2.5 Derivación implícita

- **Distinguir entre funciones explícitas e implícitas.**
- **Hallar la derivada de una función por derivación implícita.**

EXPLORACIÓN

Representación gráfica de una ecuación implícita
¿Cómo se podría utilizar una herramienta de graficación para representar

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2?$$

He aquí dos procedimientos posibles:

a) Despejar x en la ecuación. Intercambiar los papeles de x y y, y dibujar la gráfica de las dos ecuaciones resultantes. Las gráficas combinadas presentarán una rotación de 90° con respecto a la gráfica de la ecuación original.

b) Configurar la herramienta de graficación en modo *paramétrico* y representar las ecuaciones

$$x = -\sqrt{2t^3 - 4t + 2}$$
$$y = t$$

y

$$x = \sqrt{2t^3 - 4t + 2}$$
$$y = t.$$

A partir de cualquiera de estos métodos, ¿se puede decidir si la gráfica tiene una recta tangente en el punto (0, 1)?
Explicar el razonamiento.

Funciones explícitas e implícitas

Hasta este punto, la mayoría de las funciones estudiadas en el texto se enunciaron de **forma explícita**. Por ejemplo, en la ecuación

$$y = 3x^2 - 5 \qquad \text{Forma explícita.}$$

la variable y está escrita explícitamente como función de x. Sin embargo, algunas funciones sólo se enuncian de manera implícita en una ecuación. Así, la función $y = 1/x$ está definida **implícitamente** por la ecuación $xy = 1$. Supongamos que se pide calcular la derivada dy/dx para esta ecuación. Podemos escribir y como función explícita de x, y luego derivar.

Forma implícita	*Forma explícita*	*Derivada*
$xy = 1$	$y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$\dfrac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

Esta estrategia funciona siempre que se pueda despejar y como función de x en la ecuación, de lo contrario, este método no es viable. Por ejemplo, ¿cómo encontrar dy/dx para la ecuación

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2$$

donde resulta muy difícil despejar y como función explícita de x? En tales situaciones se debe usar la llamada **derivación implícita**.

Para comprender esta técnica, es preciso tener en cuenta que la derivación se efectúa *con respecto a x*. Esto quiere decir que cuando se tenga que derivar términos que sólo contienen a x, la derivación será la habitual. Sin embargo, cuando haya que derivar un término donde aparezca y, será necesario aplicar la regla de la cadena, ya que se está suponiendo que y está definida implícitamente como función derivable de x.

EJEMPLO 1 Derivación respecto de x

a) $\dfrac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$ — Las variables coinciden: usar la regla simple de las potencias.

Las variables coinciden

b) $\dfrac{d}{dx}[\underbrace{y^3}_{u^n}] = \underbrace{3y^2}_{nu^{n-1}}\underbrace{\dfrac{dy}{dx}}_{u'}$ — Las variables no coinciden: usar la regla de la cadena.

Las variables no coinciden

c) $\dfrac{d}{dx}[x + 3y] = 1 + 3\dfrac{dy}{dx}$ — Regla de la cadena: $\dfrac{d}{dx}[3y] = 3y'$.

d)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[xy^2] &= x\frac{d}{dx}[y^2] + y^2\frac{d}{dx}[x] && \text{Regla del producto.}\\ &= x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(1) && \text{Regla de la cadena.}\\ &= 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$

Derivación implícita

Estrategias para la derivación implícita

1. Derivar ambos lados de la ecuación *respecto de x*.
2. Agrupar todos los términos en que aparezca dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.
3. Factorizar dy/dx del lado izquierdo de la ecuación.
4. Despejar dy/dx.

Observar que en el ejemplo 2 la derivación implícita puede producir una expresión para dy/dx en la que aparezcan a la vez x y y.

EJEMPLO 2 Derivación implícita

Encontrar dy/dx dado que $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$.

Solución

1. Derivar los dos miembros de la ecuación respecto de x.

$$\frac{d}{dx}[y^3 + y^2 - 5y - x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$\frac{d}{dx}[y^3] + \frac{d}{dx}[y^2] - \frac{d}{dx}[5y] - \frac{d}{dx}[x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

2. Agrupar los términos con dy/dx en la parte izquierda y pasar todos los demás al lado derecho.

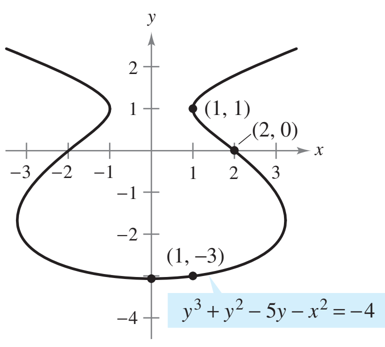
$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} = 2x$$

3. Factorizar dy/dx en la parte izquierda.

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 2y - 5) = 2x$$

4. Despejar dy/dx dividiendo entre $(3y^2 + 2y - 5)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$



Puntos en la gráfica	Pendiente de la gráfica
(2, 0)	$-\frac{4}{5}$
(1, −3)	$\frac{1}{8}$
$x = 0$	0
(1, 1)	No definida

La ecuación implícita

$$y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$$

tiene la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

Figura 2.27

Para ver cómo usar la *derivación implícita*, considerar la gráfica de la figura 2.27. En ella se puede observar que y no es una función de x. A pesar de ello, la derivada determinada en el ejemplo 2 proporciona una fórmula para la pendiente de la recta tangente en un punto de esta gráfica. Debajo de la gráfica se muestran las pendientes en varios puntos de la gráfica.

TECNOLOGÍA Con la mayoría de las herramientas de graficación es fácil representar una ecuación que expresa de manera explícita a y en función de x. Por el contrario, representar las gráficas asociadas a otras ecuaciones requiere cierto ingenio. Por ejemplo, tratar de representar la gráfica de la ecuación empleada en el ejemplo 2 configurando la herramienta de graficación en modo *paramétrico*, a fin de elaborar la gráfica de las representaciones paramétricas $x = \sqrt{t^3 + t^2 - 5t + 4}$, $y = t$ y $x = -\sqrt{t^3 + t^2 - 5t + 4}$, $y = t$, para $-5 \leq t \leq 5$. ¿Cómo se compara el resultado con la gráfica que se muestra en la figura 2.27?

En una ecuación que no tiene puntos solución, por ejemplo, $x^2 + y^2 = -4$, no tiene sentido despejar dy/dx. Sin embargo, si una porción de una gráfica puede representarse mediante una función derivable, dy/dx tendrá sentido como pendiente en cada punto de esa porción. Recordar que una función no es derivable en *a*) los puntos con tangente vertical y *b*) los puntos en los que la función no es continua.

EJEMPLO 3 Representación de una gráfica mediante funciones derivables

Si es posible, representar y como función derivable de x.

***a*)** $x^2 + y^2 = 0$ ***b*)** $x^2 + y^2 = 1$ ***c*)** $x + y^2 = 1$

Solución

***a*)** La gráfica de esta ecuación se compone de un solo punto. Por tanto, no define y como función derivable de x. Ver la figura 2.28*a*.

***b*)** La gráfica de esta ecuación es la circunferencia unidad, centrada en (0, 0). La semicircunferencia superior está dada por la función derivable

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1$$

y la inferior por la función derivable

$$y = -\sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

En los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, la pendiente no está definida. Ver la figura 2.28*b*.

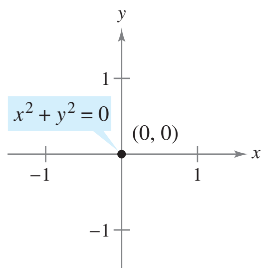
***c*)** La mitad superior de esta parábola está dada por la función derivable

$$y = \sqrt{1 - x}, \quad x < 1$$

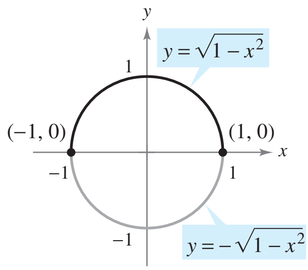
y la inferior por la función derivable

$$y = -\sqrt{1 - x}, \quad x < 1.$$

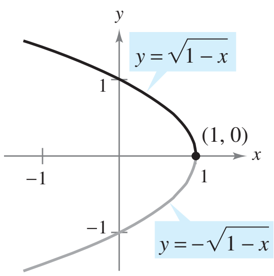
En el punto (1, 0) la pendiente no está definida. Ver la figura 2.28*c*.



***a*)**



***b*)**



***c*)**

Algunos segmentos de curva pueden representarse por medio de funciones derivables
Figura 2.28

EJEMPLO 4 Cálculo de la pendiente de una gráfica implícita

Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

en el punto $\left(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$. Ver la figura 2.29.

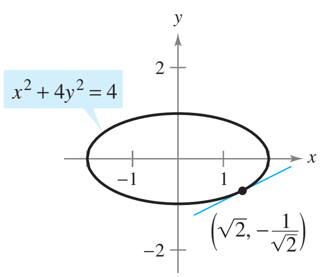


Figura 2.29

Solución

$$x^2 + 4y^2 = 4 \qquad \text{Ecuación original.}$$

$$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{Derivar respecto de } x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y} = \frac{-x}{4y} \qquad \text{Despejar términos con } \frac{dy}{dx}.$$

Por tanto, en $\left(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$, la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{2}}{-4/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \qquad \text{Evaluar } \frac{dy}{dx} \text{ cuando } x = \sqrt{2}, \text{ y } y = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

NOTA Para observar las ventajas de la derivación implícita, intentar rehacer el ejemplo 4 manejando la función explícita $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$.

EJEMPLO 5 Cálculo de la pendiente de una gráfica implícita

Calcular la pendiente de la gráfica de $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$ en el punto (3, 1).

Solución

$$\frac{d}{dx}[3(x^2 + y^2)^2] = \frac{d}{dx}[100xy]$$

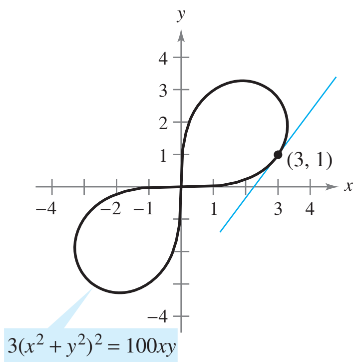
$$3(2)(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = 100\left[x\frac{dy}{dx} + y(1)\right]$$

$$12y(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} - 100x\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2 + y^2)$$

$$[12y(x^2 + y^2) - 100x]\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{100y - 12x(x^2 + y^2)}{-100x + 12y(x^2 + y^2)}$$

$$= \frac{25y - 3x(x^2 + y^2)}{-25x + 3y(x^2 + y^2)}$$



Lemniscata
Figura 2.30

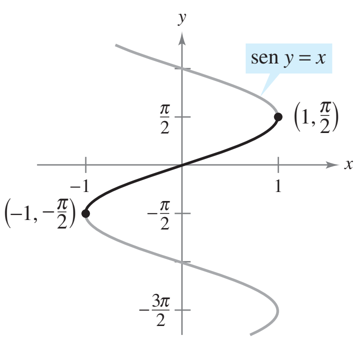
En el punto (3, 1), la pendiente de la gráfica es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25(1) - 3(3)(3^2 + 1^2)}{-25(3) + 3(1)(3^2 + 1^2)} = \frac{25 - 90}{-75 + 30} = \frac{-65}{-45} = \frac{13}{9}$$

como muestra la figura 2.30. Esta gráfica se denomina **lemniscata**.

EJEMPLO 6 Determinación de una función derivable

Encontrar dy/dx implícitamente para la ecuación sen $y = x$. A continuación, determinar el mayor intervalo de la forma $-a < y < a$ en el que y es una función derivable de x (ver la figura 2.31).



La derivada es $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
Figura 2.31

Solución

$$\frac{d}{dx}[\text{sen } y] = \frac{d}{dx}[x]$$

$$\cos y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

El intervalo más grande cercano al origen en el que y es derivable respecto de x es $-\pi/2 < y < \pi/2$. Para verlo, observar que cos y es positivo en ese intervalo y 0 en sus extremos. Si se restringe a ese intervalo, es posible escribir dy/dx explícitamente como función de x. Para ello, usar

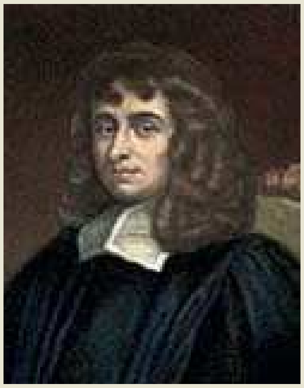
$$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2\, y}$$

$$= \sqrt{1 - x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

y concluir que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Este ejemplo se estudia más adelante cuando se definen las funciones trigonométricas inversas en la sección 5.6.



The Granger Collection

Isaac Barrow (1630-1677)
La gráfica de la figura 2.32 se conoce como la **curva kappa** debido a su semejanza con la letra griega kappa, κ. La solución general para la recta tangente a esta curva fue descubierta por el matemático inglés Isaac Barrow. Newton fue su alumno y con frecuencia intercambiaron correspondencia relacionada con su trabajo en el entonces incipiente desarrollo del cálculo.

Al usar la derivación implícita, con frecuencia es posible simplificar la forma de la derivada (como en el ejemplo 6) utilizando de manera apropiada la ecuación *original*. Se puede emplear una técnica semejante para encontrar y simplificar las derivadas de orden superior obtenidas de forma implícita.

EJEMPLO 7 Cálculo implícito de la segunda derivada

Dada $x^2 + y^2 = 25$, encontrar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Evaluar la primera y segunda derivadas en el punto $(-3, 4)$.

Solución Derivando ambos términos respecto de x se obtiene

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

En $(-3, 4)$: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(-3)}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Derivando otra vez respecto de x vemos que

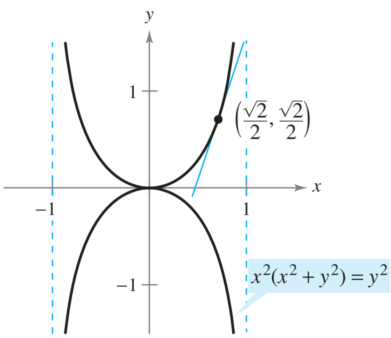
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(y)(1) - (x)(dy/dx)}{y^2} \qquad \text{Regla del cociente.}$$

$$= -\frac{y - (x)(-x/y)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3}.$$

En $(-3, 4)$: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{25}{4^3} = -\dfrac{25}{64}$.

EJEMPLO 8 Recta tangente a una gráfica

Encontrar la recta tangente a la gráfica dada por $x^2(x^2 + y^2) = y^2$ en el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, como muestra la figura 2.32.



La curva kappa
Figura 2.32

Solución Reescribiendo y derivando implícitamente, resulta

$$x^4 + x^2y^2 - y^2 = 0$$

$$4x^3 + x^2\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + 2xy^2 - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} = -2x(2x^2 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2x^2 + y^2)}{y(1 - x^2)}.$$

En el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{2}/2)[2(1/2) + (1/2)]}{(\sqrt{2}/2)[1 - (1/2)]} = \frac{3/2}{1/2} = 3$$

y la ecuación de la recta tangente en ese punto es

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$y = 3x - \sqrt{2}.$$

2.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 16, encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita.

1. $x^2 + y^2 = 9$
2. $x^2 - y^2 = 25$
3. $x^{1/2} + y^{1/2} = 16$
4. $x^3 + y^3 = 64$
5. $x^3 - xy + y^2 = 7$
6. $x^2y + y^2x = -2$
7. $x^3y^3 - y = x$
8. $\sqrt{xy} = x^2y + 1$
9. $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 = 12$
10. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$
11. $\operatorname{sen} x + 2 \cos 2y = 1$
12. $(\operatorname{sen} \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$
13. $\operatorname{sen} x = x(1 + \tan y)$
14. $\cot y = x - y$
15. $y = \operatorname{sen} xy$
16. $x = \sec \dfrac{1}{y}$

En los ejercicios 17 a 20, *a*) encontrar dos funciones explícitas despejando *y* en términos de *x*, *b*) construir la gráfica de la ecuación y clasificar las partes dadas por las respectivas funciones explícitas, *c*) derivar las funciones explícitas y *d*) encontrar dy/dx y demostrar que el resultado es equivalente al del apartado *c*).

17. $x^2 + y^2 = 64$
18. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
19. $16x^2 + 25y^2 = 400$
20. $16y^2 - x^2 = 16$

En los ejercicios 21 a 28, encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita y calcular la derivada en el punto indicado.

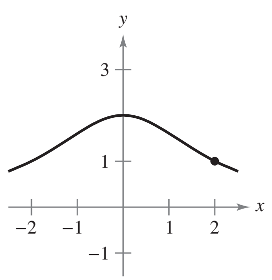
21. $xy = 6, \quad (-6, -1)$
22. $x^2 - y^3 = 0, \quad (1, 1)$
23. $y^2 = \dfrac{x^2 - 49}{x^2 + 49}, \quad (7, 0)$
24. $(x + y)^3 = x^3 + y^3, \quad (-1, 1)$
25. $x^{2/3} + y^{2/3} = 5, \quad (8, 1)$
26. $x^3 + y^3 = 6xy + 1, \quad (2, 3)$
27. $\tan(x + y) = x, \quad (0, 0)$
28. $x \cos y = 1, \quad \left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$

Curvas famosas **En los ejercicios 29 a 32, calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto propuesto.**

29. Bruja de Agnesi:

$(x^2 + 4)y = 8$

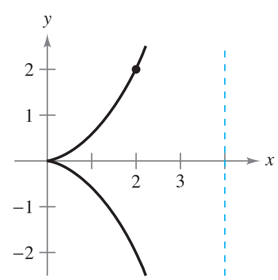
Punto: $(2, 1)$



30. Cisoide:

$(4 - x)y^2 = x^3$

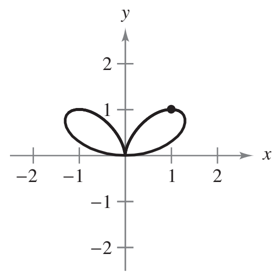
Punto: $(2, 2)$



31. Bifolio:

$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$

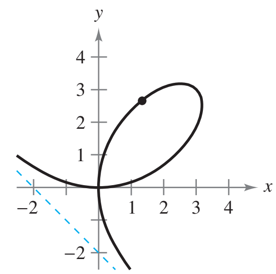
Punto: $(1, 1)$



32. Folio de Descartes:

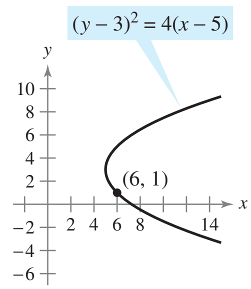
$x^3 + y^3 - 6xy = 0$

Punto: $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

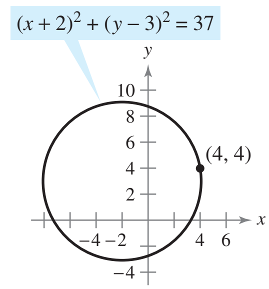


Curvas famosas **En los ejercicios 33 a 40, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado.**

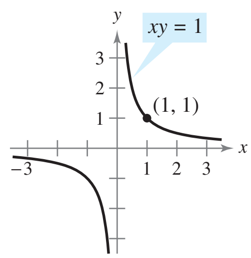
33. Parábola



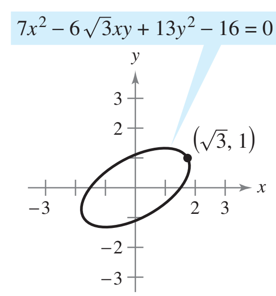
34. Circunferencia



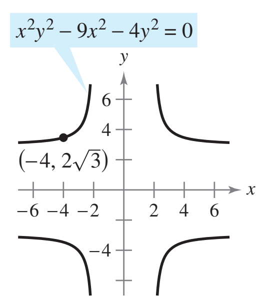
35. Hipérbola rotada



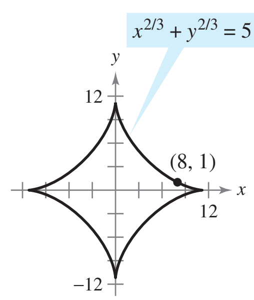
36. Elipse rotada



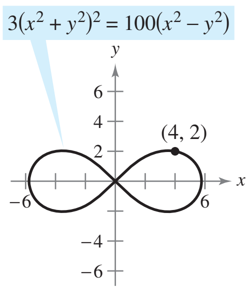
37. Cruciforme



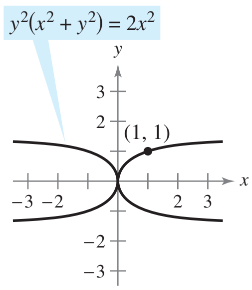
38. Astroide



39. Lemniscata



40. Curva kappa



41. *a*) Utilizar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ en $(1, 2)$.

b) Demostrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

42. *a*) Utilizar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$ en $(3, -2)$.

b) Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

En los ejercicios 43 y 44, calcular dy/dx de manera implícita y encontrar el mayor intervalo con la forma $-a < y < a$ o $0 < y < a$ tal que y sea una función derivable de x. Expresar dy/dx en función de x.

43. $\tan y = x$

44. $\cos y = x$

En los ejercicios 45 a 50, encontrar d^2y/dx^2 en términos de x y y.

45. $x^2 + y^2 = 4$

46. $x^2y^2 - 2x = 3$

47. $x^2 - y^2 = 36$

48. $1 - xy = x - y$

49. $y^2 = x^3$

50. $y^2 = 10x$

En los ejercicios 51 y 52 usar una herramienta de graficación para representar la ecuación. Encontrar la ecuación de la recta tangente en la gráfica obtenida en el punto y la gráfica en la recta tangente.

51. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \quad (9, 4)$

52. $y^2 = \frac{x - 1}{x^2 + 1}, \quad \left(2, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

En los ejercicios 53 y 54, encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la circunferencia en el punto indicado (la *recta normal* en un punto es perpendicular a la tangente en ese punto). Utilizar una herramienta de graficación para representar la ecuación, la recta tangente y la normal.

53. $x^2 + y^2 = 25$
$(4, 3), (-3, 4)$

54. $x^2 + y^2 = 36$
$(6, 0), (5, \sqrt{11})$

55. Demostrar que la recta normal a cualquier punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ pasa por el origen.

56. Dos circunferencias de radio 4 son tangentes a la gráfica de $y^2 = 4x$ en el punto $(1, 2)$. Encontrar las ecuaciones de esas dos circunferencias.

En los ejercicios 57 y 58, localizar los puntos en los que la gráfica de la ecuación tiene recta tangente horizontal o vertical.

57. $25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$

58. $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

Trayectorias ortogonales **En los ejercicios 59 a 62, utilizar herramienta de graficación para representar las ecuaciones y probar que en sus intersecciones son ortogonales. (Dos gráficas son *ortogonales* en un punto de intersección si sus rectas tangentes en ese punto son perpendiculares entre sí.)**

59. $2x^2 + y^2 = 6$
$y^2 = 4x$

60. $y^2 = x^3$
$2x^2 + 3y^2 = 5$

61. $x + y = 0$
$x = \operatorname{sen} y$

62. $x^3 = 3(y - 1)$
$x(3y - 29) = 3$

Trayectorias ortogonales **En los ejercicios 63 y 64, verificar que las dos familias de curvas son ortogonales, siendo C y K números reales. Utilizar una herramienta de graficación para representar ambas familias con dos valores de C y dos valores de K.**

63. $xy = C, x^2 - y^2 = K$

64. $x^2 + y^2 = C^2, y = Kx$

En los ejercicios 65 a 68, derivar: *a*) respecto a x (y es una función de x) y *b*) respecto a t (x y y son funciones de t).

65. $2x^2 - 3x^4 = 0$

66. $x^2 - 3xy^2 + y^3 = 10$

67. $\cos \pi y - 3 \operatorname{sen} \pi x = 1$

68. $4 \operatorname{sen} x \cos y = 1$

Desarrollo de conceptos

69. Describir la diferencia que existe entre la forma explícita de una ecuación y una ecuación implícita. Elaborar un ejemplo de cada una.

70. Con sus propias palabras, establezca las estrategias a seguir en la derivación implícita.

71. ***Trayectorias ortogonales*** En la siguiente figura se muestra un mapa topográfico realizado por un grupo de excursionistas. Ellos se encuentran en el área boscosa que está en la parte superior de la colina que se muestra en el mapa y deciden seguir la ruta de descenso menos empinada (trayectorias ortogonales a los contornos del mapa). Dibujar la ruta que deben seguir si parten desde el punto A y si lo hacen desde el punto B. Si su objetivo es llegar a la carretera que pasa por la parte superior del mapa, ¿cuál de esos puntos de partida deben utilizar?