2.4 La regla de la cadena

- **Encontrar la derivada de una función compuesta por la regla de la cadena.**
- **Encontrar la derivada de una función por la regla general de la potencia.**
- **Simplificar la derivada de una función por técnicas algebraicas.**
- **Aplicar la regla de la cadena a funciones trigonométricas.**

La regla de la cadena

Ahora es tiempo de analizar una de las reglas de derivación más potentes: la **regla de la cadena**. Ésta se aplica a las funciones compuestas y añade versatilidad a las reglas analizadas en las dos secciones precedentes. Como ejemplo, comparar las funciones que se muestran a continuación; las de la izquierda se pueden derivar sin la regla de la cadena, mientras que a las de la derecha conviene aplicarles dicha regla.

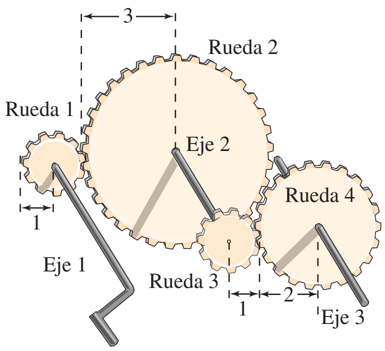
Sin la regla de la cadena	*Con la regla de la cadena*
$y = x^2 + 1$	$y = \sqrt{x^2 + 1}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y = \operatorname{sen} 6x$
$y = 3x + 2$	$y = (3x + 2)^5$
$y = x + \tan x$	$y = x + \tan x^2$

En esencia, la regla de la cadena establece que si y cambia dy/du veces más rápido que u, mientras que u cambia du/dx veces más rápido que x, entonces y cambia $(dy/du)(du/dx)$ veces más rápido que x.

EJEMPLO 1 La derivada de una función compuesta

Un juego de ruedas dentadas está construido, como muestra la figura 2.24, de forma que la segunda y la tercera giran sobre un eje común. Cuando la primera gira, impulsa a la segunda y ésta a su vez a la tercera. Sean y, u y x los números de revoluciones por minuto del primero, segundo y tercer ejes. Encontrar dy/du, du/dx y dy/dx, y verificar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$



Eje 1: y revoluciones por minuto
Eje 2: u revoluciones por minuto
Eje 3: x revoluciones por minuto
Figura 2.24

Solución Puesto que la circunferencia del segundo engranaje es tres veces mayor que la de la primera, el primer eje debe dar tres vueltas para que el segundo complete una. Del mismo modo, el segundo eje ha de dar dos vueltas para que el tercero complete una y, por tanto, se debe escribir

$$\frac{dy}{du} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = 2.$$

Combinando ambos resultados, el primer eje debe dar seis vueltas para hacer girar una vez al tercer eje. De tal manera:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \boxed{\text{Razón de cambio del primer eje con respecto al segundo}} \cdot \boxed{\text{Razón de cambio del segundo eje con respecto al tercero}} \\ &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3 \cdot 2 = 6 \\ &= \boxed{\text{Razón de cambio del primer eje con respecto al tercero}}.\end{aligned}$$

En otras palabras, la razón de cambio de y respecto a x es igual al producto de la razón de cambio de y con respecto a u multiplicado por el de u con respecto a x.

EXPLORACIÓN

Aplicación de la regla de la cadena Cada una de las funciones que se encuentran a continuación se pueden derivar utilizando las reglas de derivación estudiadas en las secciones 2.2 y 2.3. Calcular la derivada de cada función utilizando dichas reglas; luego encontrar la derivada utilizando la regla de la cadena. Comparar los resultados. ¿Cuál de los dos métodos es más sencillo?

a) $\dfrac{2}{3x+1}$

b) $(x+2)^3$

c) sen $2x$

El ejemplo 1 ilustra un caso simple de la regla de la cadena. Su enunciado general es el siguiente.

TEOREMA 2.10 LA REGLA DE LA CADENA

Si $y = f(u)$ es una función derivable de u y además $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable de x y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o su equivalente

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

DEMOSTRACIÓN Sea $h(x) = f(g(x))$. Usando la forma alternativa de la derivada, es necesario demostrar que, para $x = c$,

$$h'(c) = f'(g(c))g'(c).$$

Un aspecto importante en esta demostración es el comportamiento de g cuando x tiende a c. Se presentan dificultades cuando existen valores de x, distintos de c, tales que $g(x) = g(c)$. En el apéndice A se explica cómo utilizar la derivabilidad de f y g para superar este problema. Por ahora, supóngase que $g(x) \neq g(c)$ para valores de x distintos de c. En las demostraciones de las reglas del producto y del cociente se sumó y restó una misma cantidad. Ahora se recurrirá a un truco similar, multiplicar y dividir por una misma cantidad (distinta de cero). Observar que, como g es derivable, también es continua, por lo que $g(x) \to g(c)$ cuando $x \to c$.

$$\begin{aligned}
h'(c) &= \lim_{x \to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} \\
&= \lim_{x \to c} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right], \quad g(x) \neq g(c) \\
&= \left[\lim_{x \to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \right] \left[\lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] \\
&= f'(g(c))g'(c)
\end{aligned}$$

Al aplicar la regla de la cadena, es útil considerar que la función compuesta $f \circ g$ está constituida por dos partes: una interior y otra exterior.

Función exterior

$$y = f(g(x)) = f(u)$$

Función interior

La derivada de $y = f(u)$ es la derivada de la función exterior (en la función interior u) multiplicada por la derivada de la función interior.

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

EJEMPLO 2 Descomposición de una función compuesta

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
a)	$y = \dfrac{1}{x+1}$	$u = x + 1$	$y = \dfrac{1}{u}$
b)	$y = \operatorname{sen} 2x$	$u = 2x$	$y = \operatorname{sen} u$
c)	$y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$	$u = 3x^2 - x + 1$	$y = \sqrt{u}$
d)	$y = \tan^2 x$	$u = \tan x$	$y = u^2$

EJEMPLO 3 Aplicación de la regla de la cadena

Encontrar dy/dx para $y = (x^2 + 1)^3$.

Solución Para esta función, considerar que la función interior es $u = x^2 + 1$. Por medio de la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{3(x^2 + 1)^2}_{\frac{dy}{du}}\underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} = 6x(x^2 + 1)^2.$$

AYUDA DE ESTUDIO El ejemplo 3 también se puede resolver sin hacer uso de la regla de la cadena, si se observa que

$$y = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

y, por tanto,

$$y' = 6x^5 + 12x^3 + 6x.$$

Comprobar que esta derivada es la misma que la del ejemplo 3. ¿Qué método sería preferible para encontrar

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1)^{50}?$$

La regla general de la potencia

La función del ejemplo 3 es uno de los tipos más comunes de funciones compuestas, $y = [u(x)]^n$. La regla para derivar tales funciones se llama **regla general de la potencia**, y no es sino un caso particular de la regla de la cadena.

TEOREMA 2.11 LA REGLA GENERAL DE LA POTENCIA

Si $y = [u(x)]^n$, donde u es una función derivable de x y n es un número racional, entonces

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$$

o su equivalente

$$\frac{d}{dx}[u^n] = n\,u^{n-1}\,u'.$$

DEMOSTRACIÓN Puesto que $y = u^n$, aplicar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$= \frac{d}{du}[u^n]\frac{du}{dx}.$$

Por medio de la regla (simple) de la potencia estudiada en la sección 2.2, se tiene $D_u[u^n] = nu^{n-1}$ y se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

EJEMPLO 4 Aplicación de la regla general de la potencia

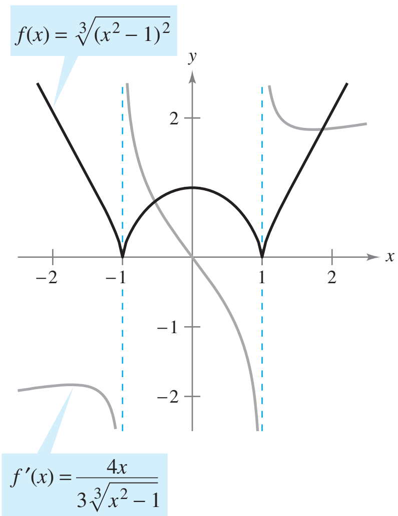
Encontrar la derivada de $f(x) = (3x - 2x^2)^3$.

Solución Sea $u = 3x - 2x^2$. Entonces

$$f(x) = (3x - 2x^2)^3 = u^3$$

y, mediante la regla general de la potencia, se deduce que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underset{n}{3}\overbrace{(3x - 2x^2)^2}^{u^{n-1}}\overbrace{\frac{d}{dx}[3x - 2x^2]}^{u'} && \text{Aplicar la regla general de la potencia.} \\ &= 3(3x - 2x^2)^2(3 - 4x). && \text{Derivar } 3x - 2x^2. \end{aligned}$$



La derivada de f es 0 en $x = 0$ y no está definida en $x = \pm 1$
Figura 2.25

EJEMPLO 5 Derivación de funciones con radicales

Encontrar los puntos de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ en los que $f'(x) = 0$ y aquellos en los que $f'(x)$ no existe.

Solución Reescribir de nuevo la función como

$$f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}.$$

Aplicar ahora la regla general de las potencias (con $u = x^2 - 1$); se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underset{n}{\frac{2}{3}}\overbrace{(x^2 - 1)^{-1/3}}^{u^{n-1}}\overbrace{(2x)}^{u'} && \text{Aplicar la regla general de las potencias.} \\ &= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}. && \text{Expresar en forma radical.} \end{aligned}$$

De tal manera, $f'(x) = 0$ en $x = 0$ y $f'(x)$ no existe en $x = \pm 1$, como se muestra en la figura 2.25.

EJEMPLO 6 Derivación de cocientes con numeradores constantes

Derivar $g(t) = \dfrac{-7}{(2t - 3)^2}$.

Solución Para empezar, reescribir la función como

$$g(t) = -7(2t - 3)^{-2}.$$

Después, con la regla general de la potencia se tiene

$$\begin{aligned} g'(t) &= \underbrace{(-7)}_{\substack{\text{Regla del} \\ \text{múltiplo constante}}}\overbrace{(-2)}^{n}\overbrace{(2t - 3)^{-3}}^{u^{n-1}}\overbrace{(2)}^{u'} && \text{Aplicar la regla general de la potencia.} \\ &= 28(2t - 3)^{-3} && \text{Simplificar.} \\ &= \frac{28}{(2t - 3)^3}. && \text{Expresar con exponente positivo.} \end{aligned}$$

NOTA Derivar la función del ejemplo 6 usando la regla del cociente. El resultado será el mismo, pero el método es menos eficiente que la regla general de la potencia.

Simplificación de derivadas

Los siguientes tres ejemplos ponen de manifiesto algunas técnicas para simplificar las derivadas de funciones que involucran productos, cocientes y composiciones.

EJEMPLO 7 Simplificación por factorización de la potencia mínima

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2\sqrt{1-x^2} && \text{Función original.}\\
&= x^2(1-x^2)^{1/2} && \text{Reescribir.}\\
f'(x) &= x^2\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{1/2}\right] + (1-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx}\left[x^2\right] && \text{Regla del producto.}\\
&= x^2\left[\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)\right] + (1-x^2)^{1/2}(2x) && \text{Regla general de la potencia.}\\
&= -x^3(1-x^2)^{-1/2} + 2x(1-x^2)^{1/2} && \text{Simplificar.}\\
&= x(1-x^2)^{-1/2}\left[-x^2(1) + 2(1-x^2)\right] && \text{Factorizar.}\\
&= \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Simplificación de la derivada de un cociente

TECNOLOGÍA Las herramientas de graficación con derivación simbólica son capaces de derivar funciones muy complicadas. No obstante, suelen presentar el resultado en forma no simplificada. Si se cuenta con una de ese tipo, usarla para calcular las derivadas de las funciones de los ejemplos 7, 8 y 9, y comparar después los resultados.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}} && \text{Función original.}\\
&= \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}} && \text{Reescribir.}\\
f'(x) &= \frac{(x^2+4)^{1/3}(1) - x(1/3)(x^2+4)^{-2/3}(2x)}{(x^2+4)^{2/3}} && \text{Regla del cociente.}\\
&= \frac{1}{3}(x^2+4)^{-2/3}\left[\frac{3(x^2+4) - (2x^2)(1)}{(x^2+4)^{2/3}}\right] && \text{Factorizar.}\\
&= \frac{x^2+12}{3(x^2+4)^{4/3}} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Simplificación de la derivada de una potencia

$$\begin{aligned}
y &= \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2 && \text{Función original.}\\
y' &= \underset{n}{2}\underbrace{\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)}_{u^{n-1}}\underbrace{\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-1}{x^2+3}\right]}_{u'} && \text{Regla general de la potencia.}\\
&= \left[\frac{2(3x-1)}{x^2+3}\right]\left[\frac{(x^2+3)(3) - (3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}\right] && \text{Regla del cociente.}\\
&= \frac{2(3x-1)(3x^2+9-6x^2+2x)}{(x^2+3)^3} && \text{Multiplicar.}\\
&= \frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

Funciones trigonométricas y la regla de la cadena

A continuación se muestran las "versiones de la regla de la cadena" correspondientes a las derivadas de las funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = (\cos u)\,u' \qquad \frac{d}{dx}[\cos u] = -(\operatorname{sen} u)\,u'$$

$$\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)\,u' \qquad \frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)\,u'$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)\,u' \qquad \frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)\,u'$$

EJEMPLO 10 Aplicación de la regla de la cadena a funciones trigonométricas

a) $y = \operatorname{sen} \overbrace{2x}^{u}$ $\qquad y' = \overbrace{\cos 2x}^{\cos u}\,\overbrace{\frac{d}{dx}[2x]}^{u'} = (\cos 2x)(2) = 2\cos 2x$

b) $y = \cos(x - 1)$ $\qquad y' = -\operatorname{sen}(x - 1)$

c) $y = \tan 3x$ $\qquad y' = 3\sec^2 3x$

Hay que asegurarse de entender los convenios matemáticos que afectan a paréntesis y funciones trigonométricas. Así, en el ejemplo 10*a*, se escribe sen $2x$ que significa sen $(2x)$.

EJEMPLO 11 Paréntesis y funciones trigonométricas

a) $y = \cos 3x^2 = \cos(3x^2)$ $\qquad y' = (-\operatorname{sen} 3x^2)(6x) = -6x \operatorname{sen} 3x^2$

b) $y = (\cos 3)x^2$ $\qquad y' = (\cos 3)(2x) = 2x\cos 3$

c) $y = \cos(3x)^2 = \cos(9x^2)$ $\qquad y' = (-\operatorname{sen} 9x^2)(18x) = -18x \operatorname{sen} 9x^2$

d) $y = \cos^2 x = (\cos x)^2$ $\qquad y' = 2(\cos x)(-\operatorname{sen} x) = -2\cos x \operatorname{sen} x$

e) $y = \sqrt{\cos x} = (\cos x)^{1/2}$ $\qquad y' = \frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}(-\operatorname{sen} x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$

Para calcular la derivada de una función con la forma $k(x) = f(g(h(x)))$ es necesario aplicar la regla de la cadena dos veces, como se ilustra en el ejemplo 12.

EJEMPLO 12 Aplicación reiterada de la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
f(t) &= \operatorname{sen}^3 4t && \text{Función original.}\\
&= (\operatorname{sen} 4t)^3 && \text{Reescribir.}\\
f'(t) &= 3(\operatorname{sen} 4t)^2 \frac{d}{dt}[\operatorname{sen} 4t] && \text{Aplicar la regla de la cadena por primera vez.}\\
&= 3(\operatorname{sen} 4t)^2(\cos 4t)\frac{d}{dt}[4t] && \text{Aplicar la regla de la cadena por segunda vez.}\\
&= 3(\operatorname{sen} 4t)^2(\cos 4t)(4) &&\\
&= 12\operatorname{sen}^2 4t \cos 4t && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 13 Recta tangente a una función trigonométrica

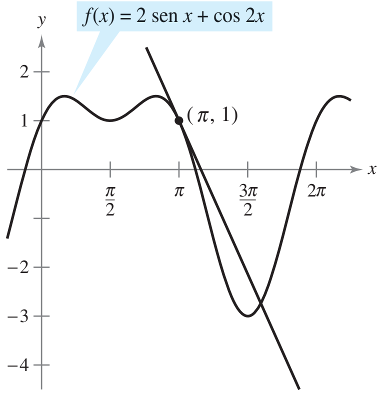


Figura 2.26

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$f(x) = 2 \text{ sen } x + \cos 2x$$

en el punto $(\pi, 1)$, como se muestra en la figura 2.26. A continuación determinar todos los valores de x en el intervalo $(0, 2\pi)$ en los que la gráfica de f tienen una tangente horizontal.

Solución Comenzar por encontrar $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \text{ sen } x + \cos 2x && \text{Función original.} \\ f'(x) &= 2 \cos x + (-\text{sen } 2x)(2) && \text{Aplicar la regla de la cadena a } \cos 2x. \\ &= 2 \cos x - 2 \text{ sen } 2x && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

Para encontrar la ecuación de la recta tangente en $(\pi, 1)$, evaluar $f'(\pi)$.

$$\begin{aligned} f'(\pi) &= 2 \cos \pi - 2 \text{ sen } 2\pi && \text{Sustituir.} \\ &= -2 && \text{Pendiente de la gráfica en } (\pi, 1). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, escribir

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{Forma punto-pendiente.} \\ y - 1 &= -2(x - \pi) && \text{Sustituir } y_1, m \text{ y } x_1. \\ y &= 1 - 2x + 2\pi. && \text{Ecuación de la recta tangente en } (\pi, 1). \end{aligned}$$

Se puede determinar que $f'(x) = 0$ cuando $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ y $\frac{3\pi}{2}$. De tal modo, f tiene una tangente horizontal en $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$, y $\frac{3\pi}{2}$.

AYUDA DE ESTUDIO Para adquirir mayor práctica en la derivación, se deben aprender todas las reglas. Como ayuda para la memoria, observar que las cofunciones (coseno, cotangente y cosecante) tienen un signo negativo en sus derivadas.

Esta sección concluye con un compendio de las reglas de derivación estudiadas hasta este momento.

Compendio de reglas de derivación

Reglas generales de derivación

Sean f, g y u funciones derivables de x.

Regla del múltiplo constante:
$$\frac{d}{dx}[cf] = cf'$$

Regla de la suma o de la diferencia:
$$\frac{d}{dx}[f \pm g] = f' \pm g'$$

Regla del producto:
$$\frac{d}{dx}[fg] = fg' + gf'$$

Regla del cociente:
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Derivadas de funciones algebraicas

Regla de la constante:
$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Regla simple de la potencia:
$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}[x] = 1$$

Derivadas de funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}[\text{sen } x] = \cos x \qquad \frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\text{sen } x \qquad \frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$$

Regla de la cadena

Regla de la cadena:
$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\, u'$$

Regla general de la potencia:
$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\, u'$$

2.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, completar la tabla.

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
1.	$y = (5x - 8)^4$		
2.	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$		
3.	$y = \sqrt{x^3 - 7}$		
4.	$y = 3\tan(\pi x^2)$		
5.	$y = \csc^3 x$		
6.	$y = \operatorname{sen}\dfrac{5x}{2}$		

En los ejercicios 7 a 36, encontrar la derivada de la función.

7. $y = (4x - 1)^3$

8. $y = 2(6 - x^2)^5$

9. $g(x) = 3(4 - 9x)^4$

10. $f(t) = (9t + 2)^{2/3}$

11. $f(t) = \sqrt{5 - t}$

12. $g(x) = \sqrt{9 - 4x}$

13. $y = \sqrt[3]{6x^2 + 1}$

14. $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

15. $y = 2\sqrt[4]{9 - x^2}$

16. $f(x) = -3\sqrt[4]{2 - 9x}$

17. $y = \dfrac{1}{x - 2}$

18. $s(t) = \dfrac{1}{t^2 + 3t - 1}$

19. $f(t) = \left(\dfrac{1}{t - 3}\right)^2$

20. $y = -\dfrac{5}{(t + 3)^3}$

21. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

22. $g(t) = \sqrt{\dfrac{1}{t^2 - 2}}$

23. $f(x) = x^2(x - 2)^4$

24. $f(x) = x(3x - 9)^3$

25. $y = x\sqrt{1 - x^2}$

26. $y = \frac{1}{2}x^2\sqrt{16 - x^2}$

27. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

28. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^4 + 4}}$

29. $g(x) = \left(\dfrac{x + 5}{x^2 + 2}\right)^2$

30. $h(t) = \left(\dfrac{t^2}{t^3 + 2}\right)^2$

31. $f(v) = \left(\dfrac{1 - 2v}{1 + v}\right)^3$

32. $g(x) = \left(\dfrac{3x^2 - 2}{2x + 3}\right)^3$

33. $f(x) = ((x^2 + 3)^5 + x)^2$

34. $g(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$

35. $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$

36. $g(t) = \sqrt{\sqrt{t + 1} + 1}$

CAS **En los ejercicios 37 a 42, utilizar un sistema algebraico por computadora para encontrar la derivada de la función. Utilizar el mismo mecanismo para representar gráficamente la función y su derivada en el mismo plano cartesiano. Describir el comportamiento de la función que corresponde a cualquier cero de la gráfica de la derivada.**

37. $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 1}$

38. $y = \sqrt{\dfrac{2x}{x + 1}}$

39. $y = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x}}$

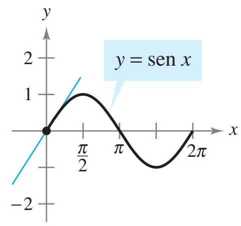
40. $g(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}$

41. $y = \dfrac{\cos \pi x + 1}{x}$

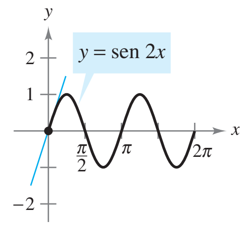
42. $y = x^2 \tan \dfrac{1}{x}$

En los ejercicios 43 y 44, calcular la pendiente de la recta tangente a la función seno en el origen. Comparar este valor con el número de ciclos completos en el intervalo $[0, 2\pi]$. ¿Cuál es la conclusión respecto a la pendiente de una función sen ax en el origen?

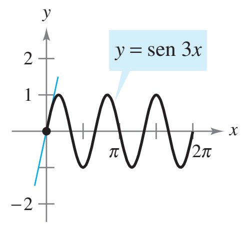
43. *a)*



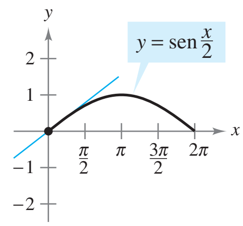
b)



44. *a)*



b)



En los ejercicios 45 a 66, encontrar la derivada de la función.

45. $y = \cos 4x$

46. $y = \operatorname{sen} \pi x$

47. $g(x) = 5\tan 3x$

48. $h(x) = \sec x^2$

49. $y = \operatorname{sen}(\pi x)^2$

50. $y = \cos(1 - 2x)^2$

51. $h(x) = \operatorname{sen} 2x \cos 2x$

52. $g(\theta) = \sec\left(\frac{1}{2}\theta\right)\tan\left(\frac{1}{2}\theta\right)$

53. $f(x) = \dfrac{\cot x}{\operatorname{sen} x}$

54. $g(v) = \dfrac{\cos v}{\csc v}$

55. $y = 4\sec^2 x$

56. $g(t) = 5\cos^2 \pi t$

57. $f(\theta) = \tan^2 5\theta$

58. $g(\theta) = \cos^2 8\theta$

59. $f(\theta) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\theta$

60. $h(t) = 2\cot^2(\pi t + 2)$

61. $f(t) = 3\sec^2(\pi t - 1)$

62. $y = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

63. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)^2$

64. $y = \operatorname{sen}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$

65. $y = \operatorname{sen}(\tan 2x)$

66. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}$

En los ejercicios 67 a 74, evaluar la derivada de la función en el punto indicado. Utilizar una herramienta de graficación para verificar los resultados.

	Función	*Punto*
67.	$s(t) = \sqrt{t^2 + 6t - 2}$	$(3, 5)$
68.	$y = \sqrt[5]{3x^3 + 4x}$	$(2, 2)$
69.	$f(x) = \dfrac{5}{x^3 - 2}$	$\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$
70.	$f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 3x)^2}$	$\left(4, \dfrac{1}{16}\right)$
71.	$f(t) = \dfrac{3t + 2}{t - 1}$	$(0, -2)$
72.	$f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 3}$	$(2, 3)$
73.	$y = 26 - \sec^3 4x$	$(0, 25)$
74.	$y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{\cos x}$	$\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2}{\pi}\right)$

En los ejercicios 75 a 82, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto que se indica, *b*) utilizar una herramienta de graficación para representar la función y la recta tangente en ese punto y *c*) verificar los resultados empleando la función *derivative* de su herramienta de graficación.

	Función	*Punto*
75.	$f(x) = \sqrt{2x^2 - 7}$	$(4, 5)$
76.	$f(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x^2 + 5}$	$(2, 2)$
77.	$y = (4x^3 + 3)^2$	$(-1, 1)$
78.	$f(x) = (9 - x^2)^{2/3}$	$(1, 4)$
79.	$f(x) = \operatorname{sen} 2x$	$(\pi, 0)$
80.	$y = \cos 3x$	$\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
81.	$f(x) = \tan^2 x$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$
82.	$y = 2\tan^3 x$	$\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$

En los ejercicios 83 a 86, *a*) utilizar una herramienta de graficación para encontrar la derivada de la función del punto dado, *b*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función del punto dado y *c*) utilizar la herramienta de graficación para representar la función y su recta tangente en la misma ventana.

83. $g(t) = \dfrac{3t^2}{\sqrt{t^2 + 2t - 1}}, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

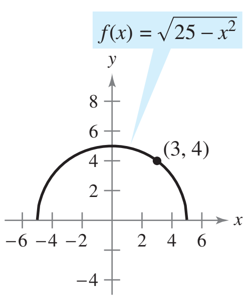
84. $f(x) = \sqrt{x}(2 - x)^2, \quad (4, 8)$

85. $s(t) = \dfrac{(4 - 2t)\sqrt{1 + t}}{3}, \quad \left(0, \frac{4}{3}\right)$

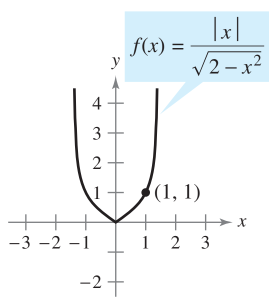
86. $y = (t^2 - 9)\sqrt{t + 2}, \quad (2, -10)$

Curvas famosas **En los ejercicios 87 y 88, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica del punto dado. Después utilizar una herramienta de graficación para dibujar la función y su recta tangente en la misma ventana.**

87. Semicírculo superior



88. Curva de bala



89. ***Recta tangente horizontal*** Determinar el o los puntos en el intervalo $(0, 2\pi)$ en los que la gráfica de $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x$ tiene una tangente horizontal.

90. ***Recta tangente horizontal*** Determinar el o los puntos en los que la gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x - 1}}$ tiene una tangente horizontal.

En los ejercicios 91 a 96, encontrar la segunda derivada de la función.

91. $f(x) = 5(2 - 7x)^4$

92. $f(x) = 4(x^2 - 2)^3$

93. $f(x) = \dfrac{1}{x - 6}$

94. $f(x) = \dfrac{4}{(x + 2)^3}$

95. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

96. $f(x) = \sec^2 \pi x$

En los ejercicios 97 a 100, evaluar la segunda derivada de la función en el punto dado. Utilizar una herramienta de graficación para verificar los resultados.

97. $h(x) = \frac{1}{9}(3x + 1)^3, \quad \left(1, \frac{64}{9}\right)$

98. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 4}}, \quad \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

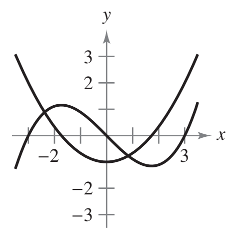
99. $f(x) = \cos(x^2), \quad (0, 1)$

100. $g(t) = \tan 2t, \quad \left(\dfrac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$

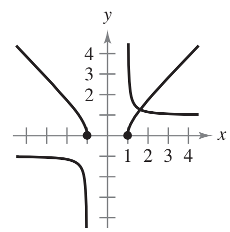
Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 101 a 104, se muestran las gráficas de una función *f* y su derivada *f′*. Clasificar las gráficas según correspondan a *f* o *f′* y escribir en un breve párrafo los criterios utilizados para hacer la selección.

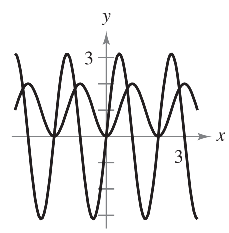
101.



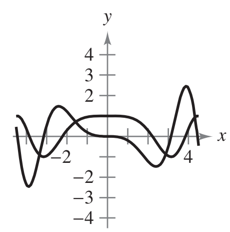
102.



103.



104.



En los ejercicios 105 y 106, se da la relación que existe entre *f* y *g*. Explicar la relación que existe entre *f′* y *g′*.

105. $g(x) = f(3x)$

106. $g(x) = f(x^2)$

107. ***Para pensar*** La tabla muestra algunos valores de la derivada de una función desconocida *f*. Completar la tabla encontrando (si es posible) la derivada de cada una de las siguientes transformaciones de *f*.

a) $g(x) = f(x) - 2$

b) $h(x) = 2f(x)$

c) $r(x) = f(-3x)$

d) $s(x) = f(x + 2)$