\,dx$$

La integración por partes produce

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int\left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C. \qquad \text{Integrar.}$$

Verificar este resultado derivando.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right] = \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(x^2) - \frac{x^2}{3} = x^2 \ln x$$

TECNOLOGÍA Intentar hacer la gráfica de

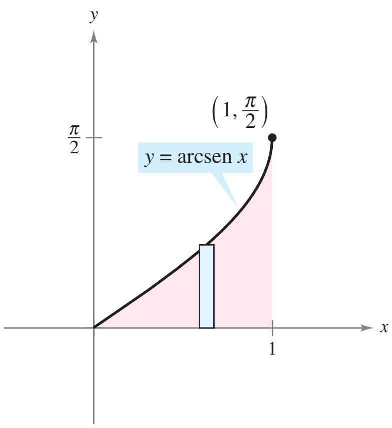
$$\int x^2 \ln x\,dx \quad \text{y} \quad \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$$

en la herramienta de graficación. ¿Se obtiene la misma gráfica? (Este ejercicio requiere algo de tiempo, así que se debe tener paciencia.)

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para ver cómo se utiliza la integración por partes para comprobar la aproximación de Stirling

$$\ln(n!) = n \ln n - n$$

ver el artículo "The Validity of Stirling's Approximation: A Physical Chemistry Project" de A. S. Wallner y K. A. Brandt en *Journal of Chemical Education.*



El área de la región es aproximadamente 0.571
Figura 8.2

Una aplicación sorprendente de la integración por partes involucra integrandos que constan de un solo factor, tales como $\int \ln x\, dx$ o $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$. En estos casos, hay que tomar $dv = dx$, como se muestra en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 3 Un integrando con un solo factor

Evaluar $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arcsen} x\, dx.$

Solución Sea $dv = dx$.

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dx = x$$

$$u = \operatorname{arcsen} x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

La integración por partes produce ahora

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int \operatorname{arcsen} x\, dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$= x \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2} \int (1 - x^2)^{-1/2} (-2x)\, dx \qquad \text{Reescribir.}$$

$$= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + C. \qquad \text{Integrar.}$$

Usando esta antiderivada, evaluar la integral definida como sigue

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x\, dx = \Big[x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2}\Big]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\approx 0.571$$

El área representada por esta integral definida se muestra en la figura 8.2.

TECNOLOGÍA Recordar que hay dos maneras de usar la tecnología para evaluar una integral definida: 1) usar una aproximación numérica como la regla de los trapecios o la regla de Simpson, o 2) usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la antiderivada y entonces aplicar el teorema fundamental de cálculo. Ambos métodos tienen limitaciones. Para encontrar el posible error al usar un método numérico, los integrandos deben tener una segunda derivada (la regla de los trapecios) o una cuarta derivada (la regla de Simpson) en el intervalo de integración: el integrando en el ejemplo 3 no tiene estos requisitos. Para aplicar el teorema fundamental de cálculo, la herramienta de integración simbólica debe poder encontrar la antiderivada.

¿Qué método se usaría para evaluar

$$\int_0^1 \arctan x\, dx?$$

¿Qué método se usaría para evaluar

$$\int_0^1 \arctan x^2\, dx?$$

Algunas integrales requieren integrarse por partes más de una vez.

EJEMPLO 4 Integraciones sucesivas por partes

Encontrar $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$.

Solución Los factores x^2 y $\operatorname{sen} x$ son igualmente fáciles para integrar. Sin embargo, la derivada de x^2 se vuelve más simple, considerando que la derivada de $\operatorname{sen} x$ no lo es. Así que se debe elegir la opción $u = x^2$.

$$dv = \operatorname{sen} x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$
$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\,dx. \qquad \text{Primer uso de la integración por partes.}$$

Este primer uso de la integración por partes ha tenido éxito simplificando la integral original, pero la integral de la derecha todavía no se adapta a una regla básica de integración. Para evaluar esa integral, aplicar de nuevo la integración por partes. Esta vez, sea $u = 2x$.

$$dv = \cos x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$
$$u = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2\,dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\begin{aligned}\int 2x \cos x\,dx &= 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{Segundo uso de la integración por partes.}\\ &= 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C.\end{aligned}$$

Combinando estos dos resultados, se puede escribir

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C.$$

Al hacer aplicaciones repetidas de la integración por partes, tener cuidado de no intercambiar las sustituciones en las aplicaciones sucesivas. Así, en el ejemplo 4, la primera sustitución era $u = x^2$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Si en la segunda aplicación se hubiera cambiado la sustitución a $u = \cos x$ y $dv = 2x$, se habría obtenido

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\,dx\\ &= -x^2 \cos x + x^2 \cos x + \int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = \int x^2 \operatorname{sen} x\,dx\end{aligned}$$

deshaciendo como consecuencia la integración anterior y volviendo a la integral *original*. Al hacer aplicaciones repetidas de integración por partes, también debe percatarse de la aparición de un *múltiplo constante* de la integral original. Por ejemplo, esto ocurre cuando se usa la integración por partes para evaluar $\int e^x \cos 2x\,dx$, y también ocurre en el ejemplo 5.

La integral en el ejemplo 5 es muy importante. En la sección 8.4 (ejemplo 5) se utiliza para hallar la longitud de arco de un segmento parabólico.

EXPLORACIÓN

Intentar encontrar

$$\int e^x \cos 2x\,dx$$

haciendo $u = \cos 2x$ y $dv = e^x\,dx$ en la primera sustitución. Para la segunda sustitución, sea $u = \operatorname{sen} 2x$ y $dv = e^x\,dx$.

EJEMPLO 5 Integración por partes

Encontrar $\int \sec^3 x\,dx$.

Solución La porción más complicada del integrando que puede integrarse fácilmente es $\sec^2 x$, para hacer $dv = \sec^2 x\,dx$ y $u = \sec x$.

$$dv = \sec^2 x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \sec^2 x\,dx = \tan x$$

$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad du = \sec x \tan x\,dx$$

La integración por partes produce

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx \qquad \text{Identidad trigonométrica.}$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx \qquad \text{Reescribir.}$$

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \int \sec x\,dx \qquad \text{Reunir por integrales.}$$

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \text{Integrar.}$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C. \qquad \text{Integrar y dividir entre 2.}$$

AYUDA DE ESTUDIO Las identidades trigonométricas

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

juegan un papel importante en este capítulo.

EJEMPLO 6 Localización de un centroide

Una parte de la máquina es modelada por la región acotada por la gráfica de $y = \text{sen}\,x$ y el eje x, $0 \le x \le \pi/2$, como se muestra en la figura 8.3. Encontrar el centroide de esta región.

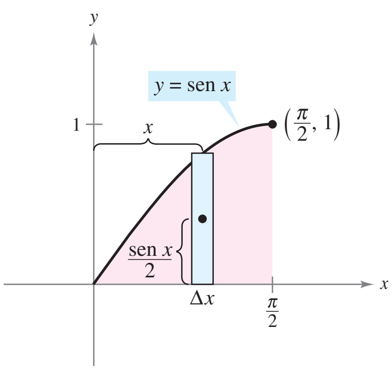


Figura 8.3

Solución Empezar encontrando el área de la región.

$$A = \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

Ahora, encontrar las coordenadas del centroide como sigue.

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}\,x}{2}(\text{sen}\,x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{\text{sen}\,2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

Evaluar la integral para $\bar{x}$, $(1/A)\int_0^{\pi/2} x\,\text{sen}\,x\,dx$, con la integración por partes. Para hacer esto, sea $dv = \text{sen}\,x\,dx$ y $u = x$. Esto produce $v = -\cos x$ y $du = dx$, y escribir

$$\int x\,\text{sen}\,x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \text{sen}\,x + C.$$

Por último, determinar $\bar{x}$ para ser

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} x\,\text{sen}\,x\,dx = \Big[-x\cos x + \text{sen}\,x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

Así, el centroide de la región es $(1, \pi/8)$.

Al obtener experiencia usando la integración por partes, la habilidad para determinar u y dv aumentará. El resumen siguiente recoge varias integrales comunes con las sugerencias para la elección de u y dv.

AYUDA DE ESTUDIO Puede usarse el acrónimo LIATE como una pauta para escoger u en la integración por partes. En orden, verificar el integrando para lo siguiente.

¿Hay una parte Logarítmica?

¿Hay una parte trigonométrica Inversa?

¿Hay una parte Algebraica?

¿Hay una parte Trigonométrica?

¿Hay una parte Exponencial?

Resumen de integrales comunes utilizando integración por partes

1. Para integrales de la forma

$$\int x^n e^{ax}\,dx, \qquad \int x^n \operatorname{sen} ax\,dx, \qquad \text{o} \qquad \int x^n \cos ax\,dx$$

sea $u = x^n$ y sea $dv = e^{ax}\,dx$, $\operatorname{sen} ax\,dx$, o $\cos ax\,dx$.

2. Para integrales de la forma

$$\int x^n \ln x\,dx, \qquad \int x^n \operatorname{arcsen} ax\,dx, \qquad \text{o} \qquad \int x^n \arctan ax\,dx$$

sea $u = \ln x$, $\operatorname{arcsen} ax$, o $\arctan ax$ y sea $dv = x^n\,dx$.

3. Para integrales de la forma

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx \qquad \text{o} \qquad \int e^{ax} \cos bx\,dx$$

sea $u = \operatorname{sen} bx$ o $\cos bx$ y sea $dv = e^{ax}\,dx$.

Método tabular

En problemas que contienen aplicaciones repetidas de la integración por partes, un método tabular, ilustrado en el ejemplo 7, puede ayudar para organizar el trabajo. Este método funciona bien para las integrales del tipo $\int x^n \operatorname{sen} ax\,dx$, $\int x^n \cos ax\,dx$ y $\int x^n e^{ax}\,dx$.

EJEMPLO 7 Uso del método tabular

Encontrar $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} 4x\,dx$.

Solución Empezar como de costumbre haciendo $u = x^2$ y $dv = v'\,dx = \operatorname{sen} 4x\,dx$. Luego, crear una tabla de tres columnas, como se muestra.

Signos alternados	*u y sus derivadas*	*v′ y sus antiderivadas*
$+$	x^2	$\operatorname{sen} 4x$
$-$	$2x$	$-\frac{1}{4}\cos 4x$
$+$	2	$-\frac{1}{16}\operatorname{sen} 4x$
$-$	0	$\frac{1}{64}\cos 4x$

Derivar hasta obtener una derivada nula.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre el método tabular, ver el artículo "Tabular Integration by Parts", de David Horowitz en *The College Mathematics Journal*, y el artículo "More on Tabular Integration by Parts", de Leonard Gillman, en *The College Mathematics Journal*.

La solución se obtiene sumando los productos con signo de las entradas diagonales:

$$\int x^2 \operatorname{sen} 4x\,dx = -\frac{1}{4}x^2\cos 4x + \frac{1}{8}x\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{32}\cos 4x + C.$$

8.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, identificar u y dv para encontrar la integral usando la integración por partes. (No evaluar la integral.)

1. $\int xe^{2x}\,dx$ **2.** $\int x^2 e^{2x}\,dx$

3. $\int (\ln x)^2\,dx$ **4.** $\int \ln 5x\,dx$

5. $\int x \sec^2 x\,dx$ **6.** $\int x^2 \cos x\,dx$

En los ejercicios 7 a 10, evaluar la integral utilizando integración por partes con las elecciones dadas para u y dv.

7. $\displaystyle\int x^3 \ln x\,dx;\ u = \ln x,\ dv = x^3\,dx$

8. $\displaystyle\int (4x + 7)e^x\,dx;\ u = 4x + 7,\ dv = e^x\,dx$

9. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} 3x\,dx;\ u = x,\ dv = \operatorname{sen} 3x\,dx$

10. $\displaystyle\int x \cos 4x\,dx;\ u = x,\ dv = \cos 4x\,dx$

En los ejercicios 11 a 38, encontrar la integral. (*Nota*: Resolver por el método más simple, no todas requieren la integración por partes.)

11. $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx$ **12.** $\displaystyle\int \frac{2x}{e^x}\,dx$

13. $\displaystyle\int x^3e^x\,dx$ **14.** $\displaystyle\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,dt$

15. $\displaystyle\int x^2e^{x^3}\,dx$ **16.** $\displaystyle\int x^4 \ln x\,dx$

17. $\displaystyle\int t \ln(t + 1)\,dt$ **18.** $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ **20.** $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{xe^{2x}}{(2x + 1)^2}\,dx$ **22.** $\displaystyle\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

23. $\displaystyle\int (x^2 - 1)e^x\,dx$ **24.** $\displaystyle\int \frac{\ln 2x}{x^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int x\sqrt{x - 5}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5 + 4x}}\,dx$

27. $\displaystyle\int x \cos x\,dx$ **28.** $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\,dx$

29. $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$ **30.** $\displaystyle\int x^2 \cos x\,dx$

31. $\displaystyle\int t \csc t \cot t\,dt$ **32.** $\displaystyle\int \theta \sec \theta \tan \theta\,d\theta$

33. $\displaystyle\int \arctan x\,dx$ **34.** $\displaystyle\int 4 \arccos x\,dx$

35. $\displaystyle\int e^{2x} \operatorname{sen} x\,dx$ **36.** $\displaystyle\int e^{-3x} \operatorname{sen} 5x\,dx$

37. $\displaystyle\int e^{-x} \cos 2x\,dx$ **38.** $\displaystyle\int e^{3x} \cos 4x\,dx$

En los ejercicios 39 a 44, resolver la ecuación diferencial.

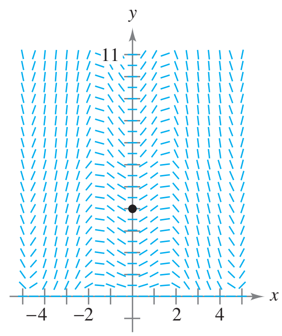
39. $y' = xe^{x^2}$ **40.** $y' = \ln x$

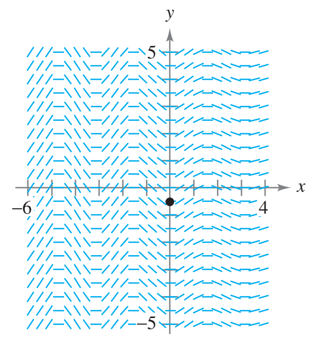
41. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t^2}{\sqrt{2 + 3t}}$ **42.** $\dfrac{dy}{dx} = x^2\sqrt{x - 3}$

43. $(\cos y)y' = 2x$ **44.** $y' = \arctan \dfrac{x}{2}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 45 y 46, se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de direcciones o pendientes, una de las cuales pase a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la solución. Comparar el resultado con los dibujos del inciso *a*).**

45. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{y} \cos x,\ (0, 4)$ **46.** $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x/3} \operatorname{sen} 2x,\ \left(0, -\frac{18}{37}\right)$





CAS ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 47 y 48, usar una herramienta de graficación para representar la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y hacer la gráfica de la solución a través de una herramienta de graficación.**

47. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}e^{x/8}$ **48.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} \operatorname{sen} x$

$y(0) = 2$ $y(0) = 4$

En los ejercicios 49 a 60, evaluar la integral definida. Usar una herramienta de graficación para confirmar el resultado.

49. $\displaystyle\int_0^3 xe^{x/2}\,dx$ **50.** $\displaystyle\int_0^2 x^2 e^{-2x}\,dx$

51. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x \cos 2x\,dx$ **52.** $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} 2x\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^{1/2} \arccos x\,dx$ **54.** $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{arcsen} x^2\,dx$

55. $\displaystyle\int_0^1 e^x \operatorname{sen} x\,dx$ **56.** $\displaystyle\int_0^2 e^{-x} \cos x\,dx$

57. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x} \ln x\,dx$ **58.** $\displaystyle\int_0^1 \ln(4 + x^2)\,dx$

59. $\displaystyle\int_2^4 x \operatorname{arcsec} x\,dx$ **60.** $\displaystyle\int_0^{\pi/8} x \sec^2 2x\,dx$

En los ejercicios 61 a 66, usar el método tabular para encontrar la integral.

61. $\displaystyle\int x^2e^{2x}\,dx$

62. $\displaystyle\int x^3e^{-2x}\,dx$

63. $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$

64. $\displaystyle\int x^3 \cos 2x\,dx$

65. $\displaystyle\int x \sec^2 x\,dx$

66. $\displaystyle\int x^2(x-2)^{3/2}\,dx$

En los ejercicios 67 a 74, encontrar o evaluar la integral usando primero sustitución y después la integración por partes.

67. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$

68. $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx$

69. $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{4-x}\,dx$

70. $\displaystyle\int 2x^3\cos x^2\,dx$

71. $\displaystyle\int x^5e^{x^2}\,dx$

72. $\displaystyle\int_0^2 e^{\sqrt{2x}}\,dx$

73. $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$

74. $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$

Desarrollo de conceptos

75. ¿En qué regla de derivación está basada la integración por partes? Explicar.

76. En sus propias palabras, establecer la manera de determinar qué partes del integrando deberían ser u y dv.

77. Al evaluar $\int x \operatorname{sen} x\,dx$, explicar por qué dejar $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = x\,dx$ hace que la solución sea más difícil de encontrar.

Para discusión

78. Indicar si se usaría la integración por partes para evaluar cada integral. Si es así, identificar qué se usaría para u y dv. Explicar el razonamiento.

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$ *c*) $\displaystyle\int x^2e^{-3x}\,dx$

d) $\displaystyle\int 2x\,e^{x^2}\,dx$ *e*) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ *f*) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

CAS **En los ejercicios 79 a 82, usar un sistema algebraico por computadora para *a*) encontrar o evaluar la integral y *b*) hacer la gráfica de dos antiderivadas. *c*) Describir la relación entre las gráficas de la antiderivada.**

79. $\displaystyle\int t^3e^{-4t}\,dt$

80. $\displaystyle\int \alpha^4 \operatorname{sen}\pi\alpha\,d\alpha$

81. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-2x}\operatorname{sen}3x\,dx$

82. $\displaystyle\int_0^5 x^4(25-x^2)^{3/2}\,dx$

83. Integrar $\displaystyle\int 2x\sqrt{2x-3}\,dx$

a) por partes, con $dv = \sqrt{2x-3}\,dx$.

b) por sustitución, con $u = 2x-3$.

84. Integrar $\displaystyle\int x\sqrt{9+x}\,dx$

a) por partes, con $dv = \sqrt{9+x}\,dx$.

b) por sustitución, con $u = 9+x$.

85. Integrar $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$

a) por partes, con $dv = \left(x/\sqrt{4+x^2}\right)dx$.

b) por sustitución, con $u = 4+x^2$.

86. Integrar $\displaystyle\int x\sqrt{4-x}\,dx$

a) por partes, con $dv = \sqrt{4-x}\,dx$.

b) por sustitución, con $u = 4-x$.

CAS **En los ejercicios 87 y 88, usar una herramienta de graficación para encontrar la integral para *n* = 0, 1, 2 y 3. Usar el resultado para obtener una regla general para la integral para cualquier entero *n* positivo y probar sus resultados para *n* = 4.**

87. $\displaystyle\int x^n\ln x\,dx$

88. $\displaystyle\int x^ne^x\,dx$

En los ejercicios 89 a 94, usar la integración por partes para verificar la fórmula. (Para los ejercicios 89 a 92, asumir que *n* es un entero positivo.)

89. $\displaystyle\int x^n\operatorname{sen}x\,dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$

90. $\displaystyle\int x^n\cos x\,dx = x^n\operatorname{sen}x - n\int x^{n-1}\operatorname{sen}x\,dx$

91. $\displaystyle\int x^n\ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[-1+(n+1)\ln x] + C$

92. $\displaystyle\int x^n\,e^{ax}\,dx = \frac{x^ne^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\,e^{ax}\,dx$

93. $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen}bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen}bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

94. $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\operatorname{sen}bx)}{a^2+b^2} + C$

En los ejercicios 95 a 98, encontrar la integral usando la fórmula apropiada de entre las mostradas en los ejercicios 89 a 94.

95. $\displaystyle\int x^5\ln x\,dx$

96. $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$

97. $\displaystyle\int e^{2x}\cos 3x\,dx$

98. $\displaystyle\int x^3e^{2x}\,dx$

Área **En los ejercicios 99 a 102, usar una herramienta de graficación para representar la gráfica de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, y encontrar su área.**

99. $y = 2xe^{-x},\ y = 0,\ x = 3$

100. $y = \frac{1}{16}xe^{-x/4},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4$

101. $y = e^{-x}\operatorname{sen}\pi x,\ y = 0,\ x = 1$

102. $y = x\operatorname{sen}x,\ y = 0,\ x = \pi$

103. ***Área, volumen y centroide*** Dada la región acotada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$, encontrar

a) el área de la región.
b) el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x.
c) el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje y.
d) el centroide de la región.

104. ***Volumen y centroide*** Dada la región acotada por las gráficas de $y = x \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$, encontrar

a) el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x.
b) el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje y.
c) el centroide de la región.

105. ***Centroide*** Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{arcsen} x$, $x = 0$ y $y = \pi/2$. ¿Cómo se relaciona este problema con el ejemplo 6 de esta sección?

106. ***Centroide*** Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, $x = 2$ y $x = 4$.

107. ***Desplazamiento medio*** Una fuerza amortiguadora afecta la vibración de un muelle de manera que su desplazamiento se dé por $y = e^{-4t}(\cos 2t + 5 \operatorname{sen} 2t)$. Encontrar el valor medio de y en el intervalo de $t = 0$ a $t = \pi$.

108. ***Modelo para la memoria*** El modelo para la capacidad M de un niño para memorizar, medido en una escala de 0 a 10, está dado por $M = 1 + 1.6t \ln t$, $0 < t \leq 4$, donde t es la edad del niño en años. Encontrar el valor medio de esa función

a) entre el primero y segundo cumpleaños del niño.
b) entre el tercer y cuarto cumpleaños del niño.

Valor actual **En los ejercicios 109 y 110, encontrar el valor presente P de un flujo de ingreso continuo de dólares por año $c(t)$ si**

$$P = \int_0^{t_1} c(t)e^{-rt}\, dt$$

donde t_1 es el tiempo en años y r es la tasa de interés anual compuesto continuo.

109. $c(t) = 100\,000 + 4\,000t$, $r = 5\%$, $t_1 = 10$

110. $c(t) = 30\,000 + 500t$, $r = 7\%$, $t_1 = 5$

Integrales usadas para encontrar los coeficientes de Fourier **En los ejercicios 111 y 112, verificar el valor de la integral definida donde n es un entero positivo.**

111. $$\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{n}, & n \text{ es impar} \\ -\dfrac{2\pi}{n}, & n \text{ es par} \end{cases}$$

112. $$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{(-1)^n 4\pi}{n^2}$$

113. ***Cuerda vibrante*** Una cuerda tensada entre los dos puntos (0, 0) y (2, 0) se tensa desplazando su punto medio h unidades. El movimiento de la cuerda es modelado por una **serie senoidal de Fourier** para la cual se dan los coeficientes por

$$b_n = h \int_0^1 x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\, dx + h \int_1^2 (-x + 2) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\, dx.$$

Encontrar b_n.

114. Encontrar la falacia en la siguiente demostración de que $0 = 1$.

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dx = x$$

$$u = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{1}{x^2}\, dx$$

$$0 + \int \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)(x) - \int \left(-\frac{1}{x^2}\right)(x)\, dx = 1 + \int \frac{dx}{x}$$

Así, $0 = 1$.

115. Sea $y = f(x)$ positiva y estrictamente creciente en el intervalo $0 < a \leq x \leq b$. Considerar la región R acotada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$. Si R se gira alrededor del eje y, demostrar que el método de los discos y el método de las capas dan el mismo volumen.

116. ***El método de Euler*** Considerar la ecuación diferencial $f'(x) = xe^{-x}$ con la condición inicial $f(0) = 0$.

a) Usar la integración para resolver la ecuación diferencial.
b) Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la solución de la ecuación diferencial.
c) Usar el método de Euler con $h = 0.05$, y una herramienta de graficación para generar los primeros 80 puntos de la gráfica de la solución aproximada. Usar una herramienta de graficación para trazar los puntos. Comparar el resultado con la gráfica en el inciso *b*).
d) Repetir el inciso *c*) usando $h = 0.1$ y generar los primeros 40 puntos.
e) ¿Por qué el resultado es en el apartado *c*) una mejor aproximación de la solución que el resultado en el apartado *d*)?

Método de Euler **En los ejercicios 117 y 118, considerar la ecuación diferencial y repetir los apartados *a*) a *d*) del ejercicio 116.**

117. $f'(x) = 3x \operatorname{sen}(2x)$, $f(0) = 0$

118. $f'(x) = \cos \sqrt{x}$, $f(0) = 1$

119. ***Para pensar*** Dar una explicación geométrica para explicar

$$\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx \leq \int_0^{\pi/2} x\, dx.$$

Verificar la desigualdad evaluando las integrales.

120. ***Encontrando un modelo*** Encontrar el área acotada por las gráficas de $y = x \operatorname{sen} x$ y $y = 0$ sobre cada intervalo.

a) $[0, \pi]$ *b*) $[\pi, 2\pi]$ *c*) $[2\pi, 3\pi]$

Describir cualquier patrón que se note. ¿Cuál es el área entre las gráficas de $y = x \operatorname{sen} x$ y $y = 0$ en el intervalo $[n\pi, (n + 1)\pi]$, donde n es cualquier entero no negativo? Explicar la respuesta.

8.3 Integrales trigonométricas

- **Resolver integrales trigonométricas que contienen potencias de seno y coseno.**
- **Resolver integrales trigonométricas que contienen potencias de secante y tangente.**
- **Resolver integrales trigonométricas que contienen los productos de seno-coseno con ángulos diferentes.**

Integrales que contienen potencias de seno y coseno

En esta sección se estudiarán las técnicas para evaluar integrales de los tipos

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx \qquad \text{y} \qquad \int \sec^m x \tan^n x\,dx$$

donde m o n es cualquier entero positivo. Para encontrar la antiderivada o primitiva para estas expresiones, intentar separarlas en combinaciones de integrales trigonométricas a las que puede aplicarse la regla de la potencia.

Por ejemplo, evaluar $\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx$ con la regla de la potencia haciendo $u = \operatorname{sen} x$. Entonces, $du = \cos x\,dx$ y tiene

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx = \int u^5\,du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C.$$

Para separar $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ en formas a las que se puede aplicar la regla de la potencia, usar las identidades siguientes.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$ Identidad pitagórica.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$ Identidad del ángulo medio para $\operatorname{sen}^2 x$.

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$ Identidad del ángulo medio para $\cos^2 x$.

SHEILA SCOTT MACINTYRE (1910-1960)
Sheila Scott Macintyre publicó su primer trabajo sobre los periodos asintóticos de las funciones integrales en 1935. Recibió el doctorado en la Universidad de Aberdeen, donde fue profesora. En 1958 aceptó un puesto como investigadora invitada en la Universidad de Cincinnati.

Estrategia para evaluar integrales que contienen senos y cosenos

1. Si la potencia del seno es impar y positiva, conservar un factor seno y pasar los factores restantes a cosenos. Entonces, desarrollar e integrar.

$$\int \overbrace{\operatorname{sen}^{2k+1}}^{\text{Impar}} x \cos^n x\,dx = \int \overbrace{(\operatorname{sen}^2 x)^k}^{\text{Convertir a senos}} \cos^n x \overbrace{\operatorname{sen} x\,dx}^{\text{Conservar para } du} = \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\,dx$$

2. Si la potencia del coseno es impar y positiva, conservar un factor coseno y pasar los factores restantes a senos. Entonces, desarrollar e integrar.

$$\int \operatorname{sen}^m x \overbrace{\cos^{2k+1}}^{\text{Impar}} x\,dx = \int \operatorname{sen}^m x \overbrace{(\cos^2 x)^k}^{\text{Convertir a senos}} \overbrace{\cos x\,dx}^{\text{Conservar para } du} = \int \operatorname{sen}^m x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\,dx$$

3. Si las potencias de ambos son pares y no negativas, usar repetidamente las identidades.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

para convertir el integrando a potencias impares del coseno. Entonces procédase como en la estrategia 2.

TECNOLOGÍA Usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la integral en el ejemplo 1. Obtener

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx =$$

$$-\cos^5 x\left(\frac{1}{7}\operatorname{sen}^2 x + \frac{2}{35}\right) + C.$$

¿Es equivalente este resultado al obtenido en el ejemplo 1?

EJEMPLO 1 La potencia del seno es impar y positiva

Encontrar $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx$.

Solución Ya que se espera usar la regla de la potencia con $u = \cos x$, *conservar un factor* para formar du y convertir los factores del seno restantes a cosenos.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x (\operatorname{sen} x) \, dx && \text{Reescribir.}\\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \operatorname{sen} x \, dx && \text{Multiplicar.}\\
&= \int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x \, dx && \text{Reescribir.}\\
&= -\int \cos^4 x(-\operatorname{sen} x) \, dx + \int \cos^6 x(-\operatorname{sen} x) \, dx\\
&= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C && \text{Integrar.}
\end{aligned}$$

En el ejemplo 1, las *dos* potencias m y n pasaron a ser enteros positivos. Sin embargo, la misma estrategia funcionará siempre que m o n sean impares y positivos. Así, en el próximo ejemplo la potencia del coseno es 3, pero la potencia del seno es $-\frac{1}{2}$.

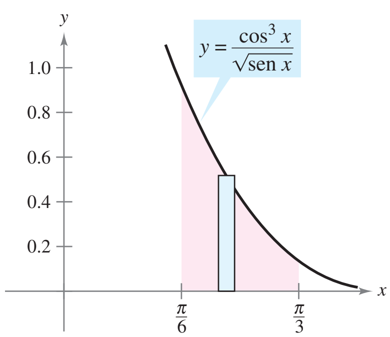
EJEMPLO 2 La potencia del coseno es impar y positiva

Evaluar $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \, dx$.

Solución Ya que se espera usar la regla de la potencia con $u = \operatorname{sen} x$, *conservar un factor del coseno* para formar du y convertir los factores del coseno restantes a senos.

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \, dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x \cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \, dx\\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x)(\cos x)}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \, dx\\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left[(\operatorname{sen} x)^{-1/2} \cos x - (\operatorname{sen} x)^{3/2} \cos x\right] dx\\
&= \left[\frac{(\operatorname{sen} x)^{1/2}}{1/2} - \frac{(\operatorname{sen} x)^{5/2}}{5/2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3}\\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} - \frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{5/2} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{32}}{80}\\
&\approx 0.239
\end{aligned}$$

La figura 8.4 muestra la región cuya área es representada por esta integral.



El área de la región es aproximadamente 0.239
Figura 8.4

EJEMPLO 3 La potencia del coseno es par y no negativa

Encontrar $\int \cos^4 x\, dx$.

Solución Porque m y n son pares y no negativos ($m = 0$), se puede reemplazar $\cos^4 x$ por $[(1 + \cos 2x)/2]^2$.

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx && \text{Identidad del ángulo mitad.}\\
&= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}\right) dx && \text{Expandir.}\\
&= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)\right] dx && \text{Identidad del ángulo mitad.}\\
&= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{32}\int 4\cos 4x\, dx && \text{Reescribir.}\\
&= \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C && \text{Integrar.}
\end{aligned}$$

Usar un sistema de derivación simbólica para verificar esto. ¿Se puede simplificar la derivada para obtener el integrando original?

En el ejemplo 3, si se evaluara la integral definida de 0 a $\pi/2$, se obtendría

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx &= \left[\frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32}\right]_0^{\pi/2}\\
&= \left(\frac{3\pi}{16} + 0 + 0\right) - (0 + 0 + 0)\\
&= \frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Notar que el único término que contribuye a la solución es $3x/8$. Esta observación se generaliza en las fórmulas siguientes desarrolladas por John Wallis.

Bettman/Corbis

JOHN WALLIS (1616-1703)
Wallis hizo mucho de su trabajo en cálculo antes que Newton y Leibniz e influyó en el pensamiento de ambos. Wallis es también creador de la introducción del símbolo (∞) para denotar infinito.

LAS FÓRMULAS DE WALLIS

1. Si n es impar ($n \geq 3$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right).$$

2. Si n es par ($n \geq 2$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Estas fórmulas también son válidas si el $\cos^n x$ se reemplaza por el $\operatorname{sen}^n x$. (Demostrar ambas fórmulas en el ejercicio 108.)

Integrales que contienen potencias de secante y tangente

Las estrategias siguientes pueden ayudar a evaluar integrales de la forma

$$\int \sec^m x \tan^n x \, dx.$$

Estrategia para evaluar integrales que contienen secante y tangente

1. Si la potencia de la secante es par y positiva, conservar un factor secante cuadrado y convertir los factores restantes a tangentes. Entonces desarrollar e integrar.

$$\int \overbrace{\sec^{2k}}^{\text{Par}} x \tan^n x \, dx = \int \overbrace{(\sec^2 x)^{k-1}}^{\text{Convertir a tangentes}} \tan^n x \overbrace{\sec^2 x \, dx}^{\text{Conservar para } du} = \int (1 + \tan^2 x)^{k-1} \tan^n x \sec^2 x \, dx$$

2. Si la potencia de la secante es impar y positiva, conservar un factor secante tangente y convertir los factores restantes a secantes. Entonces desarrollar e integrar.

$$\int \sec^m x \tan^{\overbrace{2k+1}^{\text{Impar}}} x \, dx = \int \sec^{m-1} x \overbrace{(\tan^2 x)^k}^{\text{Convertir a secantes}} \overbrace{\sec x \tan x \, dx}^{\text{Conservar para } du} = \int \sec^{m-1} x (\sec^2 x - 1)^k \sec x \tan x \, dx$$

3. Si no hay factores secantes y la potencia de la tangente es par y positiva, convertir un factor tangente cuadrado a secante cuadrado. Entonces desarrollar y repetir si es necesario.

$$\int \tan^n x \, dx = \int \tan^{n-2} x \overbrace{(\tan^2 x)}^{\text{Convertir a secantes}} dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

4. Si la integral es de la forma $\int \sec^m x \, dx$ donde m es impar y positiva, usar la integración por partes, como se ilustra en el ejemplo 5 de la sección anterior.

5. Si ninguna de las primeras cuatro guías aplica, intentar convertir el integrando en senos y cosenos.

EJEMPLO 4 La potencia de la tangente es impar y positiva

Encontrar $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}} \, dx.$

Solución Debido a que se espera usar la regla de la potencia con $u = \sec x$, *conservar un factor de* $(\sec x \tan x)$ para formar du y convertir los factores tangentes restantes a secantes.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}} \, dx &= \int (\sec x)^{-1/2} \tan^3 x \, dx \\
&= \int (\sec x)^{-3/2} (\tan^2 x)(\sec x \tan x) \, dx \\
&= \int (\sec x)^{-3/2} (\sec^2 x - 1)(\sec x \tan x) \, dx \\
&= \int [(\sec x)^{1/2} - (\sec x)^{-3/2}](\sec x \tan x) \, dx \\
&= \frac{2}{3}(\sec x)^{3/2} + 2(\sec x)^{-1/2} + C
\end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 5, la potencia de la tangente es impar y positiva. Así que también se podría encontrar la integral usando el procedimiento descrito en la guía de estrategias 2 de la página 539. Demostrar en el ejercicio 89 que los resultados obtenidos por estos dos procedimientos sólo difieren por una constante.

EJEMPLO 5 La potencia de la secante es par y positiva

Encontrar $\int \sec^4 3x \tan^3 3x \, dx$.

Solución Sea $u = \tan 3x$, entonces $du = 3 \sec^2 3x \, dx$ y se pueden escribir

$$\begin{aligned}
\int \sec^4 3x \tan^3 3x \, dx &= \int \sec^2 3x \tan^3 3x (\sec^2 3x) \, dx \\
&= \int (1 + \tan^2 3x) \tan^3 3x (\sec^2 3x) \, dx \\
&= \frac{1}{3} \int (\tan^3 3x + \tan^5 3x)(3 \sec^2 3x) \, dx \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{\tan^4 3x}{4} + \frac{\tan^6 3x}{6} \right) + C \\
&= \frac{\tan^4 3x}{12} + \frac{\tan^6 3x}{18} + C.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 La potencia de la tangente es par

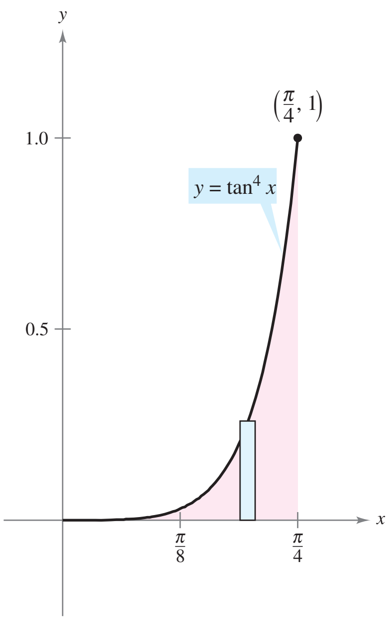
Evaluar $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \, dx$.

Solución Debido a que no hay factor secante, se puede empezar convirtiendo un factor tangente cuadrado en un factor secante cuadrado.

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x \, dx &= \int \tan^2 x (\tan^2 x) \, dx \\
&= \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C
\end{aligned}$$

Evaluar la integral definida como sigue.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \, dx &= \left[\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x \right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \\
&\approx 0.119
\end{aligned}$$



El área de la región es aproximadamente 0.119
Figura 8.5

El área representada por la integral definida se muestra en la figura 8.5. Probar usando la regla de Simpson para aproximar el valor de esta integral. Con $n = 18$, se debe obtener una aproximación con un error menor que 0.00001.

Para integrales que contienen potencias de cotangentes y cosecantes, seguir una estrategia similar a aquella usada para las potencias de tangentes y secantes. También, al integrar las funciones trigonométricas, recordar que a veces ayuda convertir el integrando entero en las potencias de senos y cosenos.

EJEMPLO 7 Conversión de senos y cosenos

Encontrar $\displaystyle\int \frac{\sec x}{\tan^2 x}\,dx$.

Solución Debido a que las primeras cuatro estrategias de la página 539 no aplican, intentar convertir el integrando en senos y cosenos. En este caso, se pueden integrar las potencias resultantes de seno y coseno como sigue.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec x}{\tan^2 x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 dx\\ &= \int (\operatorname{sen} x)^{-2}(\cos x)\,dx\\ &= -(\operatorname{sen} x)^{-1} + C\\ &= -\csc x + C\end{aligned}$$

Integrales que contienen los productos seno-coseno de ángulos diferentes

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para aprender más sobre integrales que contienen los productos del seno-coseno con ángulos diferentes, ver el artículo "Integrals of Products of Sine and Cosine with Different Arguments", de Sherrie J. Nicol, en *The College Mathematics Journal*.

Las integrales que contienen los productos de senos-cosenos de dos ángulos *diferentes* ocurren en muchas aplicaciones. En tales casos usar las identidades de producto suma.

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x])$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}[(m-n)x] + \operatorname{sen}[(m+n)x])$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x])$$

EJEMPLO 8 Uso de identidades de producto y suma

Encontrar $\displaystyle\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\,dx$

Solución Considerando la segunda identidad del producto suma, escribir

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\,dx &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left(-\cos x - \frac{\cos 9x}{9}\right) + C\\ &= -\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + C.\end{aligned}$$

8.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, usar la derivación para adaptar la antiderivada con la integral correcta. [Se etiquetan las integrales *a*), *b*), *c*) y *d*).]

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \tan^2 x\,dx$ *b*) $\displaystyle 8\int \cos^4 x\,dx$

c) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \sec^2 x\,dx$ *d*) $\displaystyle\int \tan^4 x\,dx$

1. $y = \sec x$
2. $y = \cos x + \sec x$
3. $y = x - \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$
4. $y = 3x + 2\operatorname{sen} x\cos^3 x + 3\operatorname{sen} x\cos x$

En los ejercicios 5 a 18, encontrar la integral.

5. $\displaystyle\int \cos^5 x \operatorname{sen} x\,dx$
6. $\displaystyle\int \cos^3 x \operatorname{sen}^4 x\,dx$
7. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^7 2x \cos 2x\,dx$
8. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$
9. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$
10. $\displaystyle\int \cos^3 \frac{x}{3}\,dx$
11. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 2\theta\sqrt{\cos 2\theta}\,d$
12. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 t}{\sqrt{\operatorname{sen} t}}\,dt$
13. $\displaystyle\int \cos^2 3x\,dx$
14. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 5x\,dx$
15. $\displaystyle\int \cos^4 3\alpha\,d\alpha$
16. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 6\theta\,d\theta$
17. $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^2 x\,dx$
18. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}^2\, x\,dx$

En los ejercicios 19 a 24, usar las fórmulas de Wallis para evaluar la integral.

19. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^7 x\,dx$
20. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^9 x\,dx$
21. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x\,dx$
22. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,dx$
23. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\,dx$
24. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^8 x\,dx$

En los ejercicios 25 a 42, encontrar la integral conteniendo secante y tangente.

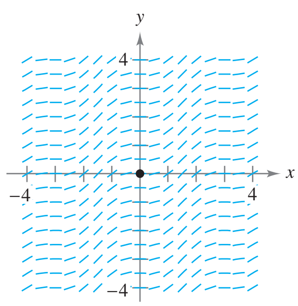
25. $\displaystyle\int \sec 7x\,dx$
26. $\displaystyle\int \sec^2(2x-1)\,dx$
27. $\displaystyle\int \sec^4 5x\,dx$
28. $\displaystyle\int \sec^6 3x\,dx$
29. $\displaystyle\int \sec^3 \pi x\,dx$
30. $\displaystyle\int \tan^5 x\,dx$
31. $\displaystyle\int \tan^5 \frac{x}{2}\,dx$
32. $\displaystyle\int \tan^3 \frac{\pi x}{2}\sec^2 \frac{\pi x}{2}\,dx$
33. $\displaystyle\int \sec^2 x \tan x\,dx$
34. $\displaystyle\int \tan^3 2t \sec^3 2t\,dt$
35. $\displaystyle\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx$
36. $\displaystyle\int \tan^5 2x \sec^4 2x\,dx$
37. $\displaystyle\int \sec^6 4x \tan 4x\,dx$
38. $\displaystyle\int \sec^2 \frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}\,dx$
39. $\displaystyle\int \sec^5 x \tan^3 x\,dx$
40. $\displaystyle\int \tan^3 3x\,dx$
41. $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{\sec x}\,dx$
42. $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{\sec^5 x}\,dx$

En los ejercicios 43 a 46, resolver la ecuación diferencial.

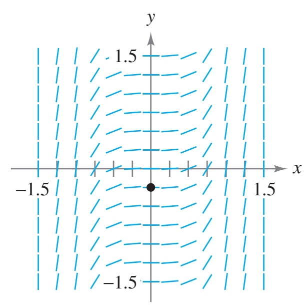
43. $\dfrac{dr}{d\theta} = \operatorname{sen}^4 \pi\theta$
44. $\dfrac{ds}{d\alpha} = \operatorname{sen}^2 \dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$
45. $y' = \tan^3 3x \sec 3x$
46. $y' = \sqrt{\tan x}\sec^4 x$

Campos de pendientes **En los ejercicios 47 y 48 se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la solución. Comparar el resultado con los dibujos del inciso *a*).**

47. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^2 x,\ (0, 0)$



48. $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x \tan^2 x,\ \left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$



CAS ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 49 y 50, usar un sistema algebraico por computadora para hacer la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y presentar la solución a través de la condición inicial especificada.**

49. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\operatorname{sen} x}{y},\ \ y(0) = 2$
50. $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{y}\tan^2 x,\ \ y(0) = 3$

En los ejercicios 51 a 56, encontrar la integral.

51. $\displaystyle\int \cos 2x \cos 6x\,dx$
52. $\displaystyle\int \cos 4\theta \cos(-3\theta)\,d\theta$
53. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x \cos 4x\,dx$
54. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(-4x)\cos 3x\,dx$
55. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 3\theta\,d\theta$
56. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 4x\,dx$

En los ejercicios 57 a 66, encontrar la integral. Usar un sistema algebraico por computadora para confirmar el resultado.

57. $\int \cot^3 2x\,dx$

58. $\int \tan^4 \frac{x}{2} \sec^4 \frac{x}{2}\,dx$

59. $\int \csc^4 2x\,dx$

60. $\int \cot^3 x \csc^3 x\,dx$

61. $\int \frac{\cot^2 t}{\csc t}\,dt$

62. $\int \frac{\cot^3 t}{\csc t}\,dt$

63. $\int \frac{1}{\sec x \tan x}\,dx$

64. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos x}\,dx$

65. $\int (\tan^4 t - \sec^4 t)\,dt$

66. $\int \frac{1 - \sec t}{\cos t - 1}\,dt$

En los ejercicios 67 a 74, evaluar la integral definida.

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx$

68. $\int_0^{\pi/3} \tan^2 x\,dx$

69. $\int_0^{\pi/4} 6\tan^3 x\,dx$

70. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t\sqrt{\tan t}\,dt$

71. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \operatorname{sen} t}\,dt$

72. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 5x \cos 3x\,dx$

73. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos^3 x\,dx$

74. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 x + 1)\,dx$

CAS **En los ejercicios 75 a 80, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la integral. Hacer la gráfica de la antiderivada para dos valores diferentes de la constante de integración.**

75. $\int \cos^4 \frac{x}{2}\,dx$

76. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$

77. $\int \sec^5 \pi x\,dx$

78. $\int \tan^3(1 - x)\,dx$

79. $\int \sec^5 \pi x \tan \pi x\,dx$

80. $\int \sec^4(1 - x)\tan(1 - x)\,dx$

CAS **En los ejercicios 81 a 84, usar un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral definida.**

81. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} 3\theta \operatorname{sen} 4\theta\,d\theta$

82. $\int_0^{\pi/2} (1 - \cos\theta)^2\,d\theta$

83. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,dx$

84. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{12} x\,dx$

Desarrollo de conceptos

85. Describir cómo integrar $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ para cada condición.

a) m es positivo e impar. *b*) n es positivo e impar.
c) m y n son positivos y pares.

86. Describir cómo integrar $\int \sec^m x \tan^n x\,dx$ para cada condición.

a) m es positivo y par. *b*) n es positivo e impar.
c) n es positivo y par y no hay factor secante.
d) m es positivo e impar y no hay factor tangente.

87. Evaluar $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx$ utilizando el método indicado. Explicar cómo difieren sus respuestas en cada método.

a) Sustitución donde $u = \operatorname{sen} x$
b) Sustitución donde $u = \cos x$
c) Integración por partes
d) Utilizando la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

Para discusión

88. Para cada par de integrales, determinar cuál es más difícil evaluar. Explicar el razonamiento.

a) $\int \operatorname{sen}^{372} x \cos x\,dx$, $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\,dx$
b) $\int \tan^{400} x \sec^2 x\,dx$, $\int \tan^{400} x \sec x\,dx$

En los ejercicios 89 y 90, *a*) encontrar la integral indefinida de dos maneras diferentes, *b*) usar una herramienta de graficación para representar la gráfica de la antiderivada (sin la constante de integración) obtenida por cada método para demostrar que los resultados sólo difieren por una constante, y *c*) verificar analíticamente que los resultados sólo difieren por una constante.

89. $\int \sec^4 3x \tan^3 3x\,dx$

90. $\int \sec^2 x \tan x\,dx$

Área **En los ejercicios 91 a 94, encontrar el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.**

91. $y = \operatorname{sen} x,\quad y = \operatorname{sen}^3 x,\quad x = 0,\quad x = \pi/2$

92. $y = \operatorname{sen}^2 \pi x,\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 1$

93. $y = \cos^2 x,\quad y = \operatorname{sen}^2 x,\quad x = -\pi/4,\quad x = \pi/4$

94. $y = \cos^2 x,\quad y = \operatorname{sen} x \cos x,\quad x = -\pi/2,\quad x = \pi/4$

Volumen **En los ejercicios 95 y 96, encontrar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones alrededor del eje *x*.**

95. $y = \tan x,\quad y = 0,\quad x = -\pi/4\quad x = \pi/4$

96. $y = \cos\frac{x}{2},\quad y = \operatorname{sen}\frac{x}{2},\quad x = 0,\quad x = \pi/2$

Volumen y centroide **En los ejercicios 97 y 98, para la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, encontrar *a*) el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje *x*, y *b*) el centroide de la región.**

97. $y = \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi$

98. $y = \cos x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi/2$

En los ejercicios 99 a 102, usar la integración por partes para verificar la fórmula de la reducción.

99. $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

100. $\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

101. $\int \cos^m x \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\cos^{m+1} x \operatorname{sen}^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

102. $\displaystyle\int \sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx$

En los ejercicios 103 a 106, usar los resultados de los ejercicios 99 a 102 para encontrar la integral.

103. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$ **104.** $\displaystyle\int \cos^4 x\, dx$

105. $\displaystyle\int \sec^4 \frac{2\pi x}{5}\, dx$ **106.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$

107. ***Modelo matemático*** La tabla muestra las temperaturas máximas (alto) y mínimas (bajo) medias (en grados Fahrenheit) en Erie, Pennsylvania, durante cada mes del año. (*Fuente: NOAA*)

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Máx	33.5	35.4	44.7	55.6	67.4	76.2
Mín	20.3	20.9	28.2	37.9	48.7	58.5

Mes	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Máx	80.4	79.0	72.0	61.0	49.3	38.6
Mín	63.7	62.7	55.9	45.5	36.4	26.8

Las temperaturas máximas y mínimas admiten el modelo $f(t) = a_0 + a_1 \cos(\pi t/6) + b_1 \operatorname{sen}(\pi t/6)$ donde $t = 0$ corresponden a enero y a_0, a_1 y b_1 son como sigue.

$$a_0 = \frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)\, dt \qquad a_1 = \frac{1}{6}\int_0^{12} f(t)\cos\frac{\pi t}{6}\, dt$$

$$b_1 = \frac{1}{6}\int_0^{12} f(t)\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}\, dt$$

a) Aproximar el modelo $H(t)$ para las temperaturas máximas. (*Sugerencia:* Usar la regla de Simpson para aproximar las integrales y usar los datos de enero dos veces.)

b) Repetir el inciso *a*) para un modelo $L(t)$ para los datos de temperatura mínimos.

c) Usar una herramienta de graficación para comparar cada modelo con los datos reales. ¿Durante qué parte del año la diferencia es más grande entre las temperaturas máximas y mínimas?

108. ***Fórmulas de Wallis*** Usar el resultado del ejercicio 100 para demostrar las versiones siguientes de las fórmulas de Wallis.

a) Si n es impar ($n \geq 3$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

b) Si n es par ($n \geq 2$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

109. El **producto escalar** de dos funciones f y g sobre $[a, b]$ está dado por $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$. Se dice que dos funciones distintas f y g son **ortogonales** si $\langle f, g\rangle = 0$. Mostrar que el conjunto siguiente de funciones es ortogonal en $[-\pi, \pi]$.

$\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x, \ldots, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots\}$

110. ***Serie de Fourier*** La suma siguiente es una *serie de Fourier finita*.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \operatorname{sen} ix$$
$$= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + a_3 \operatorname{sen} 3x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx$$

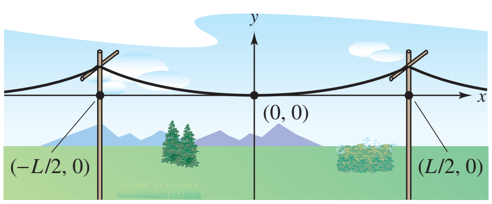
a) Usar el ejercicio 109 para demostrar que el coeficiente de a_n está dado por $\displaystyle a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\, dx$

b) Sea $f(x) = x$. Encontrar a_1, a_2 y a_3.

PROYECTO DE TRABAJO

Líneas de potencia

Las líneas de potencia son construidas atando cables entre los soportes fijos y ajustando la tensión en cada tramo. El cable cuelga entre los apoyos en la forma de una catenaria, como se muestra en la figura.



Sea T la tensión (en libras) en un tramo de cable, u la densidad (en libras por pie), sea $g \approx 32.2$ la aceleración debida a la gravedad (en pies/s^2), y sea L la distancia (en pies) entre dos soportes consecutivos. Entonces la ecuación de la catenaria es $\displaystyle y = \frac{T}{ug}\left(\cosh\frac{ugx}{T} - 1\right)$, donde x y y son medidos en pies.

a) Encontrar la longitud de la porción del cable entre dos soportes contiguos.

b) Para medir la tensión en un tramo de la línea de potencia, los especialistas usan el *método de la onda de retorno*. Se golpea el cable en un soporte, creando una onda en la línea, y es medido el tiempo t (en segundos) que tarda la onda en hacer un viaje redondo. La velocidad v (en pies por segundo) se da por $v = \sqrt{T/u}$. ¿Cuánto tiempo toma a la onda hacer un viaje redondo entre los soportes?

c) El pandeo s (en pulgadas) puede obtenerse evaluando y cuando $x = L/2$ en la ecuación para la catenaria (y multiplicando por 12). En la práctica, sin embargo, los especialistas de línea de potencia usan la "ecuación del instalador de líneas" dada por $s \approx 12.075t^2$. Usar el hecho que $[\cosh(ugL/2T) + 1] \approx 2$ para derivar esta ecuación.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre la matemática de líneas de potencia, ver el artículo "Constructing Power Lines", de Thomas O'Neil en *The UMAP Journal*.

8.4 Sustituciones trigonométricas

- Usar sustituciones trigonométricas para resolver una integral.
- Usar las integrales para formular y resolver las aplicaciones de la vida real.

Sustituciones trigonométricas

Conociendo cómo evaluar las integrales que contienen potencias de funciones trigonométricas, usar **sustituciones trigonométricas** para evaluar integrales que contienen radicales

$$\sqrt{a^2-u^2}, \qquad \sqrt{a^2+u^2} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{u^2-a^2}.$$

El objetivo de las sustituciones trigonométricas es eliminar al radical en el integrando. Hacer esto con las identidades pitagóricas.

$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta, \quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \quad \text{y} \quad \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1.$$

Por ejemplo, si $a > 0$, sea $u = a \operatorname{sen}\theta$, donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta}\\ &= \sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)}\\ &= \sqrt{a^2\cos^2\theta}\\ &= a\cos\theta.\end{aligned}$$

Notar que $\cos\theta \geq 0$, porque $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

EXPLORACIÓN

Integración de una función radical Hasta este punto del texto, no se ha evaluado la siguiente integral

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Por argumentos geométricos se puede encontrar el valor exacto de esta integral. ¿Cuál es? Utilizando la integración simbólica con la regla de Simpson o de los trapecios, no se tiene la seguridad de la precisión de la aproximación. ¿Por qué?

Intentar calcular el valor exacto mediante la sustitución

$$x = \operatorname{sen}\theta \text{ y } dx = \cos\theta\, d\theta$$

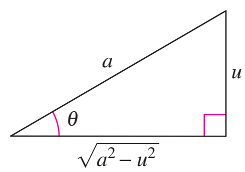
¿Coincide la respuesta con el valor obtenido usando el razonamiento geométrico?

SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS ($a > 0$)

1. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2-u^2}$, sea

$$u = a\operatorname{sen}\theta.$$

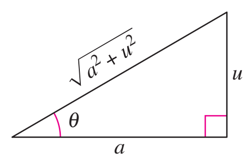
Entonces $\sqrt{a^2-u^2} = a\cos\theta$, donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.



2. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2+u^2}$, sea

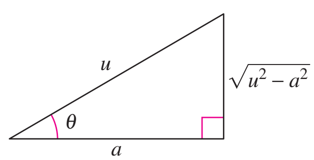
$$u = a\tan\theta.$$

Entonces $\sqrt{a^2+u^2} = a\sec\theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.



3. Para integrales que contienen $\sqrt{u^2-a^2}$, sea

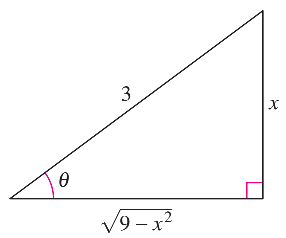
$$u = a\sec\theta.$$



Entonces

$$\sqrt{u^2-a^2} = \begin{cases} a\tan\theta, \text{ si } u > a, \text{ donde } 0 \leq \theta < \pi/2 \\ -a\tan\theta \text{ si } u < -a, \text{ donde } \pi/2 < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

NOTA Las restricciones sobre θ aseguran que la función que define la sustitución es inyectiva. De hecho, éstos son los mismos intervalos sobre los que se definen el arcseno, arctangente y arcsecante.



$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

Figura 8.6

EJEMPLO 1 Sustitución trigonométrica: $u = a \operatorname{sen}\theta$

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$.

Solución Primero, notar que ninguna de las reglas básicas de la integración aplica. Para usar la sustitución trigonométrica, observar que $\sqrt{9-x^2}$ es de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$. Así que se puede utilizar la sustitución

$$x = a \operatorname{sen}\theta = 3 \operatorname{sen}\theta.$$

Usando la derivación y el triángulo mostrados en la figura 8.6, se obtiene

$$dx = 3\cos\theta\, d\theta, \qquad \sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta \qquad \text{y} \qquad x^2 = 9\operatorname{sen}^2\theta.$$

Así, la sustitución trigonométrica lleva a

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{(9\operatorname{sen}^2\theta)(3\cos\theta)} && \text{Sustituir.}\\
&= \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} && \text{Simplificar.}\\
&= \frac{1}{9}\int \csc^2\theta\, d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= -\frac{1}{9}\cot\theta + C && \text{Aplicar la regla del cosecante.}\\
&= -\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right) + C && \text{Sustituir para } \cot\theta.\\
&= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C.
\end{aligned}$$

Notar que el triángulo en la figura 8.6 puede usarse para convertir los θ anteriores a x como sigue.

$$\begin{aligned}
\cot\theta &= \frac{\text{cateto ady.}}{\text{cateto op.}}\\
&= \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}
\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Usar un sistema algebraico por computadora para encontrar cada integral definida.

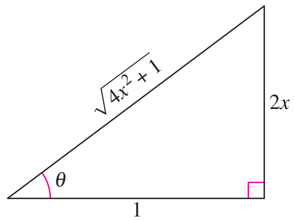
$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{9-x^2}}$$

Entonces usar la sustitución trigonométrica para reproducir los resultados obtenidos con el sistema algebraico por computadora.

En un capítulo anterior se vio cómo pueden usarse las funciones hiperbólicas inversas para evaluar las integrales

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}, \qquad \int \frac{du}{a^2-u^2} \qquad \text{y} \qquad \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}}.$$

También se pueden evaluar estas integrales por cambios de variable trigonométricos. Esto se muestra en el siguiente ejemplo.



$\tan\theta = 2x,\ \sec\theta = \sqrt{4x^2+1}$

Figura 8.7

EJEMPLO 2 Sustitución trigonométrica: $u = a\tan\theta$

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$.

Solución Sea $u = 2x$, $a = 1$ y $2x = \tan\theta$, como se muestra en la figura 8.7. Entonces,

$$dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4x^2+1} = \sec\theta.$$

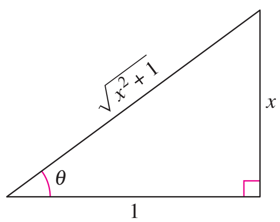
La sustitución trigonométrica produce

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec\theta} && \text{Sustituir.}\\
&= \frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta && \text{Simplificar.}\\
&= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C && \text{Aplicar la regla de la secante.}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+1} + 2x\right| + C. && \text{Deshacer el cambio.}
\end{aligned}$$

Intentar verificar este resultado con un sistema algebraico por computadora. El resultado, ¿se da en esta forma o en la forma de una función hiperbólica inversa?

Extender el uso de la sustitución trigonométrica para cubrir las integrales conteniendo expresiones como $(a^2 - u^2)^{n/2}$ escribiendo la expresión como

$$(a^2 - u^2)^{n/2} = \left(\sqrt{a^2 - u^2}\right)^n.$$



$\tan\theta = x,\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Figura 8.8

EJEMPLO 3 Sustitución trigonométrica: potencias racionales

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

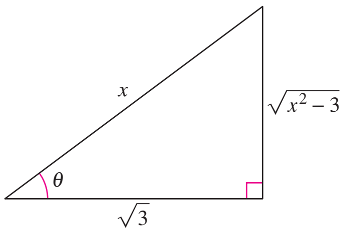
Solución Empezar escribiendo $(x^2+1)^{3/2}$ como $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3$. Entonces, sea $a = 1$ y $u = x\tan\theta$, como se muestra en la figura 8.8. Usando

$$dx = \sec^2\theta\, d\theta \qquad \text{y} \qquad \sqrt{x^2+1} = \sec\theta$$

aplicar la sustitución trigonométrica como sigue

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} &= \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} && \text{Reescribir el denominador.}\\
&= \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^3\theta} && \text{Sustituir.}\\
&= \int \frac{d\theta}{\sec\theta} && \text{Simplificar.}\\
&= \int \cos\theta\, d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \operatorname{sen}\theta + C && \text{Aplicar la regla del coseno.}\\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C && \text{Sustitución hacia atrás.}
\end{aligned}$$

Para las integrales definidas, a menudo es conveniente determinar los límites de la integración para θ, eso evita volver a convertir a x. Repasar este procedimiento en la sección 4.5, ejemplos 8 y 9.



$\sec\theta = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}}$

Figura 8.9

EJEMPLO 4 Transformación de los límites de integración

Evaluar $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx.$

Solución Debido a que $\sqrt{x^2-3}$ tiene la forma $\sqrt{u^2-a^2}$, considerar

$$u = x, \quad a = \sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad x = \sqrt{3}\sec\theta$$

como se muestra en la figura 8.9. Entonces,

$$dx = \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\,d\theta \qquad \text{y} \qquad \sqrt{x^2-3} = \sqrt{3}\tan\theta.$$

Para determinar los límites superiores e inferiores de la integración, usar la sustitución $x = \sqrt{3}\sec\theta$ como sigue

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = \sqrt{3}$, $\sec\theta = 1$ y $\theta = 0$.	Cuando $x = 2$, $\sec\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Así, se tiene

Límites de integración para x — Límites de integración para θ

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx &= \int_{0}^{\pi/6} \frac{(\sqrt{3}\tan\theta)(\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta)\,d\theta}{\sqrt{3}\sec\theta} \\
&= \int_{0}^{\pi/6} \sqrt{3}\tan^2\theta\,d\theta \\
&= \sqrt{3}\int_{0}^{\pi/6} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta \\
&= \sqrt{3}\Big[\tan\theta - \theta\Big]_{0}^{\pi/6} \\
&= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \\
&\approx 0.0931.
\end{aligned}$$

En el ejemplo 4, intentar volver a convertir a la variable x y evaluar la antiderivada en los límites originales de integración. Obtener

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx = \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}} - \operatorname{arcsec}\frac{x}{\sqrt{3}}\Bigg]_{\sqrt{3}}^{2}.$$

Al calcular integrales definidas por cambios de variables trigonométricos, verificar que los valores de θ están en los intervalos discutidos al principio de esta sección. Es decir, si se hubiera pedido evaluar la integral definida en el ejemplo 4

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx$$

entonces usando $u = x$ y $a = \sqrt{3}$ en el intervalo $[-2, -\sqrt{3}]$ implicaría que $u < -a$. Así, al determinar los límites superiores e inferiores de integración, se tendría que escoger θ tal que $\pi/2 < \theta \leq \pi$. En este caso la integral sería resuelta como sigue.

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx &= \int_{5\pi/6}^{\pi} \frac{\left(-\sqrt{3}\tan\theta\right)\left(\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\right)d\theta}{\sqrt{3}\sec\theta} \\
&= \int_{5\pi/6}^{\pi} -\sqrt{3}\tan^2\theta\,d\theta \\
&= -\sqrt{3}\int_{5\pi/6}^{\pi} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta \\
&= -\sqrt{3}\Big[\tan\theta - \theta\Big]_{5\pi/6}^{\pi} \\
&= -\sqrt{3}\left[(0-\pi) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5\pi}{6}\right)\right] \\
&= -1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \\
&\approx -0.0931
\end{aligned}$$

Las sustituciones trigonométricas pueden usarse completando el cuadrado. Por ejemplo, evaluar la integral siguiente.

$$\int \sqrt{x^2 - 2x}\,dx$$

Para empezar, completar el cuadrado y escribir la integral como

$$\int \sqrt{(x-1)^2 - 1^2}\,dx.$$

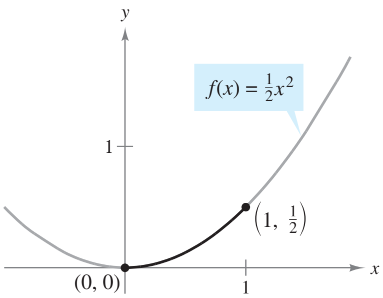
Las sustituciones trigonométricas pueden usarse para evaluar las tres integrales listadas en el teorema siguiente. Estas integrales se encontrarán varias veces en el resto del texto. Cuando esto pase, simplemente se citará este teorema. (En el ejercicio 85 verificar las fórmulas contenidas en el teorema.)

TEOREMA 8.2 FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN ESPECIALES ($a > 0$)

1. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + u\sqrt{a^2-u^2}\right) + C$
2. $\displaystyle\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2-a^2} - a^2\ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right|\right) + C, \quad u > a$
3. $\displaystyle\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2+a^2} + a^2\ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right|\right) + C$

Aplicaciones

EJEMPLO 5 Cálculo de la longitud de arco



La longitud de arco de la curva para (0, 0) a $\left(1, \frac{1}{2}\right)$
Figura 8.10

Encontrar la longitud de arco de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ entre $x = 0$ a $x = 1$ (ver figura 8.10).

Solución Referirse a la fórmula de longitud de arco en la sección 7.4.

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad \text{Fórmula para su longitud de arco.}$$

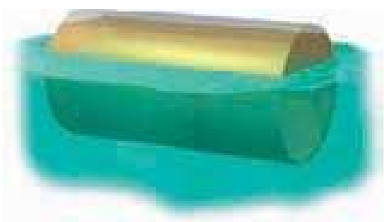
$$= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \qquad f'(x) = x.$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta \, d\theta \qquad \text{Sea } a = 1 \text{ y } x = \tan \theta.$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\sec \theta \tan \theta + \ln|\sec \theta + \tan \theta|\Big]_0^{\pi/4} \qquad \text{Ejemplo 5, sección 8.2.}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right] \approx 1.148$$

EJEMPLO 6 Comparación de las fuerzas de dos fluidos



El barril no está completamente lleno de petróleo; la parte superior del barril está vacía 0.2 pies
Figura 8.11

Un barril de petróleo sellado (que pesa 48 libras por pie^3) está flotando en el agua de mar (que pesa 64 libras por pie^3), como se muestra en las figuras 8.11 y 8.12. (El barril no está completamente lleno de petróleo. Con el barril recargado de lado, la parte superior, 0.2 pies del barril, está vacía.) Comparar las fuerzas del fluido del interior y del exterior contra un extremo del barril.

Solución En la figura 8.12, localizar el sistema de coordenadas con el origen al centro del círculo dado por $x^2 + y^2 = 1$. Para encontrar la fuerza del fluido contra un extremo *interior* del barril, integrar entre -1 y 0.8 (usando un peso de $w = 48$).

$$F = w\int_c^d h(y)L(y)\, dy \qquad \text{Ecuación general (ver sección 7.7).}$$

$$F_{\text{interior}} = 48\int_{-1}^{0.8} (0.8 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\, dy$$

$$= 76.8\int_{-1}^{0.8} \sqrt{1 - y^2}\, dy - 96\int_{-1}^{0.8} y\sqrt{1 - y^2}\, dy$$

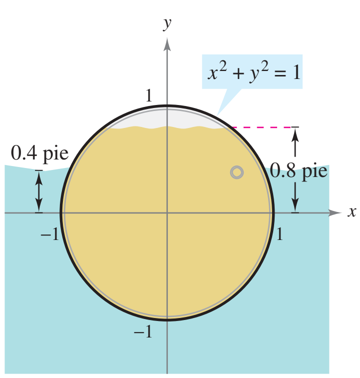


Figura 8.12

Para encontrar la fuerza *exterior* del fluido, integrar entre -1 y 0.4 (usando un peso de $w = 64$).

$$F_{\text{exterior}} = 64\int_{-1}^{0.4} (0.4 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\, dy$$

$$= 51.2\int_{-1}^{0.4} \sqrt{1 - y^2}\, dy - 128\int_{-1}^{0.4} y\sqrt{1 - y^2}\, dy$$

Los detalles de integración se dejan para completarse en el ejercicio 84. Intuitivamente, ¿se diría que la fuerza del petróleo (interior) o la fuerza del agua de mar (exterior) es mayor? Evaluando estas dos integrales, determinar que

$$F_{\text{interior}} \approx 121.3 \text{ libras} \qquad \text{y} \qquad F_{\text{exterior}} \approx 93.0 \text{ libras}$$

8.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, indicar la sustitución trigonométrica que se usaría para encontrar la integral. No efectuar la integración.

1. $\int (9 + x^2)^{-2}\, dx$
2. $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$
3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$
4. $\int x^2(x^2 - 25)^{3/2}\, dx$

En los ejercicios 5 a 8, encontrar la integral indefinida usando la sustitución $x = 4 \operatorname{sen} \theta$.

5. $\int \frac{1}{(16 - x^2)^{3/2}}\, dx$
6. $\int \frac{4}{x^2\sqrt{16 - x^2}}\, dx$
7. $\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}\, dx$
8. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$

En los ejercicios 9 a 12, encontrar la integral indefinida usando la sustitución $x = 5 \sec \theta$.

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 25}}\, dx$
10. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}\, dx$
11. $\int x^3\sqrt{x^2 - 25}\, dx$
12. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 25}}\, dx$

En los ejercicios 13 a 16, encontrar la integral indefinida usando la sustitución $x = \tan \theta$.

13. $\int x\sqrt{1 + x^2}\, dx$
14. $\int \frac{9x^3}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$
15. $\int \frac{1}{(1 + x^2)^2}\, dx$
16. $\int \frac{x^2}{(1 + x^2)^2}\, dx$

En los ejercicios 17 a 20, usar las fórmulas de integración especial (teorema 8.2) para encontrar la integral.

17. $\int \sqrt{9 + 16x^2}\, dx$
18. $\int \sqrt{4 + x^2}\, dx$
19. $\int \sqrt{25 - 4x^2}\, dx$
20. $\int \sqrt{5x^2 - 1}\, dx$

En los ejercicios 21 a 42, encontrar la integral.

21. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 36}}\, dx$
22. $\int \frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\, dx$
23. $\int \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$
24. $\int \frac{1}{\sqrt{49 - x^2}}\, dx$
25. $\int \sqrt{16 - 4x^2}\, dx$
26. $\int x\sqrt{16 - 4x^2}\, dx$
27. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$
28. $\int \frac{t}{(4 - t^2)^{3/2}}\, dt$
29. $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^4}\, dx$
30. $\int \frac{\sqrt{4x^2 + 9}}{x^4}\, dx$
31. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 + 9}}\, dx$
32. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 + 16}}\, dx$
33. $\int \frac{-3x}{(x^2 + 3)^{3/2}}\, dx$
34. $\int \frac{1}{(x^2 + 5)^{3/2}}\, dx$
35. $\int e^{2x}\sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$
36. $\int (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}\, dx$
37. $\int e^x\sqrt{1 - e^{2x}}\, dx$
38. $\int \frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x}}\, dx$
39. $\int \frac{1}{4 + 4x^2 + x^4}\, dx$
40. $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}\, dx$
41. $\int \operatorname{arcsec} 2x\, dx, \quad x > \frac{1}{2}$
42. $\int x \operatorname{arcsen} x\, dx$

En los ejercicios 43 a 46, completar el cuadrado y encontrar la integral.

43. $\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}\, dx$
44. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}}\, dx$
45. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 6x + 12}}\, dx$
46. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}\, dx$

En los ejercicios 47 a 52, evaluar, usando la integral, *a*) los límites de integración dados y *b*) los límites obtenidos por la sustitución trigonométrica.

47. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{t^2}{(1 - t^2)^{3/2}}\, dt$
48. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1 - t^2)^{5/2}}\, dt$
49. $\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}}\, dx$
50. $\int_0^{3/5} \sqrt{9 - 25x^2}\, dx$
51. $\int_4^6 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}}\, dx$
52. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2}\, dx$

En los ejercicios 53 y 54, encontrar la solución simbólica de la ecuación diferencial.

53. $x\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 9}, \quad x \geq 3, \quad y(3) = 1$
54. $\sqrt{x^2 + 4}\,\frac{dy}{dx} = 1, \quad x \geq -2, \quad y(0) = 4$

CAS **En los ejercicios 55 a 58, utilizar un sistema algebraico de computadora para encontrar la integral. Verificar el resultado por derivación.**

55. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 10x + 9}}\, dx$
56. $\int (x^2 + 2x + 11)^{3/2}\, dx$
57. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$
58. $\int x^2\sqrt{x^2 - 4}\, dx$

Desarrollo de conceptos

59. Indicar la sustitución que haría si se usara sustitución trigonométrica y la integral con el radical dado, donde $a > 0$. Explicar el razonamiento.

a) $\sqrt{a^2 - u^2}$ *b*) $\sqrt{a^2 + u^2}$ *c*) $\sqrt{u^2 - a^2}$

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

En los ejercicios 60 y 61, indicar el método de integración que se usaría para realizar cada integración. Explicar por qué se eligió tal método. No efectuar la integración.

60. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ **61.** $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$

Para discusión

62. *a*) Evaluar la integral $\int \frac{x}{x^2+9}\,dx$ utilizando la sustitución de u. Evaluar después usando sustitución trigonométrica. Discutir los resultados.

b) Evaluar la integral $\int \frac{x^2}{x^2+9}\,dx$ de manera algebraica utilizando $x^2 = (x^2+9) - 9$. Después, evaluar mediante sustitución trigonométrica. Discutir los resultados.

c) Evaluar la integral $\int \frac{4}{4-x^2}\,dx$ utilizando sustitución trigonométrica. Evaluar después usando la identidad $\frac{4}{4-x^2} = \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}\right)$. Discutir los resultados.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 63 a 66, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.**

63. Si $x = \operatorname{sen}\theta$, entonces $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int d\theta$.

64. Si $x = \sec\theta$, entonces $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int \sec\theta\tan\theta\,d\theta$.

65. Si $x = \tan\theta$, entonces $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_0^{4\pi/3} \cos\theta\,d\theta$.

66. Si $x = \operatorname{sen}\theta$, entonces $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$.

67. ***Área*** Encontrar el área interior de la elipse mostrada en la figura.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

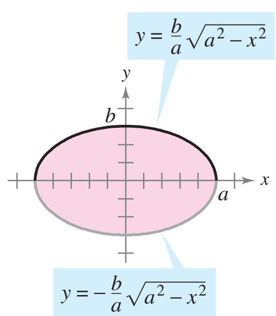


Figura para 67

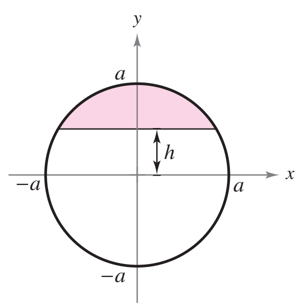


Figura para 68

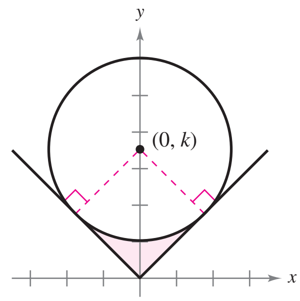
68. ***Área*** Encontrar el área de la región sombreada del círculo de radio a, si la cuerda está h unidades de $(0 < h < a)$ del centro del círculo (ver la figura).

69. ***Diseño mecánico*** La superficie de una parte de la máquina es la región entre las gráficas de $y = |x|$ y $x^2 + (y-k)^2 = 25$ (ver la figura).

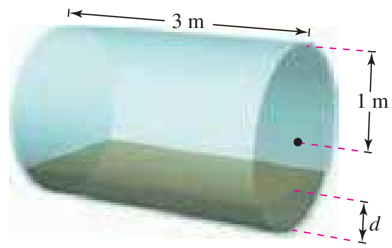
a) Encontrar k si el círculo es tangente a la gráfica de $y = |x|$.

b) Encontrar el área de la superficie de la parte de la máquina.

c) Encontrar el área de la superficie de la parte de la máquina como una función del radio r del círculo.



70. ***Volumen*** El eje de un tanque de almacenamiento cilíndrico horizontal (ver la figura). El radio y longitud del tanque son 1 y 3 metros, respectivamente.



a) Determinar el volumen del fluido en el tanque como una función de la profundidad d.

b) Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la función en el inciso *a*).

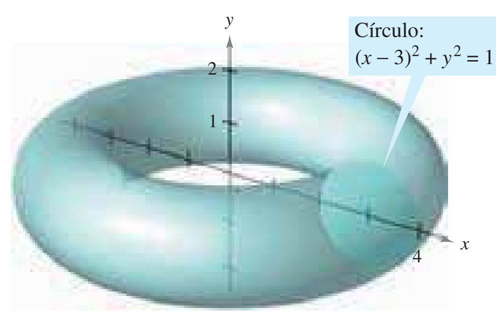
c) Diseñar una varilla de control para el tanque con las marcas de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.

d) El fluido está entrando en el tanque a una velocidad de $\frac{1}{4}$ m^3/min. Determinar la proporción de cambio de la profundidad del fluido como una función de su profundidad d.

e) Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la función en el inciso *d*). ¿Cuándo es mínima la proporción de cambio de la profundidad? ¿Esto está de acuerdo con la intuición? Explicar.

Volumen de un toro **En los ejercicios 71 y 72, encontrar el volumen del toro generado al girar la región acotada por la gráfica del círculo alrededor del eje *y*.**

71. $(x-3)^2 + y^2 = 1$ (ver la figura)



72. $(x-h)^2 + y^2 = r^2,\ h > r$

Longitud de arco **En los ejercicios 73 y 74, encontrar la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.**

73. $y = \ln x, \quad [1, 5]$

74. $y = \frac{1}{2}x^2, \quad [0, 4]$

75. ***Longitud de arco*** Mostrar que la longitud de un arco de la curva del seno es igual a la longitud de un arco de la curva del coseno.

76. ***Conjetura***

a) Encontrar las fórmulas para la distancia entre $(0, 0)$ y (a, a^2) a lo largo de la recta entre estos puntos y a lo largo de la parábola $y = x^2$.

b) Usar las fórmulas del inciso *a*) para encontrar las distancias para $a = 1$ y $a = 10$.

c) Hacer una conjetura sobre la diferencia entre las dos distancias cuando a crece.

Movimiento del proyectil **En los ejercicios 77 y 78, *a*) usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la trayectoria de un proyectil que sigue el camino dado por la gráfica de la ecuación, *b*) determinar el rango del proyectil y *c*) usar integración en una herramienta de graficación para determinar la distancia de las trayectorias del proyectil.**

77. $y = x - 0.005x^2$

78. $y = x - \dfrac{x^2}{72}$

Centroide **En los ejercicios 79 y 80, encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de las desigualdades.**

79. $y \leq 3/\sqrt{x^2 + 9},\ y \geq 0,\ x \geq -4,\ x \leq 4$

80. $y \leq \frac{1}{4}x^2,\ (x - 4)^2 + y^2 \leq 16,\ y \geq 0$

81. ***Área de una superficie*** Encontrar el área de la superficie del sólido generada al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$ alrededor del eje x.

82. ***Intensidad de campo*** La intensidad de campo H de un imán de longitud $2L$ sobre una partícula a r unidades del centro del imán es

$$H = \frac{2mL}{(r^2 + L^2)^{3/2}}$$

donde $\pm m$ son los polos del imán (ver la figura). Encontrar la intensidad de campo media cuando la partícula se mueve de 0 a R unidades del centro evaluando la integral

$$\frac{1}{R}\int_0^R \frac{2mL}{(r^2 + L^2)^{3/2}}\, dr.$$

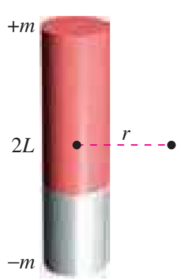


Figura para 82

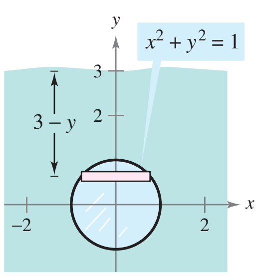


Figura para 83

83. ***Fuerza de un fluido*** Encontrar la fuerza de un fluido sobre una ventana vertical de observación circular de 1 pie de radio dentro de un tanque lleno de agua de un centro piscícola cuando el centro de la ventana es *a*) 3 pies y *b*) d pies ($d > 1$) debajo de la superficie de agua (ver la figura). Usar la sustitución trigonométrica para evaluar la integral. (Recordar que en la sección 7.7, en un problema similar, se evaluó una integral por una fórmula geométrica y la otra observando que el integrando era impar.)

84. ***Fuerza de un fluido*** Evaluar las siguientes dos integrales que proporcionan las fuerzas del fluido en el ejemplo 6.

a) $F_{\text{interior}} = 48\displaystyle\int_{-1}^{0.8} (0.8 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\, dy$

b) $F_{\text{exterior}} = 64\displaystyle\int_{-1}^{0.4} (0.4 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\, dy$

85. Usar la sustitución trigonométrica para verificar las fórmulas de la integración dadas en el teorema 8.2.

86. ***Longitud de arco*** Mostrar que la longitud de arco de la gráfica $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ es igual a la circunferencia de la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$ (ver la figura).

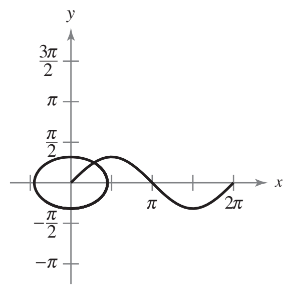


Figura para 86

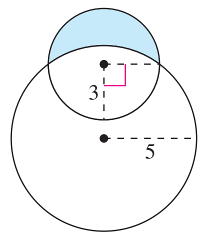
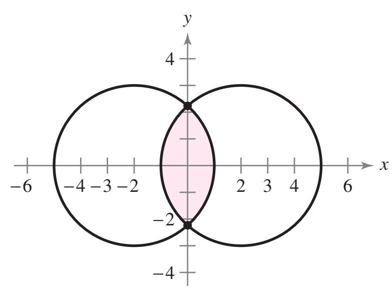


Figura para 87

87. ***Área de un lune*** La región creciente acotada por dos círculos forman un *lune* (ver la figura). Encontrar el área del lune dado que el radio del círculo más pequeño es 3 y el radio del círculo más grande es 5.

88. ***Área*** Dos círculos de radio 3, con centros en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ se intersecan como se muestra en la figura. Encontrar el área de la región sombreada.



Preparación del examen Putnam

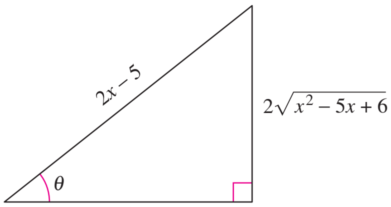
89. Evaluar

$$\int_0^1 \frac{\ln(x + 1)}{x^2 + 1}\, dx.$$

8.5 Fracciones simples o parciales

- **Entender el concepto de una descomposición en fracciones simples o parciales.**
- **Usar la descomposición de fracciones simples con los factores lineales para integrar las funciones racionales.**
- **Usar la descomposición de fracciones simples con los factores cuadráticos para integrar las funciones racionales.**

Fracciones simples o parciales



$\sec\theta = 2x - 5$
Figura 8.13

En esta sección se examina un procedimiento para descomponer una función racional en funciones racionales más simples para poder aplicar las fórmulas básicas de la integración. Este procedimiento se llama **método de las fracciones simples o parciales**. Para ver el beneficio del método de las fracciones simples, considerar la integral

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx.$$

Para evaluar esta integral *sin* las fracciones parciales, completar el cuadrado y hacer un cambio de variable trigonométrica (ver la figura 8.13) para obtener

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx &= \int \frac{dx}{(x-5/2)^2-(1/2)^2} && a = \tfrac{1}{2},\ x - \tfrac{5}{2} = \tfrac{1}{2}\sec\theta. \\
&= \int \frac{(1/2)\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{(1/4)\tan^2\theta} && dx = \tfrac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta. \\
&= 2\int \csc\theta\,d\theta \\
&= 2\ln|\csc\theta - \cot\theta| + C \\
&= 2\ln\left|\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}} - \frac{1}{2\sqrt{x^2-5x+6}}\right| + C \\
&= 2\ln\left|\frac{x-3}{\sqrt{x^2-5x+6}}\right| + C \\
&= 2\ln\left|\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C \\
&= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C.
\end{aligned}$$

Ahora, suponer que se ha observado que

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$ Descomposición en fracciones parciales.

Entonces, evaluar la integral fácilmente, como sigue.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx \\
&= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C
\end{aligned}$$

Este método es preferible a los cambios de variable trigonométricas. Sin embargo, su uso depende de la habilidad para factorizar el denominador, $x^2 - 5x + 6$, y para encontrar las **fracciones parciales**

$$\frac{1}{x-3} \qquad \text{y} \qquad -\frac{1}{x-2}.$$

En esta sección se estudiarán las técnicas para encontrar las descomposiciones de las fracciones parciales.

Mary Evans Picture Library

John Bernoulli (1667-1748)
El método de descomposición de las fracciones simples o parciales fue introducido por John Bernoulli, matemático suizo cuyas investigaciones fueron fundamentales en el desarrollo temprano del cálculo. John Bernoulli fue profesor en la Universidad de Basilea donde contó con ilustres discípulos, el más famoso fue Leonhard Euler.

AYUDA DE ESTUDIO En cursos previos se vio cómo combinar funciones tales como

$$\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x+3}=\frac{5}{(x-2)(x+3)}.$$

El método de las fracciones parciales muestra cómo invertir este proceso.

$$\frac{5}{(x-2)(x+3)}=\frac{?}{x-2}+\frac{?}{x+3}$$

Recordar del álgebra que cada polinomio con coeficientes reales puede factorizarse en factores lineales y cuadráticos irreductibles.* Por ejemplo, el polinomio

$$x^5+x^4-x-1$$

puede escribirse como

$$\begin{aligned}x^5+x^4-x-1 &= x^4(x+1)-(x+1)\\ &= (x^4-1)(x+1)\\ &= (x^2+1)(x^2-1)(x+1)\\ &= (x^2+1)(x+1)(x-1)(x+1)\\ &= (x-1)(x+1)^2(x^2+1)\end{aligned}$$

donde $(x-1)$ es un factor lineal, $(x+1)^2$ es un factor lineal repetido y (x^2+1) es un factor cuadrático irreducible. Usando esta factorización, escribir la descomposición de la fracción parcial de la expresión racional

$$\frac{N(x)}{x^5+x^4-x-1}$$

donde $N(x)$ es un polinomio de grado menor que 5, como sigue.

$$\frac{N(x)}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

DESCOMPOSICIÓN DE $N(x)/D(x)$ EN FRACCIONES SIMPLES

1. **Dividir en caso impropio:** Si $N(x)/D(x)$ es una fracción impropia (es decir, si el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador), dividir el denominador en el numerador para obtener

$$\frac{N(x)}{D(x)}=(\text{a polinomio})+\frac{N_1(x)}{D(x)}$$

donde el grado de $N_1(x)$ es menor del grado de $D(x)$. Entonces aplicar los pasos 2, 3 y 4 a la expresión racional propia $N_1(x)/D(x)$.

2. **Factorizar el denominador:** Factorizar completamente el denominador en factores de los tipos

$$(px+q)^m \qquad \text{y} \qquad (ax^2+bx+c)^n$$

donde ax^2+bx+c es irreducible.

3. **Factores lineales:** Para cada factor lineal $(px+q)^m$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la suma siguiente de m fracciones.

$$\frac{A_1}{(px+q)}+\frac{A_2}{(px+q)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(px+q)^m}$$

4. **Factores cuadráticos:** Para cada factor cuadrático $(ax^2+bx+c)^n$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la suma siguiente de n fracciones.

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

---

* *Para una revisión de técnicas de factorización, ver* Precalculus, *7a. edición, por Larson y Hostetler o* Precalculus: A Graphing Approach, *5a. edición, por Larson, Hostetler y Edwards (Boston, Massachusetts: Houghton Mifflin, 2007 y 2008, respectivamente).*

Factores lineales

Las técnicas algebraicas para determinar las constantes en los numeradores de una descomposición en fracciones parciales con factores lineales se muestran en los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Escribir la descomposición de la fracción parcial para $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

Solución Porque $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, incluir una fracción parcial para cada factor y escribir

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}$$

donde A y B serán determinados. Multiplicando esta ecuación por el mínimo común denominador $(x - 3)(x - 2)$ da la **ecuación básica**

$$1 = A(x - 2) + B(x - 3). \qquad \text{Ecuación básica.}$$

Porque esta ecuación es cierta para todo x, se puede sustituir cualquier valor *conveniente* para x para obtener las ecuaciones en A y B. Los valores más convenientes son los que hacen los factores particulares igual a 0.

NOTA Notar que las sustituciones para x en el ejemplo 1 son escogidas por su conveniencia determinando los valores para A y B; $x = 2$ se elige para eliminar el término $A(x - 2)$, y $x = 3$ se elige para eliminar el término $B(x - 3)$. La meta es hacer las sustituciones *convenientes* siempre que sea posible. ■

Para resolver para A, sea $x = 3$ y obtener

$$1 = A(3 - 2) + B(3 - 3) \qquad \text{Sea } x = 3 \text{ en la ecuación básica.}$$
$$1 = A(1) + B(0)$$
$$A = 1.$$

Para resolver para B, sea $x = 2$ y obtener

$$1 = A(2 - 2) + B(2 - 3) \qquad \text{Sea } x = 2 \text{ en la ecuación básica.}$$
$$1 = A(0) + B(-1)$$
$$B = -1.$$

Así, la descomposición es

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2}$$

como se muestra al principio de esta sección.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender un método diferente para encontrar la descomposición de las fracciones parciales, llamado Método de Heavyside, ver el artículo "Calculus to Algebra Connections in Partial Fraction Decomposition", de Joseph Wiener y Will Watkins, en *The AMATYC Review*.

Asegurarse de que el método de fracciones parciales sólo es práctico para las integrales de funciones racionales cuyos denominadores factorizan "muy bien". Por ejemplo, si el denominador en el ejemplo 1 se cambiara a $x^2 - 5x + 5$, su factorización como

$$x^2 - 5x + 5 = \left[x + \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right]\left[x - \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right]$$

sería demasiado complicada como para usar con las fracciones simples parciales. En casos así, es preferible completar el cuadrado o recurrir a integración simbólica en un sistema algebraico por computadora para realizar la integración. Al hacer esto, se obtiene

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 5}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|2x - \sqrt{5} - 5\right| - \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|2x + \sqrt{5} - 5\right| + C.$$

EJEMPLO 2 Factores lineales repetidos

Encontrar $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx.$

Solución Porque

$$\begin{aligned} x^3+2x^2+x &= x(x^2+2x+1) \\ &= x(x+1)^2 \end{aligned}$$

incluir una fracción para *cada potencia* de x y $(x+1)$ y escribir

$$\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para un enfoque alternativo de usar las fracciones simples, ver el artículo "A Short-cut in Partial Fractions", por Xun-Chen y Huang, en *The College Mathematics Journal*.

Multiplicando por el mínimo común denominador $x(x+1)^2$ da la *ecuación básica*

$$5x^2+20x+6 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx. \qquad \text{Ecuación básica.}$$

Para resolver para A, sea $x=0$. Esto elimina los términos B y C y da

$$\begin{aligned} 6 &= A(1)+0+0 \\ A &= 6. \end{aligned}$$

Para resolver para C, sea $x=-1$. Esto elimina los términos A y B y da

$$\begin{aligned} 5-20+6 &= 0+0-C \\ C &= 9. \end{aligned}$$

Se han usado las opciones más convenientes para x, para encontrar el valor de B, usar cualquier *otro valor* de x junto con los valores calculados de A y C. Usando $x=1$, $A=6$ y $C=9$ producen

$$\begin{aligned} 5+20+6 &= A(4)+B(2)+C \\ 31 &= 6(4)+2B+9 \\ -2 &= 2B \\ B &= -1. \end{aligned}$$

Así, sigue que

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}\,dx &= \int\left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2}\right)dx \\ &= 6\ln|x| - \ln|x+1| + 9\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C \\ &= \ln\left|\frac{x^6}{x+1}\right| - \frac{9}{x+1} + C. \end{aligned}$$

Intentar verificar este resultado derivando. Incluir álgebra en la verficación, simplificando la derivada hasta que haya obtenido el integrando original.

TECNOLOGÍA Pueden usarse más sistemas algebraicos tales como *Maple*, *Mathematica* y *TI-89*, para descomponer una función racional en fracciones parciales. Por ejemplo, usando el *Maple*, se obtiene lo siguiente.

$$\text{convertir}\left(\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}, \text{frac simp}, x\right)$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}$$

NOTA Es necesario hacer tantas sustituciones para x como coeficientes desconocidos (A, B, C, . . .) para ser determinados. Así, en el ejemplo 2, se hicieron tres sustituciones ($x=0$, $x=-1$ y $x=1$) para resolver para A, B y C.

Factores cuadráticos

Al usar el método de fracciones simples con los factores *lineales*, una opción conveniente de x da un valor inmediatamente por uno de los coeficientes. Con los factores *cuadráticos*, un sistema de ecuaciones lineales tiene que ser resuelto, sin tener en cuenta la opción de x.

EJEMPLO 3 Factores cuadráticos y lineales distintos

Encontrar $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)}\,dx.$

Solución Porque

$$(x^2 - x)(x^2 + 4) = x(x - 1)(x^2 + 4)$$

debe incluir una fracción simple para cada factor y escribir

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $x(x - 1)(x^2 + 4)$ da la *ecuación básica*

$$2x^3 - 4x - 8 = A(x - 1)(x^2 + 4) + Bx(x^2 + 4) + (Cx + D)(x)(x - 1).$$

Para resolver para A, sea $x = 0$ y obtener

$$-8 = A(-1)(4) + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = A.$$

Para resolver para B, sea $x = 1$ y obtener

$$-10 = 0 + B(5) + 0 \quad \Rightarrow \quad -2 = B.$$

En este punto, C y D serán determinados todavía. Encontrar estas constantes restantes eligiendo otros dos valores para x y resolviendo el sistema resultante de ecuaciones lineales. Si $x = -1$, entonces, usando $A = 2$ y $B = -2$, escribir

$$\begin{aligned} -6 &= (2)(-2)(5) + (-2)(-1)(5) + (-C + D)(-1)(-2) \\ 2 &= -C + D. \end{aligned}$$

Si $x = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (2)(1)(8) + (-2)(2)(8) + (2C + D)(2)(1) \\ 8 &= 2C + D. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema lineal sustrayendo la primera ecuación de la segunda

$$\begin{aligned} -C + D &= 2 \\ 2C + D &= 8 \end{aligned}$$

da $C = 2$. Por consiguiente, $D = 4$, y sigue que

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x - 1)(x^2 + 4)}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x - 1} + \frac{2x}{x^2 + 4} + \frac{4}{x^2 + 4}\right) dx \\ &= 2\ln|x| - 2\ln|x - 1| + \ln(x^2 + 4) + 2\arctan\frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

En los ejemplos 1, 2 y 3 la solución de la ecuación básica empezó con la sustitución de valores de x haciendo que factores lineales fueran igual a 0. Este método funciona bien cuando la descomposición de fracciones parciales contiene los factores lineales. Sin embargo, si la descomposición contiene sólo factores cuadráticos, es a menudo más conveniente un procedimiento alternativo.

EJEMPLO 4 Factores cuadráticos repetidos

Encontrar $\displaystyle\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}\, dx.$

Solución Incluyen una fracción parcial para cada potencia de $(x^2 + 2)$ y escribir

$$\frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $(x^2 + 2)^2$ da la *ecuación básica*.

$$8x^3 + 13x = (Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D.$$

Desarrollando la ecuación básica y agrupando como términos semejantes produce

$$8x^3 + 13x = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D$$
$$8x^3 + 13x = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D).$$

Ahora, igualar los coeficientes de términos semejantes en ambos lados de la ecuación.

$8 = A$ $\quad$ $0 = 2B + D$

$$8x^3 + 0x^2 + 13x + 0 = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D)$$

$0 = B$

$13 = 2A + C$

Usando los valores conocidos $A = 8$ y $B = 0$, escribir

$$13 = 2A + C = 2(8) + C \quad \Rightarrow \quad C = -3$$
$$0 = 2B + D = 2(0) + D \quad \Rightarrow \quad D = 0.$$

Por último, concluir que

$$\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}\, dx = \int \left(\frac{8x}{x^2 + 2} + \frac{-3x}{(x^2 + 2)^2}\right) dx$$
$$= 4 \ln(x^2 + 2) + \frac{3}{2(x^2 + 2)} + C.$$

TECNOLOGÍA Usando un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral en el ejemplo 4 podría encontrarse que la forma de la antiderivada es diferente. Por ejemplo, cuando se usa un sistema algebraico por computadora para trabajar el ejemplo 4, se obtiene

$$\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}\, dx = \ln(x^8 + 8x^6 + 24x^4 + 32x^2 + 16) + \frac{3}{2(x^2 + 2)} + C.$$

¿Este resultado es equivalente al obtenido en el ejemplo 4?

Cuando se integren expresiones racionales, tener presente que para las expresiones racionales impropias como

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2x^3 + x^2 - 7x + 7}{x^2 + x - 2}$$

primero dividir para obtener

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 2x - 1 + \frac{-2x + 5}{x^2 + x - 2}.$$

La expresión racional propia se descompone entonces en sus fracciones parciales por los métodos usuales. Aquí están algunas estrategias para resolver la ecuación básica que se obtiene en una descomposición de fracciones parciales.

Estrategias para resolver la ecuación básica

Factores lineales

1. Sustituir en la ecuación básica las raíces de los distintos factores lineales.
2. Para factores lineales repetidos, usar los coeficientes lineales determinados en la estrategia 1 para reescribir la ecuación básica. Entonces sustituir otros valores convenientes de x y resolver para los coeficientes restantes.

Factores cuadráticos

1. Desarrollar la ecuación básica.
2. Agrupar términos atendiendo a las potencias de x.
3. Igualar los coeficientes de cada potencia para obtener un sistema de ecuaciones lineales conteniendo A, B, C, etcétera.
4. Resolver el sistema de ecuaciones lineales.

Antes de concluir se debe recordar lo siguiente. Primero, no es necesario usar siempre la técnica de las fracciones parciales en las funciones racionales. Por ejemplo, la integral siguiente se evalúa más fácil por la regla log.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x - 4}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x - 4}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\ln\left|x^3 + 3x - 4\right| + C\end{aligned}$$

Segundo, si el integrando no está en la forma reducida, reduciéndolo se puede eliminar la necesidad de las fracciones parciales, como se muestra en la integral siguiente.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x - 4}\,dx &= \int \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 2)}\,dx \\ &= \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 2x + 2\right| + C\end{aligned}$$

Por último, pueden usarse las fracciones parciales con algunos cocientes que contienen funciones trascendentes. Por ejemplo, la sustitución $u = \operatorname{sen} x$ permite escribir

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 1)}\,dx = \int \frac{du}{u(u - 1)}. \qquad u = \operatorname{sen} x,\ du = \cos x\,dx.$$

8.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, escribir la forma de la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. No resolver sus coeficientes.

1. $\dfrac{4}{x^2 - 8x}$
2. $\dfrac{2x^2 + 1}{(x - 3)^3}$
3. $\dfrac{2x - 3}{x^3 + 10x}$
4. $\dfrac{x - 4}{x^2 + 6x + 5}$
5. $\dfrac{x - 9}{x^2 - 6x}$
6. $\dfrac{2x - 1}{x(x^2 + 1)^2}$

En los ejercicios 7 a 28, usar las fracciones parciales para encontrar la integral.

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 9}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2 - 1}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{5}{x^2 + 3x - 4}\,dx$
10. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{x^2 + 11x + 18}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{5 - x}{2x^2 + x - 1}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 12x - 12}{x^3 - 4x}\,dx$
13. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 12x + 12}{x^3 - 4x}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{x^3 - x + 3}{x^2 + x - 2}\,dx$
15. $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}\,dx$
16. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{x^2 - 4x}\,dx$
17. $\displaystyle\int \frac{4x^2 + 2x - 1}{x^3 + x^2}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{3x - 4}{(x - 1)^2}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^3 + x^2 - x - 1}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x}\,dx$
22. $\displaystyle\int \frac{6x}{x^3 - 8}\,dx$
23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4 - 2x^2 - 8}\,dx$
24. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2}\,dx$
25. $\displaystyle\int \frac{x}{16x^4 - 1}\,dx$
26. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 4x + 7}{x^3 - x^2 + x + 3}\,dx$
27. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 5}{x^3 - x^2 + x + 3}\,dx$
28. $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 3}{x^4 + 6x^2 + 9}\,dx$

En los ejercicios 29 a 32, evaluar la integral definida. Usar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

29. $\displaystyle\int_0^2 \frac{3}{4x^2 + 5x + 1}\,dx$
30. $\displaystyle\int_1^5 \frac{x - 1}{x^2(x + 1)}\,dx$
31. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x + 1}{x(x^2 + 1)}\,dx$
32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1}\,dx$

CAS **En los ejercicios 33 a 40, usar un sistema algebraico por computadora para determinar la primitiva que atraviesa el punto dado. Usar el sistema para hacer la gráfica de la antiderivada resultante.**

33. $\displaystyle\int \frac{5x}{x^2 - 10x + 25}\,dx,\ (6, 0)$
34. $\displaystyle\int \frac{6x^2 + 1}{x^2(x - 1)^3}\,dx,\quad (2, 1)$
35. $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 2}{(x^2 + 2)^2}\,dx,\quad (0, 1)$
36. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2 - 4)^2}\,dx,\quad (3, 4)$
37. $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x - 2}\,dx,\quad (3, 10)$
38. $\displaystyle\int \frac{x(2x - 9)}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\,dx,\quad (3, 2)$
39. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 25}\,dx,\quad (7, 2)$
40. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx,\quad (2, 6)$

En los ejercicios 41 a 50, usar una sustitución adecuada para encontrar la integral.

41. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(\cos x - 1)}\,dx$
42. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x}\,dx$
43. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}\,dx$
44. $\displaystyle\int \frac{5\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 4}\,dx$
45. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6}\,dx$
46. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan x(\tan x + 1)}\,dx$
47. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x - 1)(e^x + 4)}\,dx$
48. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)(e^x - 1)}\,dx$
49. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x - 4}\,dx$
50. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\,dx$

En los ejercicios 51 a 54, usar el método de fracciones parciales para verificar la fórmula de la integración.

51. $\displaystyle\int \frac{1}{x(a + bx)}\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a + bx}\right| + C$
52. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$
53. $\displaystyle\int \frac{x}{(a + bx)^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a + bx} + \ln|a + bx|\right) + C$
54. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(a + bx)}\,dx = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{x}{a + bx}\right| + C$

CAS *Campos de pendientes* **En los ejercicios 55 y 56, usar un sistema algebraico por computadora para hacer la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y hacer la gráfica de la solución a través de la condición inicial dada.**

55. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6}{4 - x^2}$

$y(0) = 3$

56. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{x^2 - 2x - 3}$

$y(0) = 5$

Desarrollo de conceptos

57. ¿Cuál es el primer paso cuando se integra $\displaystyle\int \frac{x^3}{x - 5}\,dx$? Explicar.
58. Describir la descomposición de la función racional propia $N(x)/D(x)$ *a)* si $D(x) = (px + q)^m$ y *b)* si $D(x) = (ax^2 + bx + c)^n$, donde $ax^2 + bx + c$ es irreducible. Explicar por qué se eligió ese método.

59. ***Área*** Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $y = 12/(x^2 + 5x + 6)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

60. ***Área*** Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $y = 15/(x^2 + 7x + 12)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2$.

61. ***Área*** Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $y = 7\,(16 - x^2)$ y $y = 1$.

Para discusión

62. Indicar el método que se utilizaría para evaluar cada integral. Explicar por qué se escogió tal método. No efectuar la integración.

a) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 8}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{7x + 4}{x^2 + 2x - 8}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2 + 2x + 5}\,dx$

63. ***Modelo matemático*** El costo previsto de una compañía C (en cientos de miles de dólares) para quitar $p\%$ de un químico de su agua residual se muestra en la tabla.

p	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
C	0	0.7	1.0	1.3	1.7	2.0	2.7	3.6	5.5	11.2

Un modelo para los datos está dado por

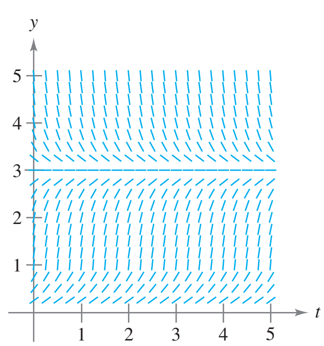
$$C = \frac{124p}{(10 + p)(100 - p)}, \quad 0 \leq p < 100.$$

Usar el modelo para encontrar el costo medio para quitar entre 75 y 80% del químico.

64. ***Crecimiento logístico*** En el capítulo 6, la ecuación de crecimiento exponencial se derivó de la suposición de que la proporción de crecimiento era proporcional a la cantidad existente. En la práctica, a menudo existe una cota superior L por la cual el crecimiento no puede ocurrir. En la práctica, se debe asumir que la proporción de crecimiento no sólo es proporcional a la cantidad existente, sino también a la diferencia entre la cantidad existente y y la cota superior L. Que es, $dy/dt = ky(L - y)$. En la forma integral, escribir esta relación como

$$\int \frac{dy}{y(L - y)} = \int k\,dt.$$

a) Se muestra un campo de pendientes para $dy/dt = y(3 - y)$ de la ecuación diferencial. Dibujar una posible solución a la ecuación diferencial si $y(0) = 5$, y otro si $y(0) = \frac{1}{2}$.



b) Donde $y(0)$ es mayor que 3, ¿cuál es el signo de la pendiente de la solución?

c) Para $y > 0$, encontrar $\displaystyle\lim_{t\to\infty} y(t)$.

d) Evaluar las dos integrales dadas y resolver para y como una función de t donde y_0 es la cantidad inicial.

e) Usar el resultado del inciso *d)* para encontrar y hacer la gráfica de las soluciones en el apartado *a)*. Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de las soluciones y comparar los resultados con las soluciones en el inciso *a)*.

f) La gráfica de la función y es una **curva logística**. Mostrar que la proporción de crecimiento es máxima en el punto de inflexión y que esto ocurre cuando $y = L/2$.

65. ***Volumen y centroide*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = 2x/(x^2 + 1)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$. Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x. Encontrar el centroide de la región.

66. ***Volumen*** Considerar la región acotada por la gráfica de $y^2 = (2 - x)^2/(1 + x)^2$ en el intervalo $[0, 1]$. Encontrar el volumen del sólido generado al girar esta región alrededor del eje x.

67. ***Modelo de epidemias*** Un solo individuo infectado entra en una comunidad de n individuos susceptibles. Sea x el número de individuos recientemente infectados en el momento t. El modelo de epidemias común asume que la enfermedad se extiende a un ritmo proporcional al producto del número total infectado y al número no infectado todavía. Así, $dx/dt = k(x + 1)(n - x)$ y se obtiene

$$\int \frac{1}{(x + 1)(n - x)}\,dx = \int k\,dt.$$

Resolver para x como una función de t.

68. ***Reacciones químicas*** En una reacción química, una unidad de compuesto Y y una unidad de compuesto Z se convierte en una sola unidad de X. El compuesto x es la cantidad de compuesto X formada, y la proporción de formación de X es proporcional al producto de las cantidades de compuestos no convertidos Y y Z. Entonces, $dx/dt = k(y_0 - x)(z_0 - x)$, donde el y_0 y z_0 son las cantidades iniciales de compuestos Y y Z. De esta ecuación se obtiene

$$\int \frac{1}{(y_0 - x)(z_0 - x)}\,dx = \int k\,dt.$$

a) Realizar las dos integraciones y resolver para x en términos de t.

b) Usar el resultado del inciso *a)* para encontrar x como $t \to \infty$ si 1) $y_0 < z_0$, 2) $y_0 > z_0$ y 3) $y_0 = z_0$.

69. Evaluar

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + x^4}\,dx$$

de dos maneras diferentes, una de las cuales por descomposición en fracciones parciales.

Preparación del examen Putnam

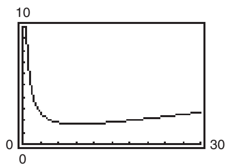
70. Demostrar $\displaystyle\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{x^4(1 - x)^4}{1 + x^2}\,dx.$

17. *a*)

v	20	40	60	80	100
s	5.56	11.11	16.67	22.22	27.78
d	5.1	13.7	27.2	44.2	66.4

$d(s) = 0.071s^2 + 0.389s + 0.727$

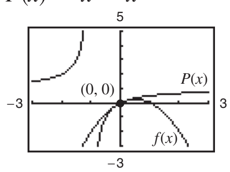
b) La distancia entre la parte posterior del primer vehículo y la parte delantera del segundo es $d(s)$, la distancia de frenado segura. El primer vehículo pasa por el punto dado en $5.5/s$ segundos, y el segundo necesita $d(s)/s$ segundos más. Por tanto, $T = d(s)/s + 5.5/s$.

c) 

$s \approx 9.365$ m/s

d) $s \approx 9.365$ m/s; 1.719 s; 33.714 km/h *e*) 10.597 m

19. *a*) $P(x) = x - x^2$

b) 

Capítulo 4

Sección 4.1 (página 255)

1 a 3. Demostraciones **5.** $y = 3t^3 + C$ **7.** $y = \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
9.	$\int \sqrt[3]{x}\,dx$	$\int x^{1/3}\,dx$	$\frac{x^{4/3}}{4/3} + C$	$\frac{3}{4}x^{4/3} + C$
11.	$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$	$\int x^{-3/2}\,dx$	$\frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C$	$-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$
13.	$\int \frac{1}{2x^3}\,dx$	$\frac{1}{2}\int x^{-3}\,dx$	$\frac{1}{2}\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + C$	$-\frac{1}{4x^2} + C$

15. $\frac{1}{2}x^2 + 7x + C$ **17.** $x^2 - x^3 + C$ **19.** $\frac{1}{6}x^6 + x + C$

21. $\frac{2}{5}x^{5/2} + x^2 + x + C$ **23.** $\frac{3}{5}x^{5/3} + C$ **25.** $-1/(4x^4) + C$

27. $\frac{2}{3}x^{3/2} + 12x^{1/2} + C = \frac{2}{3}x^{1/2}(x + 18) + C$

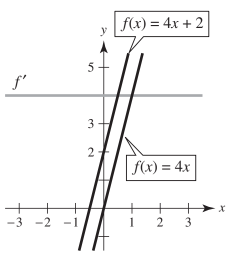
29. $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

31. $\frac{2}{7}y^{7/2} + C$ **33.** $x + C$ **35.** $5 \operatorname{sen} x - 4 \cos x + C$

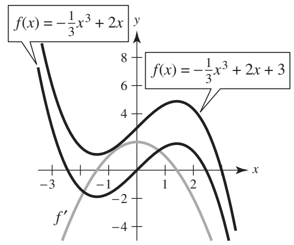
37. $t + \csc t + C$ **39.** $\tan\theta + \cos\theta + C$ **41.** $\tan y + C$

43. $-\csc x + C$

45. Las respuestas varían. Ejemplo:

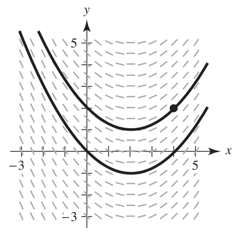


47. Las respuestas varían. Ejemplo:

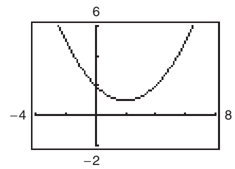


49. $y = x^2 - x + 1$

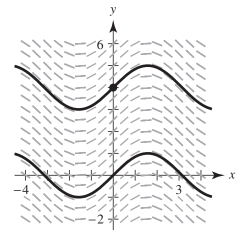
51. *a*) Las respuestas varían. Ejemplo:



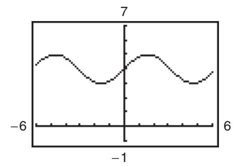
b) $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$



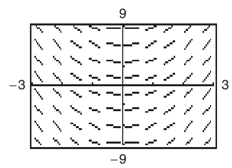
53. *a*) Las respuestas varían. Ejemplo:



b) $y = \operatorname{sen} x + 4$

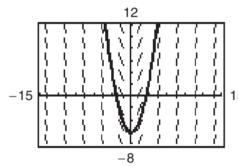


55. *a*)



b) $y = x^2 - 6$

c)



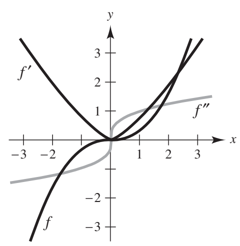
57. $f(x) = 3x^2 + 8$ **59.** $h(t) = 2t^4 + 5t - 11$

61. $f(x) = x^2 + x + 4$ **63.** $f(x) = -4\sqrt{x} + 3x$

65. *a*) $h(t) = \frac{3}{4}t^2 + 5t + 12$ *b*) 69 cm

67. Cuando se evalúa la integral $\int f(x)\,dx$, se encuentra una función $F(x)$ que es una antiderivada de $f(x)$. Por tanto no existe diferencia.

69.



71. 62.25 pies **73.** $v_0 \approx 187.617$ pies/s

75. $v(t) = -9.8t + C_1 = -9.8t + v_0$

$f(t) = -4.9t^2 + v_0t + C_2 = -4.9t^2 + v_0t + s_0$

77. 7.1 m **79.** 320 m; -32 m/s

81. *a*) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$; $a(t) = 6t - 12$

b) (0, 1), (3, 5) *c*) -3

83. $a(t) = -1/(2t^{3/2})$; $x(t) = 2\sqrt{t} + 2$

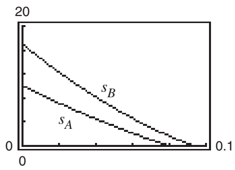
85. *a*) 1.18 m/s² *b*) 190 m

87. *a*) 300 pies *b*) 60 pies/s ≈ 41 mi/h

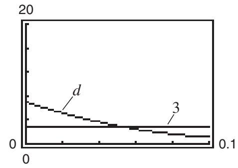
89. *a*) Aeroplano A: $s_A = \frac{625}{2}t^2 - 150t + 10$

Aeroplano B: $s_B = \frac{49\,275}{68}t^2 - 250t + 17$

b)



c) $d = \dfrac{28\,025}{68}t^2 - 100t + 7$

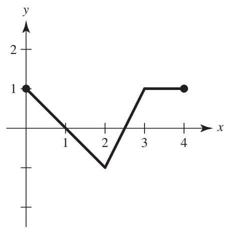


Sí, $d < 3$ para $t > 0.0505$ h

91. Verdadero **93.** Verdadero

95. Falso. f tiene un número infinito de antiderivadas, cada una de ellas difieren por una constante.

97.



99. Demostración

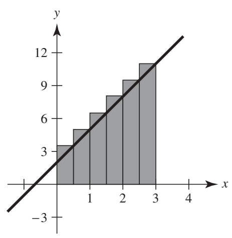
Sección 4.2 (página 267)

1. 75 **3.** $\dfrac{158}{85}$ **5.** $4c$ **7.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{11} \frac{1}{5i}$ **9.** $\displaystyle\sum_{j=1}^{6} \left[7\left(\frac{j}{6}\right) + 5\right]$

11. $\displaystyle\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3 - \left(\frac{2i}{n}\right)\right]$ **13.** $\displaystyle\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[2\left(1 + \frac{3i}{n}\right)^2\right]$ **15.** 84

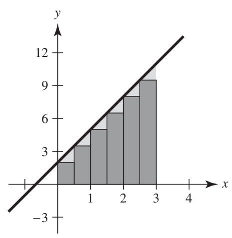
17. 1 200 **19.** 2 470 **21.** 12 040 **23.** 2 930

25. *a)*



Área $\approx$ 21.75

b)



Área $\approx$ 17.25

27. $13 <$ (área de región) < 15

29. $55 <$ (área de región) < 74.5

31. $0.7908 <$ (área de región) < 1.1835

33. El área de la región sombreada cae entre 12.5 y 16.5 unidades cuadradas.

35. El área de la región sombreada cae entre 7 y 11 unidades cuadradas.

37. $\frac{81}{4}$ **39.** 9 **41.** $A \approx S \approx 0.768$, $A \approx s \approx 0.518$ **43.** $A \approx S \approx 0.746$, $A \approx s \approx 0.646$

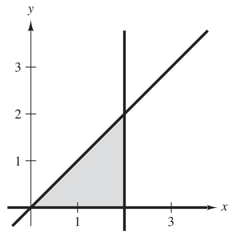
45. $(n + 2)/n$
$n = 10$: $S = 1.2$
$n = 100$: $S = 1.02$
$n = 1\,000$: $S = 1.002$
$n = 10\,000$: $S = 1.0002$

47. $[2(n + 1)(n - 1)]/n^2$
$n = 10$: $S = 1.98$
$n = 100$: $S = 1.9998$
$n = 1\,000$: $S = 1.999998$
$n = 10\,000$: $S = 1.99999998$

49. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{12(n + 1)}{n}\right] = 12$ **51.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3}\right) = \frac{1}{3}$

53. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}[(3n + 1)/n] = 3$

55. *a)*



b) $\Delta x = (2 - 0)/n = 2/n$

c) $\displaystyle s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n}[(i - 1)(2/n)](2/n)$

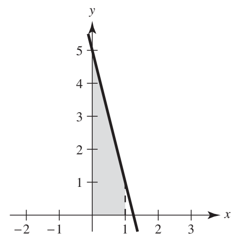
d) $\displaystyle S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n}[i(2/n)](2/n)$

e)

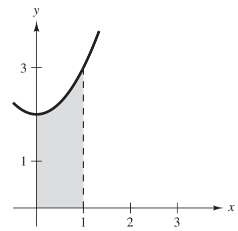
n	5	10	50	100
$s(n)$	1.6	1.8	1.96	1.98
$S(n)$	2.4	2.2	2.04	2.02

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[(i - 1)(2/n)](2/n) = 2$; $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[i(2/n)](2/n) = 2$

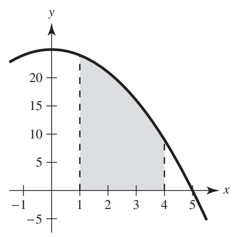
57. $A = 3$



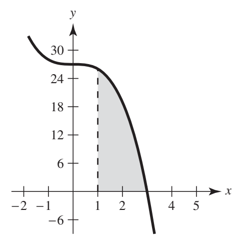
59. $A = \frac{7}{3}$



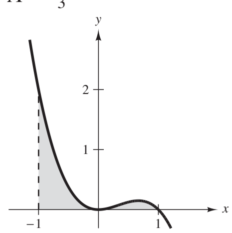
61. $A = 54$



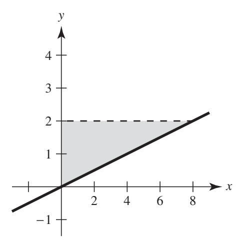
63. $A = 34$



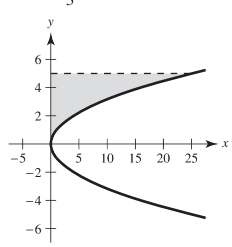
65. $A = \frac{2}{3}$



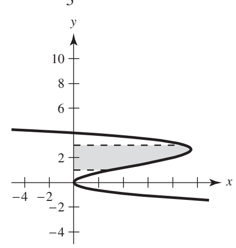
67. $A = 8$



69. $A = \frac{125}{3}$



71. $A = \frac{44}{3}$



73. $\frac{69}{8}$ **75.** 0.345

77.

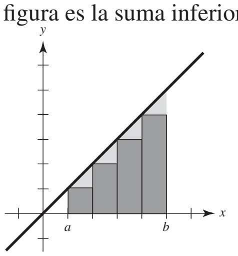
n	4	8	12	16	20
Área aproximada	5.3838	5.3523	5.3439	5.3403	5.3384

79.

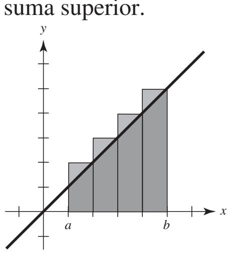
n	4	8	12	16	20
Área aproximada	2.2223	2.2387	2.2418	2.2430	2.2435

81. *b*

83. Se puede utilizar la recta $y = x$ acotada por $x = a$ y $x = b$. La suma de las áreas de los rectángulos inscritos en la siguiente figura es la suma inferior.

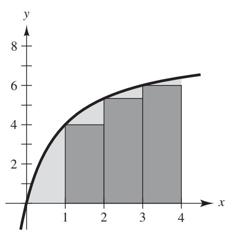


La suma de las áreas de los rectángulos circunscritos en la siguiente figura es la suma superior.



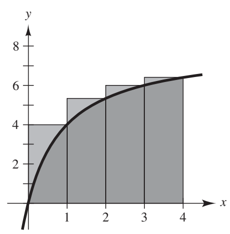
Los rectángulos de la primera gráfica no incluyen totalmente el área de la región, mientras que los rectángulos de la segunda gráfica abarcan un área mayor a la de la región. El valor exacto del área se encuentra entre estas dos sumas.

85. *a*)



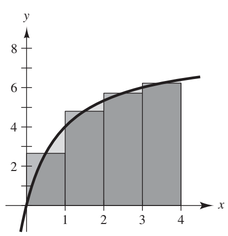
$s(4) = \frac{46}{3}$

b)



$S(4) = \frac{326}{15}$

c)



$M(4) = \frac{6\,112}{315}$

d) Demostración

e)

n	4	8	20	100	200
$s(n)$	15.333	17.368	18.459	18.995	19.060
$S(n)$	21.733	20.568	19.739	19.251	19.188
$M(n)$	19.403	19.201	19.137	19.125	19.125

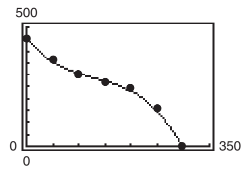
f) Como f es una función creciente, $s(n)$ es siempre creciente y $S(n)$ es siempre decreciente.

87. Verdadero

89. Supóngase que la figura tiene n filas y $n + 1$ columnas. Las estrellas de la izquierda suman $1 + 2 + \cdots + n$, al igual que las estrellas de la derecha. Hay $n(n + 1)$ estrellas en total. Por tanto $2[1 + 2 + \cdots + n] = n(n + 1)$ de manera que $1 + 2 + \cdots + n = [n(n + 1)]/2$.

91. *a*) $y = (-4.09 \times 10^{-5})x^3 + 0.016x^2 - 2.67x + 452.9$

b)



c) 76 897.5 pies^2

93. Demostración

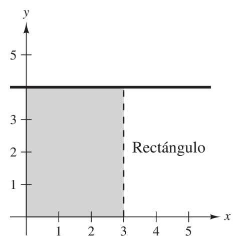
Sección 4.3 (página 278)

1. $2\sqrt{3} \approx 3.464$ **3.** 32 **5.** 0 **7.** $\frac{10}{3}$ **9.** $\int_{-1}^{5} (3x + 10)\,dx$

11. $\int_0^3 \sqrt{x^2 + 4}\,dx$ **13.** $\int_0^4 5\,dx$ **15.** $\int_{-4}^{4} (4 - |x|)\,dx$

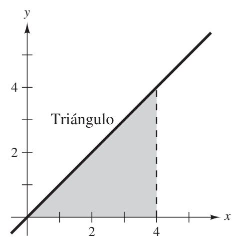
17. $\int_{-5}^{5} (25 - x^2)\,dx$ **19.** $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ **21.** $\int_0^2 y^3\,dy$

23.



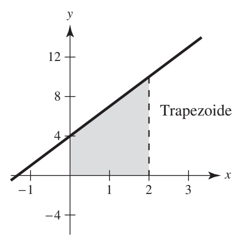
$A = 12$

25.



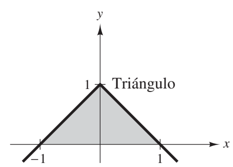
$A = 8$

27.



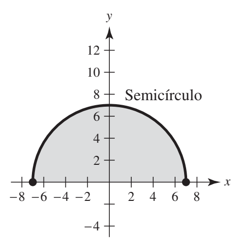
$A = 14$

29.



$A = 1$

31.



$A = 49\pi/2$

33. -6 **35.** 48 **37.** -12

39. 16 **41.** *a*) 13 *b*) -10 *c*) 0 *d*) 30

43. *a*) 8 *b*) -12 *c*) -4 *d*) 30 **45.** $-48, 88$

47. *a*) $-\pi$ *b*) 4 *c*) $-(1 + 2\pi)$ *d*) $3 - 2\pi$ *e*) $5 + 2\pi$ *f*) $23 - 2\pi$

49. *a*) 14 *b*) 4 *c*) 8 *d*) 0 **51.** 81

53. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x > \int_1^5 f(x)\,dx$

55. No. Hay una discontinuidad en $x = 4$. **57.** *a* **59.** *d*

61.

n	4	8	12	16	20
$L(n)$	3.6830	3.9956	4.0707	4.1016	4.1177
$M(n)$	4.3082	4.2076	4.1838	4.1740	4.1690
$R(n)$	3.6830	3.9956	4.0707	4.1016	4.1177

63.

n	4	8	12	16	20
$L(n)$	0.5890	0.6872	0.7199	0.7363	0.7461
$M(n)$	0.7854	0.7854	0.7854	0.7854	0.7854
$R(n)$	0.9817	0.8836	0.8508	0.8345	0.8247

65. Verdadero **67.** Verdadero

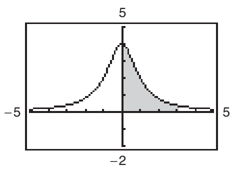
69. Falso: $\int_0^2 (-x)\,dx = -2$ **71.** 272 **73.** Demostración

75. No. No importa lo pequeño que sean los intervalos, la cantidad de números racionales e irracionales en cada intervalo es infinita y $f(c_i) = 0$ o $f(c_i) = 1$.

77. $a = -1$ y $b = 1$ maximizan la integral. **79.** $\frac{1}{3}$

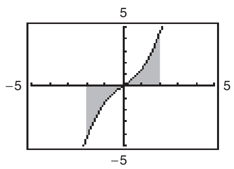
Sección 4.4 (página 293)

1.



Positiva

3.



Cero

5. 12 **7.** -2 **9.** $-\frac{10}{3}$ **11.** $\frac{1}{3}$ **13.** $\frac{1}{2}$ **15.** $\frac{2}{3}$ **17.** -4

19. $-\frac{1}{18}$ **21.** $-\frac{27}{20}$ **23.** $\frac{25}{2}$ **25.** $\frac{64}{3}$ **27.** $\pi + 2$

29. $\pi/4$ **31.** $2\sqrt{3}/3$ **33.** 0 **35.** $\frac{1}{6}$ **37.** 1 **39.** $\frac{52}{3}$

41. 20 **43.** $\frac{32}{3}$ **45.** $3\sqrt[3]{2}/2 \approx 1.8899$

47. $\frac{1\,444}{225} \approx 6.4178$ **49.** $\pm\arccos\sqrt{\pi}/2 \approx \pm 0.4817$

51. Valor promedio $= 6$
$x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.7321$

53. Valor promedio $= \frac{1}{4}$
$x = \sqrt[3]{2}/2 \approx 0.6300$

55. Valor promedio $= 2/\pi$
$x \approx 0.690,\ x \approx 2.451$

57. ≈ 540 pies

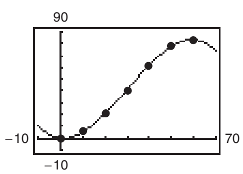
59. *a)* 8 *b)* $\frac{4}{3}$ *c)* $\int_1^7 f(x)\,dx = 20$; valor promedio $= \frac{10}{3}$

61. *a)* $F(x) = 500\,s^2 x$ *b)* $1\,500\sqrt{3}/\pi \approx 827$ N

63. ≈ 0.5318 L

65. *a)* $v = -0.00086t^3 + 0.0782t^2 - 0.208t + 0.10$

b)



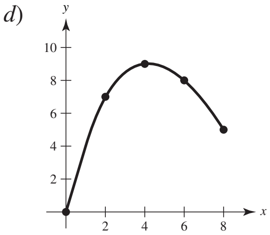
c) 2 475.6 m

67. $F(x) = 2x^2 - 7x$
$F(2) = -6$
$F(5) = 15$
$F(8) = 72$

69. $F(x) = -20/x + 20$
$F(2) = 10$
$F(5) = 16$
$F(8) = \frac{35}{2}$

71. $F(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 1$
$F(2) = \operatorname{sen} 2 - \operatorname{sen} 1 \approx 0.0678$
$F(5) = \operatorname{sen} 5 - \operatorname{sen} 1 \approx -1.8004$
$F(8) = \operatorname{sen} 8 - \operatorname{sen} 1 \approx 0.1479$

73. *a)* $g(0) = 0,\ g(2) \approx 7,\ g(4) \approx 9,\ g(6) \approx 8,\ g(8) \approx 5$
b) Creciente: $(0, 4)$; decreciente: $(4, 8)$
c) Se presenta un máximo en $x = 4$.
d)

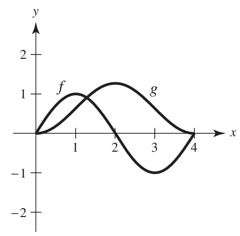


75. $\frac{1}{2}x^2 + 2x$ **77.** $\frac{3}{4}x^{4/3} - 12$ **79.** $\tan x - 1$

81. $x^2 - 2x$ **83.** $\sqrt{x^4 + 1}$ **85.** $x \cos x$ **87.** 8

89. $\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}$ **91.** $3x^2 \operatorname{sen} x^6$

93.



Se presenta un extremo de g en $x = 2$.

95. *a)* $C(x) = 1\,000(12x^{5/4} + 125)$
b) $C(1) = \$137\,000$
$C(5) \approx \$214\,721$
$C(10) \approx \$338\,394$

97. *a)* $\frac{3}{2}$ pies a la derecha *b)* $\frac{113}{10}$ pies **99.** *a)* 0 pies *b)* $\frac{63}{2}$ pies

101. *a)* 2 pies a la derecha *b)* 2 pies **103.** 28 unidades **105.** 8 190 L

107. $f(x) = x^{-2}$ tiene una discontinuidad no removible en $x = 0$.

109. $f(x) = s^2 x$ tiene una discontinuidad no removible en $x = \pi/2$.

111. $2/\pi \approx 63.7\%$ **113.** Verdadero

115. $f'(x) = \dfrac{1}{(1/x)^2 + 1}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$

Debido a que $f'(x) = 0$, $f(x)$ es constante.

117. *a)* 0 *b)* 0 *c)* $xf(x) + \int_0^x f(t)\,dt$ *d)* 0

Sección 4.5 (página 306)

	$\int f(g(x))g'(x)\,dx$	$u = g(x)$	$du = g'(x)\,dx$
1.	$\int (8x^2 + 1)^2(16x)\,dx$	$8x^2 + 1$	$16x\,dx$
3.	$\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$	$x^2 + 1$	$2x\,dx$
5.	$\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx$	$\tan x$	$\sec^2 x\,dx$

7. No **9.** Sí **11.** $\frac{1}{5}(1 + 6x)^5 + C$

13. $\frac{2}{3}(25 - x^2)^{3/2} + C$ **15.** $\frac{1}{12}(x^4 + 3)^3 + C$

17. $\frac{1}{15}(x^3 - 1)^5 + C$ **19.** $\frac{1}{3}(t^2 + 2)^{3/2} + C$

21. $-\frac{15}{8}(1 - x^2)^{4/3} + C$ **23.** $1/[4(1 - x^2)^2] + C$

25. $-1/[3(1 + x^3)] + C$ **27.** $-\sqrt{1 - x^2} + C$

29. $-\frac{1}{4}(1 + 1/t)^4 + C$ **31.** $\sqrt{2x} + C$

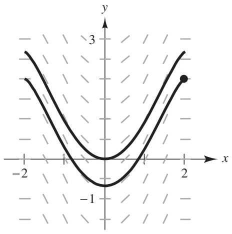
33. $\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{10}{3}x^{3/2} - 16x^{1/2} + C = \frac{1}{15}\sqrt{x}(6x^2 + 50x - 240) + C$

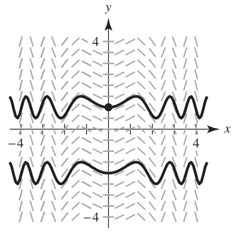
35. $\frac{1}{4}t^4 - 4t^2 + C$

37. $6y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} + C = \frac{2}{5}y^{3/2}(15 - y) + C$

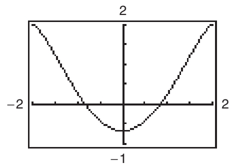
39. $2x^2 - 4\sqrt{16 - x^2} + C$ **41.** $-1/[2(x^2 + 2x - 3)] + C$

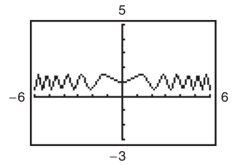
43. *a*) Las respuestas varían. Ejemplo: **45.** *a*) Las respuestas varían. Ejemplo:





b) $y = -\frac{1}{3}(4 - x^2)^{3/2} + 2$ *b*) $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + 1$





47. $-\cos(\pi x) + C$ **49.** $-\frac{1}{4}\cos 4x + C$ **51.** $-\operatorname{sen}(1/\theta) + C$

53. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x + C$ o $-\frac{1}{4}\cos^2 2x + C_1$ o $-\frac{1}{8}\cos 4x + C_2$

55. $\frac{1}{5}\tan^5 x + C$ **57.** $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$ o $\frac{1}{2}\sec^2 x + C_1$

59. $-\cot x - x + C$ **61.** $f(x) = 2\cos(x/2) + 4$

63. $f(x) = -\frac{1}{2}\cos 4x - 1$ **65.** $f(x) = \frac{1}{12}(4x^2 - 10)^3 - 8$

67. $\frac{2}{5}(x + 6)^{5/2} - 4(x + 6)^{3/2} + C = \frac{2}{5}(x + 6)^{3/2}(x - 4) + C$

69. $-\left[\frac{2}{3}(1 - x)^{3/2} - \frac{4}{5}(1 - x)^{5/2} + \frac{2}{7}(1 - x)^{7/2}\right] + C =$
$-\frac{2}{105}(1 - x)^{3/2}(15x^2 + 12x + 8) + C$

71. $\frac{1}{8}\left[\frac{2}{5}(2x - 1)^{5/2} + \frac{4}{3}(2x - 1)^{3/2} - 6(2x - 1)^{1/2}\right] + C =$
$\left(\sqrt{2x - 1}/15\right)(3x^2 + 2x - 13) + C$

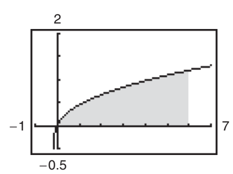
73. $-x - 1 - 2\sqrt{x + 1} + C$ o $-\left(x + 2\sqrt{x + 1}\right) + C_1$

75. 0 **77.** $12 - \frac{8}{9}\sqrt{2}$ **79.** 2 **81.** $\frac{1}{2}$ **83.** $\frac{4}{15}$ **85.** $3\sqrt{3}/4$

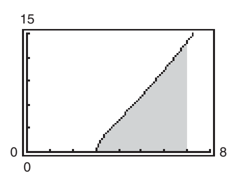
87. $f(x) = (2x^3 + 1)^3 + 3$ **89.** $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} - 3$

91. 1 209/28 **93.** 4 **95.** $2\left(\sqrt{3} - 1\right)$

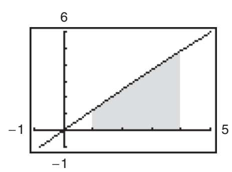
97. $\frac{14}{3}$



99. $\frac{144}{5}$



101. 9.21



103. $\frac{272}{15}$ **105.** $\frac{2}{3}$ **107.** *a*) $\frac{64}{3}$ *b*) $\frac{128}{3}$ *c*) $-\frac{64}{3}$ *d*) 64

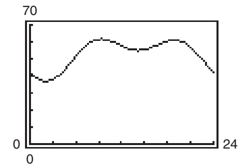
109. $2\int_0^3 (4x^2 - 6)\,dx = 36$

111. Si $u = 5 - x^2$, entonces $du = -2x\,dx$ y
$\int x(5 - x^2)^3\,dx = -\frac{1}{2}\int(5 - x^2)^3(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int u^3\,du.$

113. 16 **115.** \$250 000

117. *a*) Mínimo relativo: (6.7, 0.7) o julio
Mínimo relativo: (1.3, 5.1) o febrero
b) 36.68 pulg *c*) 3.99 pulg

119. *a*)



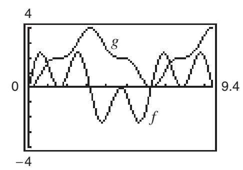
Flujo máximo:
$R \approx 61.713$ en $t = 9.36$.

b) 1 272 miles de galones

121. *a*) $P_{0.50,\,0.75} \approx 35.3\%$ *b*) $b \approx 58.6\%$

123. *a*) \$9.17 *b*) \$3.14

125. *a*)

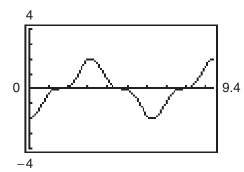


b) g es no negativa porque la gráfica de f es positiva al principio, y por lo general tiene más secciones positivas que negativas.

c) Los puntos de g que corresponden a extremos de f son puntos de inflexión de g.

d) No, algunos ceros de f como $x = \pi/2$, no corresponden a extremos de g. La gráfica de g sigue creciendo después de que $x = \pi/2$ porque f sigue estando por arriba del eje x.

e)



La gráfica de h es la de g trasladada dos unidades hacia abajo.

127. *a*) Demostración *b*) Demostración

129. Falso. $\int (2x + 1)^2\,dx = \frac{1}{6}(2x + 1)^3 + C$

131. Verdadero **133.** Verdadero **135 a 137.** Demostraciones

139. Problema Putnam A1, 1958

Sección 4.6 (página 316)

	Trapezoidal	*De Simpson*	*Exacta*
1.	2.7500	2.6667	2.6667
3.	4.2500	4.0000	4.0000
5.	20.2222	20.0000	20.0000
7.	12.6640	12.6667	12.6667
9.	0.3352	0.3334	0.3333

	Trapezoidal	*De Simpson*	*Calculadora*
11.	3.2833	3.2396	3.2413
13.	0.3415	0.3720	0.3927
15.	0.5495	0.5483	0.5493
17.	−0.0975	−0.0977	−0.0977
19.	0.1940	0.1860	0.1858

21. Trapezoidal: Polinomios lineales (1er. grado)
De Simpson: Polinomios cuadráticos (2o. grado)

23. *a*) 1.500 *b*) 0.000 **25.** *a*) 0.01 *b*) 0.0005

27. *a*) 0.1615 *b*) 0.0066 **29.** *a*) $n = 366$ *b*) $n = 26$

31. *a*) $n = 77$ *b*) $n = 8$ **33.** *a*) $n = 287$ *b*) $n = 16$

35. *a*) $n = 130$ *b*) $n = 12$ **37.** *a*) $n = 643$ *b*) $n = 48$

39. *a*) 24.5 *b*) 25.67 **41.** Las respuestas varían.

43.

n	$L(n)$	$M(n)$	$R(n)$	$T(n)$	$S(n)$
4	0.8739	0.7960	0.6239	0.7489	0.7709
8	0.8350	0.7892	0.7100	0.7725	0.7803
10	0.8261	0.7881	0.7261	0.7761	0.7818
12	0.8200	0.7875	0.7367	0.7783	0.7826
16	0.8121	0.7867	0.7496	0.7808	0.7836
20	0.8071	0.7864	0.7571	0.7821	0.7841

45. 0.701 **47.** 17.476

49. *a*) Regla trapezoidal: 12.518; regla de Simpson: 12.592

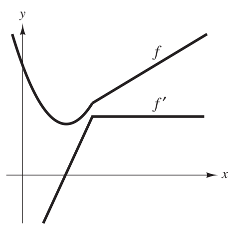
b) $y = -1.37266x^3 + 4.0092x^2 - 0.620x + 4.28$

$\int_0^2 y\,dx \approx 12.521$

51. 3.14159 **53.** 7 435 m^2 **55.** 2.477

Ejercicios de repaso para el capítulo 4 (página 318)

1.

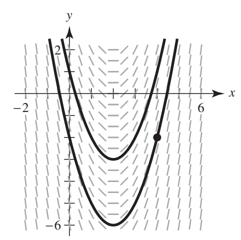


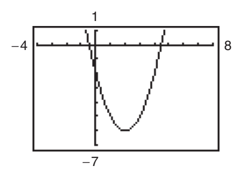
3. $\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$

5. $x^2/2 - 4/x^2 + C$ **7.** $x^2 + 9\cos x + C$

9. $y = 1 - 3x^2$

11. *a*) Las respuestas varían. Ejemplo: *b*) $y = x^2 - 4x - 2$





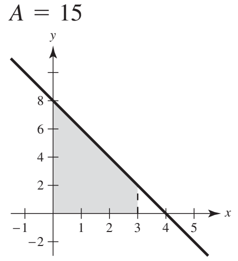
13. 240 pies/s **15.** *a*) 3 s; 144 pies *b*) $\frac{3}{2}$ s *c*) 108 pies

17. $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{3n}$ **19.** 420 **21.** 3 310

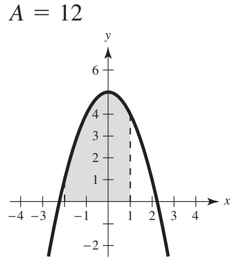
23. *a*) $\sum_{i=1}^{10} (2i - 1)$ *b*) $\sum_{i=1}^{n} i^3$ *c*) $\sum_{i=1}^{10} (4i + 2)$

25. 9.038 < (área de región) < 13.038

27. $A = 15$

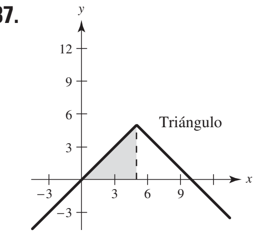


29. $A = 12$



31. $\frac{27}{2}$ **33.** $\int_4^6 (2x - 3)\,dx$ **35.** $\int_{-4}^0 (2x + 8)\,dx$

37.

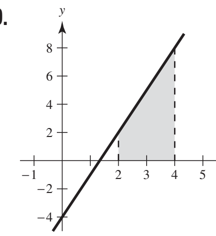


$A = \frac{25}{2}$

39. *a*) 17 *b*) 7 *c*) 9 *d*) 84

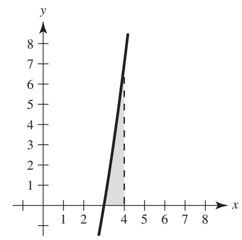
41. 56 **43.** 0 **45.** $\frac{422}{5}$ **47.** $(\sqrt{2} + 2)/2$

49.



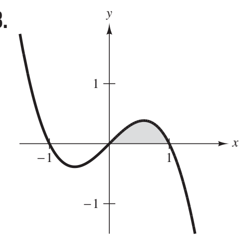
$A = 10$

51.



$A = \frac{10}{3}$

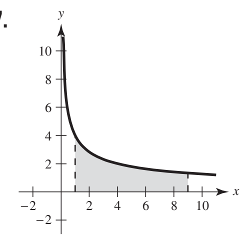
53.



$A = \frac{1}{4}$

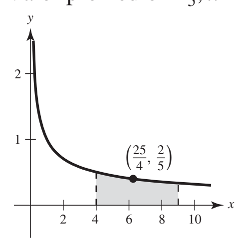
55. $-\cos 2 + 1 \approx 1.416$

57.



$A = 16$

59. Valor promedio $= \frac{2}{5}$, $x = \frac{25}{4}$



61. $x^2\sqrt{1 + x^3}$ **63.** $x^2 + 3x + 2$

65. $-\frac{1}{7}x^7 + \frac{9}{5}x^5 - 9x^3 + 27x + C$ **67.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 3} + C$

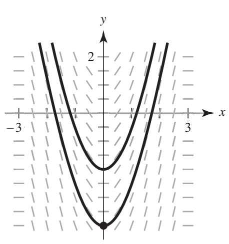
69. $-\frac{1}{30}(1 - 3x^2)^5 + C = \frac{1}{30}(3x^2 - 1)^5 + C$

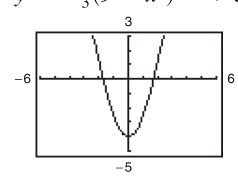
71. $\frac{1}{4}\,\text{sen}^4 x + C$ **73.** $-2\sqrt{1 - \text{sen}\,\theta} + C$

75. $\frac{1}{3\pi}(1 + \sec \pi x)^3 + C$

77. $21/4$ **79.** 2 **81.** $28\pi/15$ **83.** 2

85. *a*) Las respuestas varían. Ejemplo: *b*) $y = -\frac{1}{3}(9 - x^2)^{3/2} + 5$





87. $\frac{468}{7}$

89. *a)* $\int_0^{12} [2.880 + 2.125 \operatorname{sen}(0.578t + 0.745)]\, dt \approx 36.63$ pulg
b) 2.22 pulg

91. Regla trapezoidal: 0.285
Regla de Simpson: 0.284
Calculadora: 0.284

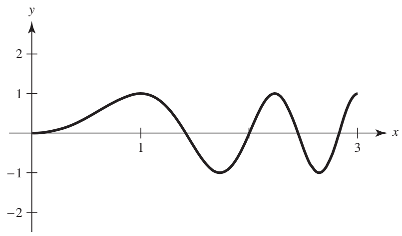
93. Regla trapezoidal: 0.637
Regla de Simpson: 0.685
Calculadora: 0.704

SP Solución de problemas (página 321)

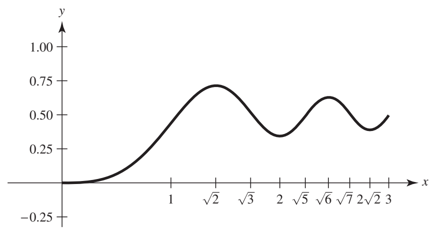
1. *a)* $L(1) = 0$ *b)* $L'(x) = 1/x,\ L'(1) = 1$
c) $x \approx 2.718$ *d)* Demostración

3. *a)* $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{32}{n^5}\sum_{i=1}^{n} i^4 - \frac{64}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{32}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$
b) $(16n^4 - 16)/(15n^4)$ *c)* $16/15$

5. *a)*

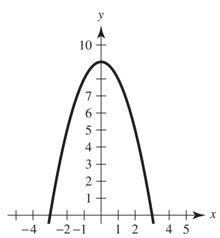


b)



c) Máximos relativos en $x = \sqrt{2}, \sqrt{6}$
Mínimos relativos en $x = 2, 2\sqrt{2}$
d) Puntos de inflexión en $x = 1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$

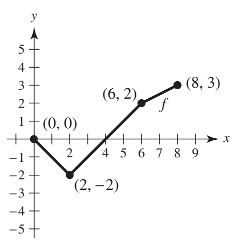
7. *a)*



Área = 36

b) Base = 6, altura = 9
Área $= \frac{2}{3}bh = \frac{2}{3}(6)(9) = 36$
c) Demostración

9. *a)*



b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{7}{2}$	-4	$-\frac{7}{2}$	-2	$\frac{1}{4}$	3

c) $x = 4, 8$ *d)* $x = 2$

11. Demostración **13.** $\frac{2}{3}$ **15.** $1 \le \int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx \le \sqrt{2}$

17. *a)* Demostración *b)* Demostración *c)* Demostración

19. *a)* $R(n), I, T(n), L(n)$
b) $S(4) = \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)] \approx 5.42$

21. $a = -4, b = 4$

Capítulo 5

Sección 5.1 (página 331)

1.

x	0.5	1.5	2	2.5
$\int_1^x (1/t)\, dt$	-0.6932	0.4055	0.6932	0.9163

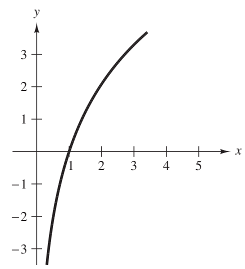
x	3	3.5	4
$\int_1^x (1/t)\, dt$	1.0987	1.2529	1.3865

3. *a)* 3.8067 *b)* $\ln 45 = \int_1^{45} \frac{1}{t}\, dt \approx 3.8067$

5. *a)* -0.2231 *b)* $\ln 0.8 = \int_1^{0.8} \frac{1}{t}\, dt \approx -0.2231$

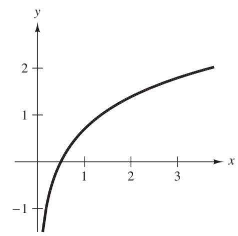
7. *b* **8.** *d* **9.** *a* **10.** *c*

11.



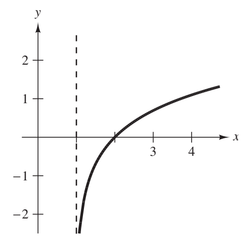
Dominio: $x > 0$

13.



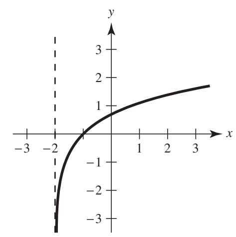
Dominio: $x > 0$

15.



Dominio: $x > 1$

17.



Dominio: $x > -2$

19. *a)* 1.7917 *b)* -0.4055 *c)* 4.3944 *d)* 0.5493

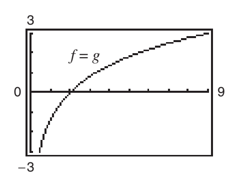
21. $\ln x - \ln 4$ **23.** $\ln x + \ln y - \ln z$

25. $\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 5)$ **27.** $\frac{1}{2}[\ln(x - 1) - \ln x]$

29. $\ln z + 2\ln(z - 1)$

31. $\ln \frac{x - 2}{x + 2}$ **33.** $\ln \sqrt[3]{\frac{x(x + 3)^2}{x^2 - 1}}$ **35.** $\ln\left(9/\sqrt{x^2 + 1}\right)$

37. *a)*



b) $f(x) = \ln \frac{x^2}{4} = \ln x^2 - \ln 4$
$= 2\ln x - \ln 4$
$= g(x)$

39. $-\infty$ **41.** $\ln 4 \approx 1.3863$ **43.** $y = 3x - 3$

45. $y = 4x - 4$ **47.** $1/x$ **49.** $2/x$ **51.** $4(\ln x)^3/x$

53. $2/(t + 1)$ **55.** $\dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$ **57.** $\dfrac{1 - x^2}{x(x^2 + 1)}$

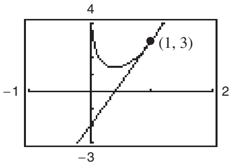
59. $\dfrac{1 - 2\ln t}{t^3}$ **61.** $\dfrac{2}{x \ln x^2} = \dfrac{1}{x \ln x}$ **63.** $\dfrac{1}{1 - x^2}$

65. $\dfrac{-4}{x(x^2 + 4)}$ **67.** $\dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2}$ **69.** $\cot x$

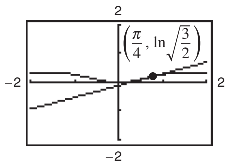
71. $-\tan x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x - 1}$ **73.** $\dfrac{3 \cos x}{(\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 2)}$

75. $[\ln(2x) + 1]/x$

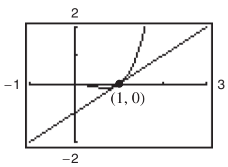
77. *a)* $5x - y - 2 = 0$
b)



79. *a)* $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$
b)



81. *a)* $y = x - 1$
b)



83. $2xy/(3 - 2y^2)$

85. $\dfrac{y(1 - 6x^2)}{1 + y}$ **87.** $y = x - 1$

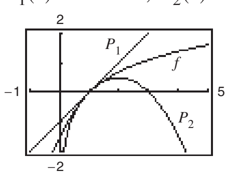
89. $xy'' + y' = x(-2/x^2) + (2/x) = 0$

91. Mínimo relativo: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

93. Mínimo relativo: $(e^{-1}, -e^{-1})$

95. Mínimo relativo: (e, e); punto de inflexión: $(e^2, e^2/2)$

97. $P_1(x) = x - 1$; $P_2(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2$



Los valores de f y P_1 y P_2 y sus primeras derivadas coinciden en $x = 1$.

99. $x \approx 0.567$ **101.** $(2x^2 + 1)/\sqrt{x^2 + 1}$

103. $\dfrac{3x^3 + 15x^2 - 8x}{2(x + 1)^3\sqrt{3x - 2}}$ **105.** $\dfrac{(2x^2 + 2x - 1)\sqrt{x - 1}}{(x + 1)^{3/2}}$

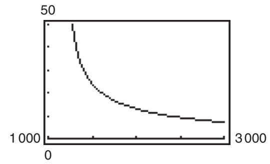
107. El dominio de la función logaritmo natural es $(0, \infty)$ y el rango es $(-\infty, \infty)$. La función es continua, creciente e inyectiva, y su gráfica es cóncava hacia abajo. Además, si a y b son números positivos y n es racional, entonces $\ln(1) = 0$, $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^n) = n \ln a$ y $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$.

109. *a)* Sí. Si la gráfica de g es creciente, entonces $g'(x) > 0$. Como $f(x) > 0$, entonces se sabe que $f'(x) = g'(x)f(x)$ de modo que $f'(x) > 0$. Por tanto, la gráfica de f es creciente.
b) No. Sea $f(x) = x^2 + 1$ (positiva y cóncava hacia arriba) y sea $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ (no cóncava hacia arriba).

111. Falso; $\ln x + \ln 25 = \ln 25x$.

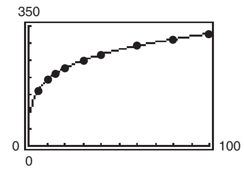
113. Falso; π es una constante, de manera que $\dfrac{d}{dx}[\ln \pi] = 0$.

115. *a)*

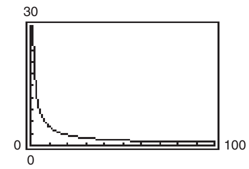


b) 30 años; \$503 434.80
c) 20 años; \$386 685.60
d) Cuando $x = 1\,398.43$, $dt/dx \approx -0.0805$.
Cuando $x = 1\,611.19$, $dt/dx \approx -0.0287$.
e) Una mensualidad mayor tiene dos ventajas: el plazo es más breve y la cantidad pagada es menor.

117. *a)*



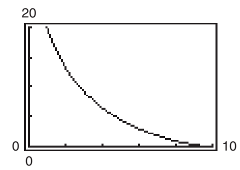
c)



b) $T'(10) \approx 4.75°/\text{lb/pulg}^2$
$T'(70) \approx 0.97°/\text{lb/pulg}^2$

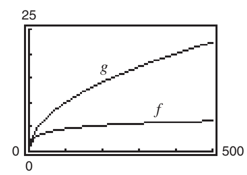
$\lim\limits_{p \to \infty} T'(p) = 0$
Las respuestas varían.

119. *a)*



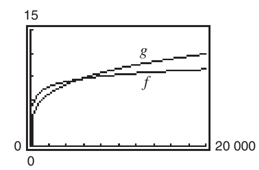
b) Cuando $x = 5$, $dy/dx = -\sqrt{3}$.
Cuando $x = 9$, $dy/dx = -\sqrt{19}/9$.
c) $\lim\limits_{x \to 10^-} \dfrac{dy}{dx} = 0$

121. *a)*



Para $x > 4$, $g'(x) > f'(x)$. g crece más rápidamente que f para valores grandes de x.

b)



Para $x > 256$, $g'(x) > f'(x)$. g crece más rápidamente que f para valores grandes de x.

$f(x) = \ln x$ crece lentamente para valores grandes de x.

Sección 5.2 (página 340)

1. $5 \ln|x| + C$ **3.** $\ln|x + 1| + C$ **5.** $\frac{1}{2}\ln|2x + 5| + C$

7. $\frac{1}{2}\ln|x^2 - 3| + C$ **9.** $\ln|x^4 + 3x| + C$

11. $x^2/2 - \ln(x^4) + C$ **13.** $\frac{1}{3}\ln|x^3 + 3x^2 + 9x| + C$

15. $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6\ln|x + 1| + C$ **17.** $\frac{1}{3}x^3 + 5\ln|x - 3| + C$

19. $\frac{1}{3}x^3 - 2x + \ln\sqrt{x^2 + 2} + C$ **21.** $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$

23. $2\sqrt{x + 1} + C$ **25.** $2\ln|x - 1| - 2/(x - 1) + C$

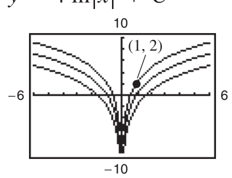
27. $\sqrt{2x} - \ln\left|1 + \sqrt{2x}\right| + C$

29. $x + 6\sqrt{x} + 18\ln\left|\sqrt{x} - 3\right| + C$ **31.** $3\ln\left|\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{3}\right| + C$

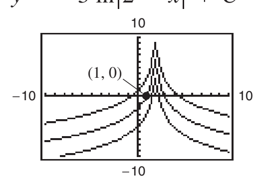
33. $-\frac{1}{2}\ln|\csc 2x + \cot 2x| + C$ **35.** $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\theta - \theta + C$

37. $\ln|1 + \operatorname{sen} t| + C$ **39.** $\ln|\sec x - 1| + C$

41. $y = 4\ln|x| + C$

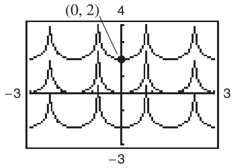


43. $y = -3\ln|2 - x| + C$

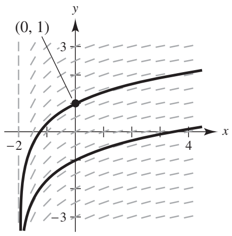


La gráfica tiene un hueco en $x = 2$.

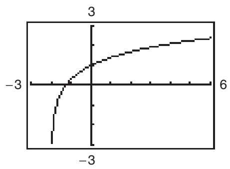
45. $s = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2\theta| + C$ **47.** $f(x) = -2\ln x + 3x - 2$



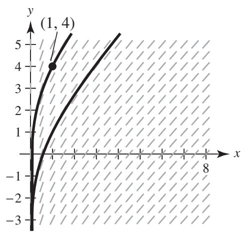
49. *a)*



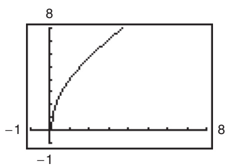
b) $y = \ln\left(\dfrac{x+2}{2}\right) + 1$



51. *a)*



b) $y = \ln x + x + 3$



53. $\frac{5}{3}\ln 13 \approx 4.275$ **55.** $\frac{7}{3}$ **57.** $-\ln 3 \approx -1.099$

59. $\ln\left|\dfrac{2-\operatorname{sen} 2}{1-\operatorname{sen} 1}\right| \approx 1.929$ **61.** $2\left[\sqrt{x} - \ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right] + C$

63. $\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) + 2\sqrt{x} + C$ **65.** $\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.174$

67. $1/x$ **69.** $1/x$ **71.** *d* **73.** $6\ln 3$ **75.** $\frac{1}{2}\ln 2$

77. $\frac{15}{2} + 8\ln 2 \approx 13.045$

79. $(12/\pi)\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \approx 5.03$

81. Regla trapezoidal: 20.2
Regla de Simpson: 19.4667

83. Regla trapezoidal: 5.3368
Regla de Simpson: 5.3632

85. Regla de las potencias. **87.** Regla de los logaritmos.

89. $x = 2$ **91.** Demostración

93. $-\ln|\cos x| + C = \ln|1/\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

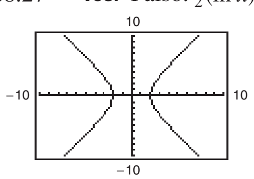
95. $\ln|\sec x + \tan x| + C = \ln\left|\dfrac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\sec x - \tan x}\right| + C$
$= -\ln|\sec x - \tan x| + C$

97. 1 **99.** $1/(e-1) \approx 0.582$

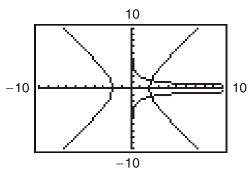
101. $P(t) = 1\,000(12\ln|1 + 0.25t| + 1)$; $P(3) \approx 7715$

103. \$168.27 **105.** Falso. $\frac{1}{2}(\ln x) = \ln x^{1/2}$ **107.** Verdadero

109. *a)*



b) Las respuestas varían.
Ejemplo:
$y^2 = e^{-\ln x + \ln 4} = 4/x$



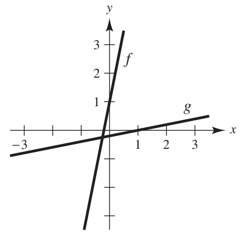
c) Las respuestas varían.

111. Demostración

Sección 5.3 (página 349)

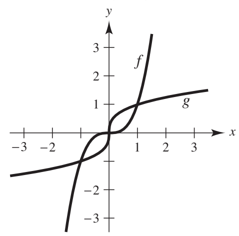
1. *a)* $f(g(x)) = 5[(x-1)/5] + 1 = x$
$g(f(x)) = [(5x+1) - 1]/5 = x$

b)



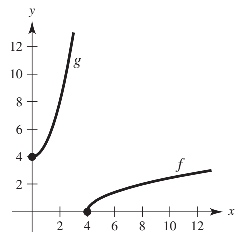
3. *a)* $f(g(x)) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$; $g(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x$

b)



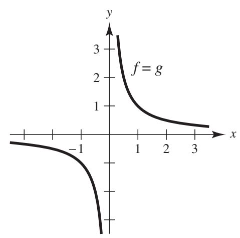
5. *a)* $f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 4 - 4} = x$;
$g(f(x)) = \left(\sqrt{x-4}\right)^2 + 4 = x$

b)



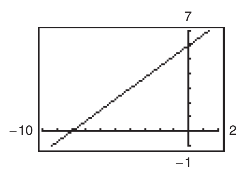
7. *a)* $f(g(x)) = \dfrac{1}{1/x} = x$; $g(f(x)) = \dfrac{1}{1/x} = x$

b)



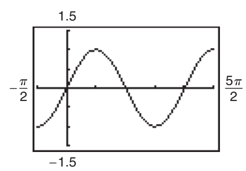
9. *c* **10.** *b* **11.** *a* **12.** *d*

13.



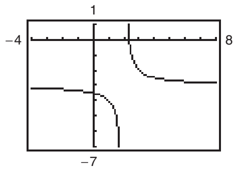
Inyectiva, existe la inversa.

15.



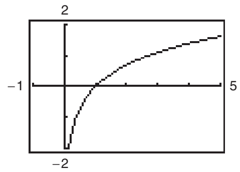
No inyectiva, no existe la inversa.

17.



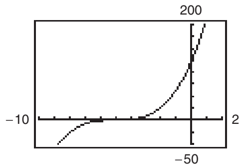
Inyectiva, existe la inversa.

19.



Inyectiva, existe la inversa.

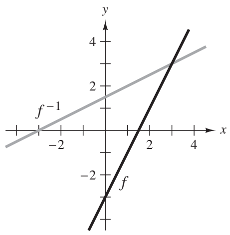
21.



Inyectiva, existe la inversa.

23. *a*) $f^{-1}(x) = (x + 3)/2$

b)

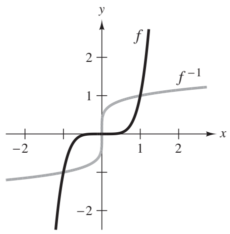


c) f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

d) Dominio de f y f^{-1}: todos los números reales. Rango de f y f^{-1}: todos los números reales.

25. *a*) $f^{-1}(x) = x^{1/5}$

b)

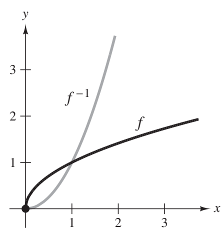


c) f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

d) Dominio de f y f^{-1}: todos los números reales. Rango de f y f^{-1}: todos los números reales.

27. *a*) $f^{-1}(x) = x^2,\ x \geq 0$

b)

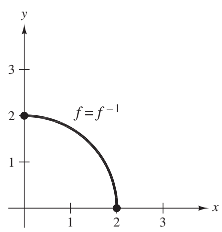


c) f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

d) Dominio de f y f^{-1}: $x \geq 0$ Rango de f y f^{-1}: $y \geq 0$

29. *a*) $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2},$ $0 \leq x \leq 2$

b)

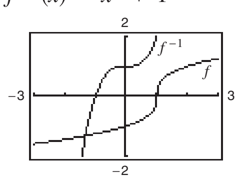


c) f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

d) Dominio de f y f^{-1}: $0 \leq x \leq 2$ Rango de f y f^{-1}: $0 \leq y \leq 2$

31. *a*) $f^{-1}(x) = x^3 + 1$

b)

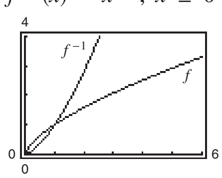


c) f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

d) Dominio de f y f^{-1}: todos los números reales. Rango de f y f^{-1}: todos los números reales.

33. *a*) $f^{-1}(x) = x^{3/2},\ x \geq 0$

b)

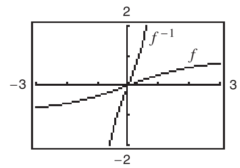


c) f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

d) Dominio de f y f^{-1}: $x \geq 0$ Rango de f y f^{-1}: $y \geq 0$

35. *a*) $f^{-1}(x) = \sqrt{7}x/\sqrt{1 - x^2},\ -1 < x < 1$

b)



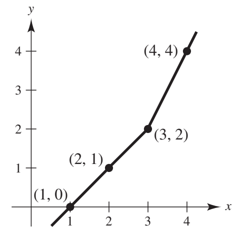
c) f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

d) Dominio de f: todos los números reales.
Dominio de f^{-1}: $-1 < x < 1$
Rango de f: $-1 < y < 1$
Rango de f^{-1}: todos los números reales.

37.

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	2	3	4

x	1	2	3	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2	4



39. *a*) Demostración

b) $y = \frac{20}{7}(80 - x)$
x: costo total.
y: número de libras del bien menos costos

c) $[62.5, 80]$ *d*) 20 lb

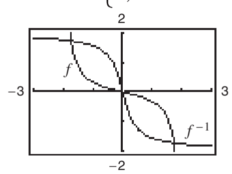
41. Existe la inversa. **43.** No existe la inversa.

45. Existe la inversa. **47.** $f'(x) = 2(x - 4) > 0$ en $(4, \infty)$

49. $f'(x) = -8/x^3 < 0$ en $(0, \infty)$

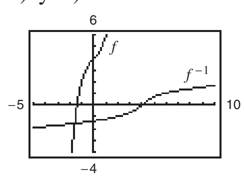
51. $f'(x) = -\operatorname{sen} x < 0$ en $(0, \pi)$

53. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \left[1 - \sqrt{1 + 16x^2}\right]/(2x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$



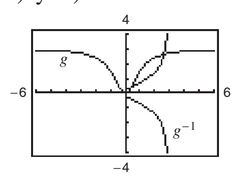
La gráfica de f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f respecto de la recta $y = -x$.

55. *a*) y *b*)



c) f es inyectiva y tiene una función inversa

57. *a*) y *b*)



c) g no es inyectiva y no tiene una función inversa

59. Inyectiva
$f^{-1}(x) = x^2 + 2,\ x \geq 0$

61. Inyectiva
$f^{-1}(x) = 2 - x,\ x \geq 0$

63. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 3,\ x \geq 0$ (La respuesta no es única)

65. $f^{-1}(x) = x - 3,\ x \geq 0$ (La respuesta no es única)

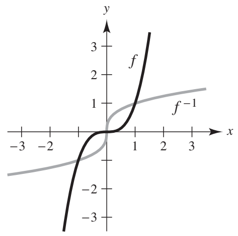
67. Existe la inversa. El volumen es una función creciente, y por tanto es inyectiva. La función inversa proporciona el tiempo t correspondiente al volumen V.

69. No existe la inversa. **71.** $1/27$ **73.** $1/5$

75. $2\sqrt{3}/3$ **77.** -2 **79.** $1/13$

81. *a)* Dominio de f: $(-\infty, \infty)$ *b)* Rango de f: $(-\infty, \infty)$
Dominio de f^{-1}: $(-\infty, \infty)$ Rango de f^{-1}: $(-\infty, \infty)$

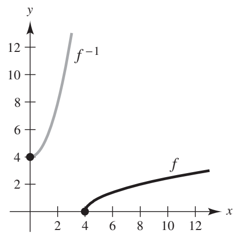
c)



d) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $(f^{-1})'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{3}$

83. *a)* Dominio de f: $[4, \infty)$ *b)* Rango de f: $[0, \infty)$
Dominio de f^{-1}: $[0, \infty)$ Rango de f^{-1}: $[4, \infty)$

c)



d) $f'(5) = \frac{1}{2}$, $(f^{-1})'(1) = 2$

85. $-\frac{1}{11}$ **87.** 32 **89.** 600

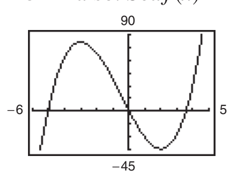
91. $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = (x + 1)/2$ **93.** $(f \circ g)^{-1}(x) = (x + 1)/2$

95. Sea $y = f(x)$ una función inyectiva. Despejar x en función de y. Intercambiar x y y para obtener $y = f^{-1}(x)$. Sea el rango de f el dominio de f^{-1}. Verificar que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.
Ejemplo: $f(x) = x^3$; $y = x^3$; $x = \sqrt[3]{y}$; $y = \sqrt[3]{x}$; $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

97. Muchos valores de x dan el mismo valor de y. Por ejemplo, $f(\pi) = 0 = f(0)$. La gráfica no es continua en $[(2n - 1)\pi]/2$ donde n es un entero.

99. $\frac{1}{4}$ **101.** Falso. Sea $f(x) = x^2$. **103.** Verdadero

105. *a)*



b) $c = 2$

f no pasa la prueba de la recta horizontal.

107 a 109. Demostraciones **111.** Demostración; cóncava hacia arriba.

113. Demostración; $\sqrt{5}/5$

115. *a)* Demostración *b)* $f^{-1}(x) = \dfrac{b - dx}{cx - a}$

c) $a = -d$, o $b = c = 0$, $a = d$

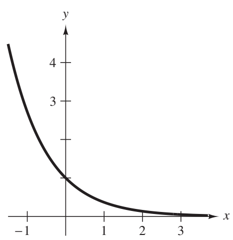
Sección 5.4 (página 358)

1. $x = 4$ **3.** $x \approx 2.485$ **5.** $x = 0$ **7.** $x \approx 0.511$

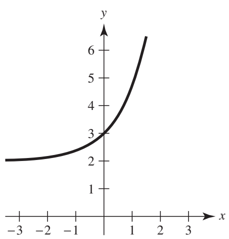
9. $x \approx 8.862$ **11.** $x \approx 7.389$ **13.** $x \approx 10.389$

15. $x \approx 5.389$

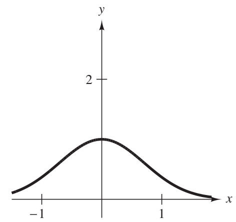
17.



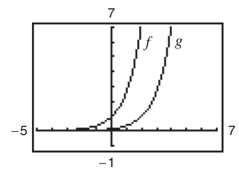
19.



21.

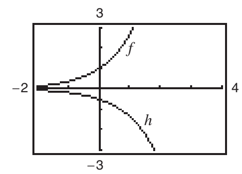


23. *a)*



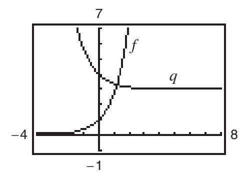
Traslación de dos unidades a la derecha

b)



Reflexión respecto al eje x y un encogimiento vertical.

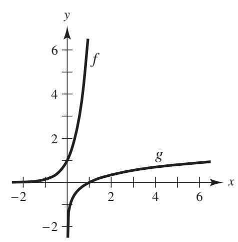
c)



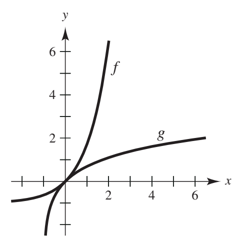
Reflexión respecto al eje x y una traslación de tres unidades hacia arriba.

25. *c* **26.** *d* **27.** *a* **28.** *b*

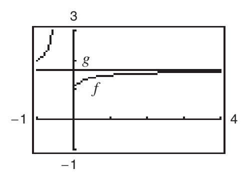
29.



31.



33.



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = e^{0.5}$

35. $2.7182805 < e$ **37.** *a)* $y = 3x + 1$ *b)* $y = -3x + 1$

39. $2e^{2x}$ **41.** $e^{\sqrt{x}}/\left(2\sqrt{x}\right)$ **43.** e^{x-4} **45.** $e^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$

47. $e^x(x^3 + 3x^2)$ **49.** $3(e^{-t} + e^t)^2(e^t - e^{-t})$

51. $2e^{2x}/(1 + e^{2x})$ **53.** $-2(e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})^2$

55. $-2e^x/(e^x - 1)^2$ **57.** $2e^x \cos x$ **59.** $\cos(x)/x$

61. $y = -x + 2$ **63.** $y = -4(x + 1)$ **65.** $y = ex$

67. $y = (1/e)x - 1/e$ **69.** $\dfrac{10 - e^y}{xe^y + 3}$

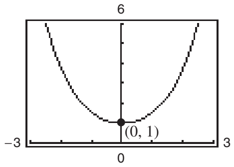
71. $y = (-e - 1)x + 1$ **73.** $3(6x + 5)e^{-3x}$

75. $y'' - y = 0$
$4e^{-x} - 4e^{-x} = 0$

77. $y'' - 2y' + 3y = 0$

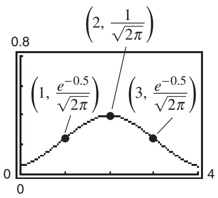
$$e^x\left[-\cos\sqrt{2}x - \operatorname{sen}\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x\right] -$$
$$2e^x\left[-\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}x + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}x + \cos\sqrt{2}x + \operatorname{sen}\sqrt{2}x\right] +$$
$$3e^x\left[\cos\sqrt{2}x + \operatorname{sen}\sqrt{2}x\right] = 0$$
$$0 = 0$$

79. Mínimo relativo: $(0, 1)$

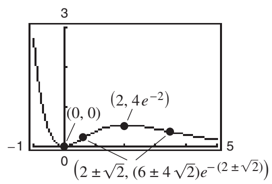


81. Máximo relativo: $\left(2, 1/\sqrt{2\pi}\right)$

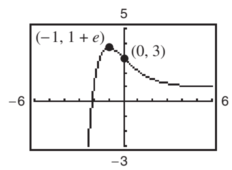
Puntos de inflexión: $\left(1, \dfrac{e^{-0.5}}{\sqrt{2\pi}}\right), \left(3, \dfrac{e^{-0.5}}{\sqrt{2\pi}}\right)$



83. Mínimo relativo: $(0, 0)$
Máximo relativo: $(2, 4e^{-2})$
Puntos de inflexión: $\left(2 \pm \sqrt{2}, \left(6 \pm 4\sqrt{2}\right)e^{-(2 \pm \sqrt{2})}\right)$

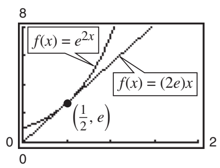


85. Máximo relativo: $(-1, 1 + e)$
Punto de inflexión: $(0, 3)$

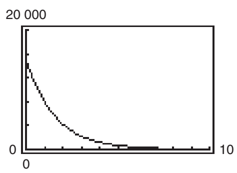


87. $A = \sqrt{2}e^{-1/2}$

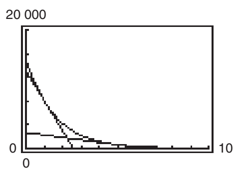
89. $\left(\frac{1}{2}, e\right)$



91. *a)*



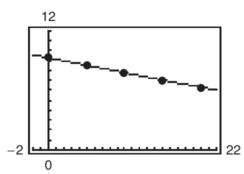
c)



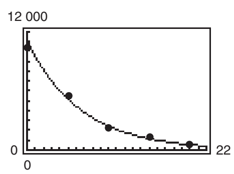
b) Cuando $t = 1$, $\dfrac{dV}{dt} \approx -5\,028.84$.

Cuando $t = 5$, $\dfrac{dV}{dt} \approx -406.89$.

93. *a)*



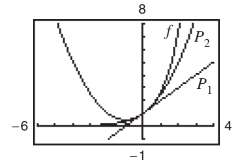
c)



$\ln P = -0.1499h + 9.3018$

b) $P = 10\,957.7e^{-0.1499h}$ *d)* $h = 5$: -776
$h = 18$: -111

95. $P_1 = 1 + x$; $P_2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$



Los valores de f, P_1 y P_2 y de sus primeras derivadas coinciden en $x = 0$.

97. $12! = 479\,001\,600$
Fórmula de Stirling: $12! \approx 475\,687\,487$

99. $e^{5x} + C$ **101.** $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$ **103.** $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$

105. $2e^{\sqrt{x}} + C$

107. $x - \ln(e^x + 1) + C_1$ o $-\ln(1 + e^{-x}) + C_2$

109. $-\frac{2}{3}(1 - e^x)^{3/2} + C$ **111.** $\ln\left|e^x - e^{-x}\right| + C$

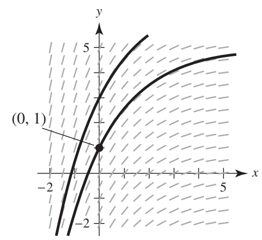
113. $-\frac{5}{2}e^{-2x} + e^{-x} + C$ **115.** $\ln\left|\cos e^{-x}\right| + C$

117. $(e^2 - 1)/(2e^2)$ **119.** $(e - 1)/(2e)$ **121.** $(e/3)(e^2 - 1)$

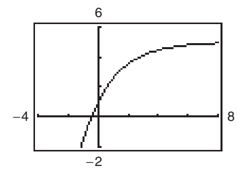
123. $\ln\left(\dfrac{1 + e^6}{2}\right)$ **125.** $(1/\pi)[e^{\operatorname{sen}(\pi^2/2)} - 1]$

127. $[1/(2a)]e^{ax^2} + C$ **129.** $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

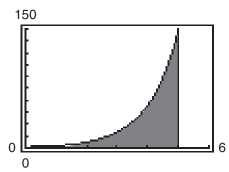
131. *a)*

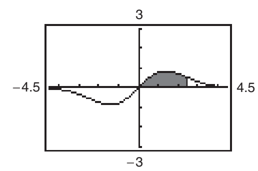


b) $y = -4e^{-x/2} + 5$



133. $e^5 - 1 \approx 147.413$ **135.** $2(1 - e^{-3/2}) \approx 1.554$





137. Regla del punto medio: 92.190; regla trapezoidal: 93.837; regla de Simpson: 92.7385

139. La probabilidad de que una batería dada dure entre 48 y 60 meses es aproximadamente de 47.72%.

141. *a)* $t = \dfrac{1}{2k}\ln\dfrac{B}{A}$

b) $x''(t) = k^2(Ae^{kt} + Be^{-kt})$, donde k^2 es la constante de proporcionalidad.

143. $f(x) = e^x$
El dominio de $f(x)$ es $(-\infty, \infty)$ y su rango $f(x)$ es $(0, \infty)$. $f(x)$ es continua, creciente, inyectiva y cóncava hacia arriba en todo su dominio.
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

145. *a)* Regla del logaritmo *b)* Sustitución

147. $\displaystyle\int_0^x e^t\,dt \ge \int_0^x 1\,dt$; $e^x - 1 \ge x$; $e^x \ge x + 1$ para toda $x \ge 0$

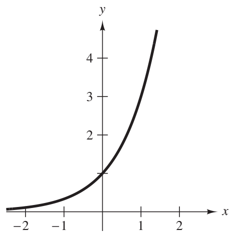
149. $x \approx 0.567$ **151.** Demostración

Sección 5.5 (página 368)

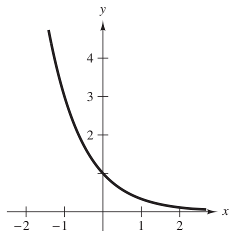
1. -3 **3.** 0 **5.** *a)* $\log_2 8 = 3$ *b)* $\log_3(1/3) = -1$

7. *a)* $10^{-2} = 0.01$ *b)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

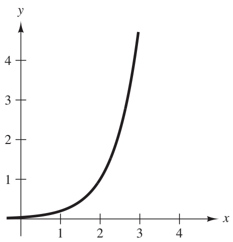
9.



11.



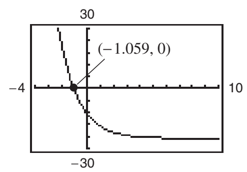
13.



15. *d* **16.** *c* **17.** *b* **18.** *a*

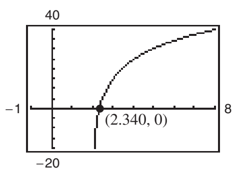
19. *a)* $x = 3$ *b)* $x = -1$ **21.** *a)* $x = \frac{1}{3}$ *b)* $x = \frac{1}{16}$
23. *a)* $x = -1, 2$ *b)* $x = \frac{1}{3}$ **25.** 1.965 **27.** -6.288
29. 12.253 **31.** 33.000 **33.** ± 11.845

35.



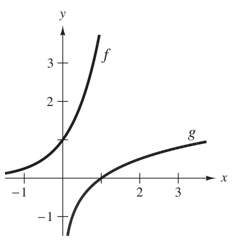
$(-1.059, 0)$

37.



$(2.340, 0)$

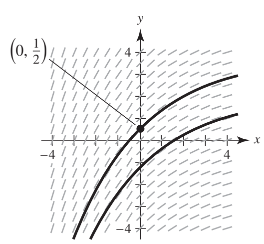
39.



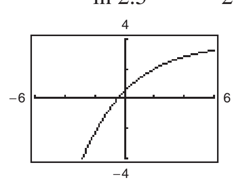
41. $(\ln 4)4^x$ **43.** $(-4 \ln 5)5^{-4x}$

45. $9^x(x \ln 9 + 1)$ **47.** $t2^t(t \ln 2 + 2)$
49. $-2^{-\theta}[(\ln 2) \cos \pi\theta + \pi \operatorname{sen} \pi\theta]$
51. $5/[(\ln 4)(5x + 1)]$ **53.** $2/[(\ln 5)(t - 4)]$
55. $x/[(\ln 5)(x^2 - 1)]$ **57.** $(x - 2)/[(\ln 2)x(x - 1)]$
59. $(3x - 2)/[(2x \ln 3)(x - 1)]$
61. $5(1 - \ln t)/(t^2 \ln 2)$ **63.** $y = -2x \ln 2 - 2 \ln 2 + 2$
65. $y = [1/(27 \ln 3)]x + 3 - 1/\ln 3$ **67.** $2(1 - \ln x)x^{(2/x)-2}$
69. $(x - 2)^{x+1}[(x + 1)/(x - 2) + \ln(x - 2)]$
71. $y = x$ **73.** $y = \dfrac{\cos e}{e}x - \cos e + 1$ **75.** $3^x/\ln 3 + C$
77. $\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{2^{-x}}{\ln 2} + C$ **79.** $[-1/(2 \ln 5)](5^{-x^2}) + C$
81. $\ln(3^{2x} + 1)/(2 \ln 3) + C$ **83.** $7/(2 \ln 2)$
85. $4/\ln 5 - 2/\ln 3$ **87.** $26/\ln 3$

89. *a)*



b) $y = \dfrac{3(1 - 0.4^{x/3})}{\ln 2.5} + \dfrac{1}{2}$



91. *a)* $x > 0$ *b)* 10^x *c)* $3 \le f(x) \le 4$
d) $0 < x < 1$ *e)* 10 *f)* 100^n
93. *a)* ax^{a-1} *b)* $(\ln a)a^x$ *c)* $x^x(1 + \ln x)$ *d)* 0
95. *a)* \$40.64 *b)* $C'(1) \approx 0.051P$, $C'(8) \approx 0.072P$
c) ln 1.05

97.

n	1	2	4	12
A	\$1 410.60	\$1 414.78	\$1 416.91	\$1 418.34

n	365	Continua
A	\$1 419.04	\$1 419.07

99.

n	1	2	4	12
A	\$4 321.94	\$4 399.79	\$4 440.21	\$4 467.74

n	365	Continua
A	\$4 481.23	\$4 481.69

101.

t	1	10	20	30
P	\$95 122.94	\$60 653.07	\$36 787.94	\$22 313.02

t	40	50
P	\$13 533.53	\$8 208.50

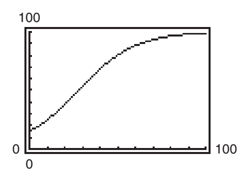
103.

t	1	10	20	30
P	\$95 132.82	\$60 716.10	\$36 864.45	\$22 382.66

t	40	50
P	\$13 589.88	\$8 251.24

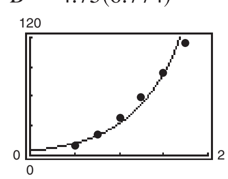
105. *c*
107. *a)* 6.7 millones de pies^3/acre
b) $t = 20$: $\dfrac{dV}{dt} = 0.073$; $t = 60$: $\dfrac{dV}{dt} = 0.040$

109. *a)*



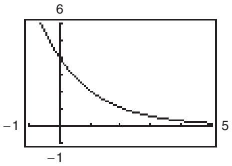
b) 16.7%
c) $x \approx 38.8$ o 38 800 huevos
d) $x \approx 27.75$ o 27 750 huevos

111. *a)* $B = 4.75(6.774)^d$
b)



c) Cuando $d = 0.8$, la razón de crecimiento es 41.99. Cuando $d = 1.5$, la razón de crecimiento es 160.21.

113. *a)* 5.67; 5.67; 5.67

b) 

c) $f(t) = g(t) = h(t)$. No porque las integrales definidas de dos funciones sobre un intervalo dado pueden ser iguales aun cuando las funciones sean diferentes.

115. $y = 1\,200(0.6^t)$ **117.** e **119.** e^2

121. Falso: e es un número irracional. **123.** Verdadero **125.** Verdadero

127. *a)* $(2^3)^2 = 2^6 = 64$

$2^{(3^2)} = 2^9 = 512$

b) No. $f(x) = (x^x)^x = x^{(x^2)}$ y $g(x) = x^{(x^x)}$

c) $f'(x) = x^{x^2}(x + 2x \ln x)$

$g'(x) = x^{x^x + x - 1}[x(\ln x)^2 + x \ln x + 1]$

129. Demostración

131. *a)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - yx \ln y}{x^2 - xy \ln x}$

b) *i)* 1 cuando $c \neq 0, c \neq e$ *ii)* -3.1774 *iii)* -0.3147

c) (e, e)

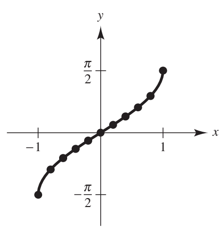
133. Problema Putnam A15, 1940

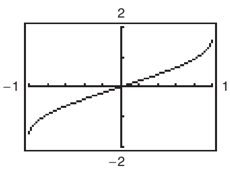
Sección 5.6 (página 379)

1. *a)*

x	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2
y	-1.57	-0.93	-0.64	-0.41	-0.20

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	0	0.20	0.41	0.64	0.93	1.57

b) 

c) 

d) Intersección: (0, 0); Simetría: respecto al origen

3. $\left(-\sqrt{2}/2, 3\pi/4\right), (1/2, \pi/3), \left(\sqrt{3}/2, \pi/6\right)$

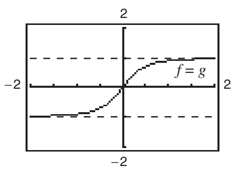
5. $\pi/6$ **7.** $\pi/3$ **9.** $\pi/6$ **11.** $-\pi/4$ **13.** 2.50

15. $\arccos(1/1.269) \approx 0.66$ **17.** *a)* $3/5$ *b)* $5/3$

19. *a)* $-\sqrt{3}$ *b)* $-\frac{13}{5}$ **21.** x **23.** $\sqrt{1 - x^2}/x$ **25.** $1/x$

27. $\sqrt{1 - 4x^2}$ **29.** $\sqrt{x^2 - 1}/|x|$

31. $\sqrt{x^2 - 9}/3$ **33.** $\sqrt{x^2 + 2}/x$

35. *a)* 

b) Demostración

c) Asíntotas horizontales: $y = -1, y = 1$

37. $x = \frac{1}{3}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) + \pi\right] \approx 1.207$ **39.** $x = \frac{1}{3}$

41. *a)* y *b)* Demostraciones **43.** $2/\sqrt{2x - x^2}$

45. $-3/\sqrt{4 - x^2}$ **47.** $e^x/(1 + e^{2x})$

49. $\left(3x - \sqrt{1 - 9x^2} \operatorname{arcsen} 3x\right)/\left(x^2\sqrt{1 - 9x^2}\right)$

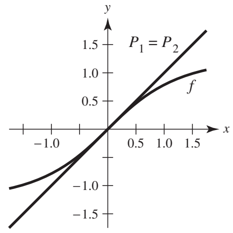
51. $-t/\sqrt{1 - t^2}$ **53.** $2 \arccos x$ **55.** $1/(1 - x^4)$

57. $\operatorname{arcsen} x$ **59.** $x^2/\sqrt{16 - x^2}$ **61.** $2/(1 + x^2)^2$

63. $y = \frac{1}{3}\left(4\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + \pi\right)$

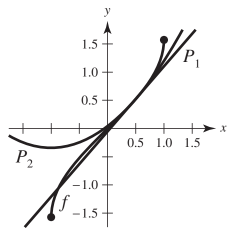
65. $y = \frac{1}{4}x + (\pi - 2)/4$ **67.** $y = (2\pi - 4)x + 4$

69. $P_1(x) = x$; $P_2(x) = x$



71. $P_1(x) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

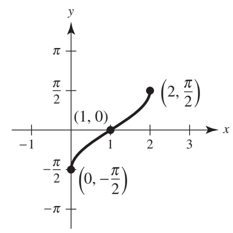
$P_2(x) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$



73. Máximo relativo: $(1.272, -0.606)$

Mínimo relativo: $(-1.272, 3.747)$

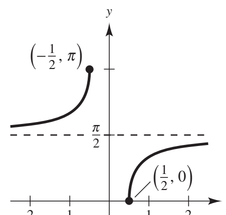
75. Máximo relativo: $(2, 2.214)$

77. 

Máximo: $\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Mínimo: $\left(0, -\dfrac{\pi}{2}\right)$

Punto de inflexión: $(1, 0)$

79. 

Máximo: $\left(-\dfrac{1}{2}, \pi\right)$

Mínimo: $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

Asíntota: $y = \dfrac{\pi}{2}$

81. $y = -2\pi x/(\pi + 8) + 1 - \pi^2/(2\pi + 16)$

83. $y = -x + \sqrt{2}$

85. Si los dominios no estuvieran restringidos, las funciones trigonométricas no serían inyectivas y por tanto no tendrían inversas.

87. Si $x > 0$, $y = \operatorname{arccot} x = \arctan \dfrac{1}{x}$; si $x < 0$, $y = \arctan \dfrac{1}{x} + \pi$.

89. *a)* $\operatorname{arcsen}(\operatorname{arcsen} 0.5) \approx 0.551$

$\operatorname{arcsen}(\operatorname{arcsen} 1)$ no existe

b) $\operatorname{sen}(-1) \leq x \leq \operatorname{sen}(1)$

91. Falso. El rango de arccos es $[0, \pi]$. **93.** Verdadero **95.** Verdadero

97. *a)* $\theta = \operatorname{arccot}(x/5)$

b) $x = 10$: 16 rad/h; $x = 3$: 58.824 rad/h

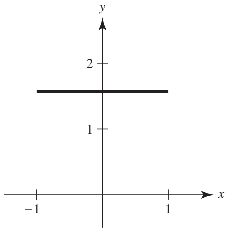
99. *a)* $h(t) = -16t^2 + 256$; $t = 4$ s

b) $t = 1$: -0.0520 rad/s; $t = 2$: -0.1116 rad/s

101. $50\sqrt{2} \approx 70.71$ pies **103.** *a*) y *b*) Demostraciones

105. $k \leq -1$ o $k \geq 1$

107. *a*)

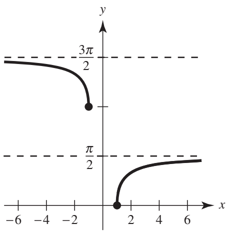


b) La gráfica es una recta horizontal en $\dfrac{\pi}{2}$.

c) Demostración

109. $c = 2$

111. *a*)



b) Demostración

Sección 5.7 (página 387)

1. $\text{arcsen}\dfrac{x}{3} + C$ **3.** $\dfrac{7}{4}\arctan\dfrac{x}{4} + C$ **5.** $\text{arcsec}|2x| + C$

7. $\text{arcsen}\,(x + 1) + C$ **9.** $\frac{1}{2}\text{arcsen}\, t^2 + C$

11. $\dfrac{1}{10}\arctan\dfrac{t^2}{5} + C$ **13.** $\dfrac{1}{4}\arctan\,(e^{2x}/2) + C$

15. $\text{arcsen}\left(\dfrac{\tan x}{5}\right) + C$ **17.** $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$

19. $2\,\text{arcsen}\sqrt{x} + C$ **21.** $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - 3\arctan x + C$

23. $8\,\text{arcsen}[(x - 3)/3] - \sqrt{6x - x^2} + C$ **25.** $\pi/6$

27. $\pi/6$ **29.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 2) \approx -0.134$

31. $\dfrac{1}{5}\arctan\dfrac{3}{5} \approx 0.108$ **33.** $\arctan 5 - \dfrac{\pi}{4} \approx 0.588$

35. $\pi/4$ **37.** $\frac{1}{32}\pi^2 \approx 0.308$ **39.** $\pi/2$

41. $\ln|x^2 + 6x + 13| - 3\arctan[(x + 3)/2] + C$

43. $\text{arcsen}\,[(x + 2)/2] + C$ **45.** $-\sqrt{-x^2 - 4x} + C$

47. $4 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{6}\pi \approx 1.059$ **49.** $\frac{1}{2}\arctan(x^2 + 1) + C$

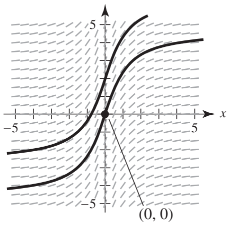
51. $2\sqrt{e^t - 3} - 2\sqrt{3}\arctan(\sqrt{e^t - 3}/\sqrt{3}) + C$ **53.** $\pi/6$

55. *a* y *b* **57.** *a*, *b* y *c*

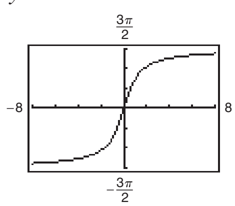
59. No. Esta integral no corresponde a ninguna de las reglas básicas de integración.

61. $y = \text{arcsen}\,(x/2) + \pi$

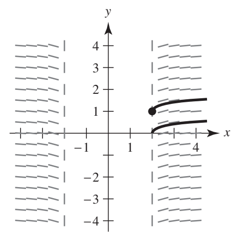
63. *a*)



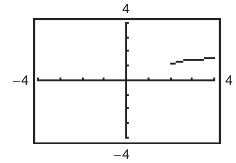
b) $y = 3\arctan x$



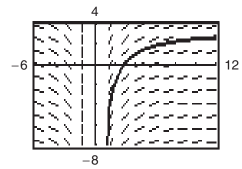
65. *a*)



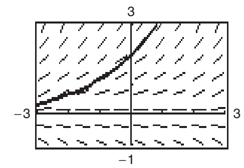
b) $y = \frac{1}{2}\,\text{arcsec}\,(x/2) + 1,$
$x \geq 2$



67.



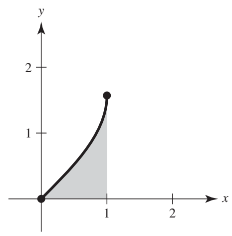
69.



71. $\pi/3$ **73.** $\pi/8$ **75.** $3\pi/2$

77. *a*) Demostración *b*) $\ln(\sqrt{6}/2) + (9\pi - 4\pi\sqrt{3})/36$

79. *a*)



b) 0.5708

c) $(\pi - 2)/2$

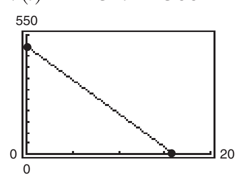
81. *a*) $F(x)$ representa el valor promedio de $f(x)$ sobre el intervalo $[x, x + 2]$. Máximo en $x = -1$.

b) Máximo en $x = -1$.

83. Falso. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x\sqrt{9x^2 - 16}} = \frac{1}{12}\,\text{arcsec}\,\frac{|3x|}{4} + C$

85. Verdadero **87 a 89.** Demostraciones

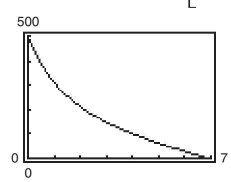
91. *a*) $v(t) = -32t + 500$



b) $s(t) = -16t^2 + 500t$; 3 906.25 pies

c) $v(t) = \sqrt{\dfrac{32}{k}}\tan\left[\arctan\left(500\sqrt{\dfrac{k}{32}}\right) - \sqrt{32k}\,t\right]$

d)



$t_0 = 6.86$ s

e) 1 088 pies

f) Cuando se considera la resissistencia con el aire, la altura máxima del objeto no es tan grande.

Sección 5.8 (página 398)

1. *a*) 10.018 *b*) −0.964 **3.** *a*) $\frac{4}{3}$ *b*) $\frac{13}{12}$

5. *a*) 1.317 *b*) 0.962 **7 a 15.** Demostraciones

17. $\cosh x = \sqrt{13}/2$; $\tanh x = 3\sqrt{13}/13$; $\text{csch}\, x = 2/3$; $\text{sech}\, x = 2\sqrt{13}/13$; $\coth x = \sqrt{13}/3$

19. $3\cosh 3x$ **21.** $-10x[\text{sech}(5x^2)\tanh(5x^2)]$ **23.** $\coth x$

25. $\text{csch}\, x$ **27.** $\text{senh}^2 x$ **29.** $\text{sech}\, t$

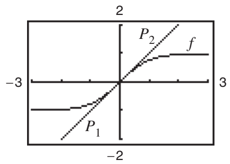
31. $y = -2x + 2$ **33.** $y = 1 - 2x$

35. Máximos relativos: $(\pm\pi, \cosh\pi)$; mínimo relativo: $(0, -1)$

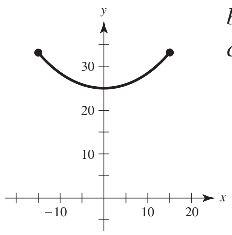
37. Máximo relativo: $(1.20, 0.66)$
Mínimo relativo: $(-1.20, -0.66)$

39. $y = a \operatorname{senh} x$; $y' = a\cosh x$; $y'' = a \operatorname{senh} x$; $y''' = a\cosh x$; por tanto, $y''' - y' = 0$.

41. $P_1(x) = x$; $P_2(x) = x$



43. *a)*



b) 33.146 unidades; 25 unidades
c) $m = \operatorname{senh}(1) \approx 1.175$

45. $\frac{1}{2}\operatorname{senh} 2x + C$ **47.** $-\frac{1}{2}\cosh(1 - 2x) + C$

49. $\frac{1}{3}\cosh^3(x - 1) + C$ **51.** $\ln|\operatorname{senh} x| + C$

53. $-\coth(x^2/2) + C$ **55.** $\operatorname{csch}(1/x) + C$

57. $\frac{1}{2}\arctan x^2 + C$ **59.** $\ln(5/4)$ **61.** $\frac{1}{5}\ln 3$

63. $\pi/4$ **65.** $3/\sqrt{9x^2 - 1}$ **67.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1 - x)}$ **69.** $|\sec x|$

71. $\dfrac{-2\operatorname{csch}^{-1} x}{|x|\sqrt{1 + x^2}}$ **73.** $2\operatorname{senh}^{-1}(2x)$ **75.** Las respuestas varían.

77. $\cosh x$, $\operatorname{sech} x$ **79.** ∞ **81.** 1 **83.** 0 **85.** 1

87. $\dfrac{\sqrt{3}}{18}\ln\left|\dfrac{1 + \sqrt{3}x}{1 - \sqrt{3}x}\right| + C$ **89.** $\ln\left(\sqrt{e^{2x} + 1} - 1\right) - x + C$

91. $2\operatorname{senh}^{-1}\sqrt{x} + C = 2\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{1 + x}\right) + C$

93. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x - 4}{x}\right| + C$ **95.** $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}(x + 1) + \sqrt{3}}{\sqrt{2}(x + 1) - \sqrt{3}}\right| + C$

97. $\ln\left(\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$ **99.** $\dfrac{\ln 7}{12}$ **101.** $\dfrac{1}{4}\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{4x - 1}{9}\right) + C$

103. $-\dfrac{x^2}{2} - 4x - \dfrac{10}{3}\ln\left|\dfrac{x - 5}{x + 1}\right| + C$

105. $8\arctan(e^2) - 2\pi \approx 5.207$ **107.** $\frac{5}{2}\ln\left(\sqrt{17} + 4\right) \approx 5.237$

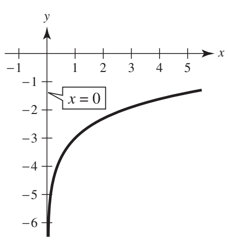
109. *a)* $\ln\left(\sqrt{3} + 2\right)$ (b) $\operatorname{senh}^{-1}\sqrt{3}$

111. $\frac{52}{31}$ kg **113.** $-\sqrt{a^2 - x^2}/x$ **115 a 123.** Demostraciones

125. Problema Putnam 8, 1939

Ejercicios de repaso para el capítulo 5 (página 401)

1.



Asíntota vertical: $x = 0$

3. $\frac{1}{5}[\ln(2x + 1) + \ln(2x - 1) - \ln(4x^2 + 1)]$

5. $\ln\left(3\sqrt[3]{4 - x^2}/x\right)$ **7.** $e^4 - 1 \approx 53.598$

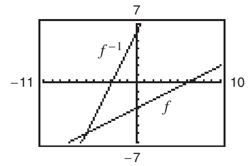
9. $1/(2x)$ **11.** $(1 + 2\ln x)/\left(2\sqrt{\ln x}\right)$

13. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{b^2}\left(b - \dfrac{ab}{a + bx}\right) = \dfrac{x}{a + bx}$ **15.** $y = -x + 1$

17. $\frac{1}{7}\ln|7x - 2| + C$ **19.** $-\ln|1 + \cos x| + C$

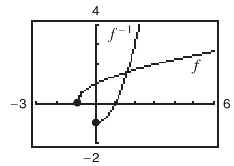
21. $3 + \ln 2$ **23.** $\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$

25. *a)* $f^{-1}(x) = 2x + 6$
b)



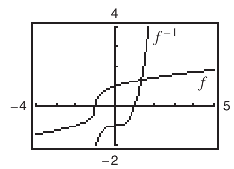
c) Demostración
d) Dominio de f y f^{-1}: todos los números reales.
Rango de f y f^{-1}: todos los números reales.

27. *a)* $f^{-1}(x) = x^2 - 1, \quad x \geq 0$
b)



c) Demostración
d) Dominio de f: $x \geq -1$
Dominio de f^{-1}: $x \geq 0$
Rango de f: $y \geq 0$
Rango de f^{-1}: $y \geq -1$

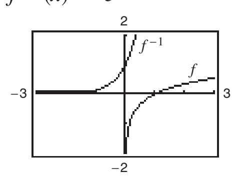
29. *a)* $f^{-1}(x) = x^3 - 1$
b)



c) Demostración
d) Dominio de f y f^{-1}: todos los números reales.
Rango de f y f^{-1}: todos los números reales.

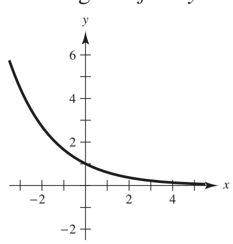
31. $1/\left[3\left(\sqrt[3]{-3}\right)^2\right] \approx 0.160$ **33.** $3/4$

35. *a)* $f^{-1}(x) = e^{2x}$
b)



c) Demostración
d) Dominio de f: $x > 0$
Dominio de f^{-1}: todos los números reales.
Rango de f: todos los números reales.
Rango de f^{-1}: $y > 0$

37.



39. $te^t(t + 2)$

41. $(e^{2x} - e^{-2x})/\sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$ **43.** $x(2 - x)/e^x$

45. $y = -4x + 4$ **47.** $-y/[x(2y + \ln x)]$

49. $(1-e^{-3})/6 \approx 0.158$ **51.** $(e^{4x}-3e^{2x}-3)/(3e^{x})+C$

53. $-\frac{1}{2}e^{1-x^2}+C$ **55.** $\ln(e^2+e+1) \approx 2.408$

57. $y = e^x(a\cos 3x + b \operatorname{sen} 3x)$

$y' = e^x[(-3a+b)\operatorname{sen} 3x + (a+3b)\cos 3x]$

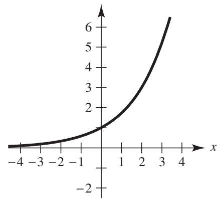
$y'' = e^x[(-6a-8b)\operatorname{sen} 3x + (-8a+6b)\cos 3x]$

$y'' - 2y' + 10y$

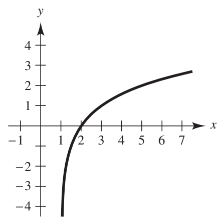
$= e^x\{[(-6a-8b) - 2(-3a+b) + 10b]\operatorname{sen} 3x + [(-8a+6b) - 2(a+3b) + 10a]\cos 3x\} = 0$

59. $-\frac{1}{2}(e^{-16}-1) \approx 0.500$

61.



63.

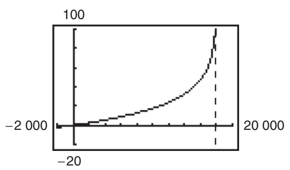


65. $3^{x-1}\ln 3$ **67.** $x^{2x+1}(2\ln x + 2 + 1/x)$

69. $-1/[\ln 3(2-2x)]$ **71.** $5^{(x+1)^2}/(2\ln 5)+C$

73. *a*) Dominio: $0 \le h < 18\,000$

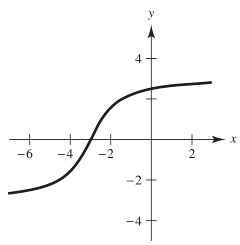
b)



c) $t = 0$

Asíntota vertical: $h = 18\,000$

75.



77. *a*) $1/2$ *b*) $\sqrt{3}/2$

79. $(1-x^2)^{-3/2}$ **81.** $\dfrac{x}{|x|\sqrt{x^2-1}} + \operatorname{arcsec} x$ **83.** $(\operatorname{arcsen} x)^2$

85. $\frac{1}{2}\arctan(e^{2x})+C$ **87.** $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x^2 + C$

89. $\frac{1}{4}[\arctan(x/2)]^2 + C$ **91.** $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} - 2 \approx 1.826$

93. $y = A\operatorname{sen}\left(t\sqrt{k/m}\right)$

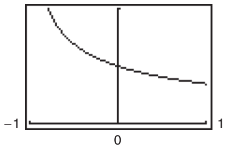
95. $y' = x\left(\dfrac{2}{1-4x^2}\right) + \tanh^{-1} 2x = \dfrac{2x}{1-4x^2} + \tanh^{-1} 2x$

97. $\frac{1}{3}\tanh x^3 + C$

SP Solución de problemas (página 403)

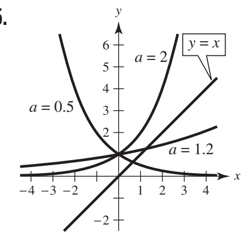
1. $a \approx 4.7648$; $\theta \approx 1.7263$ o $98.9°$

3. *a*)



b) 1 *c*) Demostración

5.



$y = 0.5^x$ y $y = 1.2^x$ intersecan la recta: $y = x$; $0 < a < e^{1/e}$

7. $e - 1$

9. *a*) Área de la región $A = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)/2 \approx 0.1589$

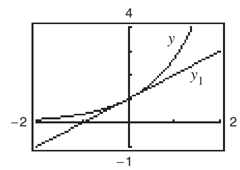
Área de la región $B = \pi/12 \approx 0.2618$

b) $\frac{1}{24}\left[3\pi\sqrt{2} - 12\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) - 2\pi\right] \approx 0.1346$

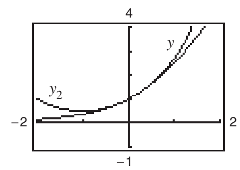
c) 1.2958 *d*) 0.6818

11. Demostración **13.** $2\ln\frac{3}{2} \approx 0.8109$

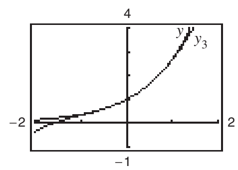
15. *a*) *i*)



ii)

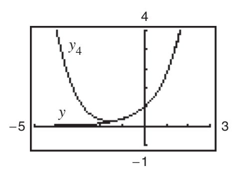


iii)



b) Patrón: $y_n = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$

$y_4 = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!}$



c) El patrón implica que $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$.

Capítulo 6

Sección 6.1 (página 411)

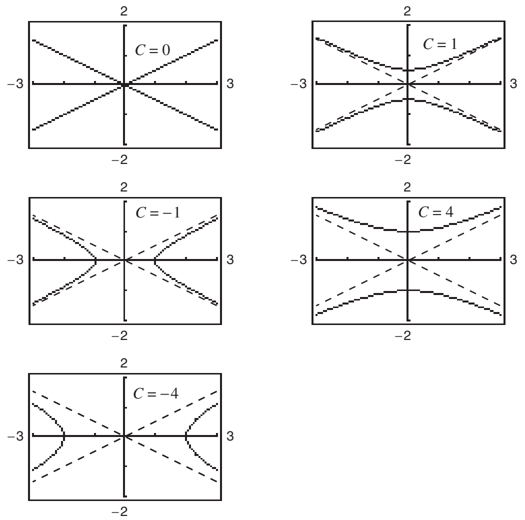
1 a 11. Demostraciones **13.** No es solución **15.** Solución

17. Solución **19.** Solución **21.** No es solución

23. Solución **25.** No es solución **27.** No es solución

29. $y = 3e^{-x/2}$ **31.** $4y^2 = x^3$

33.



35. $y = 3e^{-2x}$ **37.** $y = 2\,\text{sen}\,3x - \frac{1}{3}\cos 3x$

39. $y = -2x + \frac{1}{2}x^3$ **41.** $2x^3 + C$

43. $y = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$ **45.** $y = x - \ln x^2 + C$

47. $y = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

49. $y = \frac{2}{5}(x - 6)^{5/2} + 4(x - 6)^{3/2} + C$

51. $y = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

53.

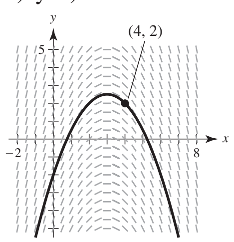
x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx	-4	Indef.	0	1	$\frac{4}{3}$	2

55.

x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx	$-2\sqrt{2}$	-2	0	0	$-2\sqrt{2}$	-8

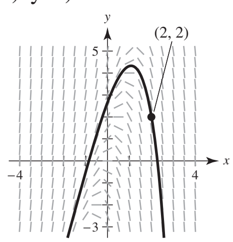
57. *b* **58.** *c* **59.** *d* **60.** *a*

61. *a*) y *b*)



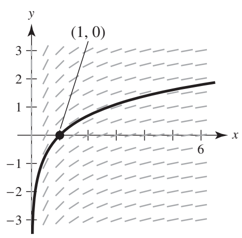
c) Como $x \to \infty$, entonces $y \to -\infty$; como $x \to -\infty$, entonces $y \to -\infty$

63. *a*) y *b*)



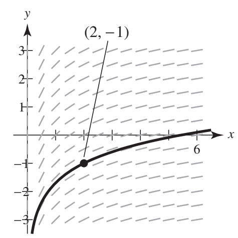
c) Como $x \to \infty$, entonces $y \to -\infty$; como $x \to -\infty$, entonces $y \to -\infty$

65. *a*)



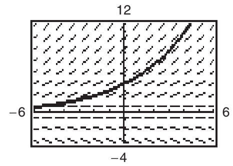
Como $x \to \infty$, entonces $y \to \infty$

b)

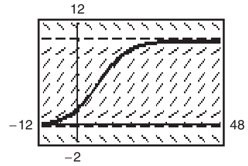


Como $x \to \infty$, entonces $y \to \infty$

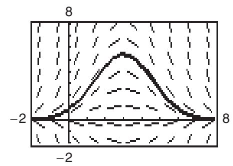
67. *a*) y *b*)



69. *a*) y *b*)



71. *a*) y *b*)



73.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_n	2	2.2	2.43	2.693	2.992	3.332	3.715

n	7	8	9	10
x_n	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	4.146	4.631	5.174	5.781

75.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
y_n	3	2.7	2.438	2.209	2.010	1.839	1.693

n	7	8	9	10
x_n	0.35	0.4	0.45	0.5
y_n	1.569	1.464	1.378	1.308

77.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_n	1	1.1	1.212	1.339	1.488	1.670	1.900

n	7	8	9	10
x_n	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	2.213	2.684	3.540	5.958

79.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y(x)$ (exacta)	3.0000	3.6642	4.4755	5.4664	6.6766	8.1548
$y(x)$ $(h = 0.2)$	3.0000	3.6000	4.3200	5.1840	6.2208	7.4650
$y(x)$ $(h = 0.1)$	3.0000	3.6300	4.3923	5.3147	6.4308	7.7812

81.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y(x)$ **(exacta)**	0.0000	0.2200	0.4801	0.7807	1.1231	1.5097
$y(x)$ $(h = 0.2)$	0.0000	0.2000	0.4360	0.7074	1.0140	1.3561
$y(x)$ $(h = 0.1)$	0.0000	0.2095	0.4568	0.7418	1.0649	1.4273

83. *a*) $y(1) = 112.7141°$; $y(2) = 96.3770°$; $y(3) = 86.5954°$

b) $y(1) = 113.2441°$; $y(2) = 97.0158°$; $y(3) = 87.1729°$

c) Método de Euler: $y(1) = 112.9828°$; $y(2) = 96.6998°$; $y(3) = 86.8863°$

Solución exacta: $y(1) = 113.2441°$; $y(2) = 97.0158°$; $y(3) = 87.1729°$

Las aproximaciones mejoran al usar $h = 0.05$.

85. La solución general es una familia de curvas que satisface la ecuación diferencial. Una solución particular es un miembro de la familia que satisface las condiciones dadas.

87. Comenzar con un punto (x_0, y_0) que satisfaga la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Después utilizar el tamaño del paso requerido h para calcular el punto $(x_1, y_1) = (x_0 + h, y_0 + hF(x_0, y_0))$. Continuar generando la secuencia de puntos $(x_n + h, y_n + hF(x_n, y_n))$ o (x_{n+1}, y_{n+1}).

89. Falso: $y = x^3$ es una solución de $xy' - 3y = 0$, pero $y = x^3 + 1$ no es solución.

91. Verdadero

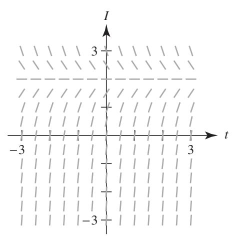
93. *a*)

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	4	2.6813	1.7973	1.2048	0.8076	0.5413
y_1	4	2.56	1.6384	1.0486	0.6711	0.4295
y_2	4	2.4	1.44	0.864	0.5184	0.3110
e_1	0	0.1213	0.1589	0.1562	0.1365	0.1118
e_2	0	0.2813	0.3573	0.3408	0.2892	0.2303
r		0.4312	0.4447	0.4583	0.4720	0.4855

b) Dado que $r \approx 0.5$, si h se reduce a la mitad el error también se reduce a la mitad.

c) De nuevo, el error se reducirá a la mitad.

95. *a*)



b) $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = 2$

97. $\omega = \pm 4$ **99.** Problema Putnam 3, sesión matutina, 1954

Sección 6.2 (página 420)

1. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$ **3.** $y = Ce^x - 3$ **5.** $y^2 - 5x^2 = C$

7. $y = Ce^{(2x^{3/2})/3}$ **9.** $y = C(1 + x^2)$

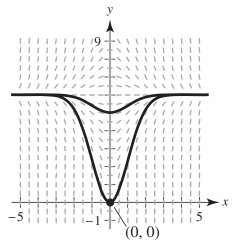
11. $dQ/dt = k/t^2$

$Q = -k/t + C$

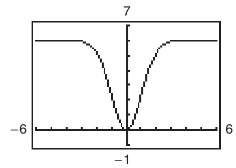
13. $dN/ds = k(500 - s)$

$N = -(k/2)(500 - s)^2 + C$

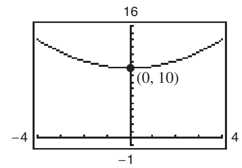
15. *a*)



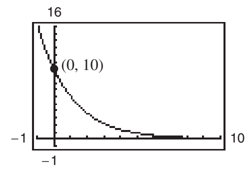
b) $y = 6 - 6e^{-x^2/2}$



17. $y = \frac{1}{4}t^2 + 10$



19. $y = 10e^{-t/2}$



21. $dy/dx = ky$

$y = 6e^{(1/4)\ln(5/2)x} \approx 6e^{0.2291x}$

$y(8) \approx 37.5$

23. $dV/dt = kV$

$V = 20\,000e^{(1/4)\ln(5/8)t} \approx 20\,000\,e^{-0.1175t}$

$V(6) \approx 9\,882$

25. $y = (1/2)e^{[(\ln 10)/5]t} \approx (1/2)e^{0.4605t}$

27. $y = 5(5/2)^{1/4}e^{[\ln(2/5)/4]t} \approx 6.2872e^{-0.2291t}$

29. C es el valor inicial de y, y k es la constante de proporcionalidad.

31. Cuadrantes I y III; dy/dx es positiva cuando ambas x y y son positivas (cuadrante I) o cuando ambas son negativas (cuadrante III).

33. Cantidad después de 1 000 años: 12.96 g

Cantidad después de 10 000 años: 0.26 g

35. Cantidad inicial: 7.63 g

Cantidad después de 1 000 años: 4.95 g

37. Cantidad después de 1 000 años: 4.43 g

Cantidad después de 10 000 años: 1.49 g

39. Cantidad inicial: 2.16 g

Cantidad después de 10 000 años: 1.62 g

41. 95.76%

43. Tiempo necesario para duplicarlo: 11.55 años; cantidad después de 10 años: \$7 288.48

45. Tasa anual: 8.94%; cantidad después de 10 años: \$1 833.67

47. Tasa anual: 9.50%; tiempo necesario para duplicarlo: 7.30 años

49. \$224 174.18 **51.** \$61 377.75

53. *a*) 10.24 años *b*) 9.93 años *c*) 9.90 años *d*) 9.90 años

55. *a*) 8.50 años *b*) 8.18 años *c*) 8.16 años *d*) 8.15 años

57. *a*) $P = 2.40e^{-0.006t}$ *b*) 2.19 millones

c) Dado que $k < 0$, la población es decreciente.

59. *a*) $P = 5.66e^{0.024t}$ *b*) 8.11 millones

c) Dado que $k > 0$, la población es creciente.

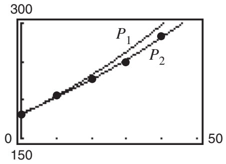
61. *a*) $P = 23.55e^{0.036t}$ *b*) 40.41 millones

c) Dado que $k > 0$, la población es creciente.

63. *a*) $N = 100.1596(1.2455)^t$ *b*) 6.3 h

65. *a*) $N \approx 30(1 - e^{-0.0502t})$ *b*) 36 días

67. *a)* $P_1 \approx 181e^{0.01245t} \approx 181(1.01253)^t$
b) $P_2 = 182.3248(1.01091)^t$
c)



d) 2011

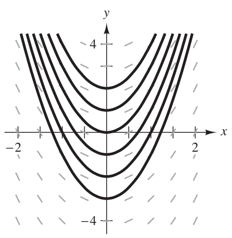
P_2 es una mejor aproximación.

69. *a)* 20 dB *b)* 70 dB *c)* 95 dB *d)* 120 dB
71. 2024 ($t = 16$) **73.** 379.2°F
75. Falso. La razón de crecimiento dy/dx es proporcional a y.
77. Verdadero.

Sección 6.3 (página 431)

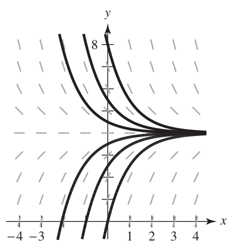
1. $y^2 - x^2 = C$ **3.** $15y^2 + 2x^3 = C$ **5.** $r = Ce^{0.75s}$
7. $y = C(x + 2)^3$ **9.** $y^2 = C - 8 \cos x$
11. $y = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2} + C$ **13.** $y = Ce^{(\ln x)^2/2}$
15. $y^2 = 4e^x + 5$ **17.** $y = e^{-(x^2+2x)/2}$
19. $y^2 = 4x^2 + 3$ **21.** $u = e^{(1 - \cos v^2)/2}$ **23.** $P = P_0 e^{kt}$
25. $4y^2 - x^2 = 16$ **27.** $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ **29.** $f(x) = Ce^{-x/2}$
31. Homogénea de grado 3 **33.** Homogénea de grado 3
35. No homogénea **37.** Homogénea de grado 0
39. $|x| = C(x - y)^2$ **41.** $|y^2 + 2xy - x^2| = C$
43. $y = Ce^{-x^2/(2y^2)}$ **45.** $e^{y/x} = 1 + \ln x^2$ **47.** $x = e^{\operatorname{sen}(y/x)}$

49.



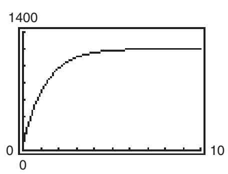
$y = \frac{1}{2}x^2 + C$

51.

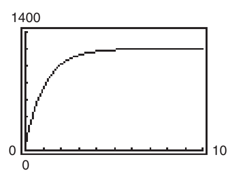


$y = 4 + Ce^{-x}$

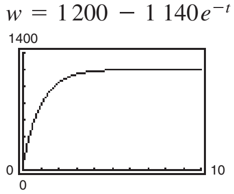
53. *a)* $y \approx 0.1602$ *b)* $y = 5e^{-3x^2}$ *c)* $y \approx 0.2489$
55. *a)* $y \approx 3.0318$ *b)* $y^3 - 4y = x^2 + 12x - 13$ *c)* $y = 3$
57. 97.9% de la cantidad original
59. *a)* $dy/dx = k(y - 4)$ *b)* *a* *c)* Demostración
60. *a)* $dy/dx = k(x - 4)$ *b)* *b* *c)* Demostración
61. *a)* $dy/dx = ky(y - 4)$ *b)* *c* *c)* Demostración
62. *a)* $dy/dx = ky^2$ *b)* *d* *c)* Demostración
63. *a)* $w = 1\,200 - 1\,140\,e^{-0.8t}$



$w = 1\,200 - 1\,140e^{-0.9t}$

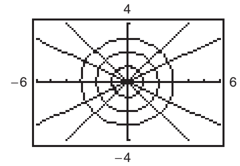


$w = 1\,200 - 1\,140e^{-t}$

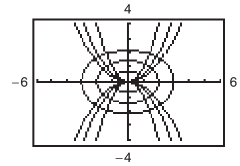


b) 1.31 años; 1.16 años; 1.05 años *c)* 1 200 lb

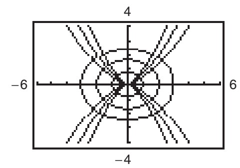
65. Círculos: $x^2 + y^2 = C$
Rectas: $y = Kx$
Las gráficas varían.



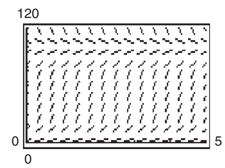
67. Parábolas: $x^2 = Cy$
Elipses: $x^2 + 2y^2 = K$
Las gráficas varían.



69. Curvas: $y^2 = Cx^3$
Elipses: $2x^2 + 3y^2 = K$
Las gráficas varían.



71. *d* **72.** *a* **73.** *b* **74.** *c*
75. *a)* 0.75 *b)* 2 100 *c)* 70 *d)* 4.49 años
e) $dP/dt = 0.75P(1 - P/2\,100)$
77. *a)* 3 *b)* 100
c)

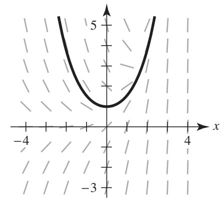


d) 50

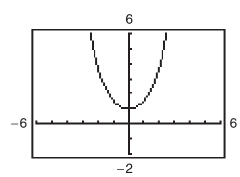
79. $y = 36/(1 + 8e^{-t})$ **81.** $y = 120/(1 + 14e^{-0.8t})$
83. *a)* $P = \dfrac{200}{1 + 7e^{-0.2640t}}$ *b)* 70 panteras *c)* 7.37 años
d) $dP/dt = 0.2640P(1 - P/200)$; 65.6 *e)* 100 años
85. Las respuestas varían.
87. Dos familias de curvas son mutuamente ortogonales si cada curva de la primer familia interseca a cada curva de la segunda familia en ángulos rectos.
89. Demostración
91. Falso. $y' = x/y$ es separable, pero $y = 0$ no es una solución.
93. Falso: $f(tx, ty) \neq t^n f(x, y)$. **95.** Problema Putnam A2, 1988

Sección 6.4 (página 440)

1. Lineal; se puede escribir en la forma $dy/dx + P(x)y = Q(x)$
3. No lineal; no se puede escribir en la forma $dy/dx + P(x)y = Q(x)$
5. $y = 2x^2 + x + C/x$ **7.** $y = -16 + Ce^x$
9. $y = -1 + Ce^{\operatorname{sen} x}$ **11.** $y = (x^3 - 3x + C)/[3(x - 1)]$
13. $y = e^{x^3}(x + C)$
15. *a)* Las respuestas varían.



c)



b) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
17. $y = 1 + 4/e^{\tan x}$ **19.** $y = \operatorname{sen} x + (x + 1) \cos x$
21. $xy = 4$ **23.** $y = -2 + x \ln|x| + 12x$

25. $P = -N/k + (N/k + P_0)e^{kt}$

27. *a)* \$4 212 796.94 *b)* \$31 424 909.75

29. *a)* $\dfrac{dQ}{dt} = q - kQ$ *b)* $Q = \dfrac{q}{k} + \left(Q_0 - \dfrac{q}{k}\right)e^{-kt}$ *c)* $\dfrac{q}{k}$

31. Demostración

33. *a)* $Q = 25e^{-t/20}$ *b)* $-20\ln\left(\frac{3}{5}\right) \approx 10.2$ min *c)* 0

35. *a)* $t = 50$ min *b)* $100 - \dfrac{25}{\sqrt{2}} \approx 82.32$ lb

c) $t = 50$ min; $200 - \dfrac{50}{\sqrt{2}} \approx 164.64$ lb

37. $v(t) = -159.47(1 - e^{-0.2007t})$; -159.47 pies/s

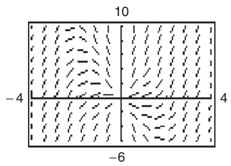
39. $I = \dfrac{E_0}{R} + Ce^{-Rt/L}$ **41.** $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$; $u(x) = e^{\int P(x)\,dx}$

43. *c* **44.** *d* **45.** *a* **46.** *b*

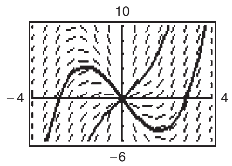
47. $1/y^2 = Ce^{2x^3} + \frac{1}{3}$ **49.** $y = 1/(Cx - x^2)$

51. $1/y^2 = 2x + Cx^2$ **53.** $y^{2/3} = 2e^x + Ce^{2x/3}$

55. *a)*



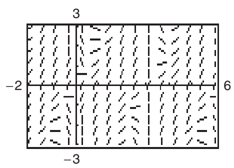
c)



b) $(-2, 4)$: $y = \frac{1}{2}x(x^2 - 8)$

$(2, 8)$: $y = \frac{1}{2}x(x^2 + 4)$

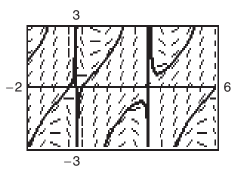
57. *a)*



b) $(1, 1)$: $y = (2\cos 1 + \operatorname{sen} 1)\csc x - 2\cot x$

$(3, -1)$: $y = (2\cos 3 - \operatorname{sen} 3)\csc x - 2\cot x$

c)



59. $2e^x + e^{-2y} = C$ **61.** $y = Ce^{-\operatorname{sen} x} + 1$

63. $x^3y^2 + x^4y = C$ **65.** $y = [e^x(x - 1) + C]/x^2$

67. $x^4y^4 - 2x^2 = C$ **69.** $y = \frac{12}{5}x^2 + C/x^3$

71. Falso. $y' + xy = x^2$ es lineal.

Ejercicios de repaso para el capítulo 6 (página 443)

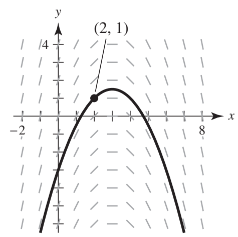
1. Sí **3.** $y = \frac{4}{3}x^3 + 7x + C$ **5.** $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$

7. $y = \frac{2}{5}(x - 5)^{5/2} + \frac{10}{3}(x - 5)^{3/2} + C$ **9.** $y = -e^{2-x} + C$

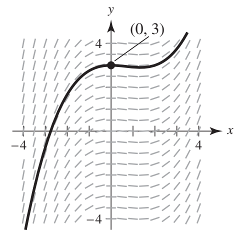
11.

x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx	-10	-4	-4	0	2	8

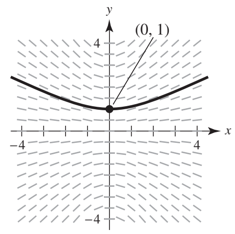
13. *a)* y *b)*



15. *a)* y *b)*



17. *a)* y *b)*



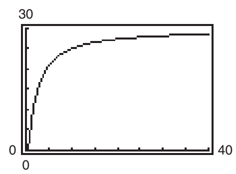
19. $y = 8x - \frac{1}{2}x^2 + C$

21. $y = -3 - 1/(x + C)$ **23.** $y = Ce^x/(2 + x)^2$

25. $y \approx \frac{3}{4}e^{0.379t}$ **27.** $y \approx 5e^{-0.680t}$ **29.** ≈ 7.79 pulg

31. *a)* $S \approx 30e^{-1.7918/t}$ *b)* 20 965 unidades

c)

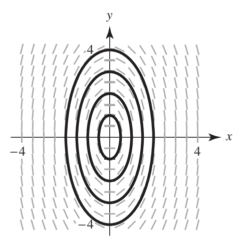


33. ≈ 37.5 años **35.** $y = \frac{1}{5}x^5 + 7\ln|x| + C$

37. $y = Ce^{8x^2}$ **39.** $x/(x^2 - y^2) = C$

41. Demostración; $y = -2x + \frac{1}{2}x^3$

43.



Las gráficas varían.
$4x^2 + y^2 = C$

45. *a)* 0.55 *b)* 5 250 *c)* 150 *d)* 6.41 años

e) $\dfrac{dP}{dt} = 0.55P\left(1 - \dfrac{P}{5\,250}\right)$

47. $y = \dfrac{80}{1 + 9e^{-t}}$

49. *a)* $P(t) = \dfrac{20\,400}{1 + 16e^{-0.553t}}$ *b)* 17 118 truchas *c)* 4.94 años

51. $y = -10 + Ce^x$ **53.** $y = e^{x/4}\left(\frac{1}{4}x + C\right)$

55. $y = (x + C)/(x - 2)$

57. $y = Ce^{3x} - \frac{1}{13}(2\cos 2x + 3\operatorname{sen} 2x)$

59. $y = e^{5x}/10 + Ce^{-5x}$ **61.** $y = 1/(1 + x + Ce^x)$

63. $y^{-2} = Cx^2 + 2/(3x)$

65. Las respuestas varían. Muestra de respuesta:
$(x^2 + 3y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$; $x^3 = C(x^2 + y^2)$

67. Las respuestas varían. Muestra de respuesta:
$x^3y' + 2x^2y = 1$; $x^2y = \ln|x| + C$

SP Solución de problemas (página 445)

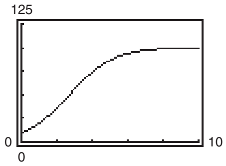
1. *a*) $y = 1/(1 - 0.01t)^{100}$; $T = 100$

b) $y = 1/\left[\left(\dfrac{1}{y_0}\right)^{\varepsilon} - k\varepsilon t\right]^{1/\varepsilon}$; Las explicaciones varían.

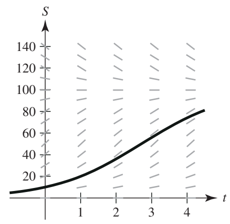
3. *a*) $dS/dt = kS(L - S)$; $S = 100/(1 + 9e^{-0.8109t})$

b) 2.7 meses

c)



d)



e) Las ventas disminuirán hacia la recta $S = L$.

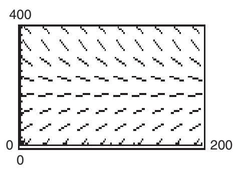
5. Demostración; La gráfica de la función de logística es sólo un desplazamiento de la gráfica de la tangente hiperbólica.

7. 1 481.45 s ≈ 24 min, 41 s

9. 2 575.95 s ≈ 42 min, 56 s

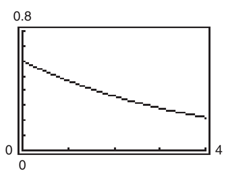
11. *a*) $s = 184.21 - Ce^{-0.019t}$

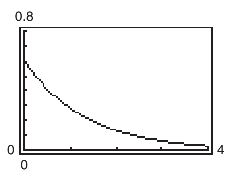
b)



c) Cuando $t \to \infty$, entonces $Ce^{-0.019t} \to 0$, y $s \to 184.21$.

13. *a*) $C = 0.6e^{-0.25t}$ *b*) $C = 0.6e^{-0.75t}$





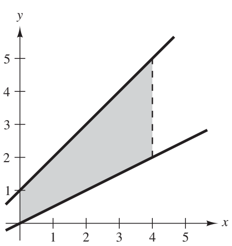
Capítulo 7

Sección 7.1 (página 454)

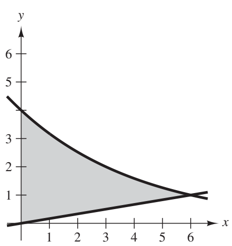
1. $-\displaystyle\int_0^6 (x^2 - 6x)\,dx$ **3.** $\displaystyle\int_0^3 (-2x^2 + 6x)\,dx$

5. $-6\displaystyle\int_0^1 (x^3 - x)\,dx$

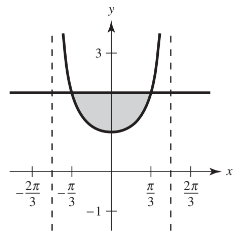
7.



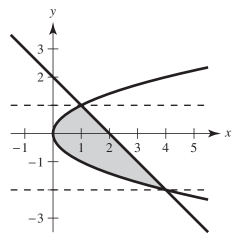
9.



11.



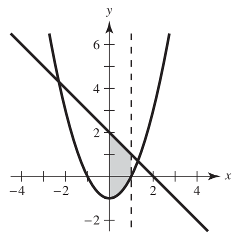
13.



15. *d*

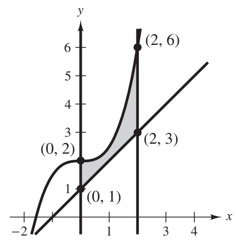
17. *a*) $\frac{125}{6}$ *b*) $\frac{125}{6}$ *c*) Integrando con respecto a y; las respuestas varían.

19.



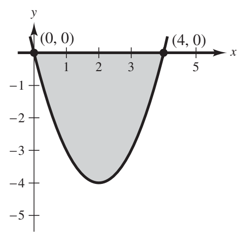
$\frac{13}{6}$

21.



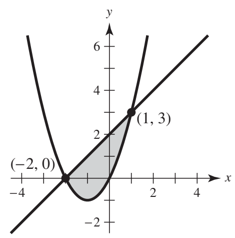
2

23.



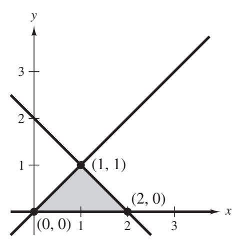
$\frac{32}{3}$

25.



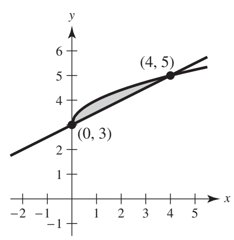
$\frac{9}{2}$

27.



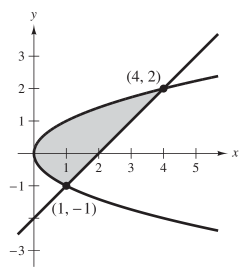
1

29.



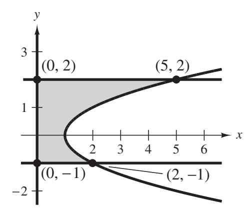
$\frac{4}{3}$

31.



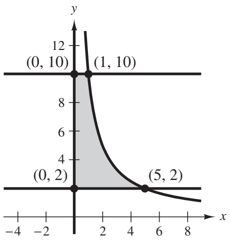
$\frac{9}{2}$

33.



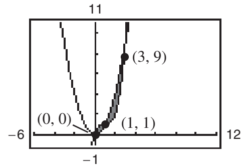
6

35.



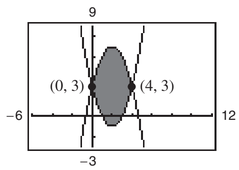
$10 \ln 5 \approx 16.094$

37. *a)*



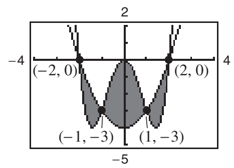
b) $\frac{37}{12}$

39. *a)*



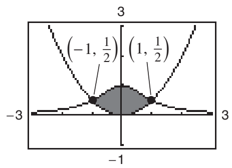
b) $\frac{64}{3}$

41. *a)*



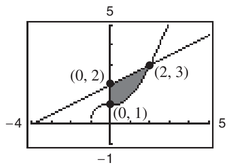
b) 8

43. *a)*



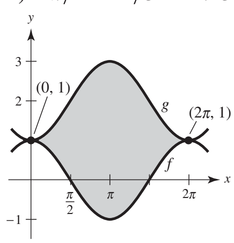
b) $\pi/2 - 1/3 \approx 1.237$

45. *a)*



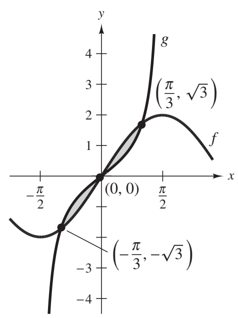
b) ≈ 1.759

47.



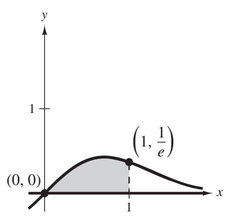
$4\pi \approx 12.566$

49.



$2(1 - \ln 2) \approx 0.614$

51.

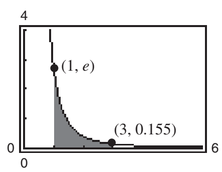


$(1/2)(1 - 1/e) \approx 0.316$

53. *a)*

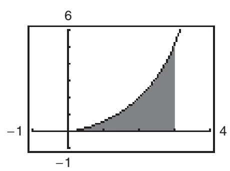
b) 4

55. *a)*



b) ≈ 1.323

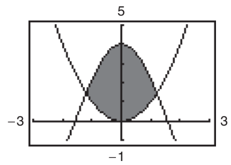
57. *a)*



b) La función es difícil de integrar.

c) ≈ 4.7721

59. *a)*

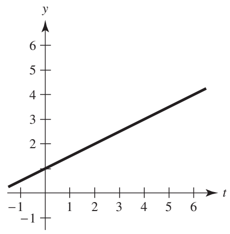


b) Las intersecciones son difíciles de encontrar.

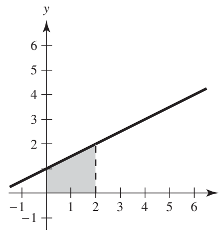
c) ≈ 6.3043

61. $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$

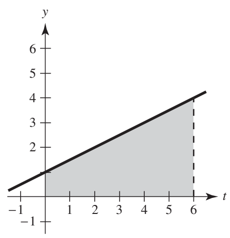
a) $F(0) = 0$



b) $F(2) = 3$

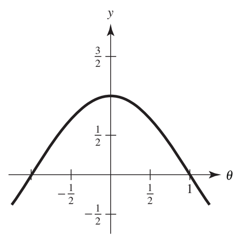


c) $F(6) = 15$

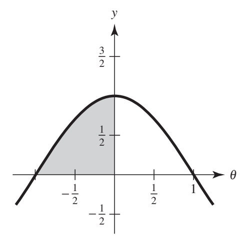


63. $F(\alpha) = (2/\pi)[\operatorname{sen}(\pi\alpha/2) + 1]$

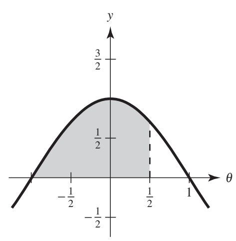
a) $F(-1) = 0$



b) $F(0) = 2/\pi \approx 0.6366$



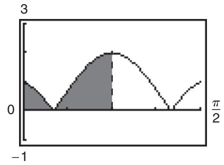
c) $F(1/2) = \left(\sqrt{2} + 2\right)/\pi \approx 1.0868$



65. 14 **67.** 16

69. Las respuestas varían. Ejemplos de respuesta:
a) $\approx$ 966 pies^2 *b)* $\approx$ 1 004 pies^2

71. $A = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{2} \approx 0.7990$ **73.** $\int_{-2}^{1} [x^3 - (3x - 2)]\, dx = \frac{27}{4}$



75. $\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{1}{x^2+1} - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)\right] dx \approx 0.0354$

77. Las respuestas varían. Ejemplo: $x^4 - 2x^2 + 1 \le 1 - x^2$ en $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 [(1 - x^2) - (x^4 - 2x^2 + 1)]\, dx = \tfrac{4}{15}$$

79. La oferta 2 es mejor porque el salario acumulado (área bajo la curva) es mayor.

81. *a*) La integral $\int_0^5 [v_1(t) - v_2(t)]\, dt = 10$ significa que de 0 a 5 segundos el primer carro viajó 10 metros más que el segundo.

La integral $\int_0^{10} [v_1(t) - v_2(t)]\, dt = 30$ significa que de 0 a 10 segundos el primer carro viajó 30 metros más que el segundo.

La integral $\int_{20}^{30} [v_1(t) - v_2(t)]\, dt = -5$ significa que de 20 a 30 segundos el segundo carro viajó 5 metros más que el primero.

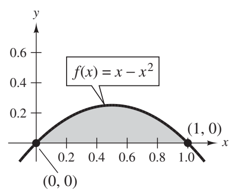
b) No. No se sabe cuándo inician ambos autos o la distancia inicial entre ellos.

c) El auto con velocidad v_1 va a la cabeza por 30 metros.

d) El carro 1 está a la cabeza por 8 metros.

83. $b = 9\left(1 - 1/\sqrt[3]{4}\right) \approx 3.330$ **85.** $a = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1.172$

87. Las respuestas varían. Ejemplo de muestra: $\frac{1}{6}$



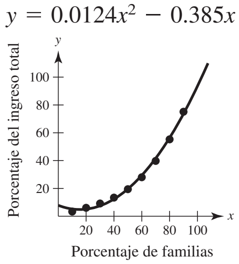
89. *a*) $(-2, -11), (0, 7)$ *b*) $y = 9x + 7$

c) 3.2, 6.4, 3.2; el área entre los dos puntos de inflexión es la suma de las áreas entre las otras dos regiones.

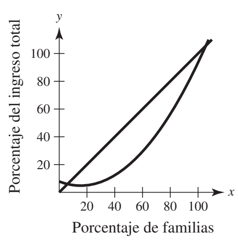
91. \$6.825 miles de millones

93. *a*) $y = 0.0124x^2 - 0.385x + 7.85$

b)



c)



d) $\approx$ 2 006.7

95. $\frac{16}{3}\left(4\sqrt{2} - 5\right) \approx 3.503$

97. *a*) $\approx 6.031\ \text{m}^2$ *b*) $\approx 12.062\ \text{m}^3$ *c*) 60 310 lb

99. Verdadero

101. Falso. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = 2x - x^2$. f y g se intersecan en (1, 1), el punto medio de [0, 2], pero

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^2 [x - (2x - x^2)]\, dx = \tfrac{2}{3} \ne 0.$$

103. $\sqrt{3}/2 + 7\pi/24 + 1 \approx 2.7823$

105. Problema Putnam A1, 1993

Sección 7.2 (página 465)

1. $\displaystyle\pi\int_0^1 (-x + 1)^2\, dx = \frac{\pi}{3}$ **3.** $\displaystyle\pi\int_1^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \frac{15\pi}{2}$

5. $\displaystyle\pi\int_0^1 [(x^2)^2 - (x^5)^2]\, dx = \frac{6\pi}{55}$ **7.** $\displaystyle\pi\int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = 8\pi$

9. $\displaystyle\pi\int_0^1 (y^{3/2})^2\, dy = \frac{\pi}{4}$

11. *a*) $9\pi/2$ *b*) $\left(36\pi\sqrt{3}\right)/5$ *c*) $\left(24\pi\sqrt{3}\right)/5$ *d*) $\left(84\pi\sqrt{3}\right)/5$

13. *a*) $32\pi/3$ *b*) $64\pi/3$ **15.** 18π

17. $\pi\left(48 \ln 2 - \frac{27}{4}\right) \approx 83.318$ **19.** $124\pi/3$ **21.** $832\pi/15$

23. $\pi \ln 5$ **25.** $2\pi/3$ **27.** $(\pi/2)(1 - 1/e^2) \approx 1.358$

29. $277\pi/3$ **31.** 8π **33.** $\pi^2/2 \approx 4.935$

35. $(\pi/2)(e^2 - 1) \approx 10.036$ **37.** 1.969 **39.** 15.4115

41. $\pi/3$ **43.** $2\pi/15$ **45.** $\pi/2$ **47.** $\pi/6$

49. *a*) El área parece acercarse a 1 de manera que volumen (área cuadrada $\times\ \pi$) es casi 3.

51. Una curva seno en $[0, \pi/2]$ girada alrededor del eje x.

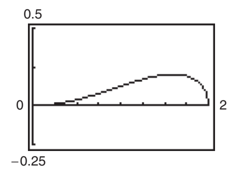
53. La parábola $y = 4x - x^2$ es la traslación horizontal de la parábola $y = 4 - x^2$, de manera que sus volúmenes son iguales.

55. *a*) El enunciado es verdadero. Las explicaciones varían.

b) El enunciado es falso. Las explicaciones varían.

57. 18π **59.** Demostración **61.** $\pi r^2 h[1 - (h/H) + h^2/(3H^2)]$

63.

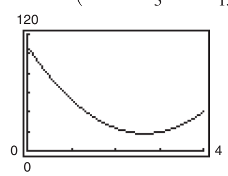


$\pi/30$

65. *a*) 60π *b*) 50π

67. *a*) $V = \pi\left(4b^2 - \frac{64}{3}b + \frac{512}{15}\right)$

b)



$b \approx 2.67$

c) $b = \frac{8}{3} \approx 2.67$

69. *a*) *ii*); cilindro circular recto de radio r y altura h.

b) *iv*); elipsoide cuya elipse subyacente tiene la ecuación $(x/b)^2 + (y/a)^2 = 1$

c) *iii*); esfera de radio r.

d) *i*); cono circular recto de radio r y altura h.

e) *v*); toroide con radio transversal r y demás radios R.

71. *a*) $\frac{81}{10}$ *b*) $\frac{9}{2}$ **73.** $\frac{16}{3}r^3$ **75.** $V = \frac{4}{3}\pi(R^2 - r^2)^{3/2}$

77. 19.7443 **79.** *a*) $\frac{2}{3}r^3$ *b*) $\frac{2}{3}r^3 \tan\theta$; Como $\theta \to 90°$, entonces $V \to \infty$.

Sección 7.3 (página 474)

1. $\displaystyle 2\pi\int_0^2 x^2\, dx = \frac{16\pi}{3}$ **3.** $\displaystyle 2\pi\int_0^4 x\sqrt{x}\, dx = \frac{128\pi}{5}$

5. $\displaystyle 2\pi\int_0^3 x^3\, dx = \frac{81}{2}\pi$ **7.** $\displaystyle 2\pi\int_0^2 x(4x - 2x^2)\, dx = \frac{16\pi}{3}$

9. $2\pi\int_0^2 x(x^2 - 4x + 4)\,dx = \frac{8\pi}{3}$

11. $2\pi\int_2^4 x\sqrt{x-2}\,dx = \frac{128\pi}{15}\sqrt{2}$

13. $2\pi\int_0^1 x\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)dx = \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \approx 0.986$

15. $2\pi\int_0^2 y(2-y)\,dy = \frac{8\pi}{3}$

17. $2\pi\left[\int_0^{1/2} y\,dy + \int_{1/2}^1 y\left(\frac{1}{y} - 1\right)dy\right] = \frac{\pi}{2}$

19. $2\pi\left[\int_0^8 y^{4/3}\,dy\right] = \frac{768\pi}{7}$

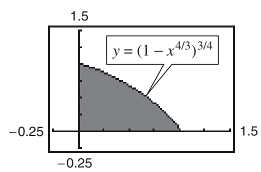
21. $2\pi\int_0^2 y(4-2y)\,dy = 16\pi/3$ **23.** 64π **25.** 16π

27. Métodos de las capas; es mucho más sencillo expresar x en términos de y que a la inversa.

29. *a*) $128\pi/7$ *b*) $64\pi/5$ *c*) $96\pi/5$

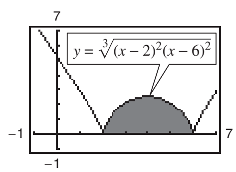
31. *a*) $\pi a^3/15$ *b*) $\pi a^3/15$ *c*) $4\pi a^3/15$

33. *a*)



b) 1.506

35. *a*)



b) 187.25

37. *d* **39.** *a*, *c*, *b*

41. Ambas integrales dan el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$ y $x = 5$ alrededor del eje x.

43. *a*) Los rectángulos serían verticales.
b) Los rectángulos serían horizontales.

45. Diámetro $= 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \approx 1.464$ **47.** $4\pi^2$

49. *a*) Región acotada por $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$
b) Girada alrededor del eje y.

51. *a*) Región acotada por $x = \sqrt{6-y}$, $y = 0$, $x = 0$
b) Girada alrededor de $y = -2$

53. *a*) Demostración *b*) *i*) $V = 2\pi$ *ii*) $V = 6\pi^2$

55. Demostración

57. *a*) $R_1(n) = n/(n+1)$ *b*) $\lim_{n\to\infty} R_1(n) = 1$
c) $V = \pi ab^{n+2}[n/(n+2)]$; $R_2(n) = n/(n+2)$
d) $\lim_{n\to\infty} R_2(n) = 1$
e) La gráfica se aproxima a la recta $x = b$ cuando n tiende a ∞.

59. *a*) y *b*) $\approx$ 121 475 pies^3 **61.** $c = 2$

63. *a*) $64\pi/3$ *b*) $2\,048\pi/35$ *c*) $8\,192\pi/105$

Sección 7.4 (página 485)

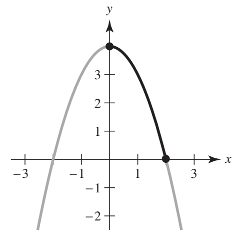
1. *a*) y *b*) 17 **3.** $\frac{5}{3}$ **5.** $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \approx 1.219$

7. $5\sqrt{5} - 2\sqrt{2} \approx 8.352$ **9.** 309.3195

11. $\ln\left[\left(\sqrt{2}+1\right)/\left(\sqrt{2}-1\right)\right] \approx 1.763$

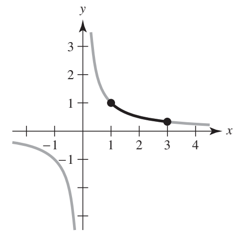
13. $\frac{1}{2}(e^2 - 1/e^2) \approx 3.627$ **15.** $\frac{76}{3}$

17. *a*)



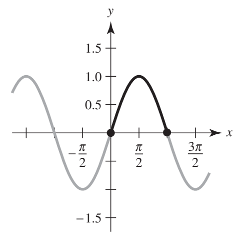
b) $\int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx$
c) ≈ 4.647

19. *a*)



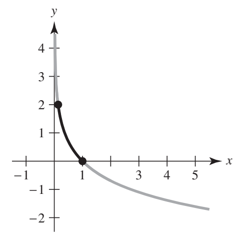
b) $\int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,dx$
c) ≈ 2.147

21. *a*)



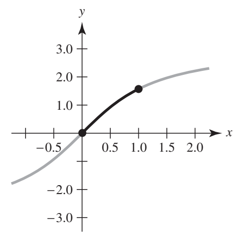
b) $\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$
c) ≈ 3.820

23. *a*)



b) $\int_0^2 \sqrt{1 + e^{-2y}}\,dy = \int_{e^{-2}}^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx$
c) ≈ 2.221

25. *a*)



b) $\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{2}{1+x^2}\right)^2}\,dx$
c) ≈ 1.871

27. *b* **29.** *a*) 64.125 *b*) 64.525 *c*) 64.666 *d*) 64.672

31. $20[\operatorname{senh} 1 - \operatorname{senh}(-1)] \approx 47.0$ m **33.** $\approx 1\,480$

35. $3 \operatorname{arcsen} \frac{2}{3} \approx 2.1892$

37. $2\pi\int_0^3 \frac{1}{3}x^3\sqrt{1 + x^4}\,dx = \frac{\pi}{9}\left(82\sqrt{82} - 1\right) \approx 258.85$

39. $2\pi\int_1^2 \left(\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}\right)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)dx = \frac{47\pi}{16} \approx 9.23$

41. $2\pi\int_{-1}^1 2\,dx = 8\pi \approx 25.13$

43. $2\pi\int_1^8 x\sqrt{1 + \frac{1}{9x^{4/3}}}\,dx = \frac{\pi}{27}\left(145\sqrt{145} - 10\sqrt{10}\right) \approx 199.48$

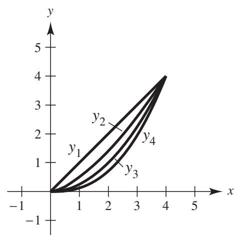
45. $2\pi\int_0^2 x\sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}\,dx = \frac{\pi}{3}\left(16\sqrt{2} - 8\right) \approx 15.318$

47. 14.424

49. Una curva rectificable es una curva con longitud de arco finita.

51. La fórmula de integración para el área de revolución se deduce de la fórmula para el área lateral de un cono circular recto. La fórmula es $S = 2\pi rL$, donde $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, que es el radio promedio del tronco y L es la longitud del segmento de recta del tronco. El elemento representativo es $2\pi f(d_i)\sqrt{1 + (\Delta y_i/\Delta x_i)^2}\,\Delta x_i$.

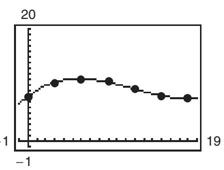
53. *a)*



b) y_1, y_2, y_3, y_4
c) $s_1 \approx 5.657$; $s_2 \approx 5.759$; $s_3 \approx 5.916$; $s_4 \approx 6.063$

55. 20π **57.** $6\pi(3 - \sqrt{5}) \approx 14.40$

59. *a)* Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: 5 207.62 pulg^3
b) Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: 1 168.64 pulg^3
c) $r = 0.0040y^3 - 0.142y^2 + 1.23y + 7.9$



d) 5 279.64 pulg^3; 1 179.5 pulg^2

61. *a)* $\pi(1 - 1/b)$ *b)* $2\pi\int_1^b \sqrt{x^4+1}/x^3\,dx$

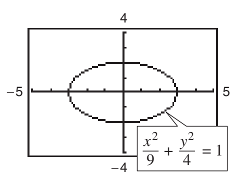
c) $\lim\limits_{b\to\infty} V = \lim\limits_{b\to\infty} \pi(1 - 1/b) = \pi$

d) Porque $\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} > \dfrac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \dfrac{1}{x} > 0$ en $[1, b]$,

se tiene $\displaystyle\int_1^b \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx > \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_1^b = \ln b$ y $\lim\limits_{b\to\infty}$

$\ln b \to \infty$. De esta manera, $\displaystyle\lim_{b\to\infty} 2\pi\int_1^b \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx = \infty$.

63. *a)*



b) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{1 + \frac{4x^2}{81 - 9x^2}}\,dx$

c) No se puede evaluar esta integral definida porque el integrando no está definido en $x = 3$. La regla de Simpson no puede aplicarse por la misma razón.

65. Objeto volador: $\frac{2}{3}$ unidades

Perseguidor: $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{4}{3} = 2\left(\frac{2}{3}\right)$

67. $384\pi/5$ **69.** Demostración **71.** Demostración

Sección 7.5 (página 495)

1. 2 000 pies-lb **3.** 896 N-m
5. 40.833 pulg-lb $\approx$ 3.403 pies-lb **7.** 8 750 N-cm $=$ 87.5 N-m
9. 160 pulg-lb $\approx$ 13.3 pies-lb **11.** 37.125 pies-lb
13. *a)* 487.805 millas-tons $\approx 5.151 \times 10^9$ pies-lb
b) 1 395.349 millas-tons $\approx 1.473 \times 10^{10}$ pies-lb
15. *a)* 2.93×10^4 millas-tons $\approx 3.10 \times 10^{11}$ pies-lb
b) 3.38×10^4 millas-tons $\approx 3.57 \times 10^{11}$ pies-lb
17. *a)* 2 496 pies-lb *b)* 9 984 pies-lb **19.** 470 400π N-m
21. 2 995.2π pies-lb **23.** 20 217.6π pies-lb **25.** 2 457 π pies-lb
27. 600 pies-lb **29.** 450 pies-lb **31.** 168.75 pies-lb
33. Si un objeto se mueve una distancia D en la dirección en la que una fuerza constante es aplicada, entonces el trabajo W hecho por la fuerza se define como $W = FD$.
35. La situación en *a)* requiere más trabajo. No hay trabajo requerido para el apartado *b)* porque la distancia es 0.
37. *a)* 54 pies-lb *b)* 160 pies-lb *c)* 9 pies-lb *d)* 18 pies-lb
39. $2\,000 \ln(3/2) \approx 810.93$ pies-lb **41.** $3k/4$
43. 3 249.4 pies-lb **45.** 10 330.3 pies-lb

Sección 7.6 (página 506)

1. $\bar{x} = -\frac{4}{3}$ **3.** $\bar{x} = 12$ **5.** *a)* $\bar{x} = 16$ *b)* $\bar{x} = -2$
7. $x = 6$ ft **9.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{10}{9}, -\frac{1}{9}\right)$ **11.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(2, \frac{48}{25}\right)$
13. $M_x = \rho/3, M_y = 4\rho/3, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = (4/3, 1/3)$
15. $M_x = 4\rho, M_y = 64\rho/5, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = (12/5, 3/4)$
17. $M_x = \rho/35, M_y = \rho/20, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = (3/5, 12/35)$
19. $M_x = 99\rho/5, M_y = 27\rho/4, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = (3/2, 22/5)$
21. $M_x = 192\rho/7, M_y = 96\rho, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = (5, 10/7)$
23. $M_x = 0, M_y = 256\rho/15, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = (8/5, 0)$
25. $M_x = 27\rho/4, M_y = -27\rho/10, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = (-3/5, 3/2)$

27. $\displaystyle A = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{4}{3}$

$\displaystyle M_x = \int_0^2 \left(\frac{2x + x^2}{2}\right)(2x - x^2)\,dx = \frac{32}{15}$

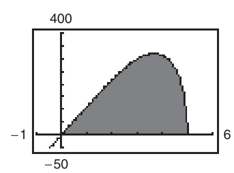
$\displaystyle M_y = \int_0^2 x(2x - x^2)\,dx = \frac{4}{3}$

29. $\displaystyle A = \int_0^3 (2x + 4)\,dx = 21$

$\displaystyle M_x = \int_0^3 \left(\frac{2x + 4}{2}\right)(2x + 4)\,dx = 78$

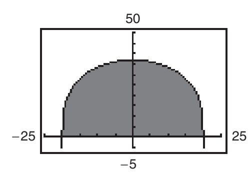
$\displaystyle M_y = \int_0^3 x(2x + 4)\,dx = 36$

31.



$(\bar{x}, \bar{y}) = (3.0, 126.0)$

33.

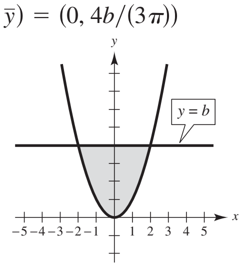


$(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 16.2)$

35. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{b}{3}, \dfrac{c}{3}\right)$ **37.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{(a + 2b)c}{3(a + b)}, \dfrac{a^2 + ab + b^2}{3(a + b)}\right)$

39. $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 4b/(3\pi))$

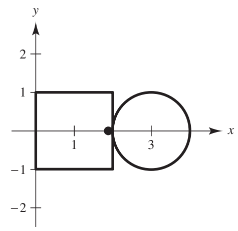
41. *a)*



b) $\bar{x} = 0$ por simetría
c) $\displaystyle M_y = \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} x(b - x^2)\,dx = 0$ porque $x(b - x^2)$ es una función impar.
d) $\bar{y} > b/2$ porque el área es mayor para $y > b/2$.
e) $\bar{y} = (3/5)b$

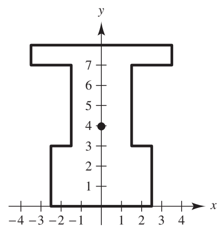
43. *a)* $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 12.98)$
b) $y = (-1.02 \times 10^{-5})x^4 - 0.0019x^2 + 29.28$
c) $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 12.85)$

45.



$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{4 + 3\pi}{4 + \pi}, 0\right)$

47.



$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \dfrac{135}{34}\right)$

49. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{2 + 3\pi}{2 + \pi}, 0\right)$ **51.** $160\pi^2 \approx 1\,579.14$

53. $128\pi/3 \approx 134.04$

55. El centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ es $\bar{x} = M_y/m$ y $\bar{y} = M_x/m$, donde:
1. $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ es la masa total del sistema.
2. $M_y = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n$ es el momento alrededor del eje y.
3. $M_x = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n$ es el momento alrededor del eje x.

57. Ver teorema 7.1 en la página 505. **59.** $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2r/\pi)$

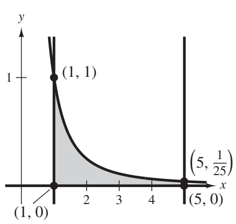
61. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{n+1}{n+2}, \dfrac{n+1}{4n+2}\right)$; a medida que $n \to \infty$, la región se contrae hacia los segmentos de recta $y = 0$ para $0 \le x \le 1$ y $x = 1$ para $0 \le y \le 1$; $(\bar{x}, \bar{y}) \to \left(1, \dfrac{1}{4}\right)$.

Sección 7.7 (página 513)

1. 1 497.6 lb **3.** 4 992 lb **5.** 748.8 lb **7.** 1 123.2 lb
9. 748.8 lb **11.** 1 064.96 lb **13.** 117 600 N
15. 2 381 400 N **17.** 2 814 lb **19.** 6 753.6 lb **21.** 94.5 lb
23. Demostración **25.** Demostración **27.** 960 lb
29. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta (utilizando la regla de Simpson): 3 010.8 lb
31. 8 213.0 lb
33. $3\sqrt{2}/2 \approx 2.12$ pies; la presión aumenta al incrementarse la profundidad.
35. Porque se mide la fuerza total contra una región entre dos profundidades.

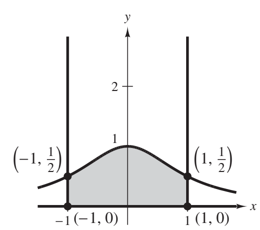
Ejercicios de repaso para el capítulo 7 (página 515)

1.



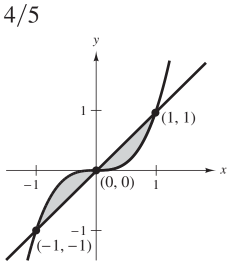
$4/5$

3.



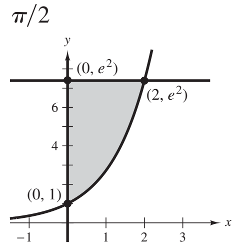
$\pi/2$

5.



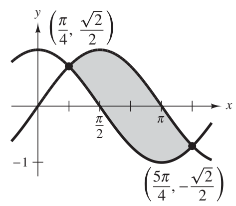
$\frac{1}{2}$

7.



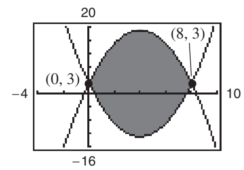
$e^2 + 1$

9.



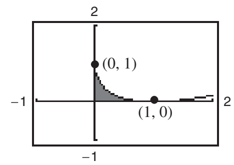
$2\sqrt{2}$

11.



$\frac{512}{3}$

13.



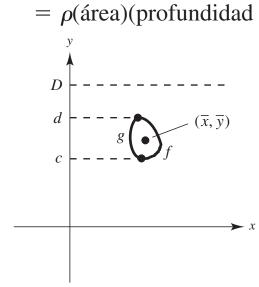
$\frac{1}{6}$

15. $\displaystyle\int_0^2 [0 - (y^2 - 2y)]\,dy = \int_{-1}^0 2\sqrt{x+1}\,dx = \frac{4}{3}$

17. $\displaystyle\int_0^2 \left[1 - \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right] dx + \int_2^3 [1 - (x - 2)]\,dx$
$\displaystyle = \int_0^1 [(y + 2) - (2 - 2y)]\,dy = \frac{3}{2}$

19. *a)* 9 920 pies^2 *b)* 10 413$\frac{1}{3}$ pies^2
21. *a)* 9π *b)* 18π *c)* 9π *d)* 36π
23. *a)* 64π *b)* 48π **25.** $\pi^2/4$
27. $(4\pi/3)(20 - 9\ln 3) \approx 42.359$
29. *a)* $\dfrac{4}{15}$ *b)* $\dfrac{\pi}{12}$ *c)* $\dfrac{32\pi}{105}$ **31.** 1.958 pies
33. $\frac{8}{15}\left(1 + 6\sqrt{3}\right) \approx 6.076$ **35.** 4 018.2 pies
37. 15π **39.** 62.5 pulg-lb $\approx$ 5.208 pies-lb
41. $122\,980\pi$ pies-lb $\approx$ 193.2 pies-ton **43.** 200 pies-lb
45. $a = 15/4$ **47.** $(\bar{x}, \bar{y}) = (a/5, a/5)$ **49.** $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2a^2/5)$
51. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{2(9\pi + 49)}{3(\pi + 9)}, 0\right)$
53. Sea D = superficie del líquido; ρ = peso por volumen cúbico.

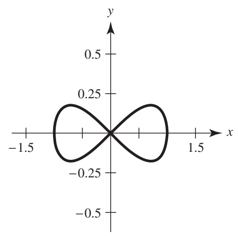
$$F = \rho\int_c^d (D - y)[f(y) - g(y)]\,dy$$
$$= \rho\left[\int_c^d D[f(y) - g(y)]\,dy - \int_c^d y[f(y) - g(y)]\,dy\right]$$
$$= \rho\left[\int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy\right]\left[D - \frac{\int_c^d y[f(y) - g(y)]\,dy}{\int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy}\right]$$
$$= \rho(\text{área})(D - \bar{y})$$
$$= \rho(\text{área})(\text{profundidad del centroide})$$



SP Solución de problemas (página 517)

1. 3 **3.** $y = 0.2063x$

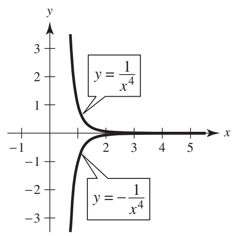
5. $\dfrac{5\sqrt{2}\pi}{3}$



7. $V = 2\pi\left[d + \frac{1}{2}\sqrt{w^2 + l^2}\right]lw$ **9.** $f(x) = 2e^{x/2} - 2$

11. 89.3%

13.



a) $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{63}{43}, 0\right)$

b) $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{3b(b+1)}{2(b^2+b+1)}, 0\right)$

c) $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

15. Excedente del consumidor: 1 600; excedente del productor: 400

17. Muro en el extremo bajo: 9 984 lb
Muro en el extremo profundo: 39 936 lb
Muro lateral: 19 968 lb + 26 624 lb = 46 592 lb

Capítulo 8

Sección 8.1 (página 524)

1. b **3.** c

5. $\displaystyle\int u^n\,du$; $u = 5x - 3,\ n = 4$ **7.** $\displaystyle\int \frac{du}{u}$; $u = 1 - 2\sqrt{x}$ **9.** $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$; $u = t,\ a = 1$

11. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du$; $u = t^2$ **13.** $\displaystyle\int e^u\,du$; $u = \operatorname{sen} x$ **15.** $2(x - 5)^7 + C$

17. $-7/[6(z - 10)^6] + C$ **19.** $\frac{1}{2}v^2 - 1/[6(3v - 1)^2] + C$

21. $-\frac{1}{3}\ln|-t^3 + 9t + 1| + C$ **23.** $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x - 1| + C$

25. $\ln(1 + e^x) + C$ **27.** $\dfrac{x}{15}(48x^4 + 200x^2 + 375) + C$

29. $\operatorname{sen}(2\pi x^2)/(4\pi) + C$ **31.** $-(1/\pi)\csc \pi x + C$

33. $\frac{1}{11}e^{11x} + C$ **35.** $2\ln(1 + e^x) + C$ **37.** $(\ln x)^2 + C$

39. $-\ln(1 - \operatorname{sen} x) + C = \ln|\sec x(\sec x + \tan x)| + C$

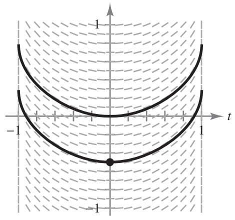
41. $\csc\theta + \cot\theta + C = (1 + \cos\theta)/\operatorname{sen}\theta + C$

43. $-\frac{1}{4}\operatorname{arcsen}(4t + 1) + C$ **45.** $\frac{1}{2}\ln|\cos(2/t)| + C$

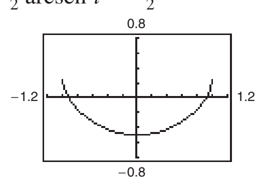
47. $6\operatorname{arcsen}[(x - 5)/5] + C$ **49.** $\frac{1}{4}\arctan[(2x + 1)/8] + C$

51. $\operatorname{arcsen}\left[(x + 2)/\sqrt{5}\right] + C$

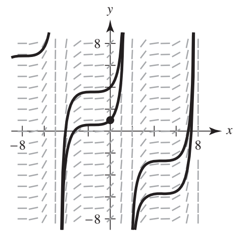
53. a)



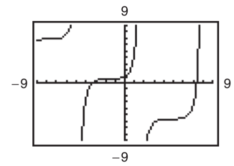
b) $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} t^2 - \frac{1}{2}$



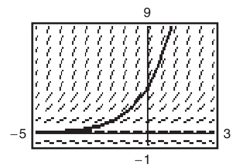
55. a)



b) $2\tan x + 2\sec x - x - 1 + C$



57. $y = 4e^{0.8x}$



59. $y = \frac{1}{2}e^{2x} + 10e^x + 25x + C$

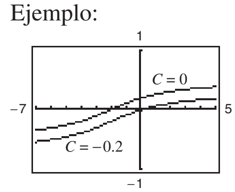
61. $r = 10\operatorname{arcsen} e^t + C$ **63.** $y = \frac{1}{2}\arctan(\tan x/2) + C$

65. $\frac{1}{2}$ **67.** $\frac{1}{2}(1 - e^{-1}) \approx 0.316$ **69.** 8 **71.** $\pi/18$

73. $18\sqrt{6}/5 \approx 8.82$ **75.** $\frac{3}{2}\ln\left(\frac{34}{9}\right) + \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{5}{3}\right) \approx 2.68$

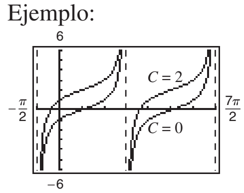
77. $\frac{4}{3} \approx 1.333$

79. $\frac{1}{3}\arctan\left[\frac{1}{3}(x + 2)\right] + C$
Las gráficas varían.
Ejemplo:



Una gráfica es una traslación vertical de la otra.

81. $\tan\theta - \sec\theta + C$
Las gráficas varían.
Ejemplo:



Una gráfica es una traslación vertical de la otra.

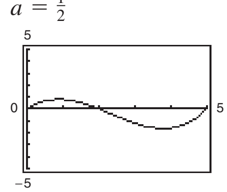
83. Regla de las potencias: $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$; $u = x^2 + 1,\ n = 3$

85. Regla de los logaritmos: $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$; $u = x^2 + 1$

87. $a = \sqrt{2},\ b = \dfrac{\pi}{4};\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

89. $a = \frac{1}{2}$

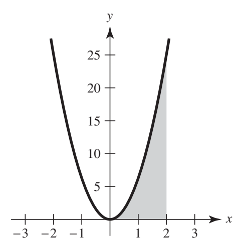
91.



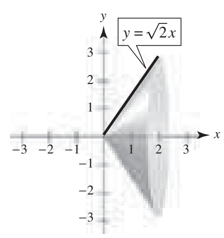
Negativa; hay más área por debajo del eje x que por arriba.

93. a

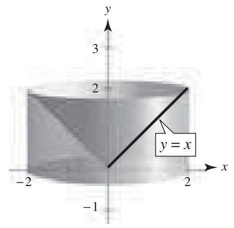
95. a)



b)



c)



97. *a*) $\pi(1 - e^{-1}) \approx 1.986$ *b*) $b = \sqrt{\ln\left(\dfrac{3\pi}{3\pi - 4}\right)} \approx 0.743$

99. $\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) \approx 0.8814$

101. $(8\pi/3)\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 256.545$

103. $\frac{1}{3}\arctan 3 \approx 0.416$ **105.** ≈ 1.0320

107. *a*) $\frac{1}{3}\operatorname{sen} x(\cos^2 x + 2)$

b) $\frac{1}{15}\operatorname{sen} x(3\cos^4 x + 4\cos^2 x + 8)$

c) $\frac{1}{35}\operatorname{sen} x(5\cos^6 x + 6\cos^4 x + 8\cos^2 x + 16)$

d) $\displaystyle\int \cos^{15} x\,dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^7 \cos x\,dx$

Se expandiría $(1 - \operatorname{sen}^2 x)^7$.

109. Demostración

Sección 8.2 (página 533)

1. $u = x,\ dv = e^{2x}\,dx$ **3.** $u = (\ln x)^2,\ dv = dx$

5. $u = x,\ dv = \sec^2 x\,dx$ **7.** $\frac{1}{16}x^4(4\ln x - 1) + C$

9. $\dfrac{1}{9}\operatorname{sen} 3x - \dfrac{1}{3}x\cos 3x + C$ **11.** $-\dfrac{1}{16e^{4x}}(4x + 1) + C$

13. $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

15. $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$ **17.** $\frac{1}{4}[2(t^2 - 1)\ln|t + 1| - t^2 + 2t] + C$

19. $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$ **21.** $e^{2x}/[4(2x + 1)] + C$

23. $(x - 1)^2 e^x + C$ **25.** $\frac{2}{15}(x - 5)^{3/2}(3x + 10) + C$

27. $x\operatorname{sen} x + \cos x + C$

29. $(6x - x^3)\cos x + (3x^2 - 6)\operatorname{sen} x + C$

31. $-t\csc t - \ln|\csc t + \cot t| + C$

33. $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

35. $\frac{1}{5}e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x) + C$

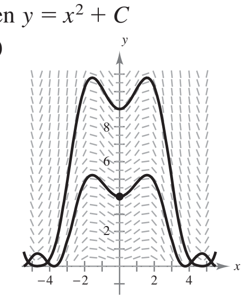
37. $\frac{1}{5}e^{-x}(2\operatorname{sen} 2x - \cos 2x) + C$ **39.** $y = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

41. $y = \dfrac{2}{5}t^2\sqrt{3 + 5t} - \dfrac{8t}{75}(3 + 5t)^{3/2} + \dfrac{16}{1\,875}(3 + 5t)^{5/2} + C$

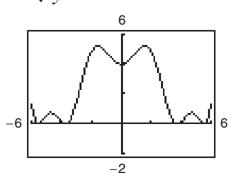
$= \dfrac{2}{625}\sqrt{3 + 5t}(25t^2 - 20t + 24) + C$

43. $\operatorname{sen} y = x^2 + C$

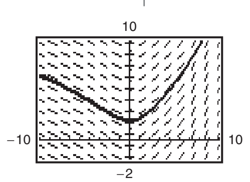
45. *a*)



b) $2\sqrt{y} - \cos x - x\operatorname{sen} x = 3$



47.



49. $2e^{3/2} + 4 \approx 12.963$

51. $\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4} \approx 0.143$

53. $\left(\pi - 3\sqrt{3} + 6\right)/6 \approx 0.658$

55. $\frac{1}{2}[e(\operatorname{sen} 1 - \cos 1) + 1] \approx 0.909$

57. $\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln 2 - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9} \approx 0.494$

59. $8\operatorname{arcsec} 4 + \sqrt{3}/2 - \sqrt{15}/2 - 2\pi/3 \approx 7.380$

61. $(e^{2x}/4)(2x^2 - 2x + 1) + C$

63. $(3x^2 - 6)\operatorname{sen} x - (x^3 - 6x)\cos x + C$

65. $x\tan x + \ln|\cos x| + C$ **67.** $2\left(\operatorname{sen}\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right) + C$

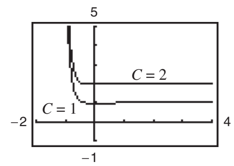
69. $\frac{128}{15}$ **71.** $\frac{1}{2}(x^4 e^{x^2} - 2x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2}) + C$

73. $\frac{1}{2}x[\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)] + C$ **75.** Regla del producto

77. Para que la técnica de integración por partes sea eficiente, la parte más complicada del integrando se asigna como dv y como u la parte del integrando cuya derivada es una función más simple que u. Si se elige $u = \operatorname{sen} x$, entonces du no es una función más simple.

79. *a*) $-(e^{-4t}/128)(32t^3 + 24t^2 + 12t + 3) + C$

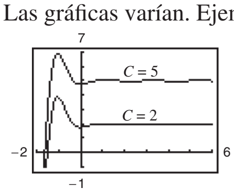
b) Las gráficas varían. Ejemplo:



c) Una gráfica es una traslación vertical de la otra.

81. *a*) $\frac{1}{13}(2e^{-\pi} + 3) \approx 0.2374$

b) Las gráficas varían. Ejemplo:



c) Una gráfica es una traslación vertical de la otra.

83. $\frac{2}{5}(2x - 3)^{3/2}(x + 1) + C$ **85.** $\frac{1}{3}\sqrt{4 + x^2}(x^2 - 8) + C$

87. $n = 0$: $x(\ln x - 1) + C$

$n = 1$: $\frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$

$n = 2$: $\frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C$

$n = 3$: $\frac{1}{16}x^4(4\ln x - 1) + C$

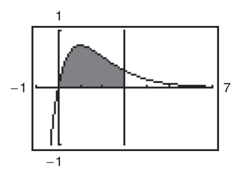
$n = 4$: $\frac{1}{25}x^5(5\ln x - 1) + C$

$\displaystyle\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{(n + 1)^2}[(n + 1)\ln x - 1] + C$

89 a 93. Demostraciones

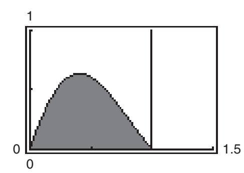
95. $\frac{1}{36}x^6(6\ln x - 1) + C$ **97.** $\frac{1}{13}e^{2x}(2\cos 3x + 3\operatorname{sen} 3x) + C$

99.



$2 - \dfrac{8}{e^3} \approx 1.602$

101.



$\dfrac{\pi}{1 + \pi^2}\left(\dfrac{1}{e} + 1\right) \approx 0.395$

103. *a*) 1 *b*) $\pi(e - 2) \approx 2.257$ *c*) $\frac{1}{2}\pi(e^2 + 1) \approx 13.177$

d) $\left(\dfrac{e^2 + 1}{4}, \dfrac{e - 2}{2}\right) \approx (2.097, 0.359)$

105. En el ejemplo 6, se mostró que el centroide de una región equivalente fue $(1, \pi/8)$. Por simetría, el centroide de esta región es $(\pi/8, 1)$.

107. $[7/(10\pi)](1 - e^{-4\pi}) \approx 0.223$ **109.** \$931 265

111. Demostración **113.** $b_n = [8h/(n\pi)^2]\,\mathrm{sen}(n\pi/2)$

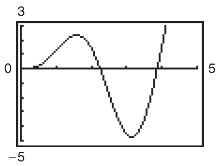
115. Capas: $V = \pi\left[b^2 f(b) - a^2 f(a) - \int_a^b x^2 f'(x)\,dx\right]$

Discos: $V = \pi\left[b^2 f(b) - a^2 f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} [f^{-1}(y)]^2\,dy\right]$

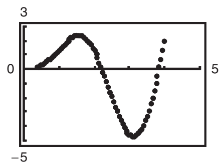
Ambos métodos dan el mismo volumen porque $x = f^{-1}(y)$, $f'(x)\,dx = dy$, si $y = f(a)$ entonces $x = a$, y si $y = f(b)$ entonces $x = b$.

117. *a*) $y = \frac{1}{4}(3\,\mathrm{sen}\,2x - 6x\cos 2x)$

b)

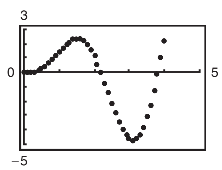


c) Se obtienen los siguientes puntos.



n	x_n	y_n
0	0	0
1	0.05	0
2	0.10	7.4875×10^{-4}
3	0.15	0.0037
4	0.20	0.0104
⋮	⋮	⋮
80	4.00	1.3181

d) Se obtienen los siguientes puntos.



n	x_n	y_n
0	0	0
1	0.1	0
2	0.2	0.0060
3	0.3	0.0293
4	0.4	0.0801
⋮	⋮	⋮
40	4.0	1.0210

119. La gráfica de $y = x\,\mathrm{sen}\,x$ está por debajo de la gráfica de $y = x$ en $[0, \pi/2]$.

Sección 8.3 (página 542)

1. c **2.** a **3.** d **4.** b **5.** $-\frac{1}{6}\cos^6 x + C$

7. $\frac{1}{16}\,\mathrm{sen}^8\,2x + C$ **9.** $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

11. $-\frac{1}{3}(\cos 2\theta)^{3/2} + \frac{1}{7}(\cos 2\theta)^{7/2} + C$

13. $\frac{1}{12}(6x + \mathrm{sen}\,6x) + C$

15. $\frac{3}{8}\alpha + \frac{1}{12}\,\mathrm{sen}\,6\alpha + \frac{1}{96}\,\mathrm{sen}\,12\alpha + C$

17. $\frac{1}{8}(2x^2 - 2x\,\mathrm{sen}\,2x - \cos 2x) + C$ **19.** $\frac{16}{35}$

21. $63\pi/512$ **23.** $5\pi/32$ **25.** $\frac{1}{7}\ln|\sec 7x + \tan 7x| + C$

27. $\frac{1}{15}\tan 5x(3 + \tan^2 5x) + C$

29. $\left(\sec \pi x \tan \pi x + \ln|\sec \pi x + \tan \pi x|\right)/(2\pi) + C$

31. $\frac{1}{2}\tan^4(x/2) - \tan^2(x/2) - 2\ln|\cos(x/2)| + C$

33. $\frac{1}{2}\tan^2 x + \mathrm{C}$ **35.** $\frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$

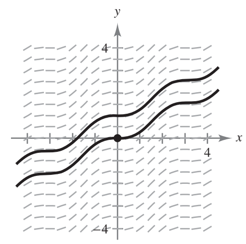
37. $\frac{1}{24}\sec^6 4x + C$ **39.** $\frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + C$

41. $\ln|\sec x + \tan x| - \mathrm{sen}\,x + C$

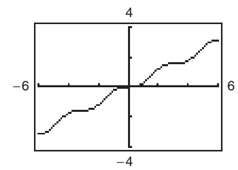
43. $(12\pi\theta - 8\,\mathrm{sen}\,2\pi\theta + \mathrm{sen}\,4\pi\theta)/(32\pi) + C$

45. $y = \frac{1}{9}\sec^3 3x - \frac{1}{3}\sec 3x + C$

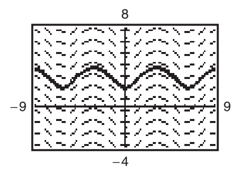
47. *a*)



b) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2x$



49.



51. $\frac{1}{16}(2\,\mathrm{sen}\,4x + \mathrm{sen}\,8x) + C$

53. $\frac{1}{12}(3\cos 2x - \cos 6x) + C$ **55.** $\frac{1}{8}(2\,\mathrm{sen}\,2\theta - \mathrm{sen}\,4\theta) + C$

57. $\frac{1}{4}(\ln|\csc^2 2x| - \cot^2 2x) + C$ **59.** $-\frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{6}\cot^3 2x + C$

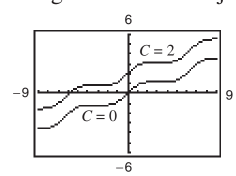
61. $\ln|\csc t - \cot t| + \cos t + C$

63. $\ln|\csc x - \cot x| + \cos x + C$ **65.** $t - 2\tan t + C$

67. π **69.** $3(1 - \ln 2)$ **71.** $\ln 2$ **73.** 4

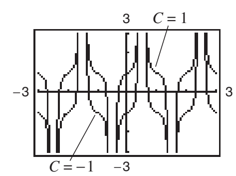
75. $\frac{1}{16}(6x + 8\,\mathrm{sen}x + \mathrm{sen}2x) + C$

Las gráficas varían. Ejemplo:



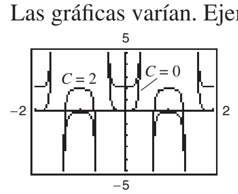
77. $\left[\sec^3 \pi x \tan \pi x + \frac{3}{2}\left(\sec \pi x \tan \pi x + \ln|\sec \pi x + \tan \pi x|\right)\right]/(4\pi) + C$

Las gráficas varían. Ejemplo:



79. $(\sec^5 \pi x)/(5\pi) + C$ **81.** $2\sqrt{2}/7$ **83.** $3\pi/16$

Las gráficas varían. Ejemplo:



85. *a*) Conservar uno de los factores seno y convertir los demás factores en cosenos. Después, expandir e integrar.

b) Conservar uno de los factores coseno y convertir los demás en senos. Después, expandir e integrar.

c) Utilizar varias veces las fórmulas de reducción de potencias hasta convertir el integrando a potencias impares del coseno. Después continuar como en el apartado *b*).

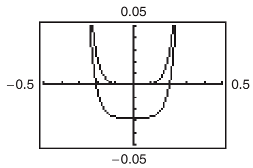
87. *a*) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$ *b*) $-\frac{1}{2}\cos^2 x + C$

c) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$ *d*) $-\frac{1}{4}\cos 2x + C$

Las respuestas son todas las mismas, sólo se escriben en diferentes formas. Utilizando identidades trigonométricas, se puede reescribir cada respuesta en la misma forma.

89. *a*) $\frac{1}{18}\tan^6 3x + \frac{1}{12}\tan^4 3x + C_1$, $\frac{1}{18}\sec^6 3x - \frac{1}{12}\sec^4 3x + C_2$

b)



c) Demostración

91. $\frac{1}{3}$ **93.** 1 **95.** $2\pi(1 - \pi/4) \approx 1.348$

97. *a*) $\pi^2/2$ *b*) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\pi/2, \pi/8)$ **99 a 101.** Demostraciones

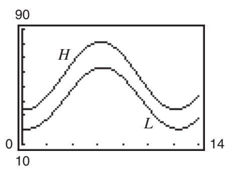
103. $-\frac{1}{15}\cos x(3\operatorname{sen}^4 x + 4\operatorname{sen}^2 x + 8) + C$

105. $\dfrac{5}{6\pi}\tan\dfrac{2\pi x}{5}\left(\sec^2\dfrac{2\pi x}{5} + 2\right) + C$

107. *a*) $H(t) \approx 57.72 - 23.36\cos(\pi t/6) - 2.75\operatorname{sen}(\pi t/6)$

b) $L(t) \approx 42.04 - 20.91\cos(\pi t/6) - 4.33\operatorname{sen}(\pi t/6)$

c)



La diferencia máxima se encuentra en $t \approx 4.9$, o a principios del verano.

109. Demostración

Sección 8.4 (página 551)

1. $x = 3\tan\theta$ **3.** $x = 4\operatorname{sen}\theta$ **5.** $x/\left(16\sqrt{16 - x^2}\right) + C$

7. $4\ln\left|\left(4 - \sqrt{16 - x^2}\right)/x\right| + \sqrt{16 - x^2} + C$

9. $\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 25}\right| + C$

11. $\frac{1}{15}(x^2 - 25)^{3/2}(3x^2 + 50) + C$

13. $\frac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C$ **15.** $\frac{1}{2}[\arctan x + x/(1 + x^2)] + C$

17. $\frac{1}{2}x\sqrt{9 + 16x^2} + \frac{9}{8}\ln\left|4x + \sqrt{9 + 16x^2}\right| + C$

19. $\frac{25}{4}\operatorname{arcsen}(2x/5) + \frac{1}{2}x\sqrt{25 - 4x^2} + C$

21. $\sqrt{x^2 + 36} + C$ **23.** $\operatorname{arcsen}(x/4) + C$

25. $4\operatorname{arcsen}(x/2) + x\sqrt{4 - x^2} + C$ **27.** $\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 4}\right| + C$

29. $-\dfrac{(1 - x^2)^{3/2}}{3x^3} + C$ **31.** $-\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{4x^2 + 9} + 3}{2x}\right| + C$

33. $3/\sqrt{x^2 + 3} + C$ **35.** $\frac{1}{3}(1 + e^{2x})^{3/2} + C$

37. $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} e^x + e^x\sqrt{1 - e^{2x}}\right) + C$

39. $\frac{1}{4}\left[x/(x^2 + 2) + \left(1/\sqrt{2}\right)\arctan\left(x/\sqrt{2}\right)\right] + C$

41. $x\operatorname{arcsec} 2x - \frac{1}{2}\ln\left|2x + \sqrt{4x^2 - 1}\right| + C$

43. $\operatorname{arcsen}[(x - 2)/2] + C$

45. $\sqrt{x^2 + 6x + 12} - 3\ln\left|\sqrt{x^2 + 6x + 12} + (x + 3)\right| + C$

47. *a*) y *b*) $\sqrt{3} - \pi/3 \approx 0.685$

49. *a*) y *b*) $9\left(2 - \sqrt{2}\right) \approx 5.272$

51. *a*) y *b*) $-(9/2)\ln\left(2\sqrt{7}/3 - 4\sqrt{3}/3 - \sqrt{21}/3 + 8/3\right) + 9\sqrt{3} - 2\sqrt{7} \approx 12.644$

53. $\sqrt{x^2 - 9} - 3\arctan\left(\sqrt{x^2 - 9}/3\right) + 1$

55. $\frac{1}{2}(x - 15)\sqrt{x^2 + 10x + 9} + 33\ln\left|\sqrt{x^2 + 10x + 9} + (x + 5)\right| + C$

57. $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 - 1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|\right) + C$

59. *a*) Sea $u = a\operatorname{sen}\theta$, $\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$, donde $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.

b) Sea $u = a\tan\theta$, $\sqrt{a^2 + u^2} = a\sec\theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

c) Sea $u = a\sec\theta$, $\sqrt{u^2 - a^2} = \tan\theta$ si $u > a$ y $\sqrt{u^2 - a^2} = -\tan\theta$ si $u < -a$, donde $0 \le \theta < \pi/2$ o $\pi/2 < \theta \le \pi$.

61. Sustitución trigonométrica: $x = \sec\theta$ **63.** Verdadero

65. Falso: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}} = \int_0^{\pi/3} \cos\theta\, d\theta$

67. πab **69.** *a*) $5\sqrt{2}$ *b*) $25(1 - \pi/4)$ *c*) $r^2(1 - \pi/4)$

71. $6\pi^2$ **73.** $\ln\left[\dfrac{5\left(\sqrt{2} + 1\right)}{\sqrt{26} + 1}\right] + \sqrt{26} - \sqrt{2} \approx 4.367$

75. Longitud de un arco de la curva seno: $y = \operatorname{sen} x$, $y' = \cos x$

$$L_1 = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$$

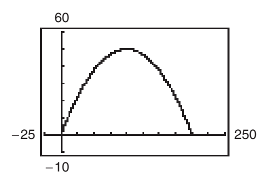
Longitud de un arco de la curva coseno: $y = \cos x$, $y' = -\operatorname{sen} x$

$$L_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2(x - \pi/2)}\, dx, \quad u = x - \pi/2, du = dx$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \sqrt{1 + \cos^2 u}\, du = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 u}\, du = L_1$$

77. *a*)



b) 200

c) $100\sqrt{2} + 50\ln\left[\left(\sqrt{2} + 1\right)/\left(\sqrt{2} - 1\right)\right] \approx 229.559$

79. $(0, 0.422)$ **81.** $(\pi/32)\left[102\sqrt{2} - \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\right] \approx 13.989$

83. *a*) 187.2π lb *b*) $62.4\pi d$ lb

85. Demostración **87.** $12 + 9\pi/2 - 25\operatorname{arcsen}(3/5) \approx 10.050$

89. Problema Putnam A5, 2005

Sección 8.5 (página 561)

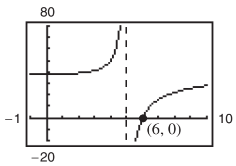
1. $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 8}$ **3.** $\dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 10}$ **5.** $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 6}$

7. $\frac{1}{6}\ln|(x - 3)/(x + 3)| + C$ **9.** $\ln|(x - 1)/(x + 4)| + C$

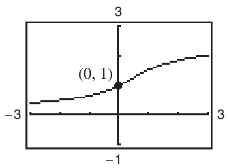
11. $\frac{3}{2}\ln|2x - 1| - 2\ln|x + 1| + C$

13. $5\ln|x - 2| - \ln|x + 2| - 3\ln|x| + C$

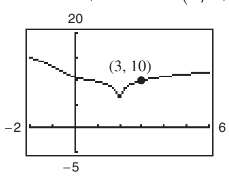
15. $x^2 + \frac{3}{2}\ln|x-4| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$
17. $1/x + \ln|x^4 + x^3| + C$
19. $2\ln|x-2| - \ln|x| - 3/(x-2) + C$
21. $\ln|(x^2+1)/x| + C$
23. $\frac{1}{6}\left[\ln|(x-2)/(x+2)| + \sqrt{2}\arctan\left(x/\sqrt{2}\right)\right] + C$
25. $\frac{1}{16}\ln|(4x^2-1)/(4x^2+1)| + C$
27. $\ln|x+1| + \sqrt{2}\arctan\left[(x-1)/\sqrt{2}\right] + C$
29. $\ln 3$ **31.** $\frac{1}{2}\ln(8/5) - \pi/4 + \arctan 2 \approx 0.557$
33. $y = 5\ln|x-5| - 5x/(x-5) + 30$



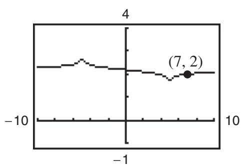
35. $y = \left(\sqrt{2}/2\right)\arctan\left(x/\sqrt{2}\right) - 1/[2(x^2+2)] + 5/4$



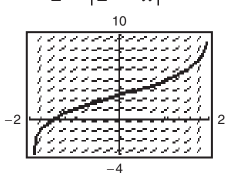
37. $y = \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|$
$- \sqrt{3}\arctan\left[(2x+1)/\sqrt{3}\right] - \frac{1}{2}\ln 13$
$+ \sqrt{3}\arctan\left(7/\sqrt{3}\right) + 10$



39. $y = \frac{1}{10}\ln|(x-5)/(x+5)| + \frac{1}{10}\ln 6 + 2$



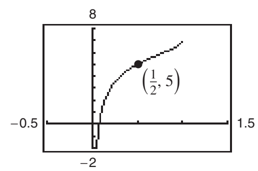
41. $\ln\left|\frac{\cos x}{\cos x - 1}\right| + C$ **43.** $\ln\left|\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}\right| + C$
45. $\ln\left|\frac{\tan x + 2}{\tan x + 3}\right| + C$ **47.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 4}\right| + C$
49. $2\sqrt{x} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right| + C$ **51 a 53.** Demostraciones
55. $y = \frac{3}{2}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + 3$ **57.** Primero dividir x^3 entre $(x-5)$.



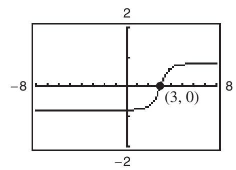
59. $12\ln\left(\frac{9}{8}\right) \approx 1.4134$ **61.** $6 - \frac{7}{4}\ln 7 \approx 2.5947$
63. 4.90 o $490 000
65. $V = 2\pi\left(\arctan 3 - \frac{3}{10}\right) \approx 5.963$; $(\bar{x}, \bar{y}) \approx (1.521, 0.412)$
67. $x = n[e^{(n+1)kt} - 1]/[n + e^{(n+1)kt}]$ **69.** $\pi/8$

Sección 8.6 (página 567)

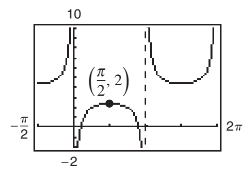
1. $-\frac{1}{2}x(10-x) + 25\ln|5+x| + C$
3. $\frac{1}{2}\left[e^x\sqrt{e^{2x}+1} + \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}\right)\right] + C$
5. $-\sqrt{1-x^2}/x + C$
7. $\frac{1}{24}(3x + \operatorname{sen} 3x\cos 3x + 2\cos^3 3x \operatorname{sen} 3x) + C$
9. $-2\left(\cot\sqrt{x} + \csc\sqrt{x}\right) + C$ **11.** $x - \frac{1}{2}\ln(1 + e^{2x}) + C$
13. $\frac{1}{64}x^8(8\ln x - 1) + C$
15. *a*) y *b*) $\frac{1}{27}e^{3x}(9x^2 - 6x + 2) + C$
17. *a*) y *b*) $\ln|(x+1)/x| - 1/x + C$
19. $\frac{1}{2}\left[(x^2+1)\operatorname{arccsc}(x^2+1) + \ln\left(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2}\right)\right] + C$
21. $\sqrt{x^2-4}/(4x) + C$ **23.** $\frac{4}{25}[\ln|2-5x| + 2/(2-5x)] + C$
25. $e^x\arccos(e^x) - \sqrt{1-e^{2x}} + C$
27. $\frac{1}{2}(x^2 + \cot x^2 + \csc x^2) + C$
29. $\left(\sqrt{2}/2\right)\arctan\left[(1 + \operatorname{sen}\theta)/\sqrt{2}\right] + C$
31. $-\sqrt{2+9x^2}/(2x) + C$
33. $\frac{1}{4}\left(2\ln|x| - 3\ln|3 + 2\ln|x||\right) + C$
35. $(3x-10)/[2(x^2-6x+10)] + \frac{3}{2}\arctan(x-3) + C$
37. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 3 + \sqrt{x^4 - 6x^2 + 5}\right| + C$
39. $-\frac{1}{3}\sqrt{4-x^2}(x^2+8) + C$
41. $2/(1+e^x) - 1/[2(1+e^x)^2] + \ln(1+e^x) + C$
43. $\frac{1}{2}(e-1) \approx 0.8591$ **45.** $\frac{32}{5}\ln 2 - \frac{31}{25} \approx 3.1961$
47. $\pi/2$ **49.** $\pi^3/8 - 3\pi + 6 \approx 0.4510$ **51 a 55.** Demostraciones
57. $y = -2\sqrt{1-x}/\sqrt{x} + 7$



59. $y = \frac{1}{2}[(x-3)/(x^2-6x+10) + \arctan(x-3)]$



61. $y = -\csc\theta + \sqrt{2} + 2$



63. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\tan(\theta/2) - 3 - \sqrt{5}}{2\tan(\theta/2) - 3 + \sqrt{5}}\right| + C$ **65.** $\ln 2$
67. $\frac{1}{2}\ln(3 - 2\cos\theta) + C$ **69.** $-2\cos\sqrt{\theta} + C$ **71.** $4\sqrt{3}$
73. *a*) $\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

$\int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$

$\int x^3\ln x\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$