

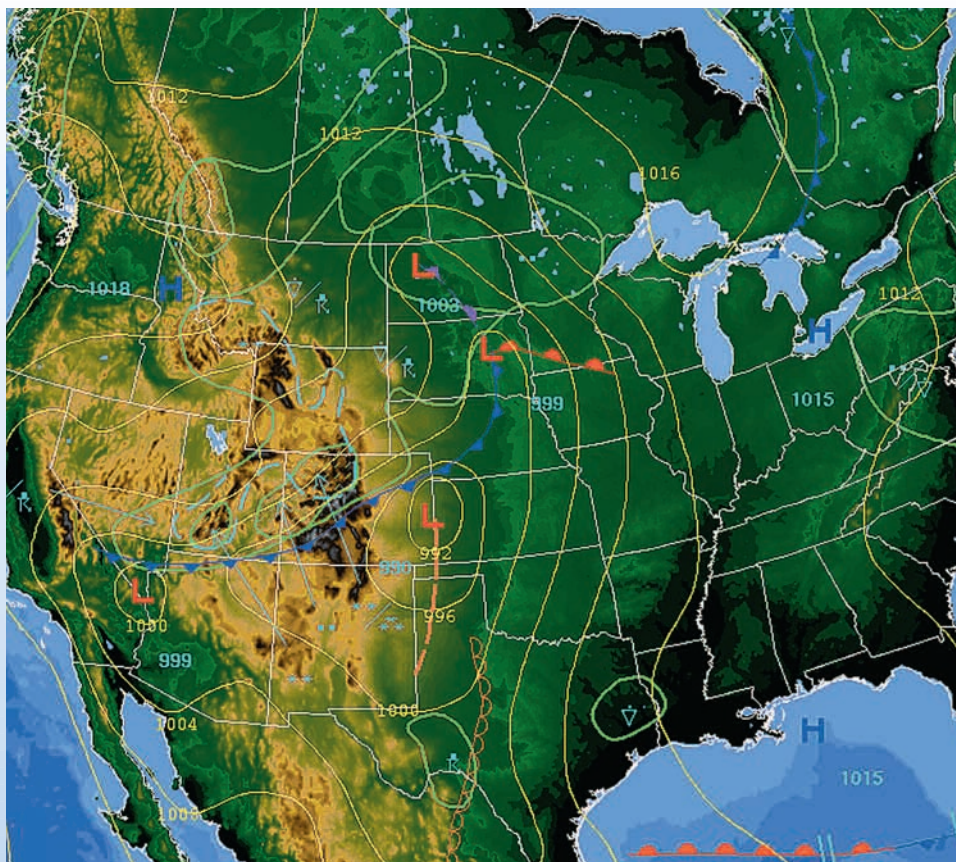
13

Funciones de varias variables

En este capítulo se estudiarán funciones de más de una variable independiente. Muchos de los conceptos presentados son extensiones de ideas familiares de capítulos recientes.

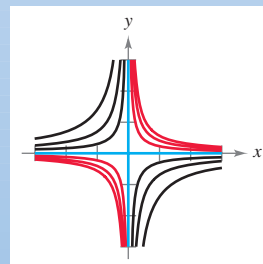
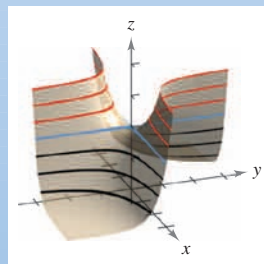
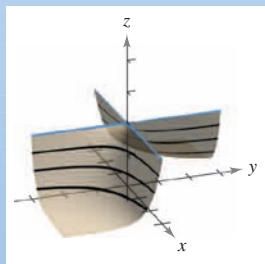
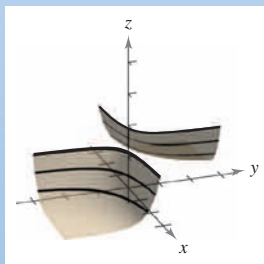
En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo trazar una gráfica, curvas de nivel y superficies de nivel. (13.1)
- Cómo encontrar un límite y determinar la continuidad. (13.2)
- Cómo encontrar y usar una derivada parcial. (13.3)
- Cómo encontrar y usar una diferencial total y determinar diferenciabilidad. (13.4)
- Cómo usar la regla de la cadena y encontrar una derivada parcial implícita. (13.5)
- Cómo encontrar y usar una derivada direccional y un gradiente. (13.6)
- Cómo encontrar una ecuación de un plano tangente y una ecuación de una recta normal a una superficie, y cómo encontrar el ángulo de inclinación de un plano. (13.7)
- Cómo encontrar los extremos absolutos y relativos. (13.8)
- Cómo resolver un problema de optimización, incluida optimización restringida usando un multiplicador de Lagrange, y cómo usar el método de mínimos cuadrados. (13.9, 13.10)



NOAA

Los meteorólogos usan mapas que muestran curvas de presión atmosférica igual, llamadas *isobaras*, para predecir los patrones del clima. ¿Cómo se pueden usar los gradientes de presión para determinar el área del país que tiene las mayores velocidades de viento? (Ver la sección 13.6, ejercicio 68.)



Muchas cantidades de la vida real son funciones de dos o más variables. En la sección 13.1 se aprenderá cómo graficar una función de dos variables, tal como la que se muestra arriba. Las primeras tres gráficas muestran vistas cortadas de la superficie en varios trazos. Otra forma de visualizar estas superficies es proyectar los trazos hacia el plano xy , tal como se muestra en la cuarta gráfica.

13.1 Introducción a las funciones de varias variables

- Entender la notación para una función de varias variables.
- Dibujar la gráfica de una función de dos variables.
- Dibujar las curvas de nivel de una función de dos variables.
- Dibujar las superficies de nivel de una función de tres variables.
- Utilizar gráficos por computadora para representar una función de dos variables.

Funciones de varias variables

Hasta ahora en este texto, sólo se han visto funciones de una sola variable (independiente). Sin embargo, muchos problemas comunes son funciones de dos o más variables. Por ejemplo, el trabajo realizado por una fuerza ($W = FD$) y el volumen de un cilindro circular recto ($V = \pi r^2 h$) son funciones de dos variables. El volumen de un sólido rectangular ($V = lwh$) es una función de tres variables. La notación para una función de dos o más variables es similar a la utilizada para una función de una sola variable. Aquí se presentan dos ejemplos.

$$z = f(x, y) = x^2 + xy \quad \text{Función de 2 variables.}$$

{
2 variables

y

$$w = f(x, y, z) = x + 2y - 3z \quad \text{Función de 3 variables.}$$

{
3 variables

EXPLORACIÓN

Comparación de dimensiones

Sin usar una herramienta de graficación, describir la gráfica de cada función de dos variables.

- a) $z = x^2 + y^2$
- b) $z = x + y$
- c) $z = x^2 + y$
- d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
- e) $z = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par ordenado (x, y) de D le corresponde un único número real $f(x, y)$, entonces se dice que f es una **función de x y y** . El conjunto D es el **dominio** de f , y el correspondiente conjunto de valores $f(x, y)$ es el **rango** de f .

En la función dada por $z = f(x, y)$, x y y son las **variables independientes** y z es la **variable dependiente**.

Pueden darse definiciones similares para las funciones de tres, cuatro o n variables donde los dominios consisten en tríadas (x_1, x_2, x_3) , tétradas (x_1, x_2, x_3, x_4) y n -adas (x_1, x_2, \dots, x_n) . En todos los casos, rango es un conjunto de números reales. En este capítulo, sólo se estudian funciones de dos o tres variables.

Como ocurre con las funciones de una variable, la manera más común para describir una función de varias variables es por medio de una *ecuación*, y a menos que se diga explícitamente lo contrario, se puede suponer que el dominio es el conjunto de todos los puntos para los que la ecuación está definida. Por ejemplo, el dominio de la función dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

se supone que es todo el plano xy . Similarmente, el dominio de

$$f(x, y) = \ln xy$$

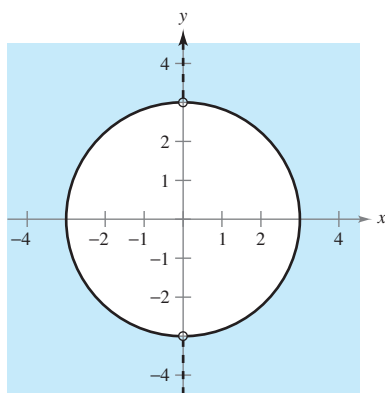
es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano para los que $xy > 0$. Esto consiste en todos los puntos del primer y tercer cuadrantes.



Archive Photos

MARY FAIRFAX SOMERVILLE (1780-1872)

Somerville se interesó por el problema de crear modelos geométricos de funciones de varias variables. Su libro más conocido, *The Mechanics of the Heavens*, se publicó en 1831.

EJEMPLO 1 Dominios de funciones de varias variables

Dominio de
 $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$

Figura 13.1

Hallar el dominio de cada función.

$$a) f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x} \quad b) g(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$$

Solución

a) La función f está definida para todos los puntos (x, y) tales que $x \neq 0$ y

$$x^2 + y^2 \geq 9.$$

Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los puntos que están en el círculo $x^2 + y^2 = 9$, o en su exterior, con *excepción* de los puntos en el eje y , como se muestra en la figura 13.1.

b) La función g está definida para todos los puntos (x, y, z) tales que

$$x^2 + y^2 + z^2 < 9.$$

Por consiguiente, el dominio es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) que se encuentran en el interior de la esfera de radio 3 centrada en el origen.

Las funciones de varias variables pueden combinarse de la misma manera que las funciones de una sola variable. Por ejemplo, se puede formar la suma, la diferencia, el producto y el cociente de funciones de dos variables como sigue.

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x, y) &= f(x, y) \pm g(x, y) && \text{Suma o diferencia.} \\ (fg)(x, y) &= f(x, y)g(x, y) && \text{Producto.} \\ \frac{f}{g}(x, y) &= \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad g(x, y) \neq 0 && \text{Cociente.} \end{aligned}$$

No se puede formar la composición de dos funciones de varias variables. Sin embargo, si h es una función de varias variables y g es una función de una sola variable, puede formarse la función **compuesta** $(g \circ h)(x, y)$ como sigue.

$$(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y)) \quad \text{Composición.}$$

El dominio de esta función compuesta consta de todo (x, y) en el dominio de h tal que $h(x, y)$ está en el dominio de g . Por ejemplo, la función dada por

$$f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$$

puede verse como la composición de la función de dos variables dadas por $h(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$ y la función de una sola variable dada por $g(u) = \sqrt{u}$. El dominio de esta función es el conjunto de todos los puntos que se encuentran en la elipse dada por $4x^2 + y^2 = 16$ o en su interior.

Una función que puede expresarse como suma de funciones de la forma $cx^m y^n$ (donde c es un número real y m y n son enteros no negativos) se llama una **función polinomial** de dos variables. Por ejemplo, las funciones dadas por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + x + 2 \quad y \quad g(x, y) = 3xy^2 + x - 2$$

son funciones polinomiales de dos variables. Una **función racional** es el cociente de dos funciones polinomiales. Terminología similar se utiliza para las funciones de más de dos variables.

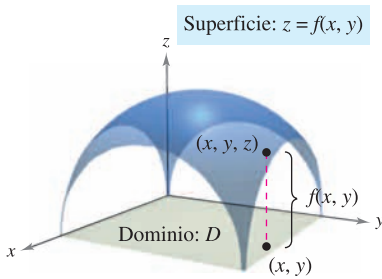


Figura 13.2

Gráfica de una función de dos variables

Como en el caso de las funciones de una sola variable, se puede saber mucho acerca del comportamiento de una función de dos variables dibujando su gráfica. La **gráfica** de una función f de dos variables es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) para los que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en el dominio de f . Esta gráfica puede interpretarse geoméricamente como una *superficie en el espacio*, como se explicó en las secciones 11.5 y 11.6. En la figura 13.2 hay que observar que la gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie cuya proyección sobre el plano xy es D , el dominio de f . A cada punto (x, y) en D corresponde un punto (x, y, z) de la superficie y , viceversa, a cada punto (x, y, z) de la superficie le corresponde un punto (x, y) en D .

EJEMPLO 2 Descripción de la gráfica de una función de dos variables

¿Cuál es el rango de $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$? Describir la gráfica de f .

Solución El dominio D dado por la ecuación de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $16 - 4x^2 - y^2 \geq 0$. Por tanto, D es el conjunto de todos los puntos que pertenecen o son interiores a la elipse dada por

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1. \quad \text{Elipse en el plano } xy.$$

El rango de f está formado por todos los valores $z = f(x, y)$ tales que $0 \leq z \leq \sqrt{16}$ o sea

$$0 \leq z \leq 4. \quad \text{Rango de } f.$$

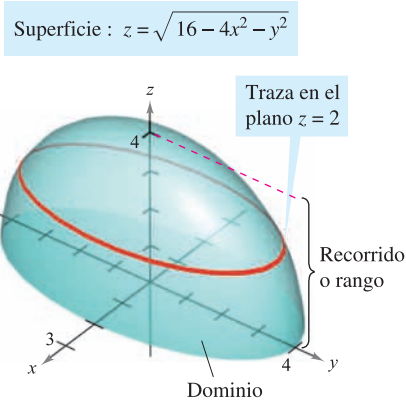
Un punto (x, y, z) está en la gráfica de f si y sólo si

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} \\ z^2 &= 16 - 4x^2 - y^2 \end{aligned}$$

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad 0 \leq z \leq 4.$$

De acuerdo con la sección 11.6, se sabe que la gráfica de f es la mitad superior de un elipsoide, como se muestra en la figura 13.3.



La gráfica de $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ es la mitad superior de un elipsoide
Figura 13.3

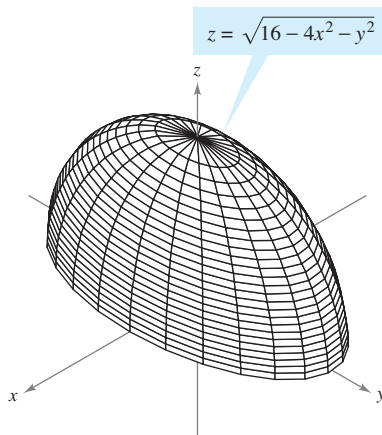


Figura 13.4

Para dibujar *a mano* una superficie en el espacio, es útil usar trazas en planos paralelos a los planos coordenados, como se muestra en la figura 13.3. Por ejemplo, para hallar la traza de la superficie en el plano $z = 2$, se sustituye $z = 2$ en la ecuación $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ y se obtiene

$$2 = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

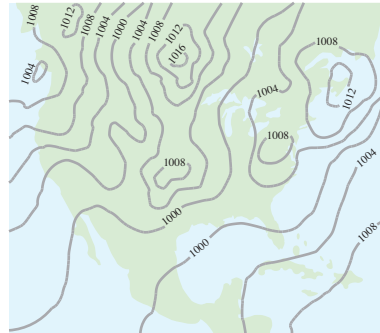
Por tanto, la traza es una elipse centrada en el punto $(0, 0, 2)$ con ejes mayor y menor de longitudes $4\sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$.

Las trazas también se usan en la mayor parte de las herramientas de graficación tridimensionales. Por ejemplo, la figura 13.4 muestra una versión generada por computadora de la superficie dada en el ejemplo 2. En esta gráfica la herramienta de graficación tomó 25 trazas paralelas al plano xy y 12 trazas en planos verticales.

Si se dispone de una herramienta de graficación tridimensional, utilícese para representar varias superficies.

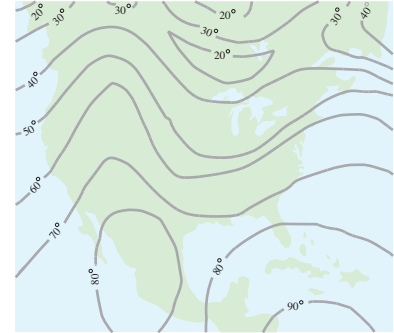
Curvas de nivel

Una segunda manera de visualizar una función de dos variables es usar un **campo escalar** en el que el escalar $z = f(x, y)$ se asigna al punto (x, y) . Un campo escalar puede caracterizarse por sus **curvas de nivel** (o **líneas de contorno**) a lo largo de las cuales el valor de $f(x, y)$ es constante. Por ejemplo, el mapa climático en la figura 13.5 muestra las curvas de nivel de igual presión, llamadas **isobaras**. Las curvas de nivel que representan puntos de igual temperatura en mapas climáticos, se llaman **isotermas**, como se muestra en la figura 13.6. Otro uso común de curvas de nivel es la representación de campos de potencial eléctrico. En este tipo de mapa, las curvas de nivel se llaman **líneas equipotenciales**.



Las curvas de nivel muestran las líneas de igual presión (isobaras) medidas en milibares

Figura 13.5



Las curvas de nivel muestran líneas de igual temperatura (isotermas) medidas en grados Fahrenheit

Figura 13.6

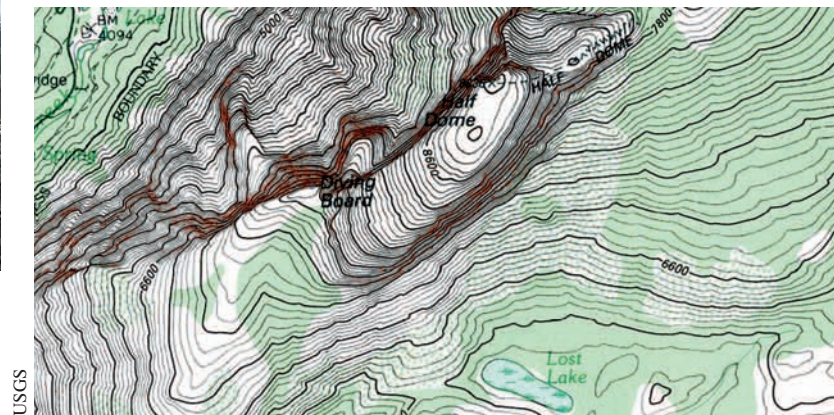
Los mapas de contorno suelen usarse para representar regiones de la superficie de la Tierra, donde las curvas de nivel representan la altura sobre el nivel del mar. Este tipo de mapas se llama **mapa topográfico**. Por ejemplo, la montaña mostrada en la figura 13.7 se representa por el mapa topográfico de la figura 13.8.

Un mapa de contorno representa la variación de z respecto a x y y mediante espacio entre las curvas de nivel. Una separación grande entre las curvas de nivel indica que z cambia lentamente, mientras que un espacio pequeño indica un cambio rápido en z . Además, en un mapa de contorno, es importante elegir valores de c *uniformemente espaciados*, para dar una mejor ilusión tridimensional.



Alfred B. Thomas/Earth Scenes

Figura 13.7



USGS

Figura 13.8

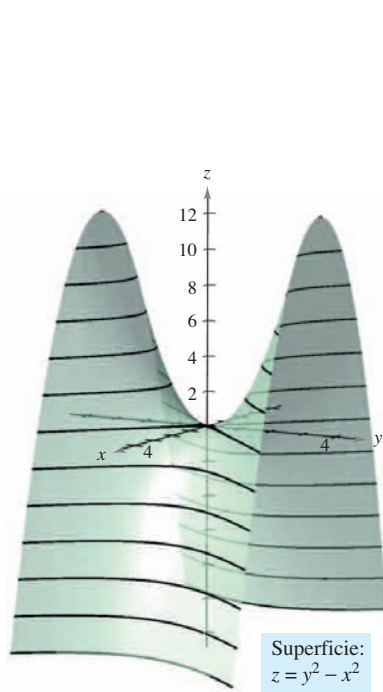
EJEMPLO 3 Dibujo de un mapa de contorno

El hemisferio dado por $f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$ se muestra en la figura 13.9. Dibujar un mapa de contorno de esta superficie utilizando curvas de nivel que correspondan a $c = 0, 1, 2, \dots, 8$.

Solución Para cada c , la ecuación dada por $f(x, y) = c$ es un círculo (o un punto) en el plano xy . Por ejemplo, para $c_1 = 0$, la curva de nivel es

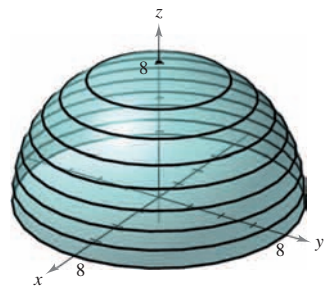
$$x^2 + y^2 = 64 \quad \text{Círculo de radio 8.}$$

la cual es un círculo de radio 8. La figura 13.10 muestra las nueve curvas de nivel del hemisferio.

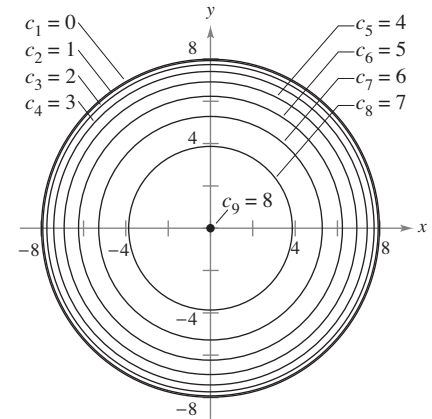


Paraboloide hiperbólico
Figura 13.11

Superficie:
 $f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$



Hemisferio
Figura 13.9



Mapa de contorno
Figura 13.10

EJEMPLO 4 Dibujo de un mapa de contorno

El paraboloide hiperbólico dado por

$$z = y^2 - x^2$$

se muestra en la figura 13.11. Dibujar un mapa de contorno de esta superficie.

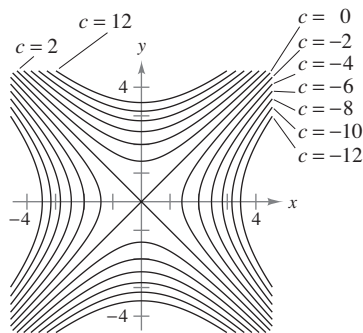
Solución Para cada valor de c , sea $f(x, y) = c$ y dibújese la curva de nivel resultante en el plano xy . Para esta función, cada una de las curvas de nivel ($c \neq 0$) es una hipérbola cuyas asíntotas son las rectas $y = \pm x$. Si $c < 0$, el eje transversal es horizontal. Por ejemplo, la curva de nivel para $c = -4$ está dada por

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1. \quad \text{Hipérbola con eje transversal horizontal.}$$

Si $c > 0$, el eje transversal es vertical. Por ejemplo, la curva de nivel para $c = 4$ está dada por

$$\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1. \quad \text{Hipérbola con eje transversal vertical.}$$

Si $c = 0$, la curva de nivel es la cónica degenerada representada por las asíntotas que se cortan, como se muestra en la figura 13.12.



Curvas de nivel hiperbólicas
(con incrementos de 2)
Figura 13.12

Un ejemplo de función de dos variables utilizada en economía es la **función de producción de Cobb-Douglas**. Esta función se utiliza como un modelo para representar el número de unidades producidas al variar las cantidades de trabajo y capital. Si x mide las unidades de trabajo y y mide las unidades de capital, el número de unidades producidas está dado por

$$f(x, y) = Cx^a y^{1-a}$$

donde C y a son constantes, con $0 < a < 1$.

EJEMPLO 5 La función de producción de Cobb-Douglas

Un fabricante de juguetes estima que su función de producción es $f(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$, donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital. Comparar el nivel de producción cuando $x = 1\,000$ y $y = 500$ con el nivel de producción cuando $x = 2\,000$ y $y = 1\,000$.

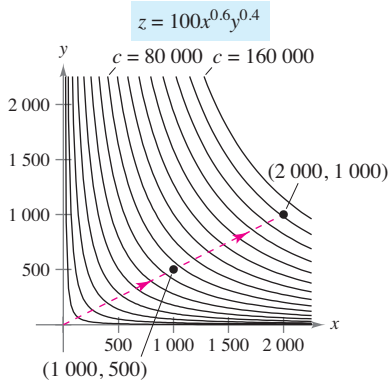
Solución Cuando $x = 1\,000$ y $y = 500$, el nivel de producción es

$$f(1\,000, 500) = 100(1\,000^{0.6})(500^{0.4}) \approx 75\,786.$$

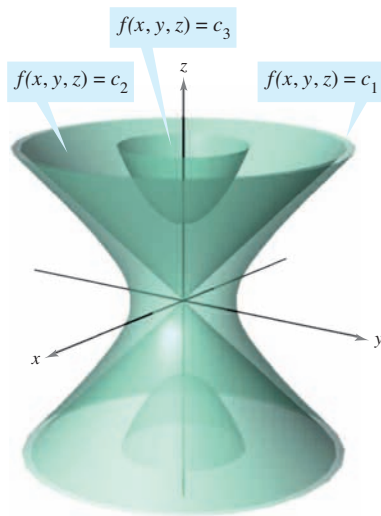
Cuando $x = 2\,000$ y $y = 1\,000$, el nivel de producción es

$$f(2\,000, 1\,000) = 100(2\,000^{0.6})(1\,000^{0.4}) = 151\,572.$$

Las curvas de nivel de $z = f(x, y)$ se muestran en la figura 13.13. Nótese que al doblar ambas x y y , se duplica el nivel de producción (ver ejercicio 79).



Curvas de nivel (con incrementos de 10 000)
Figura 13.13

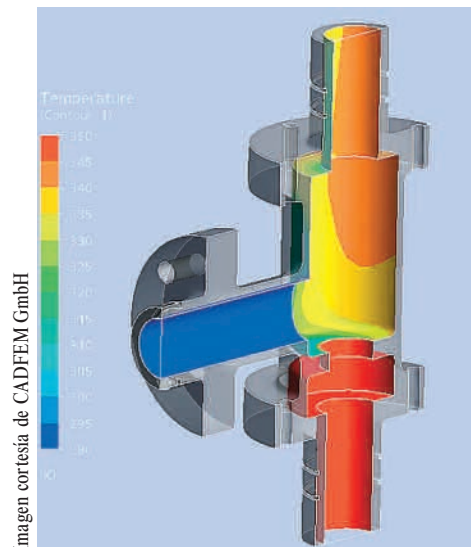


Superficies de nivel de f
Figura 13.14

Superficies de nivel

El concepto de curva de nivel puede extenderse una dimensión para definir una **superficie de nivel**. Si f es una función de tres variables y c es una constante, la gráfica de la ecuación $f(x, y, z) = c$ es una **superficie de nivel** de la función f , como se muestra en la figura 13.14.

Ingenieros y científicos han desarrollado mediante computadoras otras formas de ver funciones de tres variables. Por ejemplo, la figura 13.15 muestra una simulación computacional que usa colores para representar la distribución de temperaturas del fluido que entra en el tubo.



Una forma común de ANSYS CFX™ y ANSYS Mechanical™ para análisis de esfuerzos térmicos.

Figura 13.15

EJEMPLO 6 Superficies de nivel

Describir las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2.$$

Solución Cada superficie de nivel tiene una ecuación de la forma

$$4x^2 + y^2 + z^2 = c. \quad \text{Ecuación de una superficie de nivel.}$$

Por tanto, las superficies de nivel son elipsoides (cuyas secciones transversales paralelas al plano yz son círculos). A medida que c aumenta, los radios de las secciones transversales circulares aumentan según la raíz cuadrada de c . Por ejemplo, las superficies de nivel correspondientes a los valores $c = 0$, $c = 4$ y $c = 16$ son como sigue.

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{Superficie de nivel para } c = 0 \text{ (un solo punto).}$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 \quad \text{Superficie de nivel para } c = 4 \text{ (elipsoide).}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1 \quad \text{Superficie de nivel para } c = 16 \text{ (elipsoide).}$$

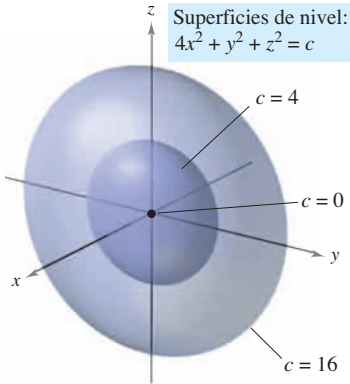


Figura 13.16

Estas superficies de nivel se muestran en la figura 13.16.

NOTA Si la función del ejemplo 6 representara la *temperatura* en el punto (x, y, z) , las superficies de nivel mostradas en la figura 13.16 se llamarían **superficies isotermas**.

Gráficas por computadora

El problema de dibujar la gráfica de una superficie en el espacio puede simplificarse usando una computadora. Aunque hay varios tipos de herramientas de graficación tridimensionales, la mayoría utiliza alguna forma de análisis de trazas para dar la impresión de tres dimensiones. Para usar tales herramientas de graficación, por lo general se necesita dar la ecuación de la superficie, la región del plano xy sobre la cual la superficie ha de visualizarse y el número de trazas a considerar. Por ejemplo, para representar gráficamente la superficie dada por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$$

se podrían elegir los límites siguientes para x , y y z .

$$-3 \leq x \leq 3 \quad \text{Límites para } x.$$

$$-3 \leq y \leq 3 \quad \text{Límites para } y.$$

$$0 \leq z \leq 3 \quad \text{Límites para } z.$$

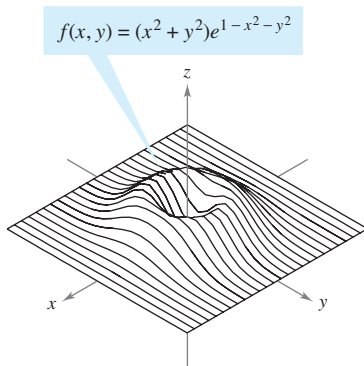
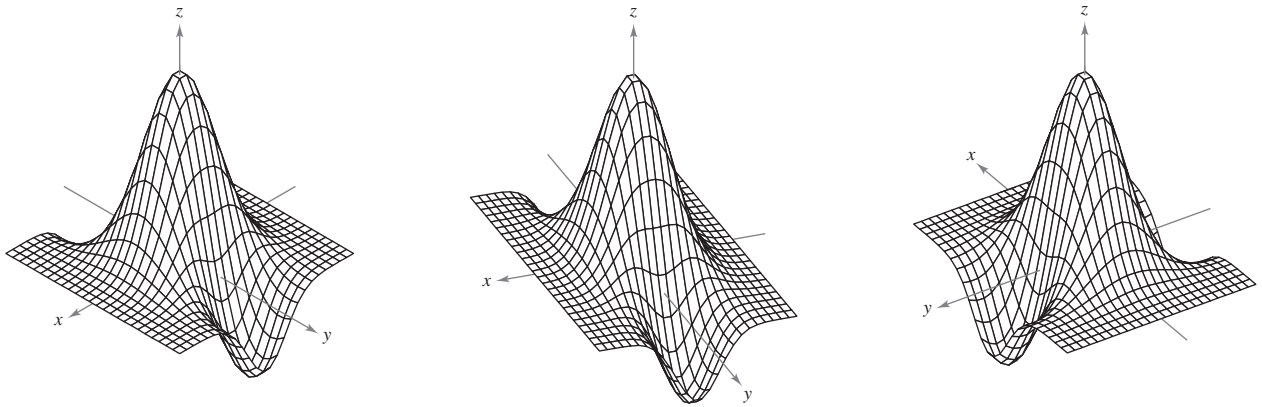


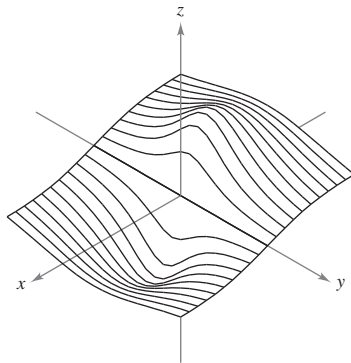
Figura 13.17

La figura 13.17 muestra una gráfica de esta superficie generada por computadora utilizando 26 trazas paralelas al plano yz . Para realizar el efecto tridimensional, el programa utiliza una rutina de “línea oculta”. Es decir, comienza dibujando las trazas en primer plano (las correspondientes a los valores mayores de x), y después, a medida que se dibuja una nueva traza, el programa determina si mostrará toda o sólo parte de la traza siguiente.

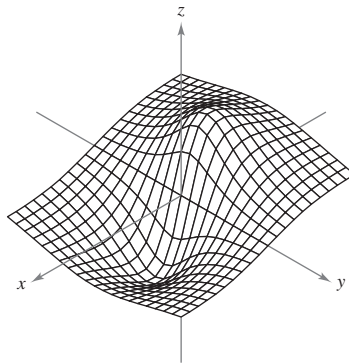
Las gráficas en la página siguiente muestran una variedad de superficies que fueron dibujadas por una computadora. Si se dispone de un programa de computadora para dibujo, podrán reproducirse estas superficies.



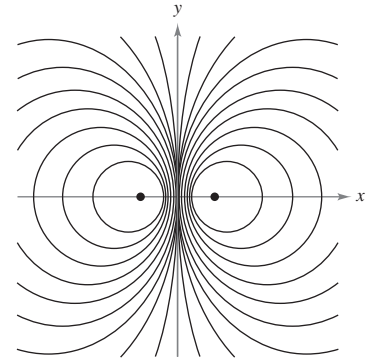
Tres vistas diferentes de la gráfica de $f(x, y) = (2 - y^2 + x^2)e^{1-x^2-(y^2/4)}$



Trazas simples

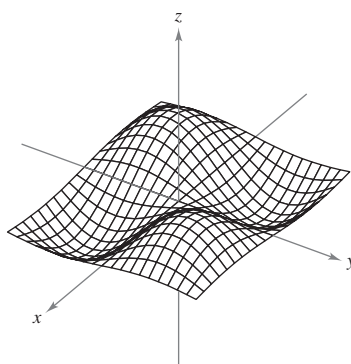


Trazas dobles

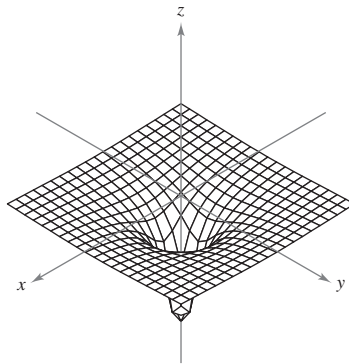


Curvas de nivel

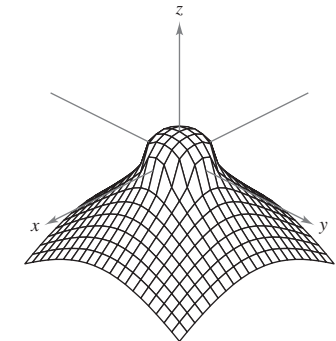
Trazas y curvas de nivel de la gráfica de $f(x, y) = \frac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$



$f(x, y) = \text{sen } x \text{ sen } y$



$f(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

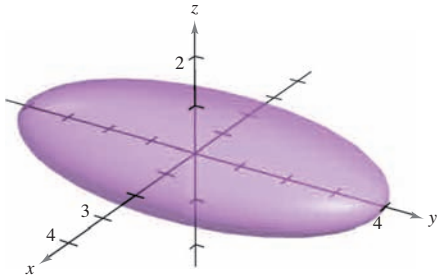


$f(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{\sqrt{|1 - x^2 - y^2|}}$

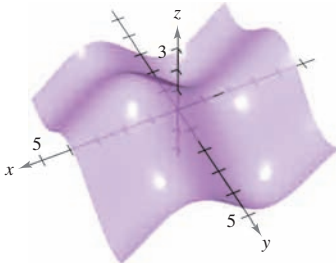
13.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, usar la gráfica para determinar si z es una función de x y y . Explicar.

1.



2.



En los ejercicios 3 a 6, determinar si z es una función de x y y .

- 3. $x^2z + 3y^2 - xy = 10$ 4. $xz^2 + 2xy - y^2 = 4$
- 5. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ 6. $z + x \ln y - 8yz = 0$

En los ejercicios 7 a 18, hallar y simplificar los valores de la función.

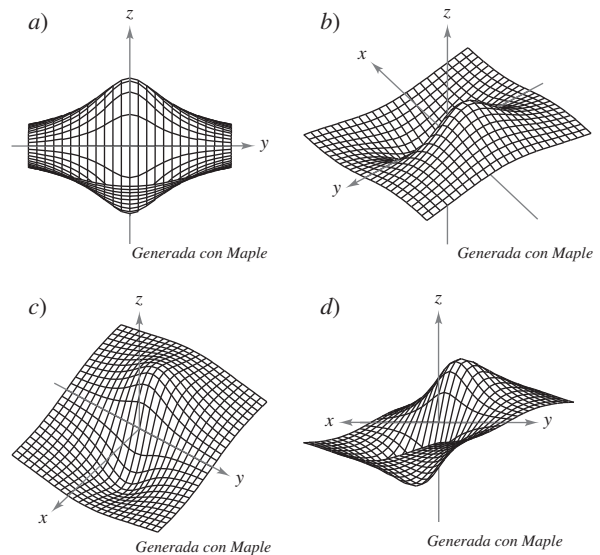
- 7. $f(x, y) = xy$
 a) (3, 2) b) (-1, 4) c) (30, 5)
 d) (5, y) e) (x, 2) f) (5, t)
- 8. $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$
 a) (0, 0) b) (0, 1) c) (2, 3)
 d) (1, y) e) (x, 0) f) (t, 1)
- 9. $f(x, y) = xe^y$
 a) (5, 0) b) (3, 2) c) (2, -1)
 d) (5, y) e) (x, 2) f) (t, t)
- 10. $g(x, y) = \ln|x + y|$
 a) (1, 0) b) (0, -1) c) (0, e)
 d) (1, 1) e) (e, e/2) f) (2, 5)
- 11. $h(x, y, z) = \frac{xy}{z}$
 a) (2, 3, 9) b) (1, 0, 1) c) (-2, 3, 4) d) (5, 4, -6)
- 12. $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$
 a) (0, 5, 4) b) (6, 8, -3)
 c) (4, 6, 2) d) (10, -4, -3)

- 13. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$
 a) $(2, \pi/4)$ b) (3, 1) c) $(-3, \pi/3)$ d) $(4, \pi/2)$
- 14. $V(r, h) = \pi r^2h$
 a) (3, 10) b) (5, 2) c) (4, 8) d) (6, 4)
- 15. $g(x, y) = \int_x^y (2t - 3) dt$
 a) (4, 0) b) (4, 1) c) $(4, \frac{3}{2})$ d) $(\frac{3}{2}, 0)$
- 16. $g(x, y) = \int_x^y \frac{1}{t} dt$
 a) (4, 1) b) (6, 3) c) (2, 5) d) $(\frac{1}{2}, 7)$
- 17. $f(x, y) = 2x + y^2$ 18. $f(x, y) = 3x^2 - 2y$
 a) $\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$ a) $\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$
 b) $\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$ b) $\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

En los ejercicios 19 a 30, describir el dominio y rango de la función.

- 19. $f(x, y) = x^2 + y^2$ 20. $f(x, y) = e^{-xy}$
- 21. $g(x, y) = x\sqrt{y}$ 22. $g(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}}$
- 23. $z = \frac{x + y}{xy}$ 24. $z = \frac{xy}{x - y}$
- 25. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 26. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$
- 27. $f(x, y) = \arccos(x + y)$ 28. $f(x, y) = \arcsen(y/x)$
- 29. $f(x, y) = \ln(4 - x - y)$ 30. $f(x, y) = \ln(xy - 6)$

31. **Para pensar** Las gráficas marcadas a), b), c) y d) son gráficas de la función $f(x, y) = -4x/(x^2 + y^2 + 1)$. Asociar cada gráfica con el punto en el espacio desde el que la superficie es visualizada. Los cuatro puntos son (20, 15, 25), (-15, 10, 20), (20, 20, 0) y (20, 0, 0)



- 32. Para pensar** Usar la función dada en el ejercicio 31.
- Hallar el dominio y rango de la función.
 - Identificar los puntos en el plano xy donde el valor de la función es 0.
 - ¿Pasa la superficie por todos los octantes del sistema de coordenadas rectangular? Dar las razones de la respuesta.

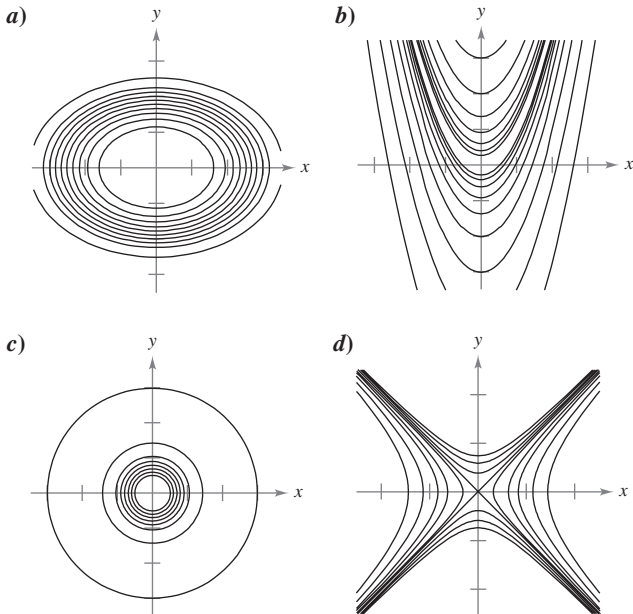
En los ejercicios 33 a 40, dibujar la superficie dada por la función.

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 33. $f(x, y) = 4$ | 34. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$ |
| 35. $f(x, y) = y^2$ | 36. $g(x, y) = \frac{1}{2}y$ |
| 37. $z = -x^2 - y^2$ | 38. $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ |
| 39. $f(x, y) = e^{-x}$ | |
| 40. $f(x, y) = \begin{cases} xy, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & x < 0 \text{ o } y < 0 \end{cases}$ | |

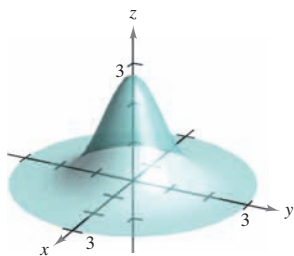
CAS En los ejercicios 41 a 44, utilizar un sistema algebraico por computadora para álgebra y representar gráficamente la función.

- | | |
|--------------------------------|---|
| 41. $z = y^2 - x^2 + 1$ | 42. $z = \frac{1}{12}\sqrt{144 - 16x^2 - 9y^2}$ |
| 43. $f(x, y) = x^2e^{(-xy/2)}$ | 44. $f(x, y) = x \text{ sen } y$ |

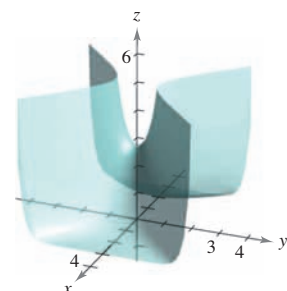
En los ejercicios 45 a 48, asociar la gráfica de la superficie con uno de los mapas de contorno. [Los mapas de contorno están marcados a), b), c) y d).]



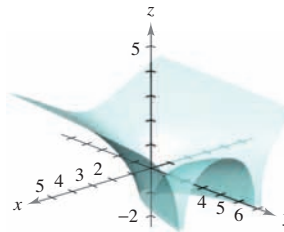
45. $f(x, y) = e^{1-x^2-y^2}$



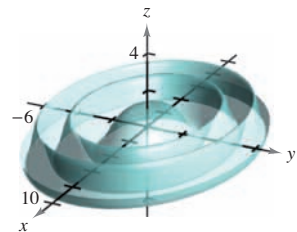
46. $f(x, y) = e^{1-x^2+y^2}$



47. $f(x, y) = \ln|y - x^2|$



48. $f(x, y) = \cos\left(\frac{x^2 + 2y^2}{4}\right)$



En los ejercicios 49 a 56, describir las curvas de nivel de la función. Dibujar las curvas de nivel para los valores dados de c .

- $z = x + y, c = -1, 0, 2, 4$
- $z = 6 - 2x - 3y, c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$
- $z = x^2 + 4y^2, c = 0, 1, 2, 3, 4$
- $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, c = 0, 1, 2, 3$
- $f(x, y) = xy, c = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6$
- $f(x, y) = e^{xy/2}, c = 2, 3, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$
- $f(x, y) = x/(x^2 + y^2), c = \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2$
- $f(x, y) = \ln(x - y), c = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2$

Gr En los ejercicios 57 a 60, utilizar una herramienta de graficación para representar seis curvas de nivel de la función.

- | | |
|---|--|
| 57. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ | 58. $f(x, y) = xy $ |
| 59. $g(x, y) = \frac{8}{1 + x^2 + y^2}$ | 60. $h(x, y) = 3 \text{ sen}(x + y)$ |

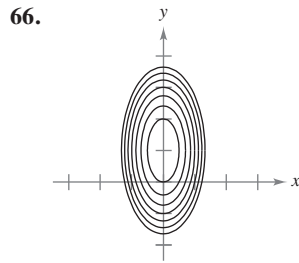
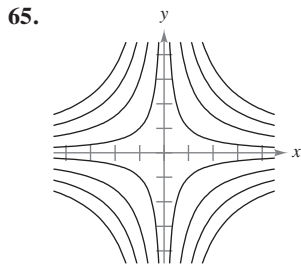
Desarrollo de conceptos

- ¿Qué es una gráfica de una función de dos variables? ¿Cómo se interpreta geoméricamente? Describir las curvas de nivel.
- Todas las curvas de nivel de la superficie dada por $z = f(x, y)$ son círculos concéntricos. ¿Implica esto que la gráfica de f es un hemisferio? Ilustrar la respuesta con un ejemplo.
- Construir una función cuyas curvas de nivel sean rectas que pasen por el origen.

Para discusión

- Considerar la función $f(x, y) = xy$, para $x \geq 0$ y $y \geq 0$.
 - Trazar la gráfica de la superficie dada por f .
 - Conjeturar acerca de la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = f(x, y) - 3$. Explicar el razonamiento.
 - Conjeturar acerca de la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = -f(x, y)$. Explicar el razonamiento.
 - Conjeturar acerca de la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = \frac{1}{2}f(x, y)$. Explicar el razonamiento.
 - Sobre la superficie en el inciso a), trazar la gráfica de $z = f(x, x)$.

Redacción En los ejercicios 65 y 66, utilizar las gráficas de las curvas de nivel (valores de c uniformemente espaciados) de la función f para dar una descripción de una posible gráfica de f . ¿Es única la gráfica de f ? Explicar la respuesta.



67. **Inversión** En el 2009 se efectuó una inversión de \$1000 al 6% de interés compuesto anual. Suponemos que el inversor paga una tasa de impuesto R y que la tasa de inflación anual es I . En el año 2019, el valor V de la inversión en dólares constantes de 2009 es

$$V(I, R) = 1000 \left[\frac{1 + 0.06(1 - R)}{1 + I} \right]^{10}$$

Utilizar esta función de dos variables para completar la tabla.

Tasa de impuestos	Tasa de inflación		
	0	0.03	0.05
0			
0.28			
0.35			

68. **Inversión** Se depositan \$5 000 en una cuenta de ahorro a una tasa de interés compuesto continuo r (expresado en forma decimal). La cantidad $A(r, t)$ después de t años es $A(r, t) = 5000e^{rt}$. Utilizar esta función de dos variables para completar la tabla.

Tasa	Número de años			
	5	10	15	20
0.02				
0.03				
0.04				
0.05				

En los ejercicios 69 a 74, dibujar la gráfica de la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ para el valor de c que se especifica.

- 69. $f(x, y, z) = x - y + z, \quad c = 1$
- 70. $f(x, y, z) = 4x + y + 2z, \quad c = 4$
- 71. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad c = 9$
- 72. $f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - z, \quad c = 1$
- 73. $f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 - z^2, \quad c = 0$
- 74. $f(x, y, z) = \text{sen } x - z, \quad c = 0$

75. **Explotación forestal** La regla de los troncos de Doyle es uno de varios métodos para determinar el rendimiento en madera aserrada (en tablones-pie) en términos de su diámetro d (en pulgadas) y su longitud L (en pies). El número de tablones-pie es

$$N(d, L) = \left(\frac{d - 4}{4} \right)^2 L.$$

- a) Hallar el número de tablones-pie de madera aserrada producida por un tronco de 22 pulgadas de diámetro y 12 pies de longitud.
- b) Evaluar $N(30, 12)$.

76. **Modelo de filas** La cantidad de tiempo promedio que un cliente espera en una fila para recibir un servicio es

$$W(x, y) = \frac{1}{x - y}, \quad x > y$$

donde y es el ritmo o tasa media de llegadas, expresada como número de clientes por unidad de tiempo, y x es el ritmo o tasa media de servicio, expresada en las mismas unidades. Evaluar cada una de las siguientes cantidades.

- a) $W(15, 9)$ b) $W(15, 13)$ c) $W(12, 7)$ d) $W(5, 2)$

77. **Distribución de temperaturas** La temperatura T (en grados Celsius) en cualquier punto (x, y) de una placa circular de acero de 10 metros de radio es $T = 600 - 0.75x^2 - 0.75y^2$, donde x y y se miden en metros. Dibujar algunas de las curvas isoterma.

78. **Potencial eléctrico** El potencial eléctrico V en cualquier punto (x, y) es

$$V(x, y) = \frac{5}{\sqrt{25 + x^2 + y^2}}.$$

Dibujar las curvas equipotenciales de $V = \frac{1}{2}, V = \frac{1}{3}$ y $V = \frac{1}{4}$.

79. **Función de producción de Cobb-Douglas** Utilizar la función de producción de Cobb-Douglas (ver ejemplo 5) para mostrar que si el número de unidades de trabajo y el número de unidades de capital se duplican, el nivel de producción también se duplica.

80. **Función de producción de Cobb-Douglas** Mostrar que la función de producción de Cobb-Douglas $z = Cx^ay^{1-a}$ puede reescribirse como $\ln \frac{z}{y} = \ln C + a \ln \frac{x}{y}$.

81. **Costo* de construcción** Una caja rectangular abierta por arriba tiene x pies de longitud, y pies de ancho y z pies de alto. Construir la base cuesta \$1.20 por pie cuadrado y construir los lados \$0.75 por pie cuadrado. Expresar el costo C de construcción de la caja en función de x, y y z .

82. **Volumen** Un tanque de propano se construye soldando hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. Expresar el volumen V del tanque en función de r y l , donde r es el radio del cilindro y de los hemisferios, y l es la longitud del cilindro.

83. **Ley de los gases ideales** De acuerdo con la ley de los gases ideales, $PV = kT$, donde P es la presión, V es el volumen, T es la temperatura (en kelvins) y k es una constante de proporcionalidad. Un tanque contiene 2000 pulgadas cúbicas de nitrógeno a una presión de 26 libras por pulgada cuadrada y una temperatura de 300 K.

- a) Determinar k .
- b) Expresar P como función de V y T y describir las curvas de nivel.

* En España se le denomina coste.

84. Modelo matemático La tabla muestra las ventas netas x (en miles de millones de dólares), los activos totales y (en miles de millones de dólares) y los derechos de los accionistas z (en miles de millones de dólares) de Wal-Mart desde 2002 hasta el 2007. (Fuente: 2007 Annual Report for Wal-Mart)

Año	2002	2003	2004	2005	2006	2007
x	201.2	226.5	252.8	281.5	208.9	345.0
y	79.3	90.2	102.5	117.1	135.6	151.2
z	35.2	39.5	43.6	49.4	53.2	61.6

Un modelo para estos datos es

$$z = f(x, y) = 0.026x + 0.316y + 5.04.$$



- Utilizar una herramienta de graficación y el modelo para aproximar z para los valores dados de x y y .
- ¿Cuál de las dos variables en este modelo tiene mayor influencia sobre los derechos de los accionistas?
- Simplificar la expresión de $f(x, 95)$ e interpretar su significado en el contexto del problema.

85. Meteorología Los meteorólogos miden la presión atmosférica en milibares. A partir de estas observaciones elaboran mapas climáticos en los que se muestran las curvas de presión atmosférica constante (isobaras) (ver la figura). En el mapa, cuanto más juntas están las isobaras mayor es la velocidad del viento. Asociar los puntos A , B y C con a) la mayor presión, b) la menor presión y c) la mayor velocidad del viento.

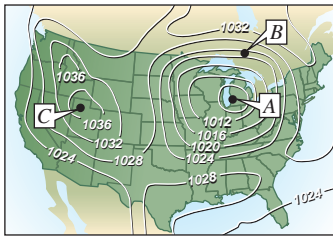


Figura para 85

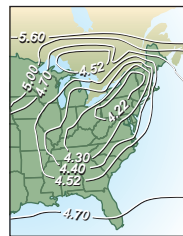
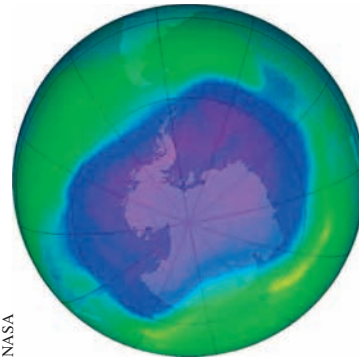


Figura para 86

86. Lluvia ácida La acidez del agua de lluvia se mide en unidades llamadas pH. Un pH de 7 es neutro, valores menores corresponden a acidez creciente, y valores mayores a alcalinidad creciente. El mapa muestra las curvas de pH constante y da evidencia de que en la dirección en la que sopla el viento de áreas muy industrializadas la acidez ha ido aumentando. Utilizar las curvas de nivel en el mapa, para determinar la dirección de los vientos dominantes en el noreste de Estados Unidos.

87. Atmósfera El contorno del mapa mostrado en la figura fue generado por computadora usando una colección de datos mediante instrumentación del satélite. El color se usa para mostrar el “agujero de ozono” en la atmósfera de la Tierra. Las áreas púrpura y azul representan los más bajos niveles de ozono y las áreas verdes representan los niveles más altos. (Fuente: National Aeronautics and Space Administration)

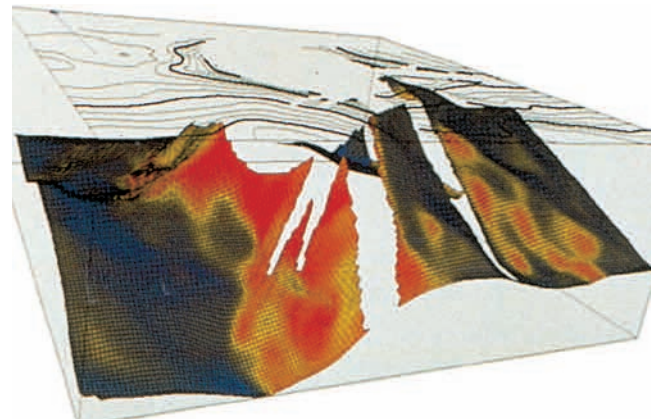


NASA

Figura para 87

- ¿Corresponden las curvas de nivel a los mismos niveles de ozono espaciados? Explicar.
- Describir cómo obtener un contorno de mapa más detallado.

88. Geología El mapa de contorno de la figura representa amplitudes sísmicas en código de color de una falla horizontal y un mapa de contorno proyectado que se usa en los estudios de terremotos. (Fuente: Adaptado de Shipman/Wilson/Todd, *An Introduction to Physical Science*, 10a. ed.)



GeoQuest Systems, Inc.

- Analizar el uso de colores para representar las curvas de nivel.
- ¿Corresponden las curvas de nivel a amplitudes uniformemente espaciadas? Explicar.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 89 a 92, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.

- Si $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$, entonces $x_0 = x_1$ y $y_0 = y_1$.
- Si f es una función, entonces $f(ax, ay) = a^2f(x, y)$.
- Una recta vertical puede cortar la gráfica de $z = f(x, y)$ a lo sumo una vez.
- Dos diferentes curvas de nivel de la gráfica de $z = f(x, y)$ pueden intersectarse.

13.2 Límites y continuidad

- Entender la definición de un entorno en el plano.
- Entender y utilizar la definición de límite de una función de dos variables.
- Extender el concepto de continuidad a una función de dos variables.
- Extender el concepto de continuidad a una función de tres variables.

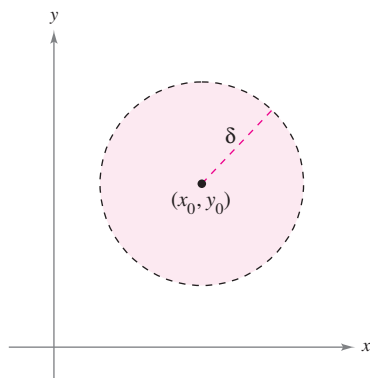
Entornos en el plano

En esta sección se estudiarán límites y continuidad de funciones de dos o tres variables. La sección comienza con funciones de dos variables. Al final de la sección, los conceptos se extienden a funciones de tres variables.

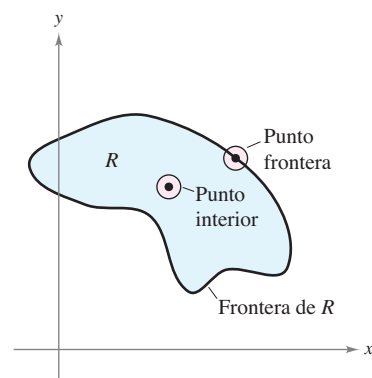
El estudio del límite de una función de dos variables inicia definiendo el análogo bidimensional de un intervalo en la recta real. Utilizando la fórmula para la distancia entre dos puntos (x, y) y (x_0, y_0) en el plano, se puede definir el **entorno δ** de (x_0, y_0) como el **disco** con radio $\delta > 0$ centrado en (x_0, y_0)

$$\{(x, y): \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\} \quad \text{Disco abierto.}$$

como se muestra en la figura 13.18. Cuando esta fórmula contiene el signo de desigualdad *menor que*, $<$, al disco se le llama **abierto**, y cuando contiene el signo de desigualdad *menor o igual que*, \leq , al disco se le llama **cerrado**. Esto corresponde al uso del $<$ y del \leq al definir intervalos abiertos y cerrados.



Un disco abierto
Figura 13.18



La frontera y los puntos interiores de una región R
Figura 13.19

Un punto (x_0, y_0) en una región R del plano es un **punto interior** de R si existe un entorno δ de (x_0, y_0) que esté contenido completamente en R , como se muestra en la figura 13.19. Si todo punto de R es un punto interior, entonces R es una **región abierta**. Un punto (x_0, y_0) es un **punto frontera** de R si todo disco abierto centrado en (x_0, y_0) contiene puntos dentro de R y puntos fuera de R . Por definición, una región debe contener sus puntos interiores, pero no necesita contener sus puntos frontera. Si una región contiene todos sus puntos frontera, la región es **cerrada**. Una región que contiene algunos pero no todos sus puntos frontera no es ni abierta ni cerrada.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información acerca de Sonya Kovalevsky, ver el artículo “S. Kovalevsky: A Mathematical Lesson” de Karen D. Rappaport en *The American Mathematical Monthly*.

The Granger Collection

SONYA KOVALEVSKY (1850-1891)

Gran parte de la terminología usada para definir límites y continuidad de una función de dos o tres variables la introdujo el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897). El enfoque riguroso de Weierstrass a los límites y a otros temas en cálculo le valió la reputación de “padre del análisis moderno”. Weierstrass era un maestro excelente. Una de sus alumnas más conocidas fue la matemática rusa Sonya Kovalevsky, quien aplicó muchas de las técnicas de Weierstrass a problemas de la física matemática y se convirtió en una de las primeras mujeres aceptada como investigadora matemática.

Límite de una función de dos variables

DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

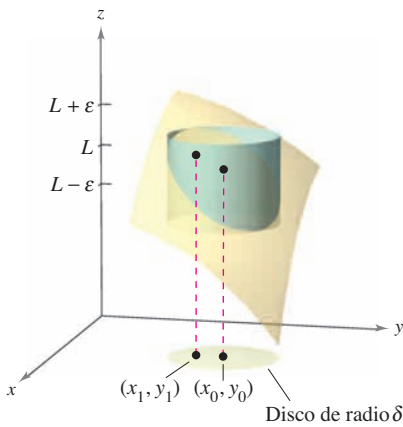
Sea f una función de dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0) , excepto posiblemente en (x_0, y_0) , y sea L un número real. Entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

NOTA Gráficamente, esta definición del límite implica que para todo punto $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ en el disco de radio δ , el valor $f(x, y)$ está entre $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$, como se muestra en la figura 13.20. ■



Para todo (x, y) en el círculo de radio δ , el valor de $f(x, y)$ se encuentra entre $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$.

Figura 13.20

La definición del límite de una función en dos variables es similar a la definición del límite de una función en una sola variable, pero existe una diferencia importante. Para determinar si una función en una sola variable tiene límite, sólo se necesita ver que se aproxime al límite por ambas direcciones: por la derecha y por la izquierda. Si la función se aproxima al mismo límite por la derecha y por la izquierda, se puede concluir que el límite existe. Sin embargo, en el caso de una función de dos variables, la expresión

$$(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

significa que el punto (x, y) puede aproximarse al punto (x_0, y_0) por cualquier dirección. Si el valor de

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

no es el mismo al aproximarse por cualquier dirección, o trayectoria o camino a (x_0, y_0) , el límite no existe.

EJEMPLO 1 Verificar un límite a partir de la definición

Mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a.$$

Solución Sea $f(x, y) = x$ y $L = a$. Se necesita mostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe un entorno δ de (a, b) tal que

$$|f(x, y) - L| = |x - a| < \varepsilon$$

siempre que $(x, y) \neq (a, b)$ se encuentre en el entorno. Primero se puede observar que

$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

implica que

$$\begin{aligned} |f(x, y) - a| &= |x - a| \\ &= \sqrt{(x - a)^2} \\ &\leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Así que se puede elegir $\delta = \varepsilon$ y el límite queda verificado.

Los límites de funciones de varias variables tienen las mismas propiedades respecto a la suma, diferencia, producto y cociente que los límites de funciones de una sola variable. (Ver teorema 1.2 en la sección 1.3.) Algunas de estas propiedades se utilizan en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Cálculo de un límite

Calcular $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$.

Solución Usando las propiedades de los límites de productos y de sumas, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} 5x^2y &= 5(1^2)(2) \\ &= 10 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + y^2) &= (1^2 + 2^2) \\ &= 5. \end{aligned}$$

Como el límite de un cociente es igual al cociente de los límites (y el denominador no es 0), se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} &= \frac{10}{5} \\ &= 2. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Verificar un límite

Calcular $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$.

Solución En este caso, los límites del numerador y del denominador son ambos 0, por tanto no se puede determinar la existencia (o inexistencia) del límite tomando los límites del numerador y del denominador por separado y dividiendo después. Sin embargo, por la gráfica de f (figura 13.21), parece razonable pensar que el límite pueda ser 0. En consecuencia, se puede intentar aplicar la definición de límite a $L = 0$. Primero, hay que observar que

$$|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

Entonces, en un entorno δ de $(0, 0)$, se tiene $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, lo que, para $(x, y) \neq (0, 0)$ implica

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} \right| \\ &= 5|y| \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \\ &\leq 5|y| \\ &\leq 5\sqrt{x^2 + y^2} \\ &< 5\delta. \end{aligned}$$

Por tanto, se puede elegir $\delta = \varepsilon/5$ y concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = 0.$$

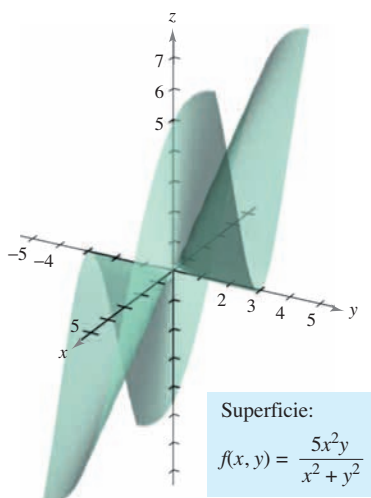
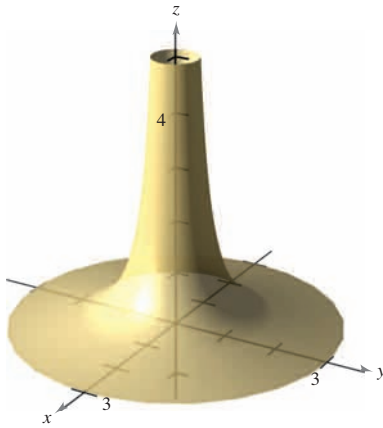


Figura 13.21



$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$ no existe
Figura 13.22

Con algunas funciones es fácil reconocer que el límite no existe. Por ejemplo, está claro que el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

no existe porque el valor de $f(x, y)$ crece sin tope cuando (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de *cualquier* trayectoria (ver la figura 13.22).

Con otras funciones no es tan fácil reconocer que un límite no existe. Así, el siguiente ejemplo describe un caso en el que el límite no existe ya que la función se aproxima a valores diferentes a lo largo de trayectorias diferentes.

EJEMPLO 4 Un límite que no existe

Mostrar que el siguiente límite no existe.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$$

Solución El dominio de la función

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$$

consta de todos los puntos en el plano xy con excepción del punto $(0, 0)$. Para mostrar que el límite no existe cuando (x, y) se aproxima a $(0, 0)$, considérense aproximaciones a $(0, 0)$ a lo largo de dos “trayectorias” diferentes, como se muestra en la figura 13.23. A lo largo del eje x , todo punto es de la forma $(x, 0)$ y el límite a lo largo de esta trayectoria es

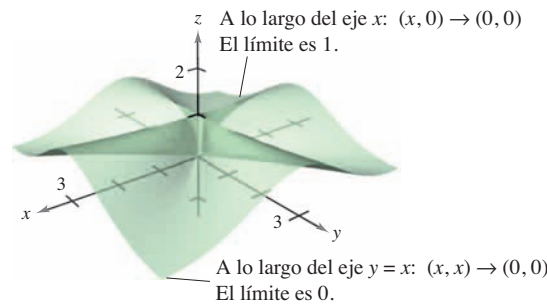
$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} \right)^2 = \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} 1^2 = 1. \quad \text{Límite a lo largo del eje } x.$$

Sin embargo, si (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $y = x$, se obtiene

$$\lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} \right)^2 = \lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{0}{2x^2} \right)^2 = 0. \quad \text{Límite a lo largo de la recta } y = x.$$

NOTA En el ejemplo 4 se puede concluir que el límite no existe ya que se encuentran dos trayectorias que dan límites diferentes. Sin embargo, si dos trayectorias hubieran dado el mismo límite, no se podría concluir que el límite existe. Para llegar a tal conclusión, se debe mostrar que el límite es el mismo para *todas* las aproximaciones posibles. ■

Esto significa que en cualquier disco abierto centrado en $(0, 0)$ existen puntos (x, y) en los que f toma el valor 1 y otros puntos en los que f asume el valor 0. Por ejemplo, $f(x, y) = 1$ en los puntos $(1, 0)$, $(0.1, 0)$, $(0.01, 0)$, y $(0.001, 0)$ y $f(x, y) = 0$ en los puntos $(1, 1)$, $(0.1, 0.1)$, $(0.01, 0.01)$ y $(0.001, 0.001)$. Por tanto, f no tiene límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 \text{ no existe}$$

Figura 13.23

Continuidad de una función de dos variables

En el ejemplo 2 hay que observar que el límite de $f(x, y) = 5x^2y/(x^2 + y^2)$ cuando $(x, y) \rightarrow (1, 2)$ puede calcularse por sustitución directa. Es decir, el límite es $f(1, 2) = 2$. En tales casos se dice que la función f es **continua** en el punto $(1, 2)$.

NOTA Esta definición de continuidad puede extenderse a *puntos frontera* de la región abierta R considerando un tipo especial de límite en el que sólo se permite a (x, y) tender hacia (x_0, y_0) a lo largo de trayectorias que están en la región R . Esta noción es similar a la de límites unilaterales, tratada en el capítulo 1. ■

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Una función f de dos variables es **continua en un punto** (x_0, y_0) de una región abierta R si $f(x_0, y_0)$ es igual al límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Es decir,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

La función f es **continua en la región abierta R** si es continua en todo punto de R .

En el ejemplo 3 se mostró que la función

$$f(x, y) = \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$$

no es continua en $(0, 0)$. Sin embargo, como el límite en este punto existe, se puede eliminar la discontinuidad definiendo el valor de f en $(0, 0)$ igual a su límite. Tales discontinuidades se llaman **removibles** o **evitables**. En el ejemplo 4 se mostró que la función

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$$

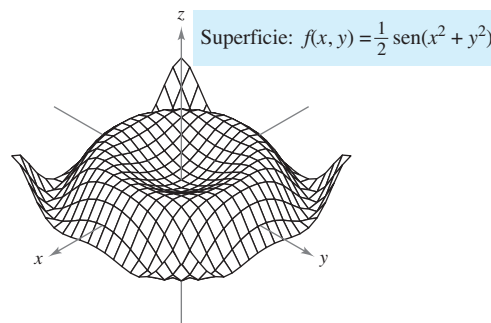
tampoco es continua en $(0, 0)$, pero esta discontinuidad es **inevitable** o **no removible**.

TEOREMA 13.1 FUNCIONES CONTINUAS DE DOS VARIABLES

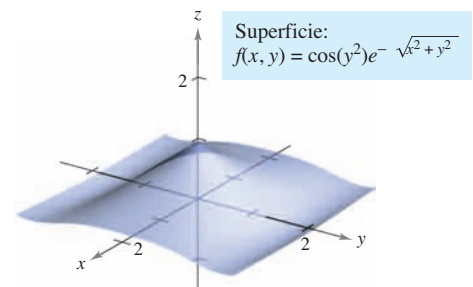
Si k es un número real y f y g son funciones continuas en (x_0, y_0) , entonces las funciones siguientes son continuas en (x_0, y_0) .

<p>1. Múltiplo escalar: kf</p> <p>2. Suma y diferencia: $f \pm g$</p>	<p>3. Producto: fg</p> <p>4. Cociente: f/g, si $g(x_0, y_0) \neq 0$</p>
---	--

El teorema 13.1 establece la continuidad de las funciones *polinomiales* y *racionales* en todo punto de su dominio. La continuidad de otros tipos de funciones puede extenderse de manera natural de una a dos variables. Por ejemplo, las funciones cuyas gráficas se muestran en las figuras 13.24 y 13.25 son continuas en todo punto del plano.



La función f es continua en todo punto del plano
Figura 13.24



La función f es continua en todo punto en el plano
Figura 13.25

EXPLORACIÓN

Sostener una cuchara a un palmo de distancia y mirar la propia imagen en la cuchara. La imagen estará invertida. Ahora, mover la cuchara más y más cerca a uno de los ojos. En algún punto, la imagen dejará de estar invertida. ¿Podría ser que la imagen ha sido deformada continuamente? Hablar sobre esta cuestión y sobre el significado general de continuidad con otros miembros de la clase. (Esta exploración la sugirió Irvin Roy Hentzel, Iowa State University.)

El siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales una función compuesta es continua.

TEOREMA 13.2 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si h es continua en (x_0, y_0) y g es continua en $h(x_0, y_0)$, entonces la función compuesta $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$ es continua en (x_0, y_0) . Es decir,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(h(x,y)) = g(h(x_0,y_0)).$$

NOTA En el teorema 13.2 hay que observar que h es una función de dos variables mientras que g es una función de una variable. ■

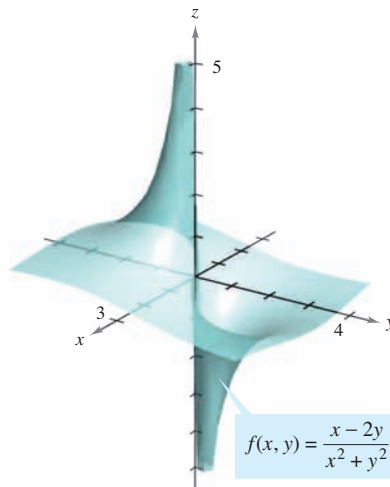
EJEMPLO 5 Análisis de la continuidad

Analizar la continuidad de cada función.

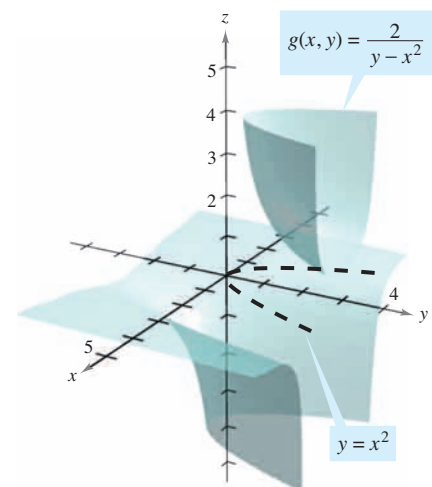
a) $f(x, y) = \frac{x - 2y}{x^2 + y^2}$ b) $g(x, y) = \frac{2}{y - x^2}$

Solución

- a) Como una función racional es continua en todo punto de su dominio, se puede concluir que f es continua en todo punto del plano xy excepto en $(0, 0)$, como se muestra en la figura 13.26.
- b) La función dada por $g(x, y) = 2/(y - x^2)$ es continua excepto en los puntos en los cuales el denominador es 0, $y - x^2 = 0$. Por tanto, se puede concluir que la función es continua en todos los puntos excepto en los puntos en que se encuentra la parábola $y = x^2$. En el interior de esta parábola se tiene $y > x^2$, y la superficie representada por la función se encuentra sobre el plano xy , como se muestra en la figura 13.27. En el exterior de la parábola, $y < x^2$, y la superficie se encuentra debajo del plano xy .



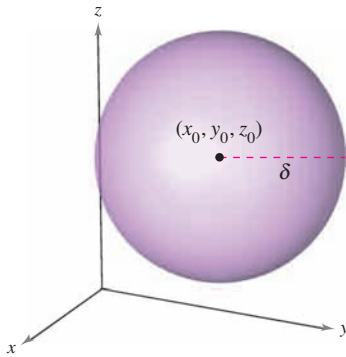
La función f no es continua en $(0, 0)$
Figura 13.26



La función g no es continua en la parábola $y = x^2$
Figura 13.27

Continuidad de una función de tres variables

Las definiciones anteriores de límites y continuidad pueden extenderse a funciones de tres variables considerando los puntos (x, y, z) dentro de la *esfera abierta*



Esfera abierta en el espacio
Figura 13.28

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2.$$

Esfera abierta.

El radio de esta esfera es δ , y la esfera está centrada en (x_0, y_0, z_0) , como se muestra en la figura 13.28. Un punto (x_0, y_0, z_0) en una región R en el espacio es un **punto interior** de R si existe una δ -esfera centrada en (x_0, y_0, z_0) que está contenida completamente en R . Si todo punto de R es un punto interior, entonces se dice que R es una región **abierta**.

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DE TRES VARIABLES

Una función f de tres variables es **continua en un punto** (x_0, y_0, z_0) de una región abierta R si $f(x_0, y_0, z_0)$ está definido y es igual al límite de $f(x, y, z)$ cuando (x, y, z) se aproxima a (x_0, y_0, z_0) . Es decir,

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0).$$

La función f es **continua en una región abierta** R si es continua en todo punto de R .

EJEMPLO 6 Continuidad de una función de tres variables

La función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 - z}$$

es continua en todo punto en el espacio excepto en los puntos sobre el paraboloides dado por $z = x^2 + y^2$.

13.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, utilizar la definición de límite de una función de dos variables para verificar el límite.

- $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} x = 1$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (4, -1)} x = 4$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, -3)} y = -3$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} y = b$

En los ejercicios 5 a 8, hallar el límite indicado utilizando los límites

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g(x, y) = 3.$$

- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} [f(x, y) - g(x, y)]$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \left[\frac{5f(x, y)}{g(x, y)} \right]$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} [f(x, y)g(x, y)]$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \left[\frac{f(x, y) + g(x, y)}{f(x, y)} \right]$

En los ejercicios 9 a 22, calcular el límite y analizar la continuidad de la función.

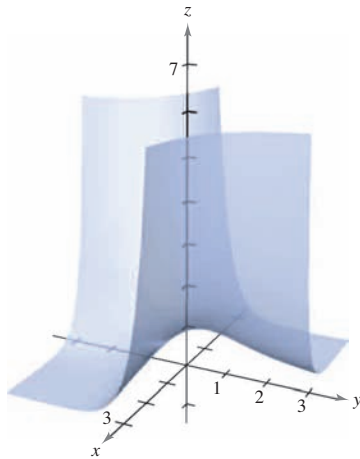
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 1)} (2x^2 + y)$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x + 4y + 1)$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} e^{xy}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 4)} \frac{x + y}{x^2 + 1}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{x}{y}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (-1, 2)} \frac{x + y}{x - y}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{x}{\sqrt{x + y}}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (\pi/4, 2)} y \cos xy$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (2\pi, 4)} \operatorname{sen} \frac{x}{y}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{\operatorname{arcsen} xy}{1 - xy}$
- $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (1, 3, 4)} \sqrt{x + y + z}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x + y}{x^2 + 1}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (-1, 2)} \frac{x + y}{x - y}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{x}{\sqrt{x + y}}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (2\pi, 4)} \operatorname{sen} \frac{x}{y}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{\operatorname{arcsen} (x/y)}{1 + xy}$
- $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (-2, 1, 0)} xe^{yz}$

En los ejercicios 23 a 36, hallar el límite (si existe). Si el límite no existe, explicar por qué.

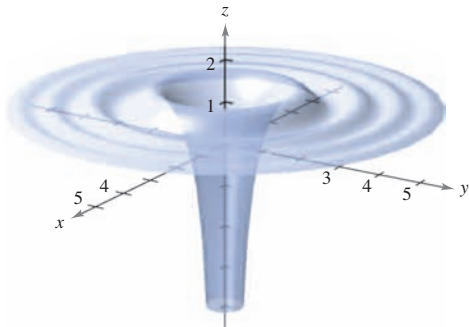
23. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - 1}{1 + xy}$
24. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2y}{1 + xy^2}$
25. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x + y}$
26. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2y^2}$
27. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$
28. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - 4y^4}{x^2 + 2y^2}$
29. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$
30. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x - y - 1}{\sqrt{x - y} - 1}$
31. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$
32. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 - y^2}$
33. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$
34. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(x^2 + y^2)$
35. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz + xz}{x^2 + y^2 + z^2}$
36. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

En los ejercicios 37 y 38, analizar la continuidad de la función y evaluar el límite de $f(x, y)$ (si existe) cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

37. $f(x, y) = e^{xy}$

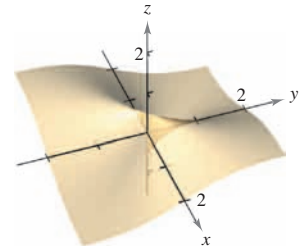


38. $f(x, y) = 1 - \frac{\cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

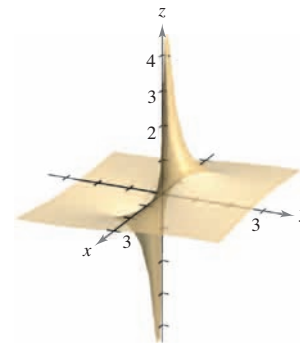


En los ejercicios 39 a 42, utilizar una herramienta de graficación para elaborar una tabla que muestre los valores de $f(x, y)$ en los puntos que se especifican. Utilizar el resultado para formular una conjetura sobre el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Determinar analíticamente si el límite existe y discutir la continuidad de la función.

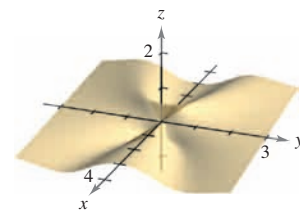
39. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$
 Trayectoria: $y = 0$
 Puntos: $(1, 0)$,
 $(0.5, 0)$, $(0.1, 0)$,
 $(0.01, 0)$, $(0.001, 0)$
 Trayectoria: $y = x$
 Puntos: $(1, 1)$,
 $(0.5, 0.5)$, $(0.1, 0.1)$,
 $(0.01, 0.01)$, $(0.001, 0.001)$



40. $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$
 Trayectoria: $y = 0$
 Puntos: $(1, 0)$,
 $(0.5, 0)$, $(0.1, 0)$,
 $(0.01, 0)$, $(0.001, 0)$
 Trayectoria: $y = x$
 Puntos: $(1, 1)$,
 $(0.5, 0.5)$, $(0.1, 0.1)$,
 $(0.01, 0.01)$, $(0.001, 0.001)$



41. $f(x, y) = -\frac{xy^2}{x^2 + y^4}$
 Trayectoria: $x = y^2$
 Puntos: $(1, 1)$,
 $(0.25, 0.5)$, $(0.01, 0.1)$,
 $(0.0001, 0.01)$,
 $(0.000001, 0.001)$
 Trayectoria: $x = -y^2$
 Puntos: $(-1, 1)$,
 $(-0.25, 0.5)$, $(-0.01, 0.1)$,
 $(-0.0001, 0.01)$,
 $(-0.000001, 0.001)$



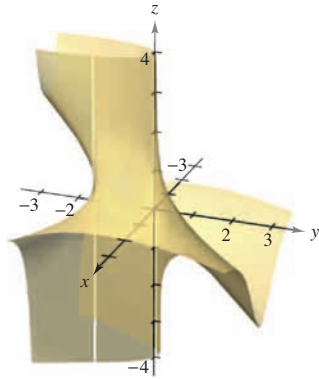
42. $f(x, y) = \frac{2x - y^2}{2x^2 + y}$

Trayectoria: $y = 0$

- Puntos: (1, 0),
(0.25, 0), (0.01, 0),
(0.001, 0),
(0.000001, 0)

Trayectoria: $y = x$

- Puntos: (1, 1),
(0.25, 0.25), (0.01, 0.01),
(0.001, 0.001),
(0.0001, 0.0001)



En los ejercicios 43 a 46, analizar la continuidad de las funciones f y g . Explicar cualquier diferencia.

43. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

44. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^4 - y^4}{2x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ -1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^4 - y^4}{2x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

45. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

46. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

CAS En los ejercicios 47 a 52, utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la función y hallar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ (si existe).

47. $f(x, y) = \sin x + \sen y$

48. $f(x, y) = \sen \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$

49. $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + 2y^2}$

50. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2y}$

51. $f(x, y) = \frac{5xy}{x^2 + 2y^2}$

52. $f(x, y) = \frac{6xy}{x^2 + y^2 + 1}$

En los ejercicios 53 a 58, utilizar las coordenadas polares para hallar el límite. [Sugerencia: Tomar $x = r \cos \theta$ y $y = r \sen \theta$, y observar que $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ implica $r \rightarrow 0$.]

53. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

54. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

55. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$

56. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

57. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos(x^2 + y^2)$

58. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sen \sqrt{x^2 + y^2}$

En los ejercicios 59 a 62, usar las coordenadas polares y la regla de L'Hôpital para encontrar el límite.

59. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sen \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

60. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sen(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

61. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

62. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

En los ejercicios 63 a 68, analizar la continuidad de la función.

63. $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

64. $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 - 4}$

65. $f(x, y, z) = \frac{\sen z}{e^x + e^y}$

66. $f(x, y, z) = xy \sen z$

67. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sen xy}{xy}, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$

68. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sen(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1, & x^2 = y^2 \end{cases}$

En los ejercicios 69 a 72, analizar la continuidad de la función compuesta $f \circ g$.

69. $f(t) = t^2$
 $g(x, y) = 2x - 3y$

70. $f(t) = \frac{1}{t}$
 $g(x, y) = x^2 + y^2$

71. $f(t) = \frac{1}{t}$
 $g(x, y) = 2x - 3y$

72. $f(t) = \frac{1}{1 - t}$
 $g(x, y) = x^2 + y^2$

En los ejercicios 73 a 78, hallar cada límite.

a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$

b) $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

73. $f(x, y) = x^2 - 4y$

74. $f(x, y) = x^2 + y^2$

75. $f(x, y) = \frac{x}{y}$

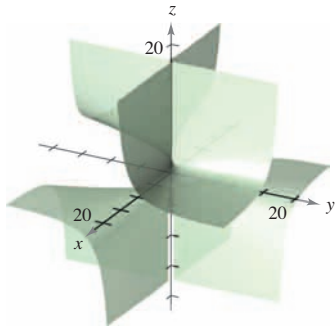
76. $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$

77. $f(x, y) = 3x + xy - 2y$

78. $f(x, y) = \sqrt{y} (y + 1)$

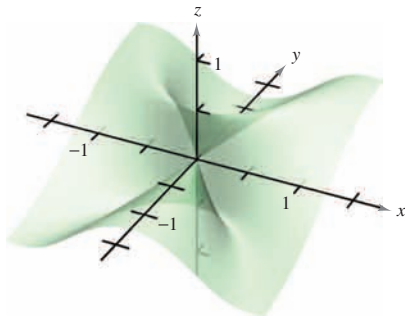
¿Verdadero o falso? En los ejercicios 79 a 82, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.

- 79. Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0$.
- 80. Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(0,y) = 0$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.
- 81. Si f es continua para todo x y para todo y distintos de cero, y $f(0,0) = 0$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.
- 82. Si g y h son funciones continuas de x y y , y $f(x,y) = g(x) + h(y)$, entonces f es continua.
- 83. Considerar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{xy}$ (ver la figura).



- a) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de toda recta de la forma $y = ax$.
- b) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de la parábola $y = x^2$.
- c) ¿Existe el límite? Explicar la respuesta.

- 84. Considerar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$ (ver la figura).



- a) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de toda recta de la forma $y = ax$.
- b) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de la parábola $y = x^2$.
- c) ¿Existe el límite? Explicar la respuesta.

En los ejercicios 85 y 86, utilizar las coordenadas esféricas para encontrar el límite. [Sugerencia: Tomar $x = \rho \cos \phi \sin \theta$, $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ y $z = \rho \cos \phi$, y observar que $(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)$ es equivalente a $\rho \rightarrow 0^+$.]

- 85. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

- 86. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \tan^{-1} \left[\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right]$

- 87. Hallar el límite siguiente.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \tan^{-1} \left[\frac{x^2 + 1}{x^2 + (y-1)^2} \right]$$

- 88. Dada la función

$$f(x,y) = xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

definir $f(0,0)$ de manera que f sea continua en el origen.

- 89. Demostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = L_1 + L_2$$

donde $f(x,y)$ tiende a L_1 y $g(x,y)$ se aproxima a L_2 cuando $(x,y) \rightarrow (a,b)$.

- 90. Demostrar que si f es continua y $f(a,b) < 0$, existe un δ -entorno de (a,b) tal que $f(x,y) < 0$ para todo punto (x,y) en la vecindad o el entorno.

Desarrollo de conceptos

- 91. Definir el límite de una función de dos variables. Describir un método para probar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

no existe.

- 92. Dar la definición de continuidad de una función de dos variables.

- 93. Determinar si cada una de las siguientes declaraciones es verdadera o falsa. Explicar el razonamiento.

a) Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x,y) = 4$, entonces $\lim_{x \rightarrow 2} f(x,3) = 4$.

b) Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x,3) = 4$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x,y) = 4$.

c) Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x,3) = \lim_{y \rightarrow 3} f(2,y) = 4$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x,y) = 4.$$

d) Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$, entonces para cualquier número

$$\text{real } k, \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(kx,y) = 0.$$

Para discusión

- 94. a) Si $f(2,3) = 4$, ¿se puede concluir algo acerca de $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x,y)$? Dar razones que justifiquen la respuesta.


- b) Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x,y) = 4$, ¿se puede concluir algo acerca de $f(2,3)$? Dar razones que justifiquen la respuesta.

13.3 Derivadas parciales

- Hallar y utilizar las derivadas parciales de una función de dos variables.
- Hallar y utilizar las derivadas parciales de una función de tres o más variables.
- Hallar derivadas parciales de orden superior de una función de dos o tres variables.

Derivadas parciales de una función de dos variables

En aplicaciones de funciones de varias variables suele surgir la pregunta: ¿“Cómo afectaría al valor de una función un cambio en una de sus variables independientes”? Se puede contestar esta pregunta considerando cada una de las variables independientes por separado. Por ejemplo, para determinar el efecto de un catalizador en un experimento, un químico podría repetir el experimento varias veces usando cantidades distintas de catalizador, mientras mantiene constantes las otras variables como temperatura y presión. Para determinar la velocidad o la razón de cambio de una función f respecto a una de sus variables independientes se puede utilizar un procedimiento similar. A este proceso se le llama **derivación parcial** y el resultado se llama **derivada parcial** de f con respecto a la variable independiente elegida.



Mary Evans Picture Library

JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783)
 La introducción de las derivadas parciales ocurrió años después del trabajo sobre el cálculo de Newton y Leibniz. Entre 1730 y 1760, Leonhard Euler y Jean Le Rond d'Alembert publicaron por separado varios artículos sobre dinámica en los cuales establecieron gran parte de la teoría de las derivadas parciales. Estos artículos utilizaban funciones de dos o más variables para estudiar problemas de equilibrio, movimiento de fluidos y cuerdas vibrantes.

DEFINICIÓN DE LAS DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Si $z = f(x, y)$, las **primeras derivadas parciales** de f con respecto a x y y son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

siempre y cuando el límite exista.

Esta definición indica que si $z = f(x, y)$, entonces para hallar f_x se considera y constante y se deriva con respecto a x . De manera similar, para calcular f_y , se considera x constante y se deriva con respecto a y .

EJEMPLO 1 Hallar las derivadas parciales

Hallar las derivadas parciales f_x y f_y de la función

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y.$$

Solución Si se considera y como constante y se deriva con respecto a x se obtiene

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y \quad \text{Escribir la función original.}$$

$$f_x(x, y) = 3 - 2xy^2 + 6x^2y. \quad \text{Derivada parcial con respecto a } x.$$

Si se considera x constante y se deriva con respecto a y obtenemos

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y \quad \text{Escribir la función original.}$$

$$f_y(x, y) = -2x^2y + 2x^3. \quad \text{Derivada parcial con respecto a } y.$$

NOTACIÓN PARA LAS PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES

Si $z = f(x, y)$, las derivadas parciales f_x y f_y se denotan por

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Las primeras derivadas parciales evaluadas en el punto (a, b) se denotan por

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a,b)} = f_x(a, b) \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(a,b)} = f_y(a, b).$$

EJEMPLO 2 Hallar y evaluar las derivadas parciales

Dada $f(x, y) = xe^{x^2y}$, hallar f_x y f_y , y evaluar cada una en el punto $(1, \ln 2)$.

Solución Como

$$f_x(x, y) = xe^{x^2y}(2xy) + e^{x^2y} \quad \text{Derivada parcial con respecto a } x.$$

la derivada parcial de f con respecto a x en $(1, \ln 2)$ es

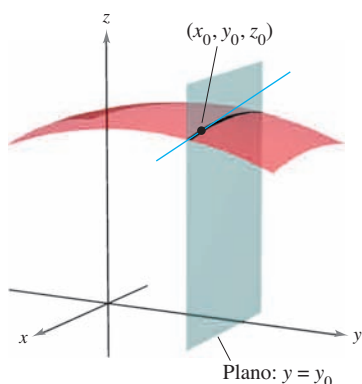
$$\begin{aligned} f_x(1, \ln 2) &= e^{\ln 2}(2 \ln 2) + e^{\ln 2} \\ &= 4 \ln 2 + 2. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= xe^{x^2y}(x^2) \\ &= x^3e^{x^2y} \quad \text{Derivada parcial con respecto a } y. \end{aligned}$$

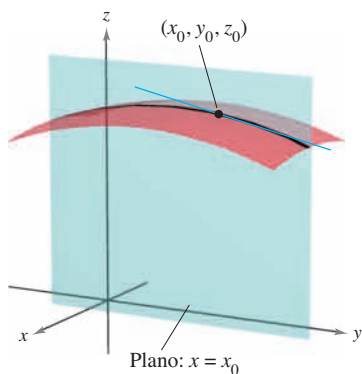
la derivada parcial de f con respecto a y en $(1, \ln 2)$ es

$$\begin{aligned} f_y(1, \ln 2) &= e^{\ln 2} \\ &= 2. \end{aligned}$$



$\frac{\partial f}{\partial x}$ = pendiente en la dirección x

Figura 13.29



$\frac{\partial f}{\partial y}$ = pendiente en la dirección y

Figura 13.30

Las derivadas parciales de una función de dos variables, $z = f(x, y)$, tienen una interpretación geométrica útil. Si $y = y_0$, entonces $z = f(x, y_0)$ representan la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$, como se muestra en la figura 13.29. Por consiguiente,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

representa la pendiente de esta curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Nótese que tanto la curva como la recta tangente se encuentran en el plano $y = y_0$. Análogamente,

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

representa la pendiente de la curva dada por la intersección de $z = f(x, y)$ y el plano $x = x_0$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, como se muestra en la figura 13.30.

Informalmente, los valores $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en (x_0, y_0, z_0) denotan las **pendientes de la superficie en las direcciones de x y y** , respectivamente.

EJEMPLO 3 Hallar las pendientes de una superficie en las direcciones de x y de y

Hallar las pendientes en las direcciones de x y de y de la superficie dada por

$$f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

en el punto $(\frac{1}{2}, 1, 2)$.

Solución Las derivadas parciales de f con respecto a x y a y son

$$f_x(x, y) = -x \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2y. \quad \text{Derivadas parciales.}$$

Por tanto, en la dirección de x , la pendiente es

$$f_x\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{Figura 13.31a.}$$

y en la dirección de y , la pendiente es

$$f_y\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -2. \quad \text{Figura 13.31b.}$$

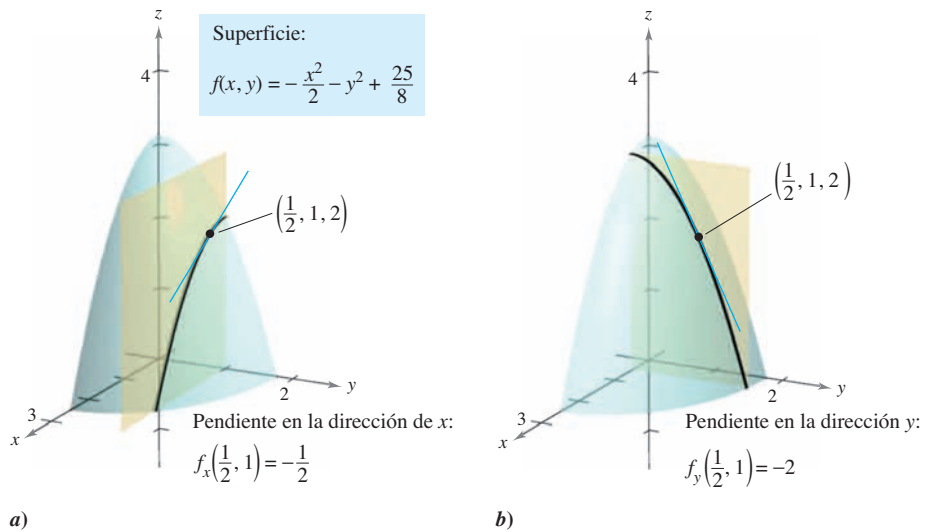


Figura 13.31

EJEMPLO 4 Hallar las pendientes de una superficie en las direcciones de x y de y

Hallar las pendientes de la superficie dada por

$$f(x, y) = 1 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2$$

en el punto $(1, 2, 1)$, en las direcciones de x y de y .

Solución Las derivadas parciales de f con respecto a x y y son

$$f_x(x, y) = -2(x - 1) \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2(y - 2). \quad \text{Derivadas parciales.}$$

Por tanto, en el punto $(1, 2, 1)$, las pendientes en las direcciones de x y de y son

$$f_x(1, 2) = -2(1 - 1) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(1, 2) = -2(2 - 2) = 0$$

como se muestra en la figura 13.32.

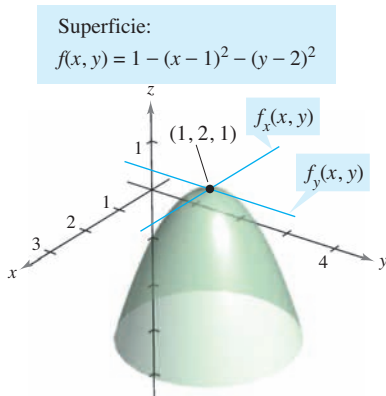
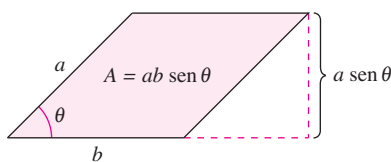


Figura 13.32

Sin importar cuántas variables haya, las derivadas parciales se pueden interpretar como *tasas*, *velocidades* o *razones de cambio*.

EJEMPLO 5 Derivadas parciales como velocidades o razones de cambio



El área del paralelogramo es $ab \operatorname{sen} \theta$
Figura 13.33

El área de un paralelogramo con lados adyacentes a y b entre los que se forma un ángulo θ está dada por $A = ab \operatorname{sen} \theta$, como se muestra en la figura 13.33.

- a) Hallar la tasa o la razón de cambio de A respecto de a si $a = 10$, $b = 20$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$.
- b) Calcular la tasa o la razón de cambio de A respecto de θ si $a = 10$, $b = 20$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Solución

a) Para hallar la tasa o la razón de cambio del área respecto de a , se mantienen b y θ constantes y se deriva respecto de a para obtener

$$\frac{\partial A}{\partial a} = b \operatorname{sen} \theta \quad \text{Derivada parcial respecto a } a.$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 20 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 10. \quad \text{Sustituir a b y } \theta.$$

b) Para hallar la tasa o la razón de cambio del área respecto de θ , se mantiene a y b constantes y se deriva respecto de θ para obtener

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = ab \cos \theta \quad \text{Derivada parcial respecto de } \theta.$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = 200 \cos \frac{\pi}{6} = 100\sqrt{3}. \quad \text{Sustituir a, b y } \theta.$$

Derivadas parciales de una función de tres o más variables

El concepto de derivada parcial puede extenderse de manera natural a funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$, existen tres derivadas parciales cada una de las cuales se forma manteniendo constantes las otras dos variables. Es decir, para definir la derivada parcial de w con respecto a x , se consideran y y z constantes y se deriva con respecto a x . Para hallar las derivadas parciales de w con respecto a y y con respecto a z se emplea un proceso similar.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

En general, si $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, hay n derivadas parciales denotadas por

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = f_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Para hallar la derivada parcial con respecto a una de las variables, se mantienen constantes las otras variables y se deriva con respecto a la variable dada.

EJEMPLO 6 Hallar las derivadas parciales

a) Para hallar la derivada parcial de $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xz$ con respecto a z , se consideran x y y constantes y se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial z}[xy + yz^2 + xz] = 2yz + x.$$

b) Para hallar la derivada parcial de $f(x, y, z) = z \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)$ con respecto a z , se consideran x y y constantes. Entonces, usando la regla del producto, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}[z \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)] &= (z) \frac{\partial}{\partial z}[\operatorname{sen}(xy^2 + 2z)] + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z) \frac{\partial}{\partial z}[z] \\ &= (z)[\cos(xy^2 + 2z)](2) + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z) \\ &= 2z \cos(xy^2 + 2z) + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z). \end{aligned}$$

c) Para calcular la derivada parcial de $f(x, y, z, w) = (x + y + z)/w$ con respecto a w , se consideran x, y y z constantes y se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{x + y + z}{w} \right] = -\frac{x + y + z}{w^2}.$$

Derivadas parciales de orden superior

Como sucede con las derivadas ordinarias, es posible hallar las segundas, terceras, etc., derivadas parciales de una función de varias variables, siempre que tales derivadas existan. Las derivadas de orden superior se denotan por el orden al que se hace la derivación. Por ejemplo, la función $z = f(x, y)$ tiene las siguientes derivadas parciales de segundo orden.

1. Derivar dos veces con respecto a x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}.$$

2. Derivar dos veces con respecto a y :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

NOTA Observar que los dos tipos de notación para las derivadas parciales mixtas tienen convenciones diferentes para indicar el orden de derivación.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{Orden de derecha a izquierda.}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} \quad \text{Orden de izquierda a derecha.}$$

Se puede recordar el orden de ambas notaciones observando que primero se deriva con respecto a la variable más “cercana” a f .

3. Derivar primero con respecto a x y luego con respecto a y :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}.$$

4. Derivar primero con respecto a y y luego con respecto a x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}.$$

Los casos tercero y cuarto se llaman **derivadas parciales mixtas (cruzadas)**.

EJEMPLO 7 Hallar derivadas parciales de segundo orden

Hallar las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$, y determinar el valor de $f_{xy}(-1, 2)$.

Solución Empezar por hallar las derivadas parciales de primer orden con respecto a x y y .

$$f_x(x, y) = 3y^2 + 10xy^2 \quad y \quad f_y(x, y) = 6xy - 2 + 10x^2y$$

Después, se deriva cada una de éstas con respecto a x y con respecto a y .

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 10y^2 & y & f_{yy}(x, y) = 6x + 10x^2 \\ f_{xy}(x, y) &= 6y + 20xy & y & f_{yx}(x, y) = 6y + 20xy \end{aligned}$$

En $(-1, 2)$, el valor de f_{xy} es $f_{xy}(-1, 2) = 12 - 40 = -28$.

NOTA En el ejemplo 7 las dos derivadas parciales mixtas son iguales. En el teorema 13.3 se dan condiciones suficientes para que esto ocurra. ■

TEOREMA 13.3 IGUALDAD DE LAS DERIVADAS PARCIALES MIXTAS

Si f es una función de x y y tal que f_{xy} y f_{yx} son continuas en un disco abierto R , entonces, para todo (x, y) en R ,

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

El teorema 13.3 también se aplica a una función f de *tres o más variables* siempre y cuando las derivadas parciales de segundo orden sean continuas. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$ y todas sus derivadas parciales de segundo orden son continuas en una región abierta R , entonces en todo punto en R el orden de derivación para obtener las derivadas parciales mixtas de segundo orden es irrelevante. Si las derivadas parciales de tercer orden de f también son continuas, el orden de derivación para obtener las derivadas parciales mixtas de tercer orden es irrelevante.

EJEMPLO 8 Hallar derivadas parciales de orden superior

Mostrar que $f_{xz} = f_{zx}$ y $f_{xzz} = f_{zxx}$ para la función dada por

$$f(x, y, z) = ye^x + x \ln z.$$

Solución

Derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x, y, z) = ye^x + \ln z, \quad f_z(x, y, z) = \frac{x}{z}$$

Derivadas parciales de segundo orden (nótese que las dos primeras son iguales):

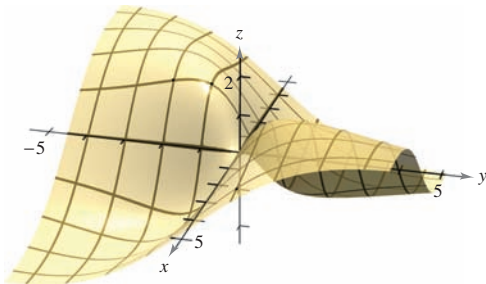
$$f_{xz}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \quad f_{zx}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \quad f_{zz}(x, y, z) = -\frac{x}{z^2}$$

Derivadas parciales de tercer orden (nótese que las tres son iguales):

$$f_{xzz}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \quad f_{zxx}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \quad f_{zzx}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}$$

13.3 Ejercicios

Para pensar En los ejercicios 1 a 4, utilizar la gráfica de la superficie para determinar el signo de la derivada parcial indicada.



1. $f_x(4, 1)$
2. $f_y(-1, -2)$
3. $f_y(4, 1)$
4. $f_x(-1, -1)$

En los ejercicios 5 a 8, explicar si se debe usar o no la regla del cociente para encontrar la derivada parcial. No derivar.

5. $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x-y}{x^2+1} \right)$
6. $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x-y}{x^2+1} \right)$
7. $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{x^2+1} \right)$
8. $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy}{x^2+1} \right)$

En los ejercicios 9 a 40, hallar las dos derivadas parciales de primer orden.

9. $f(x, y) = 2x - 5y + 3$
10. $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4$
11. $f(x, y) = x^2y^3$
12. $f(x, y) = 4x^3y^{-2}$
13. $z = x\sqrt{y}$
14. $z = 2y^2\sqrt{x}$
15. $z = x^2 - 4xy + 3y^2$
16. $z = y^3 - 2xy^2 - 1$
17. $z = e^{xy}$
18. $z = e^{x/y}$
19. $z = x^2e^{2y}$
20. $z = ye^{y/x}$
21. $z = \ln \frac{x}{y}$
22. $z = \ln \sqrt{xy}$
23. $z = \ln(x^2 + y^2)$
24. $z = \ln \frac{x+y}{x-y}$
25. $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{3y^2}{x}$
26. $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$
27. $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$
28. $g(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
29. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
30. $f(x, y) = \sqrt{2x + y^3}$
31. $z = \cos xy$
32. $z = \sin(x + 2y)$
33. $z = \tan(2x - y)$
34. $z = \sin 5x \cos 5y$
35. $z = e^y \sin xy$
36. $z = \cos(x^2 + y^2)$
37. $z = \sinh(2x + 3y)$
38. $z = \cosh xy^2$
39. $f(x, y) = \int_x^y (t^2 - 1) dt$
40. $f(x, y) = \int_x^y (2t + 1) dt + \int_y^x (2t - 1) dt$

En los ejercicios 41 a 44, utilizar la definición de derivadas parciales empleando límites para calcular $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

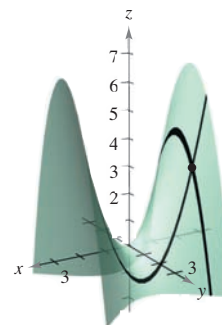
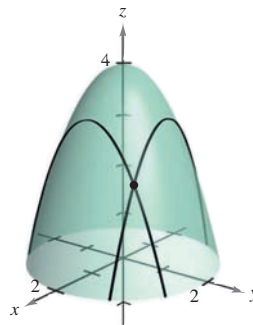
41. $f(x, y) = 3x + 2y$
42. $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$
43. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$
44. $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$

En los ejercicios 45 a 52, evaluar f_x y f_y en el punto dado.

45. $f(x, y) = e^y \sin x$, $(\pi, 0)$
46. $f(x, y) = e^{-x} \cos y$, $(0, 0)$
47. $f(x, y) = \cos(2x - y)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$
48. $f(x, y) = \sin xy$, $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$
49. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$, $(2, -2)$
50. $f(x, y) = \arccos xy$, $(1, 1)$
51. $f(x, y) = \frac{xy}{x - y}$, $(2, -2)$
52. $f(x, y) = \frac{2xy}{\sqrt{4x^2 + 5y^2}}$, $(1, 1)$

En los ejercicios 53 y 54, calcular las pendientes de la superficie en las direcciones de x y de y en el punto dado.

53. $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, $(1, 1, 2)$
54. $h(x, y) = x^2 - y^2$, $(-2, 1, 3)$



CAS En los ejercicios 55 a 58, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la curva en la intersección de la superficie con el plano. Hallar la pendiente de la curva en el punto dado.

Superficie	Plano	Punto
55. $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$	$x = 2$	$(2, 3, 6)$
56. $z = x^2 + 4y^2$	$y = 1$	$(2, 1, 8)$
57. $z = 9x^2 - y^2$	$y = 3$	$(1, 3, 0)$
58. $z = 9x^2 - y^2$	$x = 1$	$(1, 3, 0)$

En los ejercicios 59 a 64, calcular las derivadas parciales de primer orden con respecto a x , y y z .

59. $H(x, y, z) = \sin(x + 2y + 3z)$

60. $f(x, y, z) = 3x^2y - 5xyz + 10yz^2$

61. $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 62. $w = \frac{7xz}{x + y}$

63. $F(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

64. $G(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$

En los ejercicios 65 a 70, evaluar f_x , f_y y f_z en el punto dado.

65. $f(x, y, z) = x^3yz^2$, $(1, 1, 1)$

66. $f(x, y, z) = x^2y^3 + 2xyz - 3yz$, $(-2, 1, 2)$

67. $f(x, y, z) = \frac{x}{yz}$, $(1, -1, -1)$

68. $f(x, y, z) = \frac{xy}{x + y + z}$, $(3, 1, -1)$

69. $f(x, y, z) = z \sin(x + y)$, $(0, \frac{\pi}{2}, -4)$

70. $f(x, y, z) = \sqrt{3x^2 + y^2 - 2z^2}$, $(1, -2, 1)$

En los ejercicios 71 a 80, calcular las cuatro derivadas parciales de segundo orden. Observar que las derivadas parciales mixtas de segundo orden son iguales.

71. $z = 3xy^2$

72. $z = x^2 + 3y^2$

73. $z = x^2 - 2xy + 3y^2$

74. $z = x^4 - 3x^2y^2 + y^4$

75. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

76. $z = \ln(x - y)$

77. $z = e^x \tan y$

78. $z = 2xe^y - 3ye^{-x}$

79. $z = \cos xy$

80. $z = \arctan \frac{y}{x}$

En los ejercicios 81 a 88, para $f(x, y)$, encontrar todos los valores de x y y , tal que $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ simultáneamente.

81. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y$

82. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 5x + y$

83. $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 16y + 3$

84. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

85. $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$

86. $f(x, y) = 3x^3 - 12xy + y^3$

87. $f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}$

88. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

CAS En los ejercicios 89 a 92, utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar las derivadas parciales de primero y segundo orden de la función. Determinar si existen valores de x y y tales que $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ simultáneamente.

89. $f(x, y) = x \sec y$

90. $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

91. $f(x, y) = \ln \frac{x}{x^2 + y^2}$

92. $f(x, y) = \frac{xy}{x - y}$

En los ejercicios 93 a 96, mostrar que las derivadas parciales mixtas f_{xy} , f_{yx} y f_{yyx} son iguales.

93. $f(x, y, z) = xyz$

94. $f(x, y, z) = x^2 - 3xy + 4yz + z^3$

95. $f(x, y, z) = e^{-x} \sin yz$

96. $f(x, y, z) = \frac{2z}{x + y}$

Ecuación de Laplace En los ejercicios 97 a 100, mostrar que la función satisface la ecuación de Laplace $\partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2 = 0$.

97. $z = 5xy$

98. $z = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \sin x$

99. $z = e^x \sin y$

100. $z = \arctan \frac{y}{x}$

Ecuación de ondas En los ejercicios 101 a 104, mostrar que la función satisface la ecuación de ondas $\partial^2 z / \partial t^2 = c^2(\partial^2 z / \partial x^2)$.

101. $z = \sin(x - ct)$

102. $z = \cos(4x + 4ct)$

103. $z = \ln(x + ct)$

104. $z = \sin \omega ct \sin \omega x$

Ecuación del calor En los ejercicios 105 y 106, mostrar que la función satisface la ecuación del calor $\partial z / \partial t = c^2(\partial^2 z / \partial x^2)$.

105. $z = e^{-t} \cos \frac{x}{c}$

106. $z = e^{-t} \sin \frac{x}{c}$

En los ejercicios 107 y 108, determinar si existe o no una función $f(x, y)$ con las derivadas parciales dadas. Explicar el razonamiento. Si tal función existe, dar un ejemplo.

107. $f_x(x, y) = -3 \sin(3x - 2y)$, $f_y(x, y) = 2 \sin(3x - 2y)$

108. $f_x(x, y) = 2x + y$, $f_y(x, y) = x - 4y$

En los ejercicios 109 y 110, encontrar la primera derivada parcial con respecto a x .

109. $f(x, y, z) = (\tan y^2 z) e^{z^2 + y^{-2} \sqrt{z}}$

110. $f(x, y, z) = x \left(\sinh \frac{y}{z} \right) (y^2 - 2\sqrt{y-1})z$

Desarrollo de conceptos

111. Sea f una función de dos variables x y y . Describir el procedimiento para hallar las derivadas parciales de primer orden.

112. Dibujar una superficie que represente una función f de dos variables x y y . Utilizar la gráfica para dar una interpretación geométrica de $\partial f / \partial x$ y $\partial f / \partial y$.

113. Dibujar la gráfica de una función $z = f(x, y)$ cuya derivada f_x sea siempre negativa y cuya derivada f_y sea siempre positiva.

114. Dibujar la gráfica de una función $z = f(x, y)$ cuyas derivadas f_x y f_y sean siempre positivas.

115. Si f es una función de x y y tal que f_{xy} y f_{yx} son continuas, ¿qué relación existe entre las derivadas parciales mixtas? Explicar.

Para discusión

116. Encontrar las cuatro segundas derivadas parciales de la función dada por $f(x, y) = \sin(x - 2y)$. Mostrar que las segundas derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} son iguales.

117. Ingreso marginal Una corporación farmacéutica tiene dos plantas que producen la misma medicina. Si x_1 y x_2 son los números de unidades producidos en la planta 1 y en la planta 2, respectivamente, entonces el ingreso total del producto está dado por $R = 200x_1 + 200x_2 - 4x_1^2 - 8x_1x_2 - 4x_2^2$. Cuando $x_1 = 4$ y $x_2 = 12$, encontrar a) el ingreso marginal para la planta 1, $\partial R/\partial x_1$, y b) el ingreso marginal para la planta 2, $\partial R/\partial x_2$.

118. Costo marginal Una empresa fabrica dos tipos de estufas de combustión de madera: el modelo autoestable y el modelo para inserción en una chimenea. La función de costo para producir x estufas autoestables y y de inserción en una chimenea es

$$C = 32\sqrt{xy} + 175x + 205y + 1\,050.$$

a) Calcular los costos marginales ($\partial C/\partial x$ y $\partial C/\partial y$) cuando $x = 80$ y $y = 20$.

b) Cuando se requiera producción adicional, ¿qué modelo de estufa hará incrementar el costo con una tasa más alta? ¿Cómo puede determinarse esto a partir del modelo del costo?

119. Psicología Recientemente en el siglo xx se desarrolló una prueba de inteligencia llamada la *Prueba de Stanford-Binet* (más conocida como la *prueba IQ*). En esta prueba, una edad mental individual M es dividida entre la edad cronológica individual C , y el cociente es multiplicado por 100. El resultado es el *IQ* individual.

$$IQ(M, C) = \frac{M}{C} \times 100$$

Encontrar las derivadas parciales de *IQ* con respecto a M y con respecto a C . Evaluar las derivadas parciales en el punto (12, 10) e interpretar el resultado. (Fuente: Adaptado de Bernstein/Clark-Steward/Roy/Wickens, *Psicología*, 4a. ed.)

120. Productividad marginal Considerar la función de producción de Cobb-Douglas $f(x, y) = 200x^{0.7}y^{0.3}$. Si $x = 1\,000$ y $y = 500$, hallar a) la productividad marginal del trabajo, $\partial f/\partial x$, y b) la productividad marginal del capital, $\partial f/\partial y$.

121. Para pensar Sea N el número de aspirantes a una universidad, p el costo por alimentación y alojamiento en la universidad, y t el costo de la matrícula. N es una función de p y t tal que $\partial N/\partial p < 0$ y $\partial N/\partial t < 0$. ¿Qué información se obtiene al saber que ambas derivadas parciales son negativas?

122. Inversión El valor de una inversión de \$1 000 al 6% de interés compuesto anual es

$$V(I, R) = 1\,000 \left[\frac{1 + 0.06(1 - R)}{1 + I} \right]^{10}$$

donde I es la tasa anual de inflación y R es la tasa de impuesto para el inversor. Calcular $V_I(0.03, 0.28)$ y $V_R(0.03, 0.28)$. Determinar si la tasa de impuesto o la tasa de inflación es el mayor factor “negativo” sobre el crecimiento de la inversión.

123. Distribución de temperatura La temperatura en cualquier punto (x, y) de una placa de acero es $T = 500 - 0.6x^2 - 1.5y^2$, donde x y y son medidos en metros. En el punto (2, 3), hallar el ritmo de cambio de la temperatura respecto a la distancia recorrida en la placa en las direcciones del eje x y y .

124. Temperatura aparente Una medida de la percepción del calor ambiental por unas personas promedio es el Índice de temperatura aparente. Un modelo para este índice es

$$A = 0.885t - 22.4h + 1.20th - 0.544$$

donde A es la temperatura aparente en grados Celsius, t es la temperatura del aire y h es la humedad relativa dada en forma decimal. (Fuente: *The UMAP Journal*)

a) Hallar $\partial A/\partial t$ y $\partial A/\partial h$ si $t = 30^\circ$ y $h = 0.80$.

b) ¿Qué influye más sobre A , la temperatura del aire o la humedad? Explicar.

125. Ley de los gases ideales La ley de los gases ideales establece que $PV = nRT$, donde P es la presión, V es el volumen, n es el número de moles de gas, R es una constante (la constante de los gases) y T es temperatura absoluta. Mostrar que

$$\frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} = -1.$$

126. Utilidad marginal La función de utilidad $U = f(x, y)$ es una medida de la utilidad (o satisfacción) que obtiene una persona por el consumo de dos productos x y y . Suponer que la función de utilidad es $U = -5x^2 + xy - 3y^2$.

a) Determinar la utilidad marginal del producto x .

b) Determinar la utilidad marginal del producto y .

c) Si $x = 2$ y $y = 3$, ¿se debe consumir una unidad más de producto x o una unidad más de producto y ? Explicar el razonamiento.

CAS d) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función. Interpretar las utilidades marginales de productos x y y con una gráfica.

127. Modelo matemático En la tabla se muestran los consumos per cápita (en galones) de diferentes tipos de leche en Estados Unidos desde 1999 hasta 2005. El consumo de leche light y descremada, leche baja en grasa y leche entera se representa por las variables x , y y z , respectivamente. (Fuente: *U.S. Department of Agriculture*)

Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
x	1.4	1.4	1.4	1.6	1.6	1.7	1.7
y	7.3	7.1	7.0	7.0	6.9	6.9	6.9
z	6.2	6.1	5.9	5.8	5.6	5.5	5.6

Un modelo para los datos está dado por

$$z = -0.92x + 1.03y + 0.02.$$

a) Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

b) Interpretar las derivadas parciales en el contexto del problema.

128. Modelo matemático La tabla muestra el gasto en atención pública médica (en miles de millones de dólares) en compensación a trabajadores x , asistencia pública y seguro médico del Estado z , del año 2000 al 2005. (Fuente: *Centers for Medicare and Medicaid Services*)

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005
x	24.9	28.1	30.1	31.4	32.1	33.5
y	207.5	233.2	258.4	281.9	303.2	324.9
z	224.3	247.7	265.7	283.5	312.8	342.0

Un modelo para los datos está dado por

$$z = -1.2225x^2 + 0.0096y^2 + 71.381x - 4.121y - 354.65.$$

- Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
- Determinar la concavidad de las trazas paralelas al plano xz . Interpretar el resultado en el contexto del problema.
- Determinar la concavidad de las trazas paralelas al plano yz . Interpretar el resultado en el contexto del problema.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 129 a 132, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.

129. Si $z = f(x, y)$ y $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y$, entonces $z = c(x + y)$.

130. Si $z = f(x)g(y)$, entonces

$$(\partial z/\partial x) + (\partial z/\partial y) = f'(x)g(y) + f(x)g'(y).$$

131. Si $z = e^{xy}$, entonces $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (xy + 1)e^{xy}$.

132. Si una superficie cilíndrica $z = f(x, y)$ tiene rectas generatrices paralelas al eje y , entonces $\partial z/\partial y = 0$.

133. Considerar la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Hallar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.
- Utilizar la definición de derivadas parciales para hallar $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

$$\left[\text{Sugerencia: } f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} \right]$$
- Utilizar la definición de derivadas parciales para hallar $f_{xy}(0, 0)$ y $f_{yx}(0, 0)$.
- Utilizando el teorema 13.3 y el resultado del inciso c), indicar qué puede decirse acerca de f_{xy} o f_{yx} .

134. Sea $f(x, y) = \int_x^y \sqrt{1 + t^3} dt$. Hallar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

135. Mostrar la función $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$.

- Hallar $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.
- Determinar los puntos (si los hay) en los que $f_x(x, y)$ o $f_y(x, y)$ no existe.

136. Considerar la función $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$. Mostrar que

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{4x}{3(x^2 + y^2)^{1/3}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este problema, ver el artículo “A Classroom Note on a Naturally Occurring Piecewise Defined Function” de Don Cohen en *Mathematics and Computer Education*.

PROYECTO DE TRABAJO

Franjas de Moiré

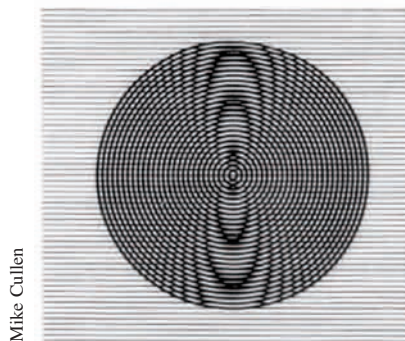
Léase el artículo “Moiré Fringes and the Conic Sections” de Mike Cullen en *The College Mathematics Journal*. El artículo describe cómo dos familias de curvas de nivel dadas por

$$f(x, y) = a - y \quad g(x, y) = b$$

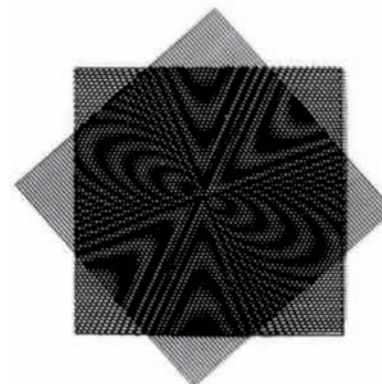
pueden formar franjas de Moiré. Después de leer el artículo, escribir un documento que explique cómo se relaciona la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$

con las franjas de Moiré formadas por la intersección de las dos familias de curvas de nivel. Utilizar como ejemplo uno de los modelos siguientes.



Mike Cullen



Mike Cullen

13.4 Diferenciales

- Entender los conceptos de incrementos y diferenciales.
- Extender el concepto de diferenciabilidad a funciones de dos variables.
- Utilizar una diferencial como aproximación.

Incrementos y diferenciales

En esta sección se generalizan los conceptos de incrementos y diferenciales a funciones de dos o más variables. Recuérdese que en la sección 3.9, dada $y = f(x)$, se definió la diferencial de y como

$$dy = f'(x) dx.$$

Terminología similar se usa para una función de dos variables, $z = f(x, y)$. Es decir, Δx y Δy son los **incrementos en x y en y** , y el **incremento en z** está dado por

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Incremento en z .

DEFINICIÓN DE DIFERENCIAL TOTAL

Si $z = f(x, y)$ y Δx y Δy son los incrementos en x y en y , entonces las **diferenciales** de las variables independientes x y y son

$$dx = \Delta x \quad y \quad dy = \Delta y$$

y la **diferencial total** de la variable dependiente z es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy.$$

Esta definición puede extenderse a una función de tres o más variables. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z, u)$, entonces $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, $du = \Delta u$, y la diferencial total de w es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial u} du.$$

EJEMPLO 1 Hallar la diferencial total

Hallar la diferencial total de cada función.

$$\text{a) } z = 2x \operatorname{sen} y - 3x^2y^2 \quad \text{b) } w = x^2 + y^2 + z^2$$

Solución

a) La diferencial total dz de $z = 2x \operatorname{sen} y - 3x^2y^2$ es

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy && \text{Diferencial total } dz. \\ &= (2 \operatorname{sen} y - 6xy^2) dx + (2x \cos y - 6x^2y) dy. \end{aligned}$$

b) La diferencial total dw de $w = x^2 + y^2 + z^2$ es

$$\begin{aligned} dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz && \text{Diferencial total } dw. \\ &= 2x dx + 2y dy + 2z dz. \end{aligned}$$

Diferenciabilidad

En la sección 3.9 se vio que si una función dada por $y = f(x)$ es *diferenciable*, se puede utilizar la diferencial $dy = f'(x) dx$ como una aproximación (para Δx pequeños) al valor $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Cuando es válida una aproximación similar para una función de dos variables, se dice que la función es **diferenciable**. Esto se expresa explícitamente en la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE DIFERENCIABILIDAD

Una función f dada por $z = f(x, y)$ es **diferenciable** en (x_0, y_0) si Δz puede expresarse en la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. La función f es **diferenciable en una región R** si es diferenciable en todo punto de R .

EJEMPLO 2 Mostrar que una función es diferenciable

Mostrar que la función dada por

$$f(x, y) = x^2 + 3y$$

es diferenciable en todo punto del plano.

Solución Haciendo $z = f(x, y)$, el incremento de z en un punto arbitrario (x, y) en el plano es

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) && \text{Incremento de } z. \\ &= (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 3(y + \Delta y) - (x^2 + 3y) \\ &= 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta y \\ &= 2x(\Delta x) + 3(\Delta y) + \Delta x(\Delta x) + 0(\Delta y) \\ &= f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_1 = \Delta x$ y $\varepsilon_2 = 0$. Como $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, se sigue que f es diferenciable en todo punto en el plano. La gráfica de f se muestra en la figura 13.34.

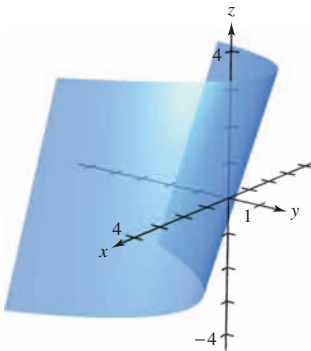


Figura 13.34

Debe tenerse en cuenta que el término “diferenciable” se usa de manera diferente para funciones de dos variables y para funciones de una variable. Una función de una variable es diferenciable en un punto si su derivada existe en el punto. Sin embargo, en el caso de una función de dos variables, la existencia de las derivadas parciales f_x y f_y no garantiza que la función sea diferenciable (ver ejemplo 5). El teorema siguiente proporciona una condición *suficiente* para la diferenciabilidad de una función de dos variables. En el apéndice A se da una demostración del teorema 13.4.

TEOREMA 13.4 CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA DIFERENCIABILIDAD

Si f es una función de x y y , para la que f_x y f_y son continuas en una región abierta R , entonces f es diferenciable en R .

Aproximación mediante diferenciales

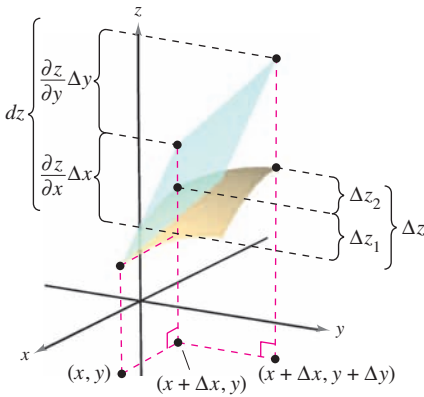
El teorema 13.4 dice que se puede elegir $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ suficientemente cerca de (x, y) para hacer que $\varepsilon_1 \Delta x$ y $\varepsilon_2 \Delta y$ sean insignificantes. En otros términos, para Δx y Δy pequeños, se puede usar la aproximación

$$\Delta z \approx dz.$$

Esta aproximación se ilustra gráficamente en la figura 13.35. Hay que recordar que las derivadas parciales $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$ pueden interpretarse como las pendientes de la superficie en las direcciones de x y de y . Esto significa que

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

representa el cambio en altura de un plano tangente a la superficie en el punto $(x, y, f(x, y))$. Como un plano en el espacio se representa mediante una ecuación lineal en las variables x , y y z , la aproximación de Δz mediante dz se llama **aproximación lineal**. Se verá más acerca de esta interpretación geométrica en la sección 13.7.



El cambio exacto en z es Δz . Este cambio puede aproximarse mediante la diferencial dz .

Figura 13.35

EJEMPLO 3 Uso de la diferencial como una aproximación

Utilizar la diferencial dz para aproximar el cambio en $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ cuando (x, y) se desplaza del punto $(1, 1)$ al punto $(1.01, 0.97)$. Comparar esta aproximación con el cambio exacto en z .

Solución Se hace $(x, y) = (1, 1)$ y $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (1.01, 0.97)$ y se obtiene $dx = \Delta x = 0.01$ y $dy = \Delta y = -0.03$. Por tanto, el cambio en z puede aproximarse mediante

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \Delta x + \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \Delta y.$$

Cuando $x = 1$ y $y = 1$, se tiene

$$\Delta z \approx -\frac{1}{\sqrt{2}}(0.01) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-0.03) = \frac{0.02}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(0.01) \approx 0.0141.$$

En la figura 13.36 se puede ver que el cambio exacto corresponde a la diferencia entre las alturas de dos puntos sobre la superficie de un hemisferio. Esta diferencia está dada por

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(1.01, 0.97) - f(1, 1) \\ &= \sqrt{4 - (1.01)^2 - (0.97)^2} - \sqrt{4 - 1^2 - 1^2} \approx 0.0137. \end{aligned}$$

Una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ se dice que es **diferenciable** en (x, y, z) si

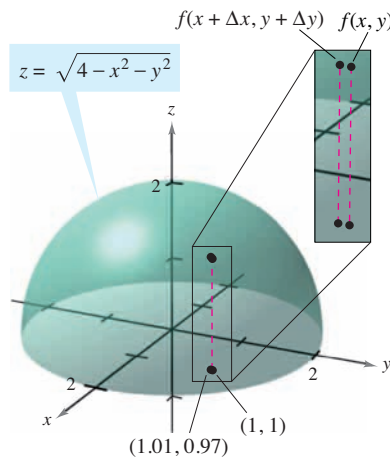
$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

puede expresarse en la forma

$$\Delta w = f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0, 0, 0)$. Con esta definición de diferenciable, el teorema 13.4 puede extenderse de la siguiente manera a funciones de tres variables: si f es una función de x, y y z , donde f, f_x, f_y y f_z son continuas en una región abierta R , entonces f es diferenciable en R .

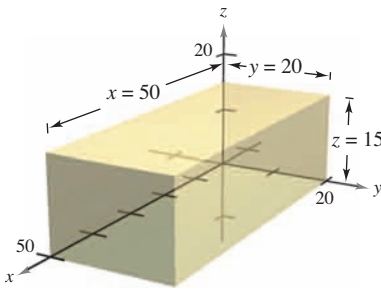
En la sección 3.9 se utilizaron las diferenciales para aproximar el error de propagación introducido por un error en la medida. Esta aplicación de las diferenciales se ilustra en el ejemplo 4.



Cuando (x, y) se desplaza de $(1, 1)$ al punto $(1.01, 0.97)$, el valor de $f(x, y)$ cambia aproximadamente en 0.0137

Figura 13.36

EJEMPLO 4 Análisis de errores



Volumen = xyz
Figura 13.37

El error producido al medir cada una de las dimensiones de una caja rectangular es ± 0.1 milímetros. Las dimensiones de la caja son $x = 50$ centímetros, $y = 20$ centímetros y $z = 15$ centímetros, como se muestra en la figura 13.37. Utilizar dV para estimar el error propagado y el error relativo en el volumen calculado de la caja.

Solución El volumen de la caja está dado por $V = xyz$, y por tanto

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= yz dx + xz dy + xy dz. \end{aligned}$$

Utilizando 0.1 milímetros = 0.01 centímetros, se tiene $dx = dy = dz = \pm 0.01$, y el error propagado es aproximadamente

$$\begin{aligned} dV &= (20)(15)(\pm 0.01) + (50)(15)(\pm 0.01) + (50)(20)(\pm 0.01) \\ &= 300(\pm 0.01) + 750(\pm 0.01) + 1\,000(\pm 0.01) \\ &= 2\,050(\pm 0.01) = \pm 20.5 \text{ centímetros cúbicos.} \end{aligned}$$

Como el volumen medido es

$$V = (50)(20)(15) = 15\,000 \text{ centímetros cúbicos,}$$

el error relativo, $\Delta V/V$, es aproximadamente

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{20.5}{15\,000} \approx 0.14\%.$$

Como ocurre con una función de una sola variable, si una función de dos o más variables es diferenciable en un punto, también es continua en él.

TEOREMA 13.5 DIFERENCIABILIDAD IMPLICA CONTINUIDAD

Si una función de x y y es diferenciable en (x_0, y_0) , entonces es continua en (x_0, y_0) .

DEMOSTRACIÓN Sea f diferenciable en (x_0, y_0) , donde $z = f(x, y)$. Entonces

$$\Delta z = [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1] \Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2] \Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Sin embargo, por definición, se sabe que Δz está dada por

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Haciendo $x = x_0 + \Delta x$ y $y = y_0 + \Delta y$ se obtiene

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1] \Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2] \Delta y \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2](y - y_0). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, se obtiene

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

lo cual significa que f es continua en (x_0, y_0) .

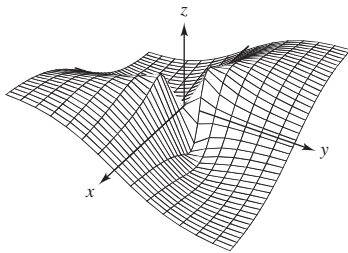
Hay que recordar que la existencia de f_x y f_y no es suficiente para garantizar la diferenciabilidad, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Una función que no es diferenciable

Mostrar que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero f no es diferenciable en $(0, 0)$, donde f está definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

TECNOLOGÍA Utilizar una herramienta de graficación para representar la función del ejemplo 5. La gráfica mostrada abajo fue generada con *Mathematica*.



Generada con Mathematica

Solución Para mostrar que f no es diferenciable en $(0, 0)$ basta mostrar que no es continua en este punto. Para ver que f no es continua en $(0, 0)$, se observan los valores de $f(x, y)$ a lo largo de dos trayectorias diferentes que se aproximan a $(0, 0)$, como se muestra en la figura 13.38. A lo largo de la recta $y = x$, el límite es

$$\lim_{(x, x) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, x) \rightarrow (0, 0)} \frac{-3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2}$$

mientras que a lo largo de $y = -x$ se tiene

$$\lim_{(x, -x) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, -x) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

Así, el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ no existe, y se puede concluir que f no es continua en $(0, 0)$. Por tanto, de acuerdo con el teorema 13.5, f no es diferenciable en $(0, 0)$. Por otro lado, de acuerdo con la definición de las derivadas parciales f_x y f_y , se tiene

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

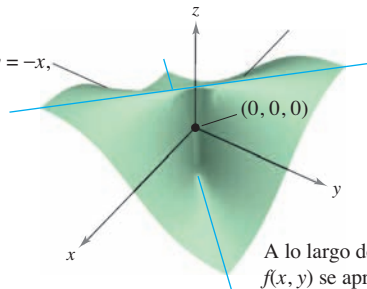
y

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

Por tanto, las derivadas parciales en $(0, 0)$ existen.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

A lo largo de la recta $y = -x$, $f(x, y)$ se aproxima o tiende a $3/2$.



A lo largo de la recta $y = x$, $f(x, y)$ se aproxima o tiende a $-3/2$.

Figura 13.38

13.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, hallar la diferencial total.

- 1. $z = 2x^2y^3$
- 2. $z = \frac{x^2}{y}$
- 3. $z = \frac{-1}{x^2 + y^2}$
- 4. $w = \frac{x + y}{z - 3y}$
- 5. $z = x \cos y - y \cos x$
- 6. $z = \frac{1}{2}(e^{x^2+y^2} - e^{-x^2-y^2})$
- 7. $z = e^x \sin y$
- 8. $w = e^y \cos x + z^2$
- 9. $w = 2z^3y \sin x$
- 10. $w = x^2yz^2 + \sin yz$

En los ejercicios 11 a 16, a) evaluar $f(2, 1)$ y $f(2.1, 1.05)$ y calcular Δz , y b) usar el diferencial total dz para aproximar Δz .

- 11. $f(x, y) = 2x - 3y$
- 12. $f(x, y) = x^2 + y^2$
- 13. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$
- 14. $f(x, y) = \frac{y}{x}$
- 15. $f(x, y) = ye^x$
- 16. $f(x, y) = x \cos y$

En los ejercicios 17 a 20, hallar $z = f(x, y)$ y utilizar la diferencial total para aproximar la cantidad.

- 17. $(2.01)^2(9.02) - 2^2 \cdot 9$
- 18. $\sqrt{(5.05)^2 + (3.1)^2} - \sqrt{5^2 + 3^2}$
- 19. $\frac{1 - (3.05)^2}{(5.95)^2} - \frac{1 - 3^2}{6^2}$
- 20. $\sin[(1.05)^2 + (0.95)^2] - \sin(1^2 + 1^2)$

Desarrollo de conceptos

- 21. Definir la diferencial total de una función de dos variables.
- 22. Describir el cambio en la exactitud de dz como aproximación a Δz cuando Δx y Δy aumentan.
- 23. ¿Qué se quiere decir con una aproximación lineal a $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0)$?
- 24. Cuando se usan diferenciales, ¿qué significan los términos de *propagación* y *error relativo*?

25. **Área** El área del rectángulo sombreada en la figura es $A = lh$. Los posibles errores en la longitud y la altura son Δl y Δh , respectivamente. Hallar dA e identificar las regiones de la figura cuyas áreas están dadas por los términos de dA . ¿Qué región representa la diferencia entre ΔA y dA ?

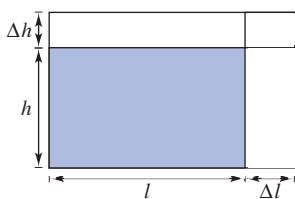


Figura para 25

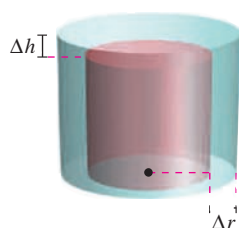


Figura para 26

- 26. **Volumen** El volumen del cilindro circular recto de color rojo en la figura es $V = \pi r^2 h$. Los posibles errores son Δr y Δh , en el radio y en la altura, respectivamente. Hallar dV e identificar los sólidos de la figura cuyos volúmenes están dados por los términos de dV . ¿Qué sólido representa la diferencia entre ΔV y dV ?
- 27. **Análisis numérico** Se construye un cono circular recto de altura $h = 8$ y radio $r = 4$ y durante la medición se cometieron errores en el radio Δr y en la altura Δh . Completar la tabla para mostrar la relación entre ΔV y dV para los errores indicados.

Δr	Δh	$\frac{dV}{dS}$	$\frac{\Delta V}{\Delta S}$	$\frac{\Delta V - dV}{\Delta S - dS}$
0.1	0.1			
0.1	-0.1			
0.001	0.002			
-0.0001	0.0002			

- 28. **Análisis numérico** La altura y radio de un cono circular recto midieron $h = 16$ metros y $r = 6$ metros. En la medición, se cometieron errores Δr y Δh . S es el área de la superficie lateral de un cono. Completar la tabla anterior para mostrar la relación entre ΔS y dS para los errores indicados.
- 29. **Modelo matemático** Los consumos per cápita (en galones) de diferentes tipos de leche en Estados Unidos de 1999 a 2005 se muestran en la tabla. El consumo de leche light y descremada, leche baja en grasas y leche entera se representa por las variables x , y y z , respectivamente. (Fuente: U.S. Department of Agriculture)

Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
x	1.4	1.4	1.4	1.6	1.6	1.7	1.7
y	7.3	7.1	7.0	7.0	6.9	6.9	6.9
z	6.2	6.1	5.9	5.8	5.6	5.5	5.6

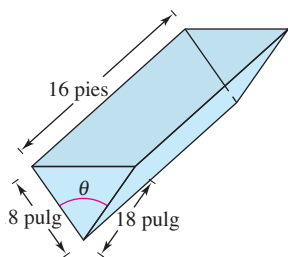
Un modelo para los datos está dado por $z = -0.92x + 1.03y + 0.02$.

- a) Hallar la diferencial total del modelo.
- b) Se prevé en la industria lechera que en años futuros el consumo per cápita de leche light y descremada será de 1.9 ± 0.25 galones y que el consumo per cápita de leche baja en grasas será 7.5 ± 0.25 galones. Utilizar dz para estimar los máximos errores de propagación y relativo en el pronóstico de consumo de leche entera.
- 30. **Coordenadas rectangulares a polares** Un sistema de coordenadas rectangular se coloca sobre un mapa y las coordenadas de un punto de interés son $(7.2, 2.5)$. Existe un posible error de 0.05 en cada coordenada. Aproximar el máximo error posible al medir las coordenadas polares del punto.

- 31. Volumen** El radio r y la altura h de un cilindro circular recto se miden con posibles errores de 4 y 2%, respectivamente. Aproximar el máximo error porcentual posible al medir el volumen.
- 32. Área** En un triángulo, dos lados adyacentes miden 3 y 4 pulgadas de longitud, y entre ellos forman un ángulo de $\pi/4$. Los posibles errores de medición son $\frac{1}{16}$ pulgadas en los lados y 0.02 radianes en el ángulo. Aproximar el máximo error posible al calcular el área.
- 33. Viento** La fórmula para la frialdad producida por el viento C (en grados Fahrenheit) es
- $$C = 35.74 + 0.6215T - 35.75v^{0.16} + 0.4275Tv^{0.16}$$

donde v es la velocidad del viento en millas por hora y T es la temperatura en grados Fahrenheit. La velocidad del viento es 23 ± 3 millas por hora y la temperatura es $8^\circ \pm 1^\circ$. Utilizar dC para estimar el posible error propagado y el error relativo máximos al calcular la frialdad producida por el viento. (Fuente: *National Oceanic and Atmospheric Administration*)

- 34. Aceleración** La aceleración centrípeta de una partícula que se mueve en un círculo es $a = v^2/r$, donde v es la velocidad y r es el radio del círculo. Aproximar el error porcentual máximo al medir la aceleración debida a errores de 3% en v y 2% en r .
- 35. Volumen** Un abrevadero tiene 16 pies de largo (ver la figura). Sus secciones transversales son triángulos isósceles en los que los dos lados iguales miden 18 pulgadas. El ángulo entre los dos lados iguales es θ .
- Expresar el volumen del abrevadero en función de θ y determinar el valor de θ para el que el volumen es máximo.
 - El error máximo en las mediciones lineales es de media pulgada y el error máximo en la medida del ángulo es 2° . Aproximar el cambio a partir del volumen máximo.



No dibujado a escala

Figura para 35

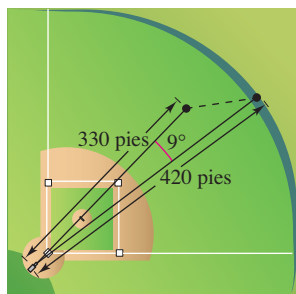


Figura para 36

- 36. Deportes** Un jugador de béisbol en el jardín central se encuentra aproximadamente a 330 pies de una cámara de televisión que está en la base. Un bateador golpea una pelota que sale hacia una valla situada a una distancia de 420 pies de la cámara (ver la figura).
- La cámara gira 9° para seguir la carrera. Aproximar el número de pies que el jugador central tiene que correr para atrapar la pelota.
 - La posición del jugador central podría tener un error hasta de 6 pies y el error máximo al medir la rotación de la cámara de 1° . Aproximar el máximo error posible en el resultado del inciso a).

- 37. Potencia** La potencia eléctrica P está dada por $P = E^2/R$, donde E es el voltaje y R es la resistencia. Aproximar el máximo error porcentual al calcular la potencia si se aplican 120 volts a una resistencia de 2 000 ohms y los posibles errores porcentuales al medir E y R son 3 y 4%, respectivamente.

- 38. Resistencia** La resistencia total R de dos resistencias conectadas en paralelo es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Aproximar el cambio en R cuando R_1 incrementa de 10 ohms a 10.5 ohms y R_2 decrece de 15 ohms a 13 ohms.

- 39. Inductancia** La inductancia L (en microhenrys) de un hilo recto no magnético en el vacío es

$$L = 0.00021 \left(\ln \frac{2h}{r} - 0.75 \right)$$

donde h es la longitud del hilo en milímetros y r es el radio de una sección transversal circular. Aproximar L cuando $r = 2 \pm \frac{1}{16}$ milímetros y $h = 100 \pm \frac{1}{100}$ milímetros.

- 40. Péndulo** El periodo T de un péndulo de longitud L es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Un péndulo se lleva de la zona del canal, donde $g = 32.09$ pies/s², a Groenlandia, donde $g = 32.23$ pies/s². Debido al cambio en la temperatura, la longitud del péndulo cambia de 2.5 pies a 2.48 pies. Aproximar el cambio en el periodo del péndulo.

En los ejercicios 41 a 44, mostrar que la función es diferenciable, hallando los valores de ϵ_1 y ϵ_2 que se dan en la definición de diferenciabilidad y verificar que ϵ_1 y $\epsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

41. $f(x, y) = x^2 - 2x + y$ 42. $f(x, y) = x^2 + y^2$
 43. $f(x, y) = x^2y$ 44. $f(x, y) = 5x - 10y + y^3$

En los ejercicios 45 y 46, utilizar la función para demostrar que a) $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, y b) f no es diferenciable en $(0, 0)$.

45. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 46. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2y}{x^3 + y^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

47. Mostrar que si $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) , entonces $f(x, y_0)$ es diferenciable en $x = x_0$. Usar este resultado para probar que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no es diferenciable en $(0, 0)$.

Para discusión

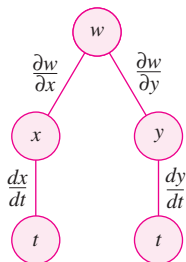
48. Considerar la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Evaluar $f(3, 1)$ y $f(3.05, 1.1)$.
 - Usar los resultados del inciso a) para calcular Δz .
 - Usar la diferencial total dz para aproximar Δz . Comparar los resultados con los del inciso b).

13.5 Regla de la cadena para funciones de varias variables

- Utilizar la regla de la cadena para funciones de varias variables.
- Hallar las derivadas parciales implícitamente.

Regla de la cadena para funciones de varias variables

El trabajo con diferenciales de la sección anterior proporciona las bases para la extensión de la regla de la cadena a funciones de dos variables. Hay dos casos: el primer caso cuando w es una función de x y y , donde x y y son funciones de una sola variable independiente t . (La demostración de este teorema se da en el apéndice A.)



Regla de la cadena: una variable dependiente w , es función de x y y las que a su vez son funciones de t . Este diagrama representa la derivada de w con respecto a t

Figura 13.39

TEOREMA 13.6 REGLA DE LA CADENA: UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función derivable de x y y . Si $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde g y h son funciones derivables de t , entonces w es una función diferenciable de t , y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad \text{Ver figura 13.39.}$$

EJEMPLO 1 Regla de la cadena con una variable independiente

Sea $w = x^2y - y^2$, donde $x = \sin t$ y $y = e^t$. Hallar dw/dt cuando $t = 0$.

Solución De acuerdo con la regla de la cadena para una variable independiente, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 2xy(\cos t) + (x^2 - 2y)e^t \\ &= 2(\sin t)(e^t)(\cos t) + (\sin^2 t - 2e^t)e^t \\ &= 2e^t \sin t \cos t + e^t \sin^2 t - 2e^{2t}. \end{aligned}$$

Cuando $t = 0$, se sigue que

$$\frac{dw}{dt} = -2.$$

La regla de la cadena presentada en esta sección proporciona técnicas alternativas para resolver muchos problemas del cálculo de una sola variable. Así, en el ejemplo 1, se podrían haber usado técnicas para una sola variable para encontrar dw/dt expresando primero w como función de t ,

$$\begin{aligned} w &= x^2y - y^2 \\ &= (\sin t)^2(e^t) - (e^t)^2 \\ &= e^t \sin^2 t - e^{2t} \end{aligned}$$

y derivando después como de costumbre.

$$\frac{dw}{dt} = 2e^t \sin t \cos t + e^t \sin^2 t - 2e^{2t}$$

La regla de la cadena en el teorema 13.6 puede extenderse a cualquier número de variables. Por ejemplo, si cada x_i es una función derivable de una sola variable t , entonces para

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

se tiene

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de la cadena a velocidades o ritmos de cambio relacionados

Dos objetos recorren trayectorias elípticas dadas por las ecuaciones paramétricas siguientes.

$$x_1 = 4 \cos t \quad y \quad y_1 = 2 \operatorname{sen} t \quad \text{Primer objeto.}$$

$$x_2 = 2 \operatorname{sen} 2t \quad y \quad y_2 = 3 \cos 2t \quad \text{Segundo objeto.}$$

¿A qué velocidad o ritmo cambia la distancia entre los dos objetos cuando $t = \pi$?

Solución En la figura 13.40 se puede ver que la distancia s entre los dos objetos está dada por

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

y que cuando $t = \pi$, se tiene $x_1 = -4, y_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = 3$, y

$$s = \sqrt{(0 + 4)^2 + (3 - 0)^2} = 5.$$

Cuando $t = \pi$, las derivadas parciales de s son las siguientes.

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(0 + 4) = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(3 - 0) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(0 + 4) = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_2} = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(3 - 0) = \frac{3}{5}$$

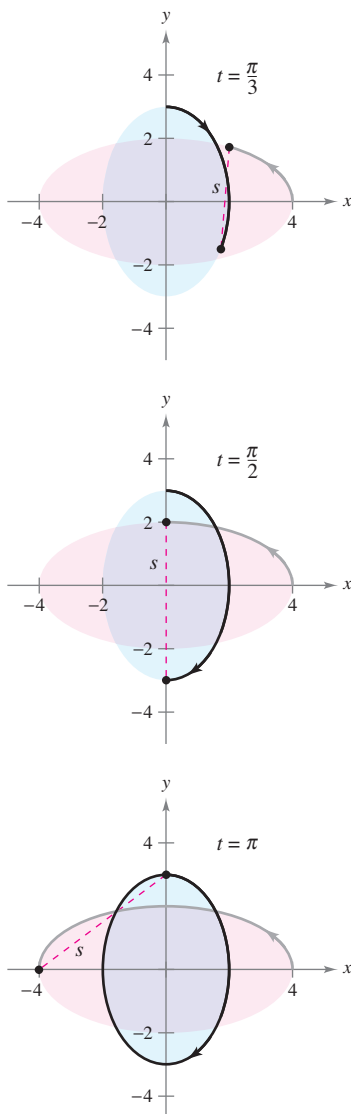
Cuando $t = \pi$, las derivadas de x_1, y_1, x_2 y y_2 son

$$\frac{dx_1}{dt} = -4 \operatorname{sen} t = 0 \quad \frac{dy_1}{dt} = 2 \cos t = -2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4 \cos 2t = 4 \quad \frac{dy_2}{dt} = -6 \operatorname{sen} 2t = 0.$$

Por tanto, usando la regla de la cadena apropiada, se sabe que la distancia cambia a una velocidad o ritmo

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{\partial s}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dt} \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)(0) + \left(-\frac{3}{5}\right)(-2) + \left(\frac{4}{5}\right)(4) + \left(\frac{3}{5}\right)(0) \\ &= \frac{22}{5}. \end{aligned}$$



Trayectorias de dos objetos que recorren órbitas elípticas
Figura 13.40

En el ejemplo 2, obsérvese que s es función de cuatro variables *intermedias*, x_1, y_1, x_2 y y_2 , cada una de las cuales es a su vez función de una sola variable t . Otro tipo de función compuesta es aquella en la que las variables intermedias son, a su vez, funciones de más de una variable. Por ejemplo, si $w = f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$, se sigue que w es función de s y t , y se pueden considerar las derivadas parciales de w con respecto a s y t . Una manera de encontrar estas derivadas parciales es expresar w explícitamente como función de s y t sustituyendo las ecuaciones $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ en la ecuación $w = f(x, y)$. Así se pueden encontrar las derivadas parciales de la manera usual, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Hallar derivadas parciales por sustitución

Hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ para $w = 2xy$, donde $x = s^2 + t^2$ y $y = s/t$.

Solución Se comienza por sustituir $x = s^2 + t^2$ y $y = s/t$ en la ecuación $w = 2xy$ para obtener

$$w = 2xy = 2(s^2 + t^2)\left(\frac{s}{t}\right) = 2\left(\frac{s^3}{t} + st\right).$$

Después, para encontrar $\partial w/\partial s$, se mantiene t constante y se deriva con respecto a s .

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= 2\left(\frac{3s^2}{t} + t\right) \\ &= \frac{6s^2 + 2t^2}{t}\end{aligned}$$

De manera similar, para hallar $\partial w/\partial t$, se mantiene s constante y se deriva con respecto a t para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= 2\left(-\frac{s^3}{t^2} + s\right) \\ &= 2\left(\frac{-s^3 + st^2}{t^2}\right) \\ &= \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}.\end{aligned}$$

El teorema 13.7 proporciona un método alternativo para hallar las derivadas parciales del ejemplo 3, sin expresar w explícitamente como función de s y t .

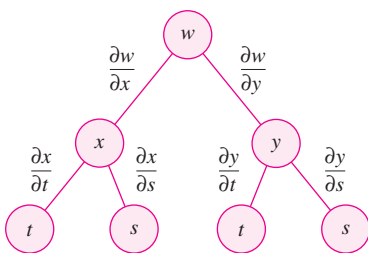
TEOREMA 13.7 REGLA DE LA CADENA: DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable de x y y . Si $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son tales que las derivadas parciales de primer orden $\partial x/\partial s$, $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial s$ y $\partial y/\partial t$ existen, entonces $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ existen y están dadas por

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

DEMOSTRACIÓN Para obtener $\partial w/\partial s$, se mantiene constante t y se aplica el teorema 13.6 para obtener el resultado deseado. De manera similar, para obtener $\partial w/\partial t$ se mantiene constante s y se aplica el teorema 13.6.

NOTA La regla de la cadena en este teorema se muestra esquemáticamente en la figura 13.41. ■



La regla de la cadena: dos variables independientes

Figura 13.41

EJEMPLO 4 Regla de la cadena con dos variables independientes

Utilizar la regla de la cadena para encontrar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$, dada

$$w = 2xy$$

donde $x = s^2 + t^2$ y $y = s/t$.

Solución Nótese que estas mismas derivadas parciales fueron calculadas en el ejemplo 3. Esta vez, usando el teorema 13.7, se puede mantener constante t y derivar con respecto a s para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= 2y(2s) + 2x\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= 2\left(\frac{s}{t}\right)(2s) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{1}{t}\right) && \text{Sustituir } y \text{ por } (s/t) \text{ y } x \text{ por } s^2 + t^2. \\ &= \frac{4s^2}{t} + \frac{2s^2 + 2t^2}{t} \\ &= \frac{6s^2 + 2t^2}{t}. \end{aligned}$$

De manera similar, manteniendo s constante se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= 2y(2t) + 2x\left(\frac{-s}{t^2}\right) \\ &= 2\left(\frac{s}{t}\right)(2t) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{-s}{t^2}\right) && \text{Sustituir } y \text{ por } (s/t) \text{ y } x \text{ por } s^2 + t^2. \\ &= 4s - \frac{2s^3 + 2st^2}{t^2} \\ &= \frac{4st^2 - 2s^3 - 2st^2}{t^2} \\ &= \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}. \end{aligned}$$

La regla de la cadena del teorema 13.7 también puede extenderse a cualquier número de variables. Por ejemplo, si w es una función diferenciable de n variables x_1, x_2, \dots, x_n , donde cada x_i es una función diferenciable de m variables t_1, t_2, \dots, t_m , entonces para

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t_1} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \frac{\partial w}{\partial t_2} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial w}{\partial t_m} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Regla de la cadena para una función de tres variables

Hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ si $s = 1$ y $t = 2\pi$, dada la función

$$w = xy + yz + xz$$

donde $x = s \cos t$, $y = s \sin t$ y $z = t$.

Solución Por extensión del teorema 13.7, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (y + z)(\cos t) + (x + z)(\sin t) + (y + x)(0) \\ &= (y + z)(\cos t) + (x + z)(\sin t).\end{aligned}$$

Cuando $s = 1$ y $t = 2\pi$, se tiene $x = 1$, $y = 0$ y $z = 2\pi$. Así, $\partial w/\partial s = (0 + 2\pi)(1) + (1 + 2\pi)(0) = 2\pi$. Y

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= (y + z)(-s \sin t) + (x + z)(s \cos t) + (y + x)(1)\end{aligned}$$

y si $s = 1$ y $t = 2\pi$, se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= (0 + 2\pi)(0) + (1 + 2\pi)(1) + (0 + 1)(1) \\ &= 2 + 2\pi.\end{aligned}$$

Derivación o diferenciación parcial implícita

Esta sección concluye con una aplicación de la regla de la cadena para determinar la derivada de una función definida *implícitamente*. Supóngase que x y y están relacionadas por la ecuación $F(x, y) = 0$, donde se supone que $y = f(x)$ es función derivable de x . Para hallar dy/dx , se podría recurrir a las técnicas vistas de la sección 2.5. Sin embargo, se verá que la regla de la cadena proporciona una útil alternativa. Si se considera la función dada por

$$w = F(x, y) = F(x, f(x))$$

se puede aplicar el teorema 13.6 para obtener

$$\frac{dw}{dx} = F_x(x, y) \frac{dx}{dx} + F_y(x, y) \frac{dy}{dx}.$$

Como $w = F(x, y) = 0$ para toda x en el dominio de f , se sabe que $dw/dx = 0$ y se tiene

$$F_x(x, y) \frac{dx}{dx} + F_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Ahora, si $F_y(x, y) \neq 0$, se puede usar el hecho de que $dx/dx = 1$ para concluir que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Un procedimiento similar puede usarse para encontrar las derivadas parciales de funciones de varias variables definidas implícitamente.

TEOREMA 13.8 REGLA DE LA CADENA: DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como función derivable de x , entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad F_y(x, y) \neq 0.$$

Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z implícitamente como función diferenciable de x y y , entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0.$$

Este teorema puede extenderse a funciones diferenciables definidas implícitamente de cualquier número de variables.

EJEMPLO 6 Hallar una derivada implícitamente

Hallar dy/dx , dada la ecuación $y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$.

Solución Se comienza por definir una función F

$$F(x, y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4.$$

Después, usando el teorema 13.8, se tiene

$$F_x(x, y) = -2x \quad \text{y} \quad F_y(x, y) = 3y^2 + 2y - 5$$

por lo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = \frac{-(-2x)}{3y^2 + 2y - 5} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}.$$

NOTA Comparar la solución del ejemplo 6 con la solución del ejemplo 2 en la sección 2.5. ■

EJEMPLO 7 Hallar derivadas parciales implícitamente

Encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, dada la ecuación $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$.

Solución Para aplicar el teorema 13.8, sea

$$F(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5.$$

Entonces

$$F_x(x, y, z) = 6xz - 2xy^2$$

$$F_y(x, y, z) = -2x^2y + 3z$$

$$F_z(x, y, z) = 3x^2 + 6z^2 + 3y$$

con lo que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2xy^2 - 6xz}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2x^2y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}.$$

13.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, hallar dw/dt utilizando la regla de la cadena apropiada.

- $w = x^2 + y^2$
 $x = 2t, y = 3t$
- $w = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $x = \cos t, y = e^t$
- $w = x \operatorname{sen} y$
 $x = e^t, y = \pi - t$
- $w = \ln \frac{y}{x}$
 $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t$

En los ejercicios 5 a 10, hallar dw/dt a) utilizando la regla de la cadena apropiada y b) convirtiendo w en función de t antes de derivar.

- $w = xy, x = e^t, y = e^{-2t}$
- $w = \cos(x - y), x = t^2, y = 1$
- $w = x^2 + y^2 + z^2, x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, z = e^t$
- $w = xy \cos z, x = t, y = t^2, z = \arccos t$
- $w = xy + xz + yz, x = t - 1, y = t^2 - 1, z = t$
- $w = xy^2 + x^2z + yz^2, x = t^2, y = 2t, z = 2$

Movimiento de un proyectil En los ejercicios 11 y 12 se dan las ecuaciones paramétricas de las trayectorias de dos proyectiles. ¿A qué velocidad o ritmo cambia la distancia entre los dos objetos en el valor de t dado?

- $x_1 = 10 \cos 2t, y_1 = 6 \operatorname{sen} 2t$ Primer objeto.
 $x_2 = 7 \cos t, y_2 = 4 \operatorname{sen} t$ Segundo objeto.
 $t = \pi/2$
- $x_1 = 48\sqrt{2}t, y_1 = 48\sqrt{2}t - 16t^2$ Primer objeto.
 $x_2 = 48\sqrt{3}t, y_2 = 48t - 16t^2$ Segundo objeto.
 $t = 1$

En los ejercicios 13 y 14, hallar d^2w/dt^2 utilizando la regla de la cadena apropiada. Evaluar d^2w/dt^2 en el valor de t dado.

- $w = \ln(x + y), x = e^t, y = e^{-t}, t = 0$
- $w = \frac{x^2}{y}, x = t^2, y = t + 1, t = 1$

En los ejercicios 15 a 18, hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ utilizando la regla de la cadena apropiada y evaluar cada derivada parcial en los valores de s y t dados.

- | <u>Función</u> | <u>Punto</u> |
|---|----------------------------|
| 15. $w = x^2 + y^2$
$x = s + t, y = s - t$ | $s = 1, t = 0$ |
| 16. $w = y^3 - 3x^2y$
$x = e^s, y = e^t$ | $s = -1, t = 2$ |
| 17. $w = \operatorname{sen}(2x + 3y)$
$x = s + t, y = s - t$ | $s = 0, t = \frac{\pi}{2}$ |
| 18. $w = x^2 - y^2$
$x = s \cos t, y = s \operatorname{sen} t$ | $s = 3, t = \frac{\pi}{4}$ |

En los ejercicios 19 a 22, hallar $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial \theta$ a) utilizando la regla de la cadena apropiada y b) convirtiendo w en una función de r y θ antes de derivar

- $w = \frac{yz}{x}, x = \theta^2, y = r + \theta, z = r - \theta$
- $w = x^2 - 2xy + y^2, x = r + \theta, y = r - \theta$
- $w = \arctan \frac{y}{x}, x = r \cos \theta, y = r \operatorname{sen} \theta$
- $w = \sqrt{25 - 5x^2 - 5y^2}, x = r \cos \theta, y = r \operatorname{sen} \theta$

En los ejercicios 23 a 26, hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ utilizando la regla de la cadena apropiada.

- $w = xyz, x = s + t, y = s - t, z = st^2$
- $w = x^2 + y^2 + z^2, x = t \operatorname{sen} s, y = t \cos s, z = st^2$
- $w = ze^{xy}, x = s - t, y = s + t, z = st$
- $w = x \cos yz, x = s^2, y = t^2, z = s - 2t$

En los ejercicios 27 a 30, hallar dy/dx por derivación implícita.

- $x^2 - xy + y^2 - x + y = 0$
- $\sec xy + \tan xy + 5 = 0$
- $\ln \sqrt{x^2 + y^2} + x + y = 4$
- $\frac{x}{x^2 + y^2} - y^2 = 6$

En los ejercicios 31 a 38, hallar las primeras derivadas parciales de z por derivación implícita.

- $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- $xz + yz + xy = 0$
- $x^2 + 2yz + z^2 = 1$
- $x + \operatorname{sen}(y + z) = 0$
- $\tan(x + y) + \tan(y + z) = 1$
- $z = e^x \operatorname{sen}(y + z)$
- $e^{xz} + xy = 0$
- $x \ln y + y^2z + z^2 = 8$

En los ejercicios 39 a 42, hallar las primeras derivadas parciales de w por derivación implícita.

- $xy + yz - wz + wx = 5$
- $x^2 + y^2 + z^2 - 5yw + 10w^2 = 2$
- $\cos xy + \operatorname{sen} yz + wz = 20$
- $w - \sqrt{x - y} - \sqrt{y - z} = 0$

Funciones homogéneas Una función f es homogénea de grado n si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. En los ejercicios 43 a 46, a) mostrar que la función es homogénea y determinar n , y b) mostrar que $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$.

- $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$
- $f(x, y) = e^{x/y}$
- $f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

47. Sean $w = f(x, y)$, $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde f, g y h son diferenciables. Usar la regla de la cadena apropiada para encontrar dw/dt cuando $t = 2$ dada la siguiente tabla de valores.

$g(2)$	$h(2)$	$g'(2)$	$h'(2)$	$f_x(4, 3)$	$f_y(4, 3)$
4	3	-1	6	-5	7

48. Sean $w = f(x, y)$, $x = g(s, t)$ y $y = h(t)$, donde f, g y h son diferenciables. Usar la regla de la cadena apropiada para encontrar $w_s(1, 2)$ y $w_t(1, 2)$ dada la siguiente tabla de valores.

$g(1, 2)$	$h(1, 2)$	$g_s(1, 2)$	$h_s(1, 2)$
4	3	-3	5

$g_t(1, 2)$	$h_t(1, 2)$	$f_x(4, 3)$	$f_y(4, 3)$
-2	8	-5	7

Desarrollo de conceptos

49. Sea $w = f(x, y)$ una función donde x y y son funciones de una sola variable t . Dar la regla de la cadena para hallar dw/dt .
50. Sea $w = f(x, y)$ una función donde x y y son funciones de dos variables s y t . Dar la regla de la cadena para hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$.
51. Si $f(x, y) = 0$, dar la regla para hallar dy/dx implícitamente. Si $f(x, y, z) = 0$, dar la regla para hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ implícitamente.

Para discusión

52. Considerar la función $f(x, y, z) = xyz$, donde $x = t^2$, $y = 2t$, $z = e^{-t}$.
- a) Usar la regla de la cadena apropiada para encontrar df/dt .
- b) Escribir f como una función de t y entonces encontrar df/dt . Explicar por qué este resultado es el mismo que el del inciso a).

53. **Volumen y área superficial** El radio de un cilindro circular recto se incrementa a razón de 6 pulgadas por minuto, y la altura decrece a razón de 4 pulgadas por minuto. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen y del área superficial cuando el radio es 12 pulgadas y la altura 36 pulgadas?

54. **Volumen y área superficial** Repetir el ejercicio 53 con un cono circular.

55. **Ley de los gases ideales** Según la ley de los gases ideales $pV = mRT$, donde R es una constante, m es una masa constante y p y V son funciones del tiempo. Hallar dT/dt , la velocidad o el ritmo de cambio de la temperatura con respecto al tiempo.

56. **Área** Sea θ el ángulo entre los lados iguales de un triángulo isósceles y sea x la longitud de estos lados. Si x se incrementa a razón de $\frac{1}{2}$ metro por hora y θ se incrementa a razón de $\pi/90$ radianes por hora, hallar la tasa de incremento del área cuando $x = 6$ y $\theta = \pi/4$.

57. **Momento de inercia** Un cilindro anular tiene un radio interior de r_1 y un radio exterior de r_2 (ver la figura). Su momento de inercia es $I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$ donde m es la masa. Los dos radios se incrementan a razón de 2 centímetros por segundo. Hallar la velocidad al que varía I en el instante en que los radios son 6 y 8 centímetros. (Suponer que la masa es constante.)

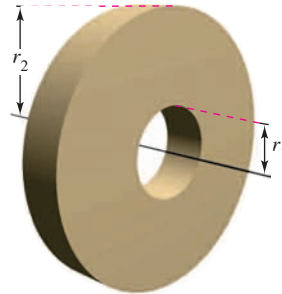


Figura para 57

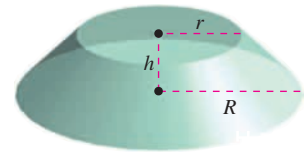


Figura para 58

58. **Volumen y área superficial** Los dos radios del tronco de un cono circular recto se incrementan a razón de 4 centímetros por minuto y la altura se incrementa a razón de 12 centímetros por minuto (ver la figura). Hallar a qué velocidad cambian el volumen y el área superficial cuando los radios son 15 y 25 centímetros, respectivamente, y la altura es de 10 centímetros.

59. Mostrar que $(\partial w/\partial u) + (\partial w/\partial v) = 0$ para $w = f(x, y)$, $x = u - v$ y $y = v - u$.

60. Verificar el resultado del ejercicio 59 con $w = (x - y) \sin(y - x)$.

61. Considerar la función $w = f(x, y)$, en la que $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$. Demostrar:

a)
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$$
 b)
$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

62. Verificar el resultado del ejercicio 61b con $w = \arctan(y/x)$.

63. **Ecuaciones de Cauchy-Riemann** Dadas las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$, verificar que las **ecuaciones diferenciales Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

pueden escribirse en coordenadas polares como

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

64. Verificar el resultado del ejercicio 63 con las funciones

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad v = \arctan \frac{y}{x}$$

65. Demostrar que si $f(x, y)$ es homogénea de grado n , entonces

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y).$$

[Sugerencia: Sea $g(t) = f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Hallar $g'(t)$ y después hacer $t = 1$.]

13.6 Derivadas direccionales y gradientes

- Hallar y usar las derivadas direccionales de una función de dos variables.
- Hallar el gradiente de una función de dos variables.
- Utilizar el gradiente de una función de dos variables en aplicaciones.
- Hallar las derivadas direccionales y el gradiente de funciones de tres variables.

Derivada direccional

Suponer que se está en la colina de la figura 13.42 y se quiere determinar la inclinación de la colina respecto al eje z . Si la colina está representada por $z = f(x, y)$, se sabe cómo determinar la pendiente en dos direcciones diferentes: la pendiente en la dirección de y está dada por la derivada parcial $f_y(x, y)$, y la pendiente en la dirección de x está dada por la derivada parcial $f_x(x, y)$. En esta sección se verá que estas dos derivadas parciales pueden usarse para calcular la pendiente en *cualquier* dirección.

Para determinar la pendiente en un punto de una superficie, se definirá un nuevo tipo de derivada llamada **derivada direccional**. Sea $z = f(x, y)$ una *superficie* y $P(x_0, y_0)$ un *punto* en el dominio de f , como se muestra en la figura 13.43. La “dirección” de la derivada direccional está dada por un vector unitario

$$\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

donde θ es el ángulo que forma el vector con el eje x positivo. Para hallar la pendiente deseada, se reduce el problema a dos dimensiones cortando la superficie con un plano vertical que pasa por el punto P y es paralelo a \mathbf{u} , como se muestra en la figura 13.44. Este plano vertical corta la superficie formando una curva C . La pendiente de la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la dirección de \mathbf{u} se define como la pendiente de la curva C en ese punto.

De manera informal, se puede expresar la pendiente de la curva C como un límite análogo a los usados en el cálculo de una variable. El plano vertical utilizado para formar C corta el plano xy en una recta L , representada por las ecuaciones paramétricas,

$$x = x_0 + t \cos \theta$$

$$y = y_0 + t \sin \theta$$

de manera que para todo valor de t , el punto $Q(x, y)$ se encuentra en la recta L . Para cada uno de los puntos P y Q , hay un punto correspondiente en la superficie.

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \quad \text{Punto sobre } P.$$

$$(x, y, f(x, y)) \quad \text{Punto sobre } Q.$$

Como la distancia entre P y Q es

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= \sqrt{(t \cos \theta)^2 + (t \sin \theta)^2} \\ &= |t| \end{aligned}$$

se puede escribir la pendiente de la recta secante que pasa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y $(x, y, f(x, y))$ como

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Por último, haciendo que t se aproxime a 0, se llega a la definición siguiente.

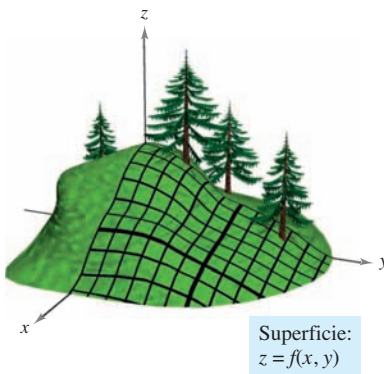


Figura 13.42

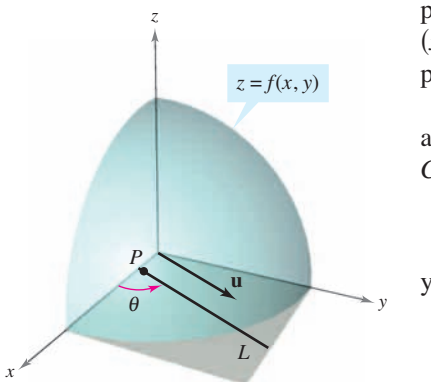


Figura 13.43

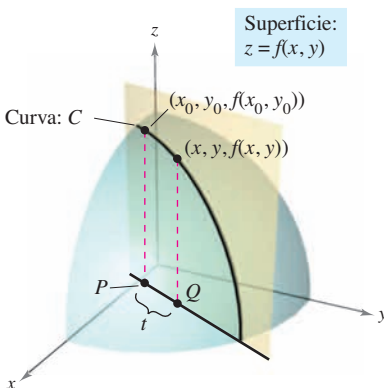


Figura 13.44

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Sea f una función de dos variables x y y , y sea $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ un vector unitario. Entonces la **derivada direccional de f en la dirección de \mathbf{u}** , que se denota $D_{\mathbf{u}}f$, es

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) - f(x, y)}{t}$$

siempre que este límite exista.

Calcular derivadas direccionales empleando esta definición es lo mismo que encontrar la derivada de una función de una variable empleando el proceso del límite (sección 2.1). Una fórmula “de trabajo” más simple para hallar derivadas direccionales emplea las derivadas parciales f_x y f_y .

TEOREMA 13.9 DERIVADA DIRECCIONAL

Si f es una función diferenciable de x y y , entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta.$$

DEMOSTRACIÓN Dado un punto fijado (x_0, y_0) , sea $x = x_0 + t \cos \theta$ y sea $y = y_0 + t \sin \theta$. Ahora, se hace $g(t) = f(x, y)$. Como f es diferenciable, se puede aplicar la regla de la cadena del teorema 13.6 para obtener

$$g'(t) = f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta.$$

Si $t = 0$, entonces $x = x_0$ y $y = y_0$, por tanto

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0) \cos \theta + f_y(x_0, y_0) \sin \theta.$$

De acuerdo con la definición de $g'(t)$, también es verdad que

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cos \theta + f_y(x_0, y_0) \sin \theta$. —————

Hay una cantidad infinita de derivadas direccionales en un punto dado de una superficie, una para cada dirección especificada por \mathbf{u} , como se muestra en la figura 13.45. Dos de éstas son las derivadas parciales f_x y f_y .

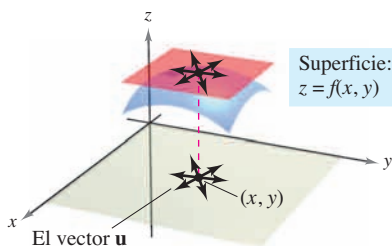


Figura 13.45

1. En la dirección del eje x positivo ($\theta = 0$): $\mathbf{u} = \cos 0 \mathbf{i} + \sin 0 \mathbf{j} = \mathbf{i}$

$$D_{\mathbf{i}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos 0 + f_y(x, y) \sin 0 = f_x(x, y)$$

2. En la dirección del eje y positivo ($\theta = \pi/2$): $\mathbf{u} = \cos \frac{\pi}{2} \mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{2} \mathbf{j} = \mathbf{j}$

$$D_{\mathbf{j}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{2} + f_y(x, y) \sin \frac{\pi}{2} = f_y(x, y)$$

EJEMPLO 1 Hallar una derivada direccional

Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2 \quad \text{Superficie.}$$

en $(1, 2)$ en la dirección de

$$\mathbf{u} = \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}. \quad \text{Dirección.}$$

Solución Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable, y se puede aplicar el teorema 13.9.

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta \\ &= (-2x) \cos \theta + \left(-\frac{y}{2}\right) \sin \theta \end{aligned}$$

Evaluando en $\theta = \pi/3$, $x = 1$ y $y = 2$ se obtiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1, 2) &= (-2)\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\approx -1.866. \end{aligned}$$

Ver la figura 13.46.

Superficie:

$$f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$$

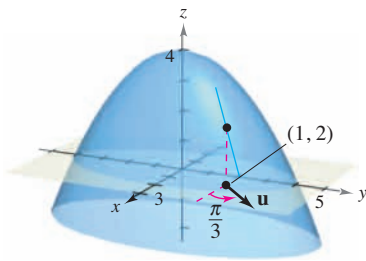


Figura 13.46

NOTA La figura 13.46 muestra que la derivada direccional se puede interpretar como la pendiente de la superficie en el punto $(1, 2)$ en la dirección del vector unitario \mathbf{u} .Se ha especificado la dirección por medio de un vector unitario \mathbf{u} . Si la dirección está dada por un vector cuya longitud no es 1, se debe normalizar el vector antes de aplicar la fórmula del teorema 13.9.**EJEMPLO 2** Hallar una derivada direccional

Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = x^2 \sin 2y \quad \text{Superficie.}$$

en $(1, \pi/2)$ en la dirección de

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}. \quad \text{Dirección.}$$

Solución Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable, y se puede aplicar el teorema 13.9. Se comienza por calcular un vector unitario en la dirección de \mathbf{v} .

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

Usando este vector unitario, se tiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= (2x \sin 2y)(\cos \theta) + (2x^2 \cos 2y)(\sin \theta) \\ D_{\mathbf{u}}f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) &= (2 \sin \pi)\left(\frac{3}{5}\right) + (2 \cos \pi)\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= (0)\left(\frac{3}{5}\right) + (-2)\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Ver la figura 13.47.

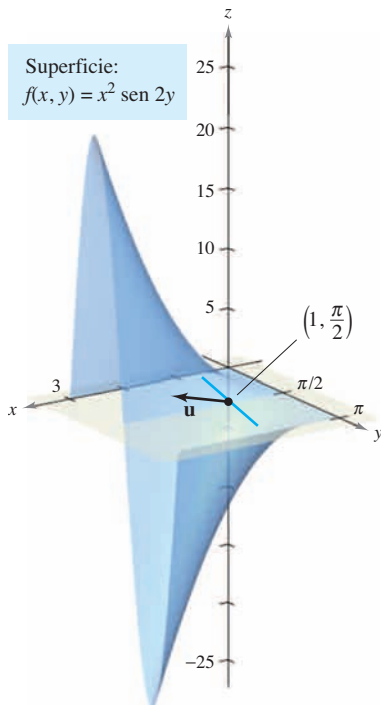
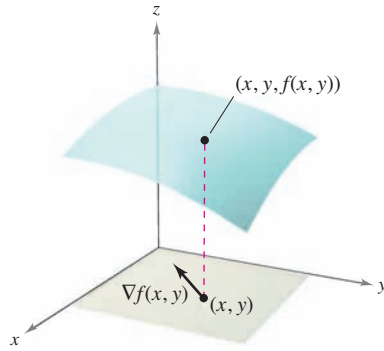


Figura 13.47

El gradiente de una función de dos variables

El **gradiente** de una función de dos variables es una función vectorial de dos variables. Esta función tiene múltiples aplicaciones importantes, algunas de las cuales se describen más adelante en esta misma sección.



El gradiente de f es un vector en el plano xy .
Figura 13.48

DEFINICIÓN DE GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea $z = f(x, y)$ una función de x y y tal que f_x y f_y existen. Entonces el **gradiente de f** , denotado por $\nabla f(x, y)$, es el vector

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}.$$

∇f se lee como “nabla f ”. Otra notación para el gradiente es **grad** $f(x, y)$. En la figura 13.48 hay que observar que para cada (x, y) , el gradiente $\nabla f(x, y)$ es un vector en el plano (no un vector en el espacio).

NOTA El símbolo ∇ no tiene ningún valor. Es un operador de la misma manera que d/dx es un operador. Cuando ∇ opera sobre $f(x, y)$, produce el vector $\nabla f(x, y)$. ■

EJEMPLO 3 Hallar el gradiente de una función

Hallar el gradiente de $f(x, y) = y \ln x + xy^2$ en el punto $(1, 2)$.

Solución Utilizando

$$f_x(x, y) = \frac{y}{x} + y^2 \quad y \quad f_y(x, y) = \ln x + 2xy$$

se tiene

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x} + y^2\right)\mathbf{i} + (\ln x + 2xy)\mathbf{j}.$$

En el punto $(1, 2)$, el gradiente es

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 2) &= \left(\frac{2}{1} + 2^2\right)\mathbf{i} + [\ln 1 + 2(1)(2)]\mathbf{j} \\ &= 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Como el gradiente de f es un vector, se puede expresar la derivada direccional de f en la dirección de \mathbf{u} como

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \cdot [\cos \theta\mathbf{i} + \sin \theta\mathbf{j}].$$

En otras palabras, la derivada direccional es el producto escalar del gradiente y el vector dirección. Este útil resultado se resume en el teorema siguiente.

TEOREMA 13.10 FORMA ALTERNATIVA DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Si f es una función diferenciable de x y y , entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario \mathbf{u} es

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}.$$

EJEMPLO 4 Hallar una derivada direccional usando $\nabla f(x, y)$

Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$$

en $(-\frac{3}{4}, 0)$, en la dirección de $P(-\frac{3}{4}, 0)$ a $Q(0, 1)$.

Solución Como las derivadas de f son continuas, f es diferenciable y se puede aplicar el teorema 13.10. Un vector en la dirección especificada es

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} &= \left(0 + \frac{3}{4}\right)\mathbf{i} + (1 - 0)\mathbf{j} \\ &= \frac{3}{4}\mathbf{i} + \mathbf{j}\end{aligned}$$

y un vector unitario en esta dirección es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

Vector unitario en la dirección de \overrightarrow{PQ} .

Como $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = 6x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j}$, el gradiente en $(-\frac{3}{4}, 0)$ es

$$\nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) = -\frac{9}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}.$$

Gradiente en $(-\frac{3}{4}, 0)$.

Por consiguiente, en $(-\frac{3}{4}, 0)$ la derivada direccional es

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}}f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) &= \nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) \cdot \mathbf{u} \\ &= \left(-\frac{9}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}\right) \\ &= -\frac{27}{10}.\end{aligned}$$

Derivada direccional en $(-\frac{3}{4}, 0)$.

Ver la figura 13.49.

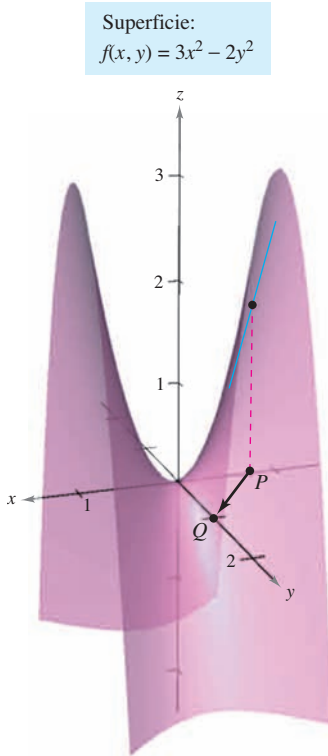


Figura 13.49

NOTA La parte 2 del teorema 13.11 dice que en el punto (x, y) , f crece más rápidamente en dirección del gradiente, $\nabla f(x, y)$.

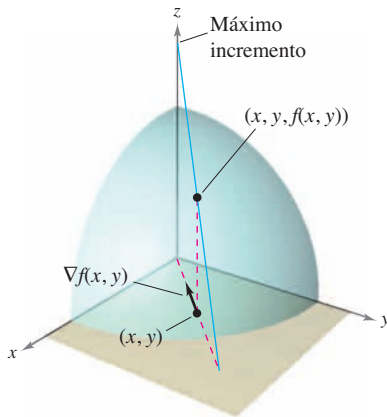
Aplicaciones del gradiente

Se ha visto ya que hay muchas derivadas direccionales en un punto (x, y) de una superficie. En muchas aplicaciones, se desea saber en qué dirección moverse de manera que $f(x, y)$ crezca más rápidamente. Esta dirección se llama la dirección de mayor ascenso, y viene dada por el gradiente, como se establece en el teorema siguiente.

TEOREMA 13.11 PROPIEDADES DEL GRADIENTE

Sea f diferenciable en el punto (x, y) .

1. Si $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ para todo \mathbf{u} .
2. La dirección de *máximo* incremento de f está dada por $\nabla f(x, y)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$.
3. La dirección de *mínimo* incremento de f está dada por $-\nabla f(x, y)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ es $-\|\nabla f(x, y)\|$.



El gradiente de f es un vector en el plano xy que apunta en dirección del máximo incremento sobre la superficie dada por $z = f(x, y)$
Figura 13.50

DEMOSTRACIÓN Si $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, entonces en cualquier dirección (con cualquier \mathbf{u}), se tiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \\ &= (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) \cdot (\cos \theta\mathbf{i} + \sin \theta\mathbf{j}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $\nabla f(x, y) \neq \mathbf{0}$, sea ϕ el ángulo entre $\nabla f(x, y)$ y un vector unitario \mathbf{u} . Usando el producto escalar se puede aplicar el teorema 11.5 para concluir que

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \|\mathbf{u}\| \cos \phi \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \cos \phi \end{aligned}$$

y se sigue que el valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ se presentará cuando $\cos \phi = 1$. Por tanto, $\phi = 0$, y el valor máximo de la derivada direccional se tiene cuando \mathbf{u} tiene la misma dirección que $\nabla f(x, y)$. Este valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ es precisamente

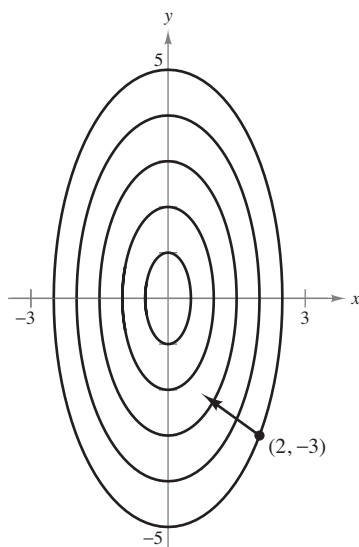
$$\|\nabla f(x, y)\| \cos \phi = \|\nabla f(x, y)\|.$$

De igual forma, el valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ puede obtenerse haciendo $\phi = \pi$ de manera que \mathbf{u} apunte en dirección opuesta a $\nabla f(x, y)$, como se muestra en la figura 13.50.

Para visualizar una de las propiedades del gradiente, imaginar a un esquiador que desciende por una montaña. Si $f(x, y)$ denota la altitud a la que se encuentra el esquiador, entonces $-\nabla f(x, y)$ indica la *dirección de acuerdo con la brújula* que debe tomar el esquiador para seguir el camino de descenso más rápido. (Recuérdese que el gradiente indica una dirección en el plano xy y no apunta hacia arriba ni hacia abajo de la ladera de la montaña.)

Otra ilustración del gradiente es la temperatura $T(x, y)$ en cualquier punto (x, y) de una placa metálica plana. En este caso, $\nabla T(x, y)$ da la dirección de máximo aumento de temperatura en el punto (x, y) , como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Curvas de nivel:
 $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$



La dirección del máximo incremento de la temperatura en $(2, -3)$ está dada por $-16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
Figura 13.51

EJEMPLO 5 Hallar la dirección de máximo incremento

La temperatura en grados Celsius en la superficie de una placa metálica es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

donde x y y se miden en centímetros. ¿En qué dirección a partir de $(2, -3)$ aumenta más rápido la temperatura? ¿Cuál es la tasa o ritmo de crecimiento?

Solución El gradiente es

$$\begin{aligned} \nabla T(x, y) &= T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= -8x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Se sigue que la dirección de máximo incremento está dada por

$$\nabla T(2, -3) = -16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

como se muestra en la figura 13.51, y la tasa de incremento es

$$\begin{aligned} \|\nabla T(2, -3)\| &= \sqrt{256 + 36} \\ &= \sqrt{292} \\ &\approx 17.09^\circ \text{ por centímetro.} \end{aligned}$$

La solución del ejemplo 5 puede entenderse erróneamente. Aunque el gradiente apunta en la dirección de máximo incremento de la temperatura, no necesariamente apunta hacia el punto más caliente de la placa. En otras palabras, el gradiente proporciona una solución local para encontrar un incremento relativo de la temperatura en el punto $(2, -3)$. Una vez que se abandona esa posición, la dirección de máximo incremento puede cambiar.

EJEMPLO 6 Hallar la trayectoria de un rastreador térmico

Un rastreador térmico se encuentra en el punto $(2, -3)$ sobre una placa metálica cuya temperatura en (x, y) es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2.$$

Hallar la trayectoria del rastreador, si éste se mueve continuamente en dirección de máximo incremento de temperatura.

Solución Representétese la trayectoria por la función de posición

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

Un vector tangente en cada punto $(x(t), y(t))$ está dado por

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}.$$

Como el rastreador busca el máximo incremento de temperatura, las direcciones de $\mathbf{r}'(t)$ y $\nabla T(x, y) = -8x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ son iguales en todo punto de la trayectoria. Así,

$$-8x = k \frac{dx}{dt} \quad y \quad -2y = k \frac{dy}{dt}$$

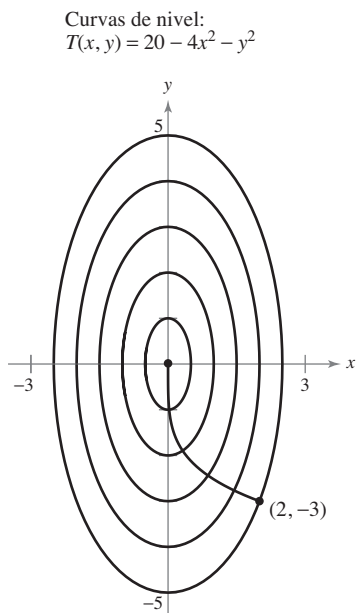
donde k depende de t . Despejando en cada ecuación dt/k e igualando los resultados, se obtiene

$$\frac{dx}{-8x} = \frac{dy}{-2y}.$$

La solución de esta ecuación diferencial es $x = Cy^4$. Como el rastreador comienza en el punto $(2, -3)$, se puede determinar que $C = 2/81$. Por tanto, la trayectoria del rastreador del calor es

$$x = \frac{2}{81}y^4.$$

La trayectoria se muestra en la figura 13.52.



Trayectoria seguida por un rastreador térmico
Figura 13.52

En la figura 13.52, la trayectoria del rastreador (determinada por el gradiente en cada punto) parece ser ortogonal a cada una de las curvas de nivel. Esto resulta claro cuando se considera que la temperatura $T(x, y)$ es constante en cada una de las curvas de nivel. Así, en cualquier punto (x, y) sobre la curva, la velocidad o razón de cambio de T en dirección de un vector unitario tangente \mathbf{u} es 0, y se puede escribir

$$\nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = D_{\mathbf{u}}T(x, y) = 0. \quad \mathbf{u} \text{ es un vector unitario tangente.}$$

Puesto que el producto escalar de $\nabla f(x, y)$ y \mathbf{u} es 0, se puede concluir que deben ser ortogonales. Este resultado se establece en el teorema siguiente.

TEOREMA 13.12 EL GRADIENTE ES NORMAL A LAS CURVAS DE NIVEL

Si f es diferenciable en (x_0, y_0) y $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal (ortogonal) a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0) .

EJEMPLO 7 Hallar un vector normal a una curva de nivel

Dibujar la curva de nivel que corresponde a $c = 0$ para la función dada por

$$f(x, y) = y - \text{sen } x$$

y hallar un vector normal a varios puntos de la curva.

Solución La curva de nivel para $c = 0$ está dada por

$$\begin{aligned} 0 &= y - \text{sen } x \\ y &= \text{sen } x \end{aligned}$$

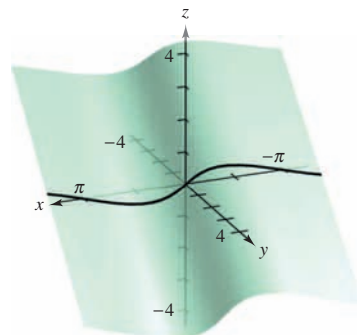
como se muestra en la figura 13.53a. Como el vector gradiente de f en (x, y) es

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= -\cos x\mathbf{i} + \mathbf{j} \end{aligned}$$

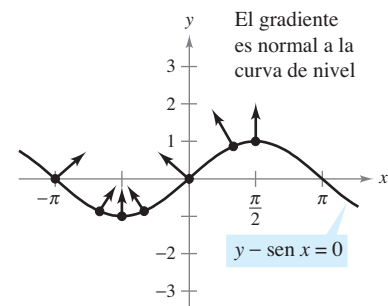
se puede utilizar el teorema 13.12 para concluir que $\nabla f(x, y)$ es normal a la curva de nivel en el punto (x, y) . Algunos vectores gradiente son

$$\begin{aligned} \nabla f(-\pi, 0) &= \mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \nabla f\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \nabla f\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) &= \mathbf{j} \\ \nabla f\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \nabla f(0, 0) &= -\mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \nabla f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \nabla f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) &= \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Estos vectores se muestran en la figura 13.53b.



a) La superficie está dada por $f(x, y) = y - \text{sen } x$



b) La curva de nivel está dada por $f(x, y) = 0$.

Figura 13.53

Funciones de tres variables

Las definiciones de derivada direccional y gradiente se pueden extender de manera natural a funciones de tres o más variables. Como a menudo pasa, algo de la interpretación geométrica se pierde al generalizar funciones de dos variables a funciones de tres variables. Por ejemplo, no se puede interpretar la derivada direccional de una función de tres variables como una pendiente.

Las definiciones y propiedades de la derivada direccional y del gradiente de una función de tres variables se dan en el resumen siguiente.

DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTE PARA FUNCIONES DE TRES VARIABLES

Sea f una función de x , y y z , con derivadas parciales de primer orden continuas. La **derivada direccional de f** en dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ está dada por

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = af_x(x, y, z) + bf_y(x, y, z) + cf_z(x, y, z).$$

El **gradiente de f** se define como

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Las propiedades del gradiente son:

1. $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$
2. Si $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = 0$ para toda \mathbf{u} .
3. La dirección de *máximo* incremento de f está dada por $\nabla f(x, y, z)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$ es

$$\|\nabla f(x, y, z)\|. \quad \text{Valor máximo de } D_{\mathbf{u}}f(x, y, z).$$

4. La dirección de *mínimo* incremento de f está dada por $-\nabla f(x, y, z)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$ es

$$-\|\nabla f(x, y, z)\|. \quad \text{Valor mínimo de } D_{\mathbf{u}}f(x, y, z).$$

NOTA El teorema 13.12 se puede generalizar a funciones de tres variables. Bajo las hipótesis adecuadas,

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0)$$

es normal a la superficie de nivel a través de (x_0, y_0, z_0) . ■

EJEMPLO 8 Hallar el gradiente para una función de tres variables

Hallar $\nabla f(x, y, z)$ para la función dada por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$$

y hallar la dirección de máximo incremento de f en el punto $(2, -1, 1)$.

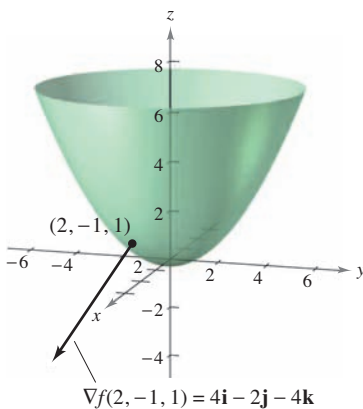
Solución El vector gradiente está dado por

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 4\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Por tanto, la dirección de máximo incremento en $(2, -1, 1)$ es

$$\nabla f(2, -1, 1) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Ver la figura 13.54.



Superficie de nivel y vector gradiente en $(2, -1, 1)$ para $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$
Figura 13.54

13.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 12, hallar la derivada direccional de la función en P en dirección de \mathbf{v} .

- $f(x, y) = 3x - 4xy + 9y$, $P(1, 2)$, $\mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$
- $f(x, y) = x^3 - y^3$, $P(4, 3)$, $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
- $f(x, y) = xy$, $P(0, -2)$, $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$
- $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $P(1, 1)$, $\mathbf{v} = -\mathbf{j}$
- $h(x, y) = e^x \sin y$, $P\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i}$
- $g(x, y) = \arccos xy$, $P(1, 0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$
- $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $P(3, 4)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
- $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $P(0, 0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P(1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$
- $f(x, y, z) = xy + yz + xz$, $P(1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
- $h(x, y, z) = xyz$, $P(2, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \langle 2, 1, 2 \rangle$
- $h(x, y, z) = x \arctan yz$, $P(4, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \langle 1, 2, -1 \rangle$

En los ejercicios 13 a 16, hallar la derivada direccional de la función en dirección de $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$
- $f(x, y) = \frac{y}{x+y}$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$
- $f(x, y) = \sin(2x + y)$, $\theta = \frac{\pi}{3}$
- $g(x, y) = xe^y$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$

En los ejercicios 17 a 20, hallar la derivada direccional de la función en P en dirección de Q .

- $f(x, y) = x^2 + 3y^2$, $P(1, 1)$, $Q(4, 5)$
- $f(x, y) = \cos(x + y)$, $P(0, \pi)$, $Q\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
- $g(x, y, z) = xye^z$, $P(2, 4, 0)$, $Q(0, 0, 0)$
- $h(x, y, z) = \ln(x + y + z)$, $P(1, 0, 0)$, $Q(4, 3, 1)$

En los ejercicios 21 a 26, hallar el gradiente de la función en el punto dado.

- $f(x, y) = 3x + 5y^2 + 1$, $(2, 1)$
- $g(x, y) = 2xe^{y/x}$, $(2, 0)$
- $z = \ln(x^2 - y)$, $(2, 3)$
- $z = \cos(x^2 + y^2)$, $(3, -4)$
- $w = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$, $(1, 1, -2)$
- $w = x \tan(y + z)$, $(4, 3, -1)$

En los ejercicios 27 a 30, utilizar el gradiente para hallar la derivada direccional de la función en P en la dirección de Q .

- $g(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, $P(1, 2)$, $Q(2, 3)$
- $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4$, $P(-1, 4)$, $Q(3, 6)$
- $f(x, y) = e^y \sin x$, $P(0, 0)$, $Q(2, 1)$
- $f(x, y) = \sin 2x \cos y$, $P(\pi, 0)$, $Q\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

En los ejercicios 31 a 40, hallar el gradiente de la función y el valor máximo de la derivada direccional en el punto dado.

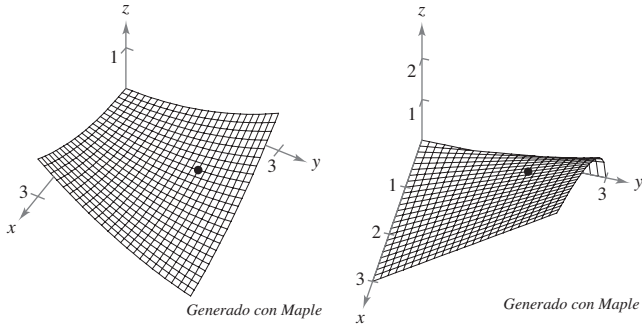
Función	Punto
31. $f(x, y) = x^2 + 2xy$	$(1, 0)$
32. $f(x, y) = \frac{x+y}{y+1}$	$(0, 1)$
33. $h(x, y) = x \tan y$	$\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$
34. $h(x, y) = y \cos(x - y)$	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$
35. $g(x, y) = ye^{-x}$	$(0, 5)$
36. $g(x, y) = \ln \sqrt[3]{x^2 + y^2}$	$(1, 2)$
37. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$(1, 4, 2)$
38. $w = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$	$(0, 0, 0)$
39. $w = xy^2z^2$	$(2, 1, 1)$
40. $f(x, y, z) = xe^{yz}$	$(2, 0, -4)$

En los ejercicios 41 a 46, utilizar la función $f(x, y) = 3 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$.

- Dibujar la gráfica de f en el primer octante y marcar el punto $(3, 2, 1)$ sobre la superficie.
- Hallar $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$, donde $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, usando cada valor dado de θ .
 - $\theta = \frac{\pi}{4}$
 - $\theta = \frac{2\pi}{3}$
 - $\theta = \frac{4\pi}{3}$
 - $\theta = -\frac{\pi}{6}$
- Hallar $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$, donde $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, usando cada vector \mathbf{v} dado.
 - $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
 - $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
 - \mathbf{v} es el vector que va de $(1, 2)$ a $(-2, 6)$.
 - \mathbf{v} es el vector que va de $(3, 2)$ a $(4, 5)$.
- Hallar $\nabla f(x, y)$.
- Hallar el valor máximo de la derivada direccional en $(3, 2)$.
- Hallar un vector unitario de \mathbf{u} ortogonal a $\nabla f(3, 2)$ y calcular $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$. Analizar el significado geométrico del resultado.

Investigación En los ejercicios 47 y 48, a) utilizar la gráfica para estimar las componentes del vector en la dirección de la tasa máxima de incremento en la función en el punto dado. b) Hallar el gradiente en el punto y compararlo con el estimado del inciso a). c) ¿En qué dirección decrece más rápido la función? Explicar.

47. $f(x, y) = \frac{1}{10}(x^2 - 3xy + y^2)$, $(1, 2)$ 48. $f(x, y) = \frac{1}{2}y\sqrt{x}$, $(1, 2)$



CAS 49. **Investigación** Considerar la función

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

en el punto $(4, -3, 7)$.

- Utilizar un sistema algebraico por computadora para dibujar la superficie dada por esa función.
- Determinar la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(4, -3)$ como función de θ , donde $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$. Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la función en el intervalo $[0, 2\pi)$.
- Aproximar los ceros de la función del inciso b) e interpretar cada uno en el contexto del problema.
- Aproximar los números críticos de la función del inciso b) e interpretar cada uno en el contexto del problema.
- Hallar $\|\nabla f(4, -3)\|$ y explicar su relación con las respuestas del inciso d).
- Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la curva de nivel de la función f en el nivel $c = 7$. En esta curva, representar gráficamente el vector en la dirección de $\nabla f(4, -3)$, y establecer su relación con la curva de nivel.

50. **Investigación** Considerar la función

$$f(x, y) = \frac{8y}{1 + x^2 + y^2}$$

- Verificar analíticamente que la curva de nivel de $f(x, y)$ para el nivel $c = 2$ es un círculo.
- En el punto $(\sqrt{3}, 2)$ sobre la curva de nivel para la cual $c = 2$, dibujar el vector que apunta en dirección de la mayor tasa o ritmo de incremento de la función.
- En el punto $(\sqrt{3}, 2)$ sobre la curva de nivel, dibujar el vector cuya derivada direccional sea 0.
- Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie y verificar las respuestas a los incisos a) a c).

En los ejercicios 51 a 54, hallar un vector normal a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en P .

51. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$ 52. $f(x, y) = x^2 + y^2$
 $c = 6, P(0, 0)$ $c = 25, P(3, 4)$

53. $f(x, y) = xy$ 54. $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
 $c = -3, P(-1, 3)$ $c = \frac{1}{2}, P(1, 1)$

En los ejercicios 55 a 58, a) encontrar el gradiente de la función en P , b) encontrar un vector normal unitario para la curva de nivel $f(x, y) = c$ en P , c) encontrar la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en P , y d) trazar la curva de nivel, el vector unitario normal y la recta tangente en el plano xy .

55. $f(x, y) = 4x^2 - y$ 56. $f(x, y) = x - y^2$
 $c = 6, P(2, 10)$ $c = 3, P(4, -1)$

57. $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$ 58. $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$
 $c = 1, P(1, 1)$ $c = 40, P(2, -1)$

Desarrollo de conceptos

- Definir la derivada de la función $z = f(x, y)$ en la dirección de $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$.
- Redactar un párrafo que describa la derivada direccional de la función f en la dirección de $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ cuando a) $\theta = 0^\circ$ y b) $\theta = 90^\circ$.
- Definir el gradiente de una función de dos variables. Dar las propiedades del gradiente.
- Dibujar la gráfica de una superficie y elegir un punto P sobre la superficie. Dibujar un vector en el plano xy que indique la dirección de mayor ascenso sobre la superficie en P .
- Describir la relación del gradiente con las curvas de nivel de una superficie dada por $z = f(x, y)$.

Para discusión

- Considerar la función $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$.
 - Trazar la gráfica de f en el primer octante y graficar el punto $(1, 2, 4)$ sobre la superficie.
 - Encontrar $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$, donde $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, para $\theta = -\pi/4$.
 - Repetir el inciso b) para $\theta = \pi/3$.
 - Encontrar $\nabla f(1, 2)$ y $\|\nabla f(1, 2)\|$.
 - Encontrar un vector unitario \mathbf{u} ortogonal para $\nabla f(1, 2)$ y calcular $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$. Discutir el significado geométrico del resultado.

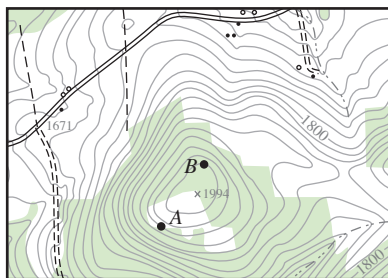
65. **Distribución de temperatura** La temperatura en el punto (x, y) de una placa metálica es

$$T = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

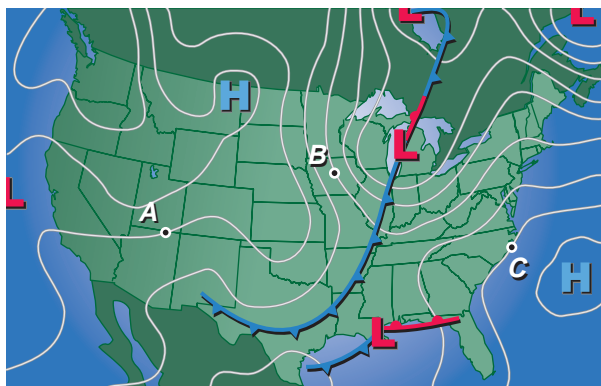
Hallar la dirección de mayor incremento de calor en el punto $(3, 4)$.

66. Topografía La superficie de una montaña se modela mediante la ecuación $h(x, y) = 5\,000 - 0.001x^2 - 0.004y^2$. Un montañista se encuentra en el punto $(500, 300, 4\,390)$. ¿En qué dirección debe moverse para ascender con la mayor rapidez?

67. Topografía La figura muestra un mapa topográfico utilizado por un grupo de excursionistas. Dibujar las trayectorias de descenso más rápidas si los excursionistas parten del punto A y si parten del punto B .



68. Meteorología Los meteorólogos miden la presión atmosférica en milibares. A partir de estas observaciones elaboran mapas climáticos en los que dibujan las curvas de igual presión atmosférica (isobaras) (ver la figura). Son curvas de nivel de una función $P(x, y)$ que dan la presión en cualquier punto. Dibujar los gradientes de las isobaras en los puntos A, B y C . Aunque no se conocen las magnitudes de los gradientes, sus longitudes relativas pueden estimarse. ¿En cuál de los tres puntos es la velocidad del viento mayor si la velocidad del viento se incrementa conforme el gradiente de presión aumenta?



Rastreador térmico En los ejercicios 69 y 70, hallar la trayectoria de un rastreador térmico situado en el punto P de una placa metálica con un campo de temperatura $T(x, y)$.

Campo de temperatura Punto

69. $T(x, y) = 400 - 2x^2 - y^2$ $P(10, 10)$

70. $T(x, y) = 100 - x^2 - 2y^2$ $P(4, 3)$

71. Temperatura La temperatura en el punto (x, y) de una placa metálica se modela mediante

$$T(x, y) = 400e^{-(x^2+y^2)/2}, x \geq 0, y \geq 0.$$

CAS a) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la función de distribución de temperatura.

- b) Hallar las direcciones, sobre la placa en el punto $(3, 5)$, en las que no hay cambio en el calor.
- c) Hallar la dirección de mayor incremento de calor en el punto $(3, 5)$.

CAS 72. Investigación Un equipo de oceanógrafos está elaborando un mapa del fondo del océano para ayudar a recuperar un barco hundido. Utilizando el sonido, desarrollan el modelo

$$D = 250 + 30x^2 + 50 \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2}, \text{ o } \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$$

donde D es la profundidad en metros, y x y y son las distancias en kilómetros.

- a) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie.
- b) Como la gráfica del inciso a) da la profundidad, no es un mapa del fondo del océano. ¿Cómo podría modificarse el modelo para que se pudiera obtener una gráfica del fondo del océano?
- c) ¿Cuál es la profundidad a la que se encuentra el barco si se localiza en las coordenadas $x = 1$ y $y = 0.5$?
- d) Determinar la pendiente del fondo del océano en la dirección del eje x positivo a partir del punto donde se encuentra el barco.
- e) Determinar la pendiente del fondo del océano en la dirección del eje y positivo en el punto donde se encuentra el barco.
- f) Determinar la dirección de mayor tasa de cambio de la profundidad a partir del punto donde se encuentra el barco.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 73 a 76, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.

- 73.** Si $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, entonces $D_{\mathbf{u}}f(0, 0) = 0$ para todo vector unitario \mathbf{u} .
- 74.** Si $f(x, y) = x + y$, entonces $-1 \leq D_{\mathbf{u}}f(x, y) \leq 1$.
- 75.** Si $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ existe, entonces $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = -D_{-\mathbf{u}}f(x, y)$.
- 76.** Si $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = c$ para todo vector unitario \mathbf{u} , entonces $c = 0$.
- 77.** Hallar una función f tal que

$$\nabla f = e^x \cos y \mathbf{i} - e^x \operatorname{sen} y \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

78. Considerar la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

y el vector unitario $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

¿Existe la derivada direccional de f en $P(0, 0)$ en la dirección de \mathbf{u} ? Si $f(0, 0)$ estuviera definido en 2 en vez de 0, ¿existiría la derivada direccional?

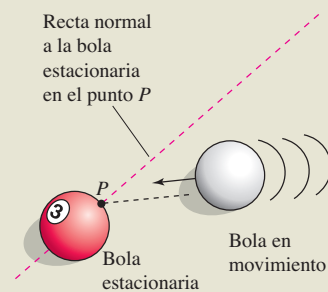
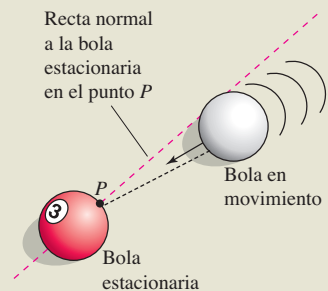
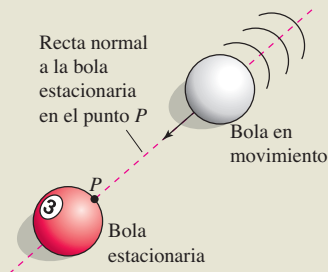
- 79.** Considerar la función $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$.
 - a) Demostrar que f es continua en el origen.
 - b) Demostrar que f_x y f_y existen en el origen, pero que la derivada direccional en el origen en todas las demás direcciones no existe.
- CAS** c) Usar un sistema algebraico por computadora para graficar f cerca del origen a fin de verificar las respuestas de los incisos a) y b). Explicar.

13.7 Planos tangentes y rectas normales

EXPLORACIÓN

Bolas de billar y rectas normales

En cada una de las tres figuras la bola en movimiento está a punto de golpear una bola estacionaria en el punto P . Explicar cómo utilizar la recta normal a la bola estacionaria en el punto P para describir el movimiento resultante en cada una de las bolas. Suponiendo que todas las bolas en movimiento tengan la misma velocidad, ¿cuál de las bolas estacionarias adquirirá mayor velocidad? ¿Cuál adquirirá menor velocidad? Explicar el razonamiento.



- Hallar ecuaciones de planos tangentes y rectas normales a superficies.
- Hallar el ángulo de inclinación de una recta en el espacio.
- Comparar los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$.

Plano tangente y recta normal a una superficie

Hasta ahora las superficies en el espacio se han representado principalmente por medio de ecuaciones de la forma

$$z = f(x, y). \quad \text{Ecuación de una superficie } S.$$

Sin embargo, en el desarrollo que sigue, es conveniente utilizar la representación más general $F(x, y, z) = 0$. Una superficie S dada por $z = f(x, y)$, se puede convertir a la forma general definiendo F como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Puesto que $f(x, y) - z = 0$, se puede considerar S como la superficie de nivel de F dada por

$$F(x, y, z) = 0. \quad \text{Ecuación alternativa de la superficie } S.$$

EJEMPLO 1 Expresar una ecuación de una superficie

Dada la función

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$$

describir la superficie de nivel dada por $F(x, y, z) = 0$.

Solución La superficie de nivel dada por $F(x, y, z) = 0$ puede expresarse como

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

la cual es una esfera de radio 2 centrada en el origen.

Se han visto muchos ejemplos acerca de la utilidad de rectas normales en aplicaciones relacionadas con curvas. Las rectas normales son igualmente importantes al analizar superficies y sólidos. Por ejemplo, considérese la colisión de dos bolas de billar. Cuando una bola estacionaria es golpeada en un punto P de su superficie, se mueve a lo largo de la **línea de impacto** determinada por P y por el centro de la bola. El impacto puede ser de *dos* maneras. Si la bola que golpea se mueve a lo largo de la línea de impacto, se detiene y transfiere todo su momento a la bola estacionaria, como se muestra en la figura 13.55. Si la bola que golpea no se mueve a lo largo de la línea de impacto, se desvía a un lado o al otro y retiene parte de su momento. La transferencia de parte de su momento a la bola estacionaria ocurre a lo largo de la línea de impacto, *sin tener en cuenta* la dirección de la bola que golpea, como se muestra en la figura 13.56. A esta línea de impacto se le llama **recta normal** a la superficie de la bola en el punto P .

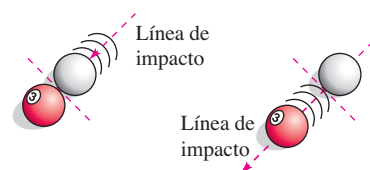


Figura 13.55

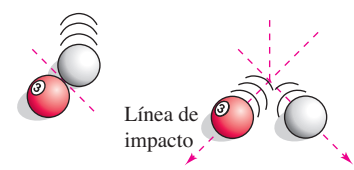


Figura 13.56

En el proceso de hallar una recta normal a una superficie, se puede también resolver el problema de encontrar un **plano tangente** a la superficie. Sea S una superficie dada por

$$F(x, y, z) = 0$$

y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en S . Sea C una curva en S que pasa por P definida por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Entonces, para todo t ,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

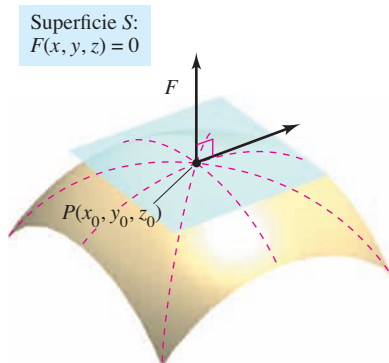
Si F es diferenciable y $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$ existen, se sigue por la regla de la cadena que

$$\begin{aligned} 0 &= F'(t) \\ &= F_x(x, y, z)x'(t) + F_y(x, y, z)y'(t) + F_z(x, y, z)z'(t). \end{aligned}$$

En (x_0, y_0, z_0) , la forma vectorial equivalente es

$$0 = \underbrace{\nabla F(x_0, y_0, z_0)}_{\text{Gradiente}} \cdot \underbrace{\mathbf{r}'(t_0)}_{\text{Vector tangente}}.$$

Este resultado significa que el gradiente en P es ortogonal al vector tangente de toda curva en S que pase por P . Por tanto, todas las rectas tangentes en S se encuentran en un plano que es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ y contiene a P , como se muestra en la figura 13.57.



Plano tangente a la superficie S en P
Figura 13.57

DEFINICIÓN DE PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL

Sea F diferenciable en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie S dada por $F(x, y, z) = 0$ tal que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$.

1. Al plano que pasa por P y es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama **plano tangente a S en P** .
2. A la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama **recta normal a S en P** .

NOTA En el resto de esta sección, se supone $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ a menos que se establezca lo contrario. ■

Para hallar una ecuación para el plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0) , sea (x, y, z) un punto arbitrario en el plano tangente. Entonces el vector

$$\mathbf{v} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

se encuentra en el plano tangente. Como $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal al plano tangente en (x_0, y_0, z_0) , debe ser ortogonal a todo vector en el plano tangente, y se tiene $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$, lo que demuestra el resultado enunciado en el teorema siguiente.

TEOREMA 13.13 ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) , entonces una ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0) es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

EJEMPLO 2 Hallar una ecuación de un plano tangente

Hallar una ecuación del plano tangente al hiperboloide

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$$

en el punto $(1, -1, 4)$.

Solución Se comienza por expresar la ecuación de la superficie como

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0.$$

Después, considerando

$$F(x, y, z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12$$

se tiene

$$F_x(x, y, z) = -4x, \quad F_y(x, y, z) = -4y \quad \text{y} \quad F_z(x, y, z) = 2z.$$

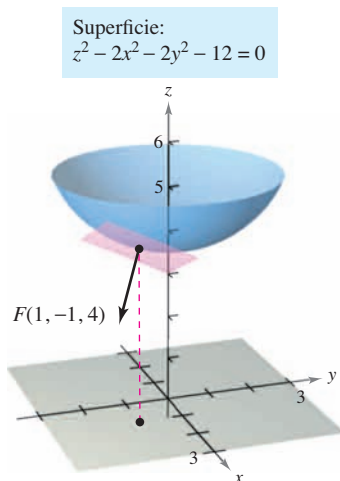
En el punto $(1, -1, 4)$ las derivadas parciales son

$$F_x(1, -1, 4) = -4, \quad F_y(1, -1, 4) = 4 \quad \text{y} \quad F_z(1, -1, 4) = 8.$$

Por tanto, una ecuación del plano tangente en $(1, -1, 4)$ es

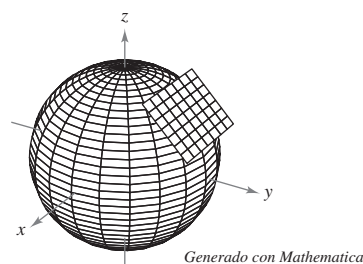
$$\begin{aligned} -4(x - 1) + 4(y + 1) + 8(z - 4) &= 0 \\ -4x + 4 + 4y + 4 + 8z - 32 &= 0 \\ -4x + 4y + 8z - 24 &= 0 \\ x - y - 2z + 6 &= 0. \end{aligned}$$

La figura 13.58 muestra una parte del hiperboloide y el plano tangente.

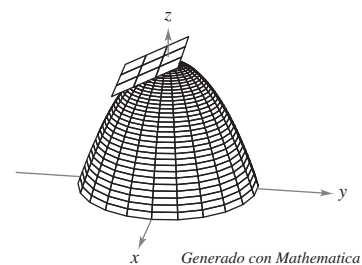


Plano tangente a la superficie
Figura 13.58

TECNOLOGÍA Algunas herramientas de graficación tridimensionales pueden representar planos tangentes a superficies. He aquí dos ejemplos.



Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



Paraboloide: $z = 2 - x^2 - y^2$

Para hallar la ecuación del plano tangente en un punto a una superficie dada por $z = f(x, y)$, se define la función F mediante

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Después se da S por medio de la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$, y por el teorema 13.13 una ecuación del plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

EJEMPLO 3 Hallar una ecuación del plano tangente

Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloides

$$z = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$$

en el punto $(1, 1, \frac{1}{2})$.

Solución De $z = f(x, y) = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$, se obtiene

$$f_x(x, y) = -\frac{x}{5} \Rightarrow f_x(1, 1) = -\frac{1}{5}$$

y

$$f_y(x, y) = -\frac{4y}{5} \Rightarrow f_y(1, 1) = -\frac{4}{5}.$$

Así, una ecuación del plano tangente en $(1, 1, \frac{1}{2})$ es

$$\begin{aligned} f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) - \left(z - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ -\frac{1}{5}(x - 1) - \frac{4}{5}(y - 1) - \left(z - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ -\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}y - z + \frac{3}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Este plano tangente se muestra en la figura 13.59.

El gradiente $\nabla F(x, y, z)$ proporciona una manera adecuada de obtener ecuaciones de rectas normales, como se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Hallar una ecuación de una recta normal a una superficie

Hallar un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie dada por $xyz = 12$ en el punto $(2, -2, -3)$.

Solución Se comienza por hacer

$$F(x, y, z) = xyz - 12.$$

Entonces, el gradiente está dado por

$$\begin{aligned} \nabla F(x, y, z) &= F_x(x, y, z)\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \end{aligned}$$

y en el punto $(2, -2, -3)$ se tiene

$$\begin{aligned} \nabla F(2, -2, -3) &= (-2)(-3)\mathbf{i} + (2)(-3)\mathbf{j} + (2)(-2)\mathbf{k} \\ &= 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}. \end{aligned}$$

La recta normal en $(2, -2, -3)$ tiene números de dirección o directores $6, -6$ y -4 , y el conjunto correspondiente de ecuaciones simétricas es

$$\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 2}{-6} = \frac{z + 3}{-4}.$$

Ver la figura 13.60.

Superficie:
 $z = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$

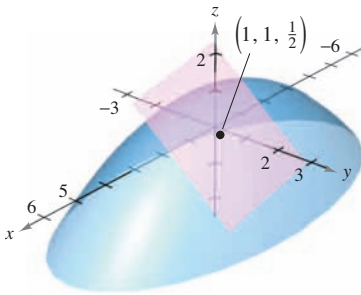


Figura 13.59

Superficie: $xyz = 12$

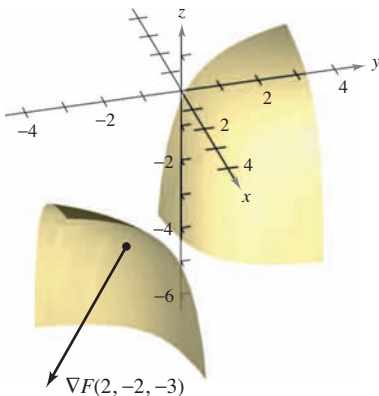


Figura 13.60

Saber que el gradiente $\nabla F(x, y, z)$ es normal a la superficie $F(x, y, z) = 0$ permite resolver diversos problemas relacionados con superficies y curvas en el espacio.

EJEMPLO 5 Hallar la ecuación de una recta tangente a una curva

Describir la recta tangente a la curva de intersección de las superficies

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 20$$

Elipsoide.

$$x^2 + y^2 + z = 4$$

Paraboloide.

en el punto $(0, 1, 3)$, como se muestra en la figura 13.61.

Solución Para comenzar, se calculan los gradientes de ambas superficies en el punto $(0, 1, 3)$.

Elipsoide

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20$$

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$$

$$\nabla F(0, 1, 3) = 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

Paraboloide

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 4$$

$$\nabla G(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\nabla G(0, 1, 3) = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

El producto vectorial de estos dos gradientes es un vector tangente a ambas superficies en el punto $(0, 1, 3)$.

$$\nabla F(0, 1, 3) \times \nabla G(0, 1, 3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20\mathbf{i}.$$

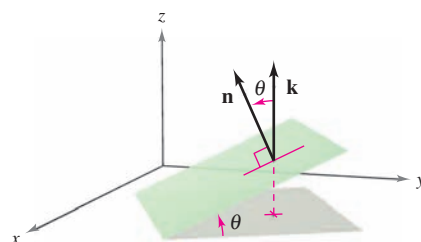
Por tanto, la recta tangente a la curva de intersección de las dos superficies en el punto $(0, 1, 3)$ es una recta paralela al eje x y que pasa por el punto $(0, 1, 3)$.

El ángulo de inclinación de un plano

Otro uso del gradiente $\nabla F(x, y, z)$ es determinar el ángulo de inclinación del plano tangente a una superficie. El **ángulo de inclinación** de un plano se define como el ángulo θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) entre el plano dado y el plano xy , como se muestra en la figura 13.62. (El ángulo de inclinación de un plano horizontal es por definición cero.) Como el vector \mathbf{k} es normal al plano xy , se puede utilizar la fórmula del coseno del ángulo entre dos planos (dado en la sección 11.5) para concluir que el ángulo de inclinación de un plano con vector normal \mathbf{n} está dado por

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{k}\|} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Ángulo de inclinación de un plano.



Ángulo de inclinación
Figura 13.62

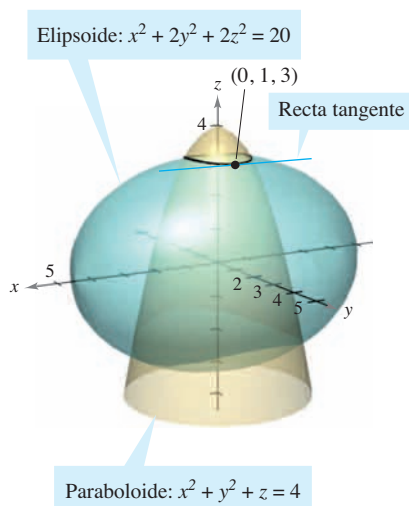


Figura 13.61

EJEMPLO 6 Hallar el ángulo de inclinación de un plano tangente

Hallar el ángulo de inclinación del plano tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$$

en el punto (2, 2, 1).

Solución Si se hace

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} - 1$$

el gradiente de F en el punto (2, 2, 1) está dado por

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{x}{6}\mathbf{i} + \frac{y}{6}\mathbf{j} + \frac{2z}{3}\mathbf{k}$$

$$\nabla F(2, 2, 1) = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Como $\nabla F(2, 2, 1)$ es normal al plano tangente y \mathbf{k} es normal al plano xy , se sigue que el ángulo de inclinación del plano tangente está dado por

$$\cos \theta = \frac{|\nabla F(2, 2, 1) \cdot \mathbf{k}|}{\|\nabla F(2, 2, 1)\|} = \frac{2/3}{\sqrt{(1/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

lo cual implica que

$$\theta = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35.3^\circ,$$

como se muestra en la figura 13.63.

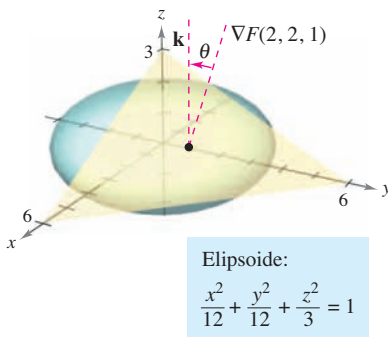


Figura 13.63

NOTA Un caso especial del procedimiento mostrado en el ejemplo 6 merece mención especial. El ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0, z_0) está dado por

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2 + 1}}.$$

Fórmula alternativa para el ángulo de inclinación (ver ejercicio 77). ■

Comparación de los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$

Esta sección concluye con una comparación de los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$. En la sección anterior se vio que el gradiente de una función f de dos variables es normal a las curvas de nivel de f . Específicamente, el teorema 13.12 establece que si f es diferenciable en (x_0, y_0) y $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0) . Habiendo desarrollado rectas normales a superficies, ahora se puede extender este resultado a una función de tres variables. La demostración del teorema 13.14 se deja como un ejercicio (ver ejercicio 78).

TEOREMA 13.14 EL GRADIENTE ES NORMAL A LAS SUPERFICIES DE NIVEL

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel que pasa por (x_0, y_0, z_0) .

Al trabajar con los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$, hay que recordar que $\nabla f(x, y)$ es un vector en el plano xy y $\nabla F(x, y, z)$ es un vector en el espacio.

13.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, describir la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$.

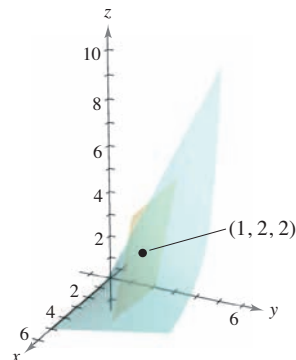
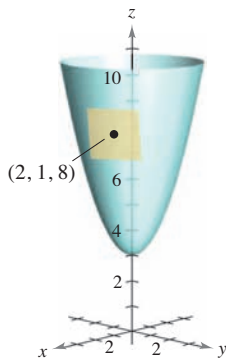
- $F(x, y, z) = 3x - 5y + 3z - 15$
- $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$
- $F(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 - 4z^2$
- $F(x, y, z) = 16x^2 - 9y^2 + 36z$

En los ejercicios 5 a 16, hallar un vector unitario normal a la superficie en el punto dado. [Sugerencia: Normalizar el vector gradiente $\nabla F(x, y, z)$.]

Superficie	Punto
5. $3x + 4y + 12z = 0$	(0, 0, 0)
6. $x + y + z = 4$	(2, 0, 2)
7. $x^2 + y^2 + z^2 = 6$	(1, 1, 2)
8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$	(3, 4, 5)
9. $z = x^3$	(2, -1, 8)
10. $x^2y^4 - z = 0$	(1, 2, 16)
11. $x^2 + 3y + z^3 = 9$	(2, -1, 2)
12. $x^2y^3 - y^2z + 2xz^3 = 4$	(-1, 1, -1)
13. $\ln\left(\frac{x}{y-z}\right) = 0$	(1, 4, 3)
14. $ze^{x^2-y^2} - 3 = 0$	(2, 2, 3)
15. $z - x \sin y = 4$	$\left(6, \frac{\pi}{6}, 7\right)$
16. $\sin(x - y) - z = 2$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$

En los ejercicios 17 a 30, hallar una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto dado.

- $z = x^2 + y^2 + 3$ (2, 1, 8)
- $f(x, y) = \frac{y}{x}$ (1, 2, 2)



- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, (3, 4, 5)
- $g(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$, (1, 0, 0)
- $g(x, y) = x^2 + y^2$, (1, -1, 2)

- $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$, (1, 2, 1)
- $z = 2 - \frac{2}{3}x - y$, (3, -1, 1)
- $z = e^x(\sin y + 1)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}, 2\right)$
- $h(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, (3, 4, $\ln 5$)
- $h(x, y) = \cos y$, $\left(5, \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$, (2, -2, 4)
- $x^2 + 2z^2 = y^2$, (1, 3, -2)
- $xy^2 + 3x - z^2 = 8$, (1, -3, 2)
- $x = y(2z - 3)$, (4, 4, 2)

En los ejercicios 31 a 40, hallar una ecuación del plano tangente y hallar ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie en el punto dado.

- $x + y + z = 9$, (3, 3, 3)
- $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, (1, 2, 2)
- $x^2 + y^2 + z = 9$, (1, 2, 4)
- $z = 16 - x^2 - y^2$, (2, 2, 8)
- $z = x^2 - y^2$, (3, 2, 5)
- $xy - z = 0$, (-2, -3, 6)
- $xyz = 10$, (1, 2, 5)
- $z = ye^{2xy}$, (0, 2, 2)
- $z = \arctan \frac{y}{x}$, $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$
- $y \ln xz^2 = 2$, (e, 2, 1)

En los ejercicios 41 a 46, a) encontrar ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto dado, y b) encontrar el coseno del ángulo entre los vectores gradiente en este punto. Establecer si son ortogonales o no las superficies en el punto de intersección.

- $x^2 + y^2 = 2$, $z = x$, (1, 1, 1)
- $z = x^2 + y^2$, $z = 4 - y$, (2, -1, 5)
- $x^2 + z^2 = 25$, $y^2 + z^2 = 25$, (3, 3, 4)
- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $5x - 2y + 3z = 22$, (3, 4, 5)
- $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x - y - z = 0$, (3, 1, 2)
- $z = x^2 + y^2$, $x + y + 6z = 33$, (1, 2, 5)

En los ejercicios 47 a 50, encontrar el ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie en el punto dado.

- $3x^2 + 2y^2 - z = 15$, (2, 2, 5)
- $2xy - z^3 = 0$, (2, 2, 2)
- $x^2 - y^2 + z = 0$, (1, 2, 3)
- $x^2 + y^2 = 5$, (2, 1, 3)

En los ejercicios 51 a 56, encontrar el (los) punto(s) sobre la superficie en la cual el plano tangente es horizontal.

- 51. $z = 3 - x^2 - y^2 + 6y$
- 52. $z = 3x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 5$
- 53. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y$
- 54. $z = 4x^2 + 4xy - 2y^2 + 8x - 5y - 4$
- 55. $z = 5xy$
- 56. $z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

En los ejercicios 57 y 58, demostrar que las superficies son tangentes a cada una en el punto dado para demostrar que las superficies tienen el mismo plano tangente en este punto.

- 57. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 3, x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 10y + 14 = 0,$
 $(-1, 1, 0)$
- 58. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 12y + 4z + 42 = 0, x^2 + y^2 + 2z = 7,$
 $(2, 3, -3)$

En los ejercicios 59 y 60, a) demostrar que las superficies intersecan en el punto dado y b) demostrar que las superficies tienen planos tangentes perpendiculares en este punto.

- 59. $z = 2xy^2, 8x^2 - 5y^2 - 8z = -13, (1, 1, 2)$
- 60. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 12 = 0,$
 $4x^2 + y^2 + 16z^2 = 24, (1, -2, 1)$
- 61. Encontrar un punto sobre el elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$ donde el plano tangente es perpendicular a la recta con ecuaciones paramétricas
 $x = 2 - 4t, y = 1 + 8t \quad y \quad z = 3 - 2t.$
- 62. Encontrar un punto sobre el hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano $x + 4y - z = 0.$

Desarrollo de conceptos

- 63. Dar la forma estándar de la ecuación del plano tangente a una superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en $(x_0, y_0, z_0).$
- 64. En algunas superficies, las rectas normales en cualquier punto pasan por el mismo objeto geométrico. ¿Cuál es el objeto geométrico común en una esfera? ¿Cuál es el objeto geométrico común en un cilindro circular recto? Explicar.
- 65. Analizar la relación entre el plano tangente a una superficie y la aproximación por diferenciales.

Para discusión

- 66. Considerar el cono elíptico dado por
 $x^2 - y^2 + z^2 = 0.$
 - a) Encontrar una ecuación del plano tangente en el punto $(5, 13, -12).$
 - b) Encontrar ecuaciones simétricas de la superficie normal en el punto $(5, 13, -12).$

67. **Investigación** Considerar la función

$$f(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$$

en los intervalos $-2 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 3.$

- a) Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta normal y una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1, 1, 1).$
- b) Repetir el inciso a) con el punto $(-1, 2, -\frac{4}{5}).$

CAS c) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie, las rectas normales y los planos tangentes encontrados en los incisos a) y b).

68. **Investigación** Considerar la función

$$f(x, y) = \frac{\text{sen } y}{x}$$

en los intervalos $-3 \leq x \leq 3$ y $0 \leq y \leq 2\pi.$

- a) Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta normal y una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto

$$\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

- b) Repetir el inciso a) con el punto $\left(-\frac{2}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3}{2}\right).$

CAS c) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie, las rectas normales y los planos tangentes calculados en los incisos a) y b).

69. Considerar las funciones

$$f(x, y) = 6 - x^2 - y^2/4 \quad y \quad g(x, y) = 2x + y.$$

- a) Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto $(1, 2, 4),$ y hallar el ángulo entre los vectores gradientes.

CAS b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente las superficies. Representar gráficamente la recta tangente obtenida en el inciso a).

70. Considerar las funciones

$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 + 2x - 4y}$$

y

$$g(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - 3x^2 + y^2 + 6x + 4y}.$$

CAS a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la porción del primer octante de las superficies representadas por f y $g.$

- b) Hallar un punto en el primer octante sobre la curva intersección y mostrar que las superficies son ortogonales en este punto.

c) Estas superficies son ortogonales a lo largo de la curva intersección. ¿Demuestra este hecho el inciso b)? Explicar.

En los ejercicios 71 y 72, probar que el plano tangente a la superficie cuádrica en el punto (x_0, y_0, z_0) puede expresarse en la forma dada.

71. Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Plano: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$

72. Hiperboloide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Plano: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 1$

73. Demostrar que todo plano tangente al cono

$$z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

pasa por el origen.

74. Sea f una función derivable y considérese la superficie $z = xf(y/x)$. Mostrar que el plano tangente a cualquier punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie pasa por el origen.

75. **Aproximación** Considerar las aproximaciones siguientes para una función $f(x, y)$ centrada en $(0, 0)$.

Aproximación lineal:

$$P_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

Aproximación cuadrática:

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2$$

[Observar que la aproximación lineal es el plano tangente a la superficie en $(0, 0, f(0, 0))$.]

- Hallar la aproximación lineal a $f(x, y) = e^{(x-y)}$ centrada en $(0, 0)$.
- Hallar la aproximación cuadrática a $f(x, y) = e^{(x-y)}$ centrada en $(0, 0)$.
- Si $x = 0$ en la aproximación cuadrática, ¿para qué función se obtiene el polinomio de Taylor de segundo orden? Responder la misma pregunta para $y = 0$.
- Completar la tabla.

x	y	$f(x, y)$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0			
0	0.1			
0.2	0.1			
0.2	0.5			
1	0.5			

CAS e) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente las superficies $z = f(x, y)$, $z = P_1(x, y)$ y $z = P_2(x, y)$.

76. **Aproximación** Repetir el ejercicio 75 con la función $f(x, y) = \cos(x + y)$.

77. Demostrar que el ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) está dado por

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2 + 1}}$$

78. Demostrar el teorema 13.14.

PROYECTO DE TRABAJO

Flora silvestre

La diversidad de la flora silvestre en una pradera se puede medir contando el número de margaritas, lirios, amapolas, etc. Si existen n tipos de flores silvestres, cada una en una proporción p_i respecto a la población total, se sigue que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. La medida de diversidad de la población se define como

$$H = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i.$$

En esta definición, se entiende que $p_i \log_2 p_i = 0$ cuando $p_i = 0$. Las tablas muestran las proporciones de flores silvestres en una pradera en mayo, junio, agosto y septiembre.

Mayo

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$

Junio

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Agosto

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Septiembre

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	0	0	0	1

- Determinar la diversidad de flores silvestres durante cada mes. ¿Cómo se interpretaría la diversidad en septiembre? ¿Qué mes tiene mayor diversidad?
- Si la pradera contiene 10 tipos de flores silvestres en proporciones aproximadamente iguales, la diversidad de la población ¿es mayor o menor que la diversidad de una distribución similar con 4 tipos de flores? ¿Qué tipo de distribución (de 10 tipos de flores silvestres) produciría la diversidad máxima?
- Sea H_n la diversidad máxima de n tipos de flores silvestres. ¿Tiende H_n a algún límite cuando $n \rightarrow \infty$?

PARA MAYOR INFORMACIÓN Los biólogos utilizan el concepto de diversidad para medir las proporciones de diferentes tipos de organismos dentro de un medio ambiente. Para más información sobre esta técnica, ver el artículo "Information Theory and Biological Diversity" de Steven Kolmes y Kevin Mitchell en la *UMAP Modules*.

13.8 Extremos de funciones de dos variables

- Hallar extremos absolutos y relativos de una función de dos variables.
- Utilizar el criterio de las segundas derivadas parciales para hallar un extremo relativo de una función de dos variables.

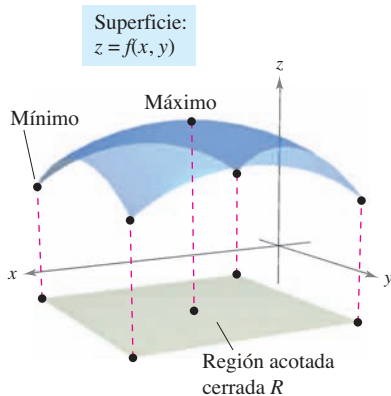
Extremos absolutos y extremos relativos

En el capítulo 3 se estudiaron las técnicas para hallar valores extremos de una función de una (sola) variable. En esta sección se extienden estas técnicas a funciones de dos variables. Por ejemplo, en el teorema 13.15 se extiende el teorema del valor extremo para una función de una sola variable a una función de dos variables.

Considérese la función continua f de dos variables, definida en una región acotada cerrada R . Los valores $f(a, b)$ y $f(c, d)$ tales que

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d) \quad (a, b) \text{ y } (c, d) \text{ están en } R.$$

para todo (x, y) en R se conocen como el **mínimo** y **máximo** de f en la región R , como se muestra en la figura 13.64. Recuérdese de la sección 13.2 que una región en el plano es *cerrada* si contiene todos sus puntos frontera. El teorema del valor extremo se refiere a una región en el plano que es cerrada y *acotada*. A una región en el plano se le llama **acotada** si es una subregión de un disco cerrado en el plano.



R contiene algún(os) punto(s) donde $f(x, y)$ es un mínimo y algún(os) punto(s) donde $f(x, y)$ es un máximo

Figura 13.64

TEOREMA 13.15 TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

Sea f una función continua de dos variables x y y definida en una región acotada cerrada R en el plano xy .

1. Existe por lo menos un punto en R , en el que f toma un valor mínimo.
2. Existe por lo menos un punto en R , en el que f toma un valor máximo.

A un mínimo también se le llama un **mínimo absoluto** y a un máximo también se le llama un **máximo absoluto**. Como en el cálculo de una variable, se hace una distinción entre extremos absolutos y **extremos relativos**.

DEFINICIÓN DE EXTREMOS RELATIVOS

Sea f una función definida en una región R que contiene (x_0, y_0) .

1. La función f tiene un **mínimo relativo** en (x_0, y_0) si

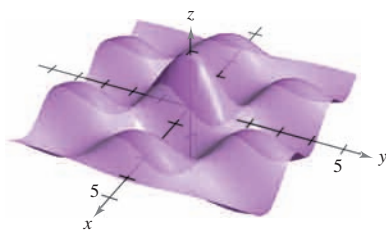
$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

para todo (x, y) en un disco *abierto* que contiene (x_0, y_0) .

2. La función f tiene un **máximo relativo** en (x_0, y_0) si

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

para todo (x, y) en un disco *abierto* que contiene (x_0, y_0) .



Extremos relativos
Figura 13.65

Decir que f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0) significa que el punto (x_0, y_0, z_0) es por lo menos tan alto como todos los puntos cercanos en la gráfica de $z = f(x, y)$. De manera similar, f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0) si (x_0, y_0, z_0) es por lo menos tan bajo como todos los puntos cercanos en la gráfica. (Ver la figura 13.65.)



The Granger Collection

KARL WEIERSTRASS (1815-1897)

Aunque el teorema del valor extremo había sido ya utilizado antes por los matemáticos, el primero en proporcionar una demostración rigurosa fue el matemático alemán Karl Weierstrass. Weierstrass también proporcionó justificaciones rigurosas para muchos otros resultados matemáticos ya de uso común. A él se deben muchos de los fundamentos lógicos sobre los cuales se basa el cálculo moderno.

Para localizar los extremos relativos de f , se pueden investigar los puntos en los que el gradiente de f es $\mathbf{0}$ o los puntos en los cuales una de las derivadas parciales no exista. Tales puntos se llaman **puntos críticos** de f .

DEFINICIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

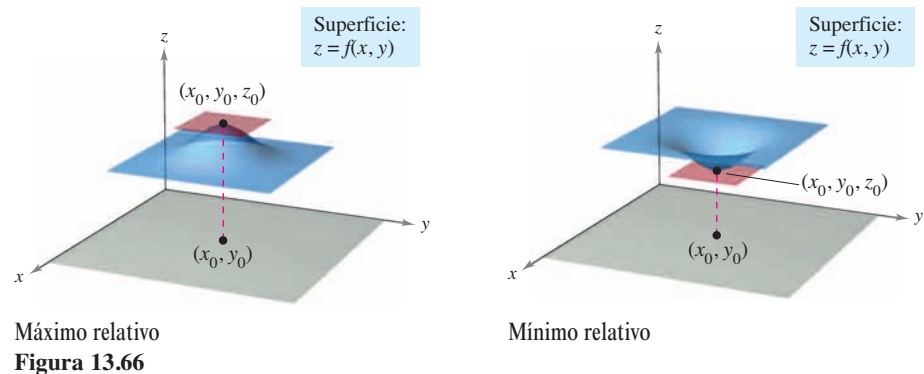
Sea f definida en una región abierta R que contiene (x_0, y_0) . El punto (x_0, y_0) es un **punto crítico** de f si se satisface una de las condiciones siguientes:

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$
2. $f_x(x_0, y_0)$ o $f_y(x_0, y_0)$ no existe.

Recuérdese del teorema 13.11 que si f es diferenciable y

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} \\ &= \mathbf{0}\mathbf{i} + \mathbf{0}\mathbf{j}\end{aligned}$$

entonces toda derivada direccional en (x_0, y_0) debe ser 0. Esto implica que la función tiene un plano tangente horizontal al punto (x_0, y_0) , como se muestra en la figura 13.66. Al parecer, tal punto es una localización probable para un extremo relativo. Esto es ratificado por el teorema 13.16.



Máximo relativo

Figura 13.66

Mínimo relativo

TEOREMA 13.16 LOS EXTREMOS RELATIVOS SE PRESENTAN SÓLO EN PUNTOS CRÍTICOS

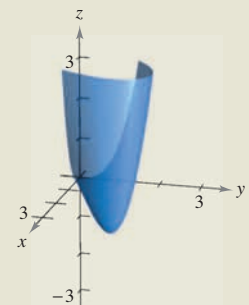
Si f tiene un extremo relativo en (x_0, y_0) en una región abierta R , entonces (x_0, y_0) es un punto crítico de f .

EXPLORACIÓN

Utilizar una herramienta de graficación para representar

$$z = x^3 - 3xy + y^3$$

usando las cotas $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$ y $-3 \leq z \leq 3$. Esta vista parece sugerir que la superficie tuviera un mínimo absoluto. Pero, ¿lo tiene?



EJEMPLO 1 Hallar un extremo relativo

Hallar los extremos relativos de

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20.$$

Solución Para comenzar, encontrar los puntos críticos de f . Como

$$f_x(x, y) = 4x + 8 \quad \text{Derivada parcial con respecto a } x.$$

y

$$f_y(x, y) = 2y - 6 \quad \text{Derivada parcial con respecto a } y.$$

están definidas para todo x y y , los únicos puntos críticos son aquellos en los cuales las derivadas parciales de primer orden son 0. Para localizar estos puntos, se hacen $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ igual a 0, y se resuelven las ecuaciones

$$4x + 8 = 0 \quad y \quad 2y - 6 = 0$$

para obtener el punto crítico $(-2, 3)$. Completando cuadrados, se concluye que para todo $(x, y) \neq (-2, 3)$

$$f(x, y) = 2(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 3 > 3.$$

Por tanto, un *mínimo* relativo de f se encuentra en $(-2, 3)$. El valor del mínimo relativo es $f(-2, 3) = 3$, como se muestra en la figura 13.67.

El ejemplo 1 muestra un mínimo relativo que se presenta en un tipo de punto crítico; el tipo en el cual ambos $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son 0. En el siguiente ejemplo se presenta un máximo relativo asociado al otro tipo de punto crítico; el tipo en el cual $f_x(x, y)$ o $f_y(x, y)$ no existe.

EJEMPLO 2 Hallar un extremo relativo

Determinar los extremos relativos de $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3}$.

Solución Como

$$f_x(x, y) = -\frac{2x}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \quad \text{Derivada parcial con respecto a } x.$$

y

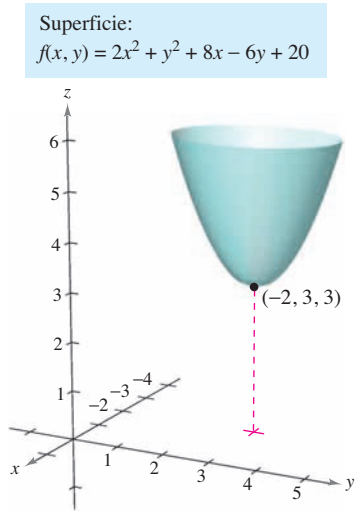
$$f_y(x, y) = -\frac{2y}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \quad \text{Derivada parcial con respecto a } y.$$

se sigue que ambas derivadas parciales existen para todo punto en el plano xy salvo para $(0, 0)$. Como las derivadas parciales no pueden ser ambas 0 a menos que x y y sean 0, se concluye que $(0, 0)$ es el único punto crítico. En la figura 13.68 se observa que $f(0, 0)$ es 1. Para cualquier otro (x, y) es claro que

$$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3} < 1.$$

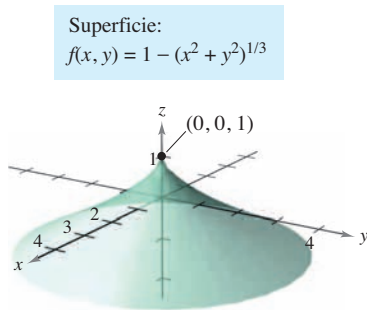
Por tanto, f tiene un *máximo* relativo en $(0, 0)$.

NOTA En el ejemplo 2, $f_x(x, y) = 0$ para todo punto distinto de $(0, 0)$ en el eje y . Sin embargo, como $f_y(x, y)$ no es cero, éstos no son puntos críticos. Recuérdese que *una* de las derivadas parciales debe no existir o *las dos* deben ser 0 para tener un punto crítico.



La función $z = f(x, y)$ tiene un mínimo relativo en $(-2, 3)$

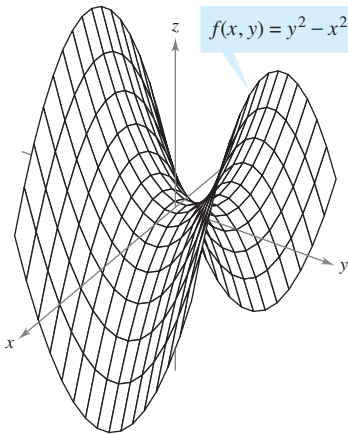
Figura 13.67



$f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ están indefinidas en $(0, 0)$

Figura 13.68

El criterio de las segundas derivadas parciales



Punto silla en $(0, 0, 0)$:
 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$

Figura 13.69

El teorema 13.16 afirma que para encontrar extremos relativos sólo se necesita examinar los valores de $f(x, y)$ en los puntos críticos. Sin embargo, como sucede con una función de una variable, los puntos críticos de una función de dos variables no siempre son máximos o mínimos relativos. Algunos puntos críticos dan **puntos silla** que no son ni máximos relativos ni mínimos relativos.

Como ejemplo de un punto crítico que no es un extremo relativo, considérese la superficie dada por

$$f(x, y) = y^2 - x^2 \quad \text{Paraboloide hiperbólico.}$$

que se muestra en la figura 13.69. En el punto $(0, 0)$, ambas derivadas parciales son 0. Sin embargo, la función f no tiene un extremo relativo en este punto ya que en todo disco abierto centrado en $(0, 0)$ la función asume valores negativos (a lo largo del eje x) y valores positivos (a lo largo del eje y). Por tanto, el punto $(0, 0, 0)$ es un punto silla de la superficie. (El término “punto silla” viene del hecho de que la superficie mostrada en la figura 13.69 se parece a una silla de montar.)

En las funciones de los ejemplos 1 y 2, fue relativamente fácil determinar los extremos relativos, porque cada una de las funciones estaba dada, o se podía expresar, en forma de cuadrado perfecto. Con funciones más complicadas, los argumentos algebraicos son menos adecuados y es mejor emplear los medios analíticos presentados en el siguiente criterio de las segundas derivadas parciales. Es el análogo, para funciones de dos variables, del criterio de las segundas derivadas para las funciones de una variable. La demostración de este teorema se deja para un curso de cálculo avanzado.

TEOREMA 13.17 CRITERIO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES

Sea f una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene un punto (a, b) para el cual

$$f_x(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(a, b) = 0.$$

Para buscar los extremos relativos de f , considérese la cantidad

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2.$$

1. Si $d > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces f tiene un **mínimo relativo** en (a, b) .
2. Si $d > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces f tiene un **máximo relativo** en (a, b) .
3. Si $d < 0$, entonces $(a, b, f(a, b))$ es un **punto silla**.
4. Si $d = 0$ el criterio no lleva a ninguna conclusión.

NOTA Si $d > 0$, entonces $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ deben tener el mismo signo. Esto significa que $f_{xx}(a, b)$ puede sustituirse por $f_{yy}(a, b)$ en las dos primeras partes del criterio. ■

Un recurso conveniente para recordar la fórmula de d en el criterio de las segundas derivadas parciales lo da el determinante 2×2

$$d = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

donde $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ de acuerdo al teorema 13.3.

EJEMPLO 3 Aplicación del criterio de las segundas derivadas parciales

Identificar los extremos relativos de $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Solución Para comenzar, se identifican los puntos críticos de f . Como

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 4y \quad y \quad f_y(x, y) = 4x - 4y$$

existen para todo x y y , los únicos puntos críticos son aquellos en los que ambas derivadas parciales de primer orden son 0. Para localizar estos puntos, se igualan a 0 $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ y se obtiene $-3x^2 + 4y = 0$ y $4x - 4y = 0$. De la segunda ecuación se sabe que $x = y$, y por sustitución en la primera ecuación, se obtienen dos soluciones: $y = x = 0$ y $y = x = \frac{4}{3}$. Como

$$f_{xx}(x, y) = -6x, \quad f_{yy}(x, y) = -4 \quad y \quad f_{xy}(x, y) = 4$$

se sigue que, para el punto crítico $(0, 0)$,

$$d = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 = 0 - 16 < 0$$

y, por el criterio de las segundas derivadas parciales, se puede concluir que $(0, 0, 1)$ es un punto silla. Para el punto crítico $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$,

$$\begin{aligned} d &= f_{xx}(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})f_{yy}(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) - [f_{xy}(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})]^2 \\ &= -8(-4) - 16 \\ &= 16 \\ &> 0 \end{aligned}$$

y como $f_{xx}(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = -8 < 0$ se concluye que f tiene un máximo relativo en $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, como se muestra en la figura 13.70.

Con el criterio de las segundas derivadas parciales pueden no hallarse los extremos relativos por dos razones. Si alguna de las primeras derivadas parciales no existe, no se puede aplicar el criterio. Si

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 = 0$$

el criterio no es concluyente. En tales casos, se pueden tratar de hallar los extremos mediante la gráfica o mediante algún otro método, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Cuando el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente

Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = x^2y^2$.

Solución Como $f_x(x, y) = 2xy^2$ y $f_y(x, y) = 2x^2y$, se sabe que ambas derivadas parciales son igual a 0 si $x = 0$ o $y = 0$. Es decir, todo punto del eje x o del eje y es un punto crítico. Como

$$f_{xx}(x, y) = 2y^2, \quad f_{yy}(x, y) = 2x^2 \quad y \quad f_{xy}(x, y) = 4xy$$

se sabe que si $x = 0$ o $y = 0$, entonces

$$\begin{aligned} d &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 \\ &= 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = -12x^2y^2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente, no funciona. Sin embargo, como $f(x, y) = 0$ para todo punto en los ejes x o y y $f(x, y) = x^2y^2 > 0$ en todos los otros puntos, se puede concluir que cada uno de estos puntos críticos son un mínimo absoluto, como se muestra en la figura 13.71.

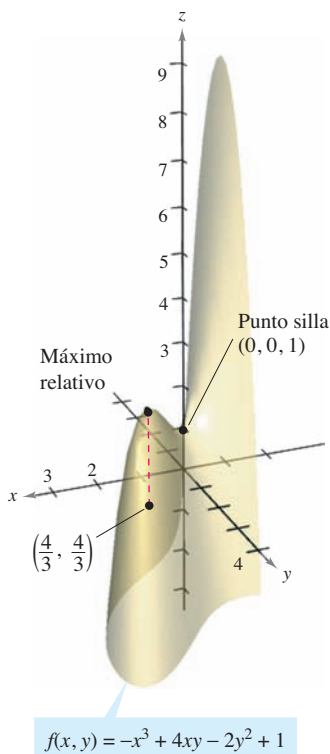


Figura 13.70

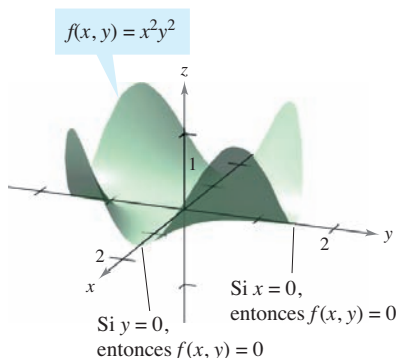


Figura 13.71

Los extremos absolutos de una función se pueden presentar de dos maneras. Primero, algunos extremos relativos también resultan ser extremos absolutos. Así, en el ejemplo 1, $f(-2, 3)$ es un mínimo absoluto de la función. (Por otro lado, el máximo relativo encontrado en el ejemplo 3 no es un máximo absoluto de la función.) Segundo, los extremos absolutos pueden presentarse en un punto frontera del dominio. Esto se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Encontrar extremos absolutos

Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen} xy$$

en la región cerrada dada por $0 \leq x \leq \pi$ y $0 \leq y \leq 1$.

Solución La expresión de las derivadas parciales

$$f_x(x, y) = y \cos xy \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = x \cos xy$$

permite ver que todo punto en la hipérbola dada por $xy = \pi/2$ es un punto crítico. En todos estos puntos el valor de f es

$$f(x, y) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

el cual se sabe que es el máximo absoluto, como se muestra en la figura 13.72. El otro punto crítico de f que se encuentra en la región dada es $(0, 0)$. Este punto da un mínimo absoluto de 0, ya que

$$0 \leq xy \leq \pi$$

implica que

$$0 \leq \operatorname{sen} xy \leq 1.$$

Para localizar otros extremos absolutos se deben considerar las cuatro fronteras de la región formadas por las trazas, de los planos verticales $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ y $y = 1$. Al hacer esto, se encuentra que $\operatorname{sen} xy = 0$ en todos los puntos del eje x , en todos los puntos del eje y y en el punto $(\pi, 1)$. Cada uno de estos puntos es un mínimo absoluto de la superficie, como se muestra en la figura 13.72.

Los conceptos de extremos relativos y puntos críticos pueden extenderse a funciones de tres o más variables. Si todas las primeras derivadas parciales de

$$w = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

existen, puede mostrarse que se presenta un máximo o un mínimo relativo en $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ sólo si cada una de las primeras derivadas parciales en ese punto es 0. Esto significa que los puntos críticos se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ f_{x_2}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

La extensión del teorema 13.17 a tres o más variables también es posible, aunque no se considerará en este texto.

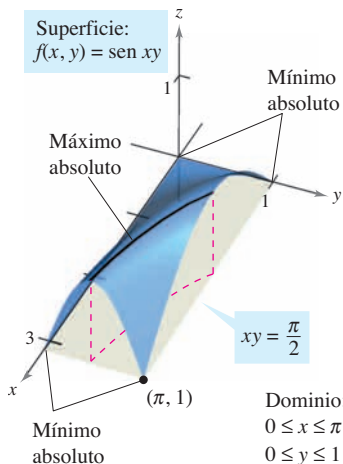


Figura 13.72

13.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, identificar los extremos de la función reconociendo su forma dada o su forma después de completar cuadrados. Verificar los resultados empleando derivadas parciales para localizar los puntos críticos y probar si son extremos relativos.

1. $g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2$
2. $g(x, y) = 5 - (x - 3)^2 - (y + 2)^2$
3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$
4. $f(x, y) = \sqrt{25 - (x - 2)^2 - y^2}$
5. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6$
6. $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 10x + 12y - 64$

En los ejercicios 7 a 16, examinar la función para localizar los extremos relativos.

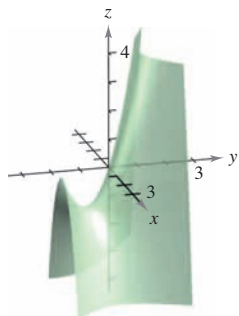
7. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 16$
8. $f(x, y) = -3x^2 - 2y^2 + 3x - 4y + 5$
9. $f(x, y) = -x^2 - 5y^2 + 10x - 10y - 28$
10. $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$
11. $z = x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 - 2x + y$
12. $z = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$
13. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
14. $h(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3} + 2$
15. $g(x, y) = 4 - |x| - |y|$
16. $f(x, y) = |x + y| - 2$

CAS En los ejercicios 17 a 20, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar la superficie y localizar los extremos relativos y los puntos silla.

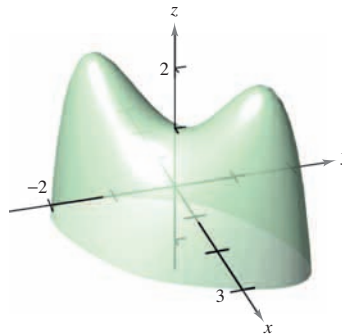
17. $z = \frac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$
18. $f(x, y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$
19. $z = (x^2 + 4y^2)e^{1-x^2-y^2}$
20. $z = e^{xy}$

En los ejercicios 21 a 28, examinar la función para localizar los extremos relativos y los puntos silla.

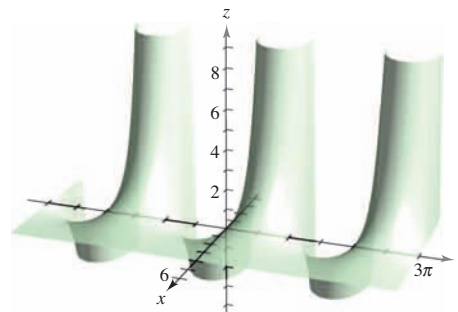
21. $h(x, y) = 80x + 80y - x^2 - y^2$
22. $g(x, y) = x^2 - y^2 - x - y$
23. $g(x, y) = xy$
24. $h(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$
25. $f(x, y) = x^2 - xy - y^2 - 3x - y$



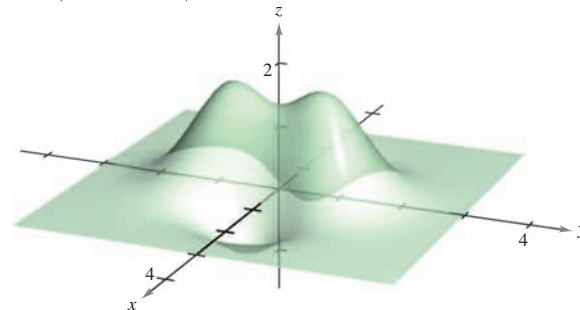
26. $f(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}(x^4 + y^4) + 1$



27. $z = e^{-x} \sin y$



28. $z = \left(\frac{1}{2} - x^2 + y^2\right)e^{1-x^2-y^2}$



CAS En los ejercicios 29 y 30, buscar los extremos de la función sin utilizar los criterios de la derivada. Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie. (Sugerencia: Por observación, determinar si es posible que z sea negativo. ¿Cuándo z es igual a 0?)

29. $z = \frac{(x - y)^4}{x^2 + y^2}$

30. $z = \frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2}$

Para pensar En los ejercicios 31 a 34, determinar si hay un máximo relativo, un mínimo relativo, un punto silla, o si la información es insuficiente para determinar la naturaleza de la función $f(x, y)$ en el punto crítico (x_0, y_0) .

31. $f_{xx}(x_0, y_0) = 9, f_{yy}(x_0, y_0) = 4, f_{xy}(x_0, y_0) = 6$
32. $f_{xx}(x_0, y_0) = -3, f_{yy}(x_0, y_0) = -8, f_{xy}(x_0, y_0) = 2$
33. $f_{xx}(x_0, y_0) = -9, f_{yy}(x_0, y_0) = 6, f_{xy}(x_0, y_0) = 10$
34. $f_{xx}(x_0, y_0) = 25, f_{yy}(x_0, y_0) = 8, f_{xy}(x_0, y_0) = 10$

35. Una función f tiene segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene el punto crítico $(3, 7)$. La función tiene un mínimo en $(3, 7)$ y $d > 0$ para el criterio de las segundas derivadas parciales. Determinar el intervalo para $f_{xy}(3, 7)$ si $f_{xx}(3, 7) = 2$ y $f_{yy}(3, 7) = 8$.
36. Una función f tiene segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene el punto crítico (a, b) . Si $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ tiene signos opuestos, ¿qué implica esto? Explicar.

CAS En los ejercicios 37 a 42, a) hallar los puntos críticos, b) determinar los extremos relativos, c) indicar los puntos críticos en los cuales el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente, y d) usar un sistema algebraico por computadora para trazar la función, clasificando cualesquiera puntos extremos y puntos silla.

37. $f(x, y) = x^3 + y^3$
 38. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x^2 + 9y^2 + 12x + 27y + 19$
 39. $f(x, y) = (x - 1)^2(y + 4)^2$
 40. $f(x, y) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}$
 41. $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3}$ 42. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$

En los ejercicios 43 y 44, hallar los puntos críticos de la función y , por la forma de la función, determinar si se presenta un máximo o un mínimo relativo en cada punto.

43. $f(x, y, z) = x^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2$
 44. $f(x, y, z) = 9 - [x(y - 1)(z + 2)]^2$

En los ejercicios 45 a 54, hallar los extremos absolutos de la función en la región R . (En cada caso, R contiene sus puntos frontera.) Utilizar un sistema algebraico por computadora y confirmar los resultados.

45. $f(x, y) = x^2 - 4xy + 5$
 $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$
46. $f(x, y) = x^2 + xy$, $R = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$
47. $f(x, y) = 12 - 3x - 2y$
 R : La región triangular en el plano xy con vértices $(2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 2)$
48. $f(x, y) = (2x - y)^2$
 R : La región triangular en el plano xy con vértices $(2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 2)$
49. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y$
 R : La región en el plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 4$
50. $f(x, y) = 2x - 2xy + y^2$
 R : La región en el plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 1$
51. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, $R = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$
52. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 8\}$
53. $f(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$
 $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
54. $f(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$
 $R = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

Desarrollo de conceptos

55. La figura muestra las curvas de nivel de una función desconocida $f(x, y)$. ¿Qué información, si es que hay alguna, puede darse acerca de f en el punto A ? Explicar el razonamiento.

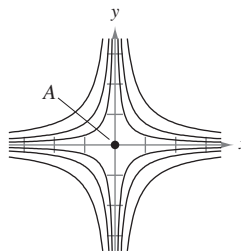


Figura para 55

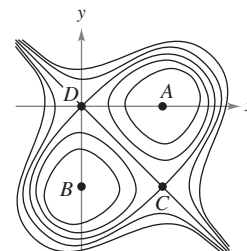


Figura para 56

56. La figura muestra las curvas de nivel de una función desconocida $f(x, y)$. ¿Qué información, si es que hay alguna, puede darse acerca de f en los puntos A , B , C y D ? Explicar el razonamiento.

En los ejercicios 57 a 59, dibujar la gráfica de una función arbitraria f que satisfaga las condiciones dadas. Decir si la función tiene extremos o puntos silla. (Hay muchas respuestas correctas.)

57. $f_x(x, y) > 0$ y $f_y(x, y) < 0$ para todo (x, y) .
 58. Todas las primeras y segundas derivadas parciales de f son 0.
 59. $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$

$$f_x(x, y) \begin{cases} < 0, & x < 0 \\ > 0, & x > 0 \end{cases}, \quad f_y(x, y) \begin{cases} > 0, & y < 0 \\ < 0, & y > 0 \end{cases}$$

$$f_{xx}(x, y) > 0, f_{yy}(x, y) < 0 \text{ y } f_{xy}(x, y) = 0 \text{ para todo } (x, y).$$

Para discusión

60. Considerar las funciones
 $f(x, y) = x^2 - y^2$ y $g(x, y) = x^2 + y^2$.
 a) Demostrar que ambas funciones tienen un punto crítico en $(0, 0)$.
 b) Explicar cómo f y g se comportan de manera diferente en este punto crítico.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 61 a 64, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.

61. Si f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0, z_0) , entonces $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.
 62. Si $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, entonces f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0, z_0) .
 63. Entre cualesquiera dos mínimos relativos de f , aquí debe estar al menos un máximo relativo de f .
 64. Si f es continua para todo x y y y tiene dos mínimos relativos, entonces f debe tener un máximo relativo por lo menos.

13.9 Aplicaciones de los extremos de funciones de dos variables

- Resolver problemas de optimización con funciones de varias variables.
- Utilizar el método de mínimos cuadrados.

Problemas de optimización aplicada

En esta sección se verán algunas de las muchas aplicaciones de los extremos de funciones de dos (o más) variables.

EJEMPLO 1 Hallar un volumen máximo

Una caja rectangular descansa en el plano xy con uno de sus vértices en el origen. El vértice opuesto está en el plano

$$6x + 4y + 3z = 24$$

como se muestra en la figura 13.73. Hallar el volumen máximo de la caja.

Solución Sean x , y y z el largo, ancho y la altura de la caja. Como un vértice de la caja se encuentra en el plano $6x + 4y + 3z = 24$, se sabe que $z = \frac{1}{3}(24 - 6x - 4y)$, y así se puede expresar el volumen xyz de la caja en función de dos variables.

$$\begin{aligned} V(x, y) &= (x)(y)\left[\frac{1}{3}(24 - 6x - 4y)\right] \\ &= \frac{1}{3}(24xy - 6x^2y - 4xy^2) \end{aligned}$$

Igualando a 0 las primeras derivadas parciales

$$V_x(x, y) = \frac{1}{3}(24y - 12xy - 4y^2) = \frac{y}{3}(24 - 12x - 4y) = 0$$

$$V_y(x, y) = \frac{1}{3}(24x - 6x^2 - 8xy) = \frac{x}{3}(24 - 6x - 8y) = 0$$

se obtienen los puntos críticos $(0, 0)$ y $(\frac{4}{3}, 2)$. En $(0, 0)$ el volumen es 0, así que ese punto no proporciona un volumen máximo. En el punto $(\frac{4}{3}, 2)$, se puede aplicar el criterio de las segundas derivadas parciales.

$$V_{xx}(x, y) = -4y$$

$$V_{yy}(x, y) = \frac{-8x}{3}$$

$$V_{xy}(x, y) = \frac{1}{3}(24 - 12x - 8y)$$

Como

$$V_{xx}(\frac{4}{3}, 2)V_{yy}(\frac{4}{3}, 2) - [V_{xy}(\frac{4}{3}, 2)]^2 = (-8)(-\frac{32}{9}) - (-\frac{8}{3})^2 = \frac{64}{3} > 0$$

y

$$V_{xx}(\frac{4}{3}, 2) = -8 < 0$$

se concluye de acuerdo con el criterio de las segundas derivadas parciales que el volumen máximo es

$$\begin{aligned} V(\frac{4}{3}, 2) &= \frac{1}{3}\left[24\left(\frac{4}{3}\right)(2) - 6\left(\frac{4}{3}\right)^2(2) - 4\left(\frac{4}{3}\right)(2^2)\right] \\ &= \frac{64}{9} \text{ unidades cúbicas.} \end{aligned}$$

Nótese que el volumen es 0 en los puntos frontera del dominio triangular de V .

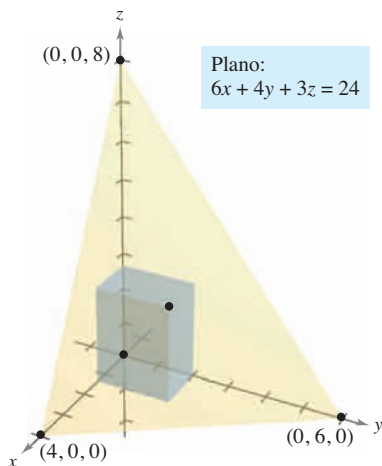


Figura 13.73

NOTA En muchos problemas prácticos, el dominio de la función a optimizar es una región acotada cerrada. Para encontrar los puntos mínimos o máximos, no sólo se deben probar los puntos críticos, sino también los valores de la función en los puntos frontera. ■

En las aplicaciones de los extremos a la economía y a los negocios a menudo se tiene más de una variable independiente. Por ejemplo, una empresa puede producir varios modelos de un mismo tipo de producto. El precio por unidad y la ganancia o beneficio por unidad de cada modelo son, por lo general, diferentes. La demanda de cada modelo es, a menudo, función de los precios de los otros modelos (así como su propio precio). El siguiente ejemplo ilustra una aplicación en la que hay dos productos.

EJEMPLO 2 Beneficio máximo

Un fabricante de artículos electrónicos determina que la ganancia o beneficio P (en dólares) obtenido al producir x unidades de un reproductor de DVD y y unidades de un grabador de DVD se aproxima mediante el modelo

$$P(x, y) = 8x + 10y - (0.001)(x^2 + xy + y^2) - 10\,000.$$

Hallar el nivel de producción que proporciona una ganancia o beneficio máximo. ¿Cuál es la ganancia máxima?

Solución Las derivadas parciales de la función de beneficio son

$$P_x(x, y) = 8 - (0.001)(2x + y) \quad y \quad P_y(x, y) = 10 - (0.001)(x + 2y).$$

Igualando estas derivadas parciales a 0, se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente.

$$8 - (0.001)(2x + y) = 0$$

$$10 - (0.001)(x + 2y) = 0$$

Después de simplificar, este sistema de ecuaciones lineales puede expresarse como

$$2x + y = 8\,000$$

$$x + 2y = 10\,000.$$

Resolviendo el sistema se obtiene $x = 2\,000$ y $y = 4\,000$. Las segundas derivadas parciales de P son

$$P_{xx}(2\,000, 4\,000) = -0.002$$

$$P_{yy}(2\,000, 4\,000) = -0.002$$

$$P_{xy}(2\,000, 4\,000) = -0.001.$$

Como $P_{xx} < 0$ y

$$\begin{aligned} P_{xx}(2\,000, 4\,000)P_{yy}(2\,000, 4\,000) - [P_{xy}(2\,000, 4\,000)]^2 = \\ (-0.002)^2 - (-0.001)^2 > 0 \end{aligned}$$

se concluye que el nivel de producción con $x = 2\,000$ unidades y $y = 4\,000$ unidades proporciona el beneficio *máximo*. El beneficio máximo es

$$\begin{aligned} P(2\,000, 4\,000) &= 8(2\,000) + 10(4\,000) - \\ &\quad (0.001)[2\,000^2 + 2\,000(4\,000) + 4\,000^2] - 10\,000 \\ &= \$18\,000. \end{aligned}$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN

Para más información sobre el uso de la matemática en la economía, ver el artículo “Mathematical Methods of Economics” de Joel Franklin en *The American Mathematical Monthly*.

NOTA En el ejemplo 2 se supuso que la planta industrial puede producir el número requerido de unidades para proporcionar el beneficio máximo. En la práctica, la producción estará limitada por restricciones físicas. En la sección siguiente se estudiarán tales problemas de optimización. ■

El método de mínimos cuadrados

En muchos de los ejemplos en este texto se han empleado **modelos matemáticos**, como en el caso del ejemplo 2, donde se utiliza un modelo cuadrático para el beneficio. Hay varias maneras para desarrollar tales modelos; una es la conocida como el **método de mínimos cuadrados**.

Al construir un modelo para representar un fenómeno particular, los objetivos son simplicidad y precisión. Por supuesto, estas metas entran a menudo en conflicto. Por ejemplo, un modelo lineal simple para los puntos en la figura 13.74 es

$$y = 1.8566x - 5.0246.$$

Sin embargo, la figura 13.75 muestra que si se elige el modelo cuadrático, ligeramente más complicado,* es

$$y = 0.1996x^2 - 0.7281x + 1.3749$$

se logra mayor precisión.

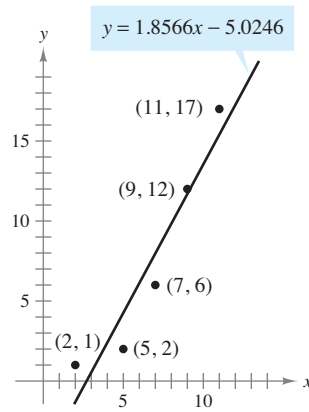


Figura 13.74

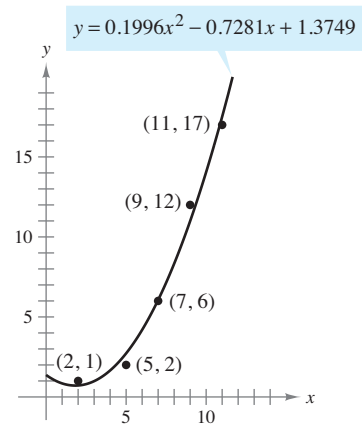


Figura 13.75

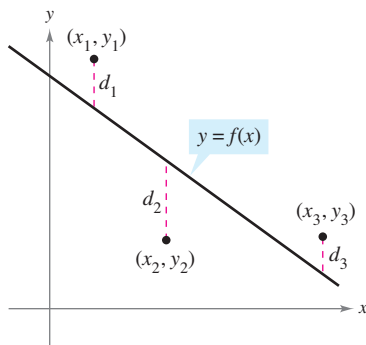
Como medida de qué tan bien se ajusta el modelo $y = f(x)$ a la colección de puntos

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)\}$$

se pueden sumar los cuadrados de las diferencias entre los valores reales y y los valores dados por el modelo para obtener la **suma de los cuadrados de los errores o errores cuadráticos**

$$S = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2.$$

Suma de los cuadrados de los errores o errores cuadráticos.



Suma de los cuadrados de los errores:
 $S = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$

Figura 13.76

Gráficamente, S puede interpretarse como la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre la gráfica de f y los puntos dados en el plano (los puntos de los datos), como se muestra en la figura 13.76. Si el modelo es perfecto, entonces $S = 0$. Sin embargo, cuando la perfección no es posible, podemos conformarnos con un modelo que haga mínimo el valor de S . Por ejemplo, la suma de los errores cuadráticos en el modelo lineal en la figura 13.74 es $S \approx 17$. En estadística, al *modelo lineal* que minimiza el valor de S se le llama **recta de regresión o por mínimos cuadrados**. La demostración de que esta recta realmente minimiza S requiere minimizar una función de dos variables.

* En el ejercicio 37 se describe un método para hallar el modelo de mínimos cuadrados para una colección de datos.



ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833)

El método de mínimos cuadrados lo introdujo el matemático francés Adrien-Marie Legendre. Legendre es mejor conocido por su trabajo en geometría. De hecho, su texto "Elementos de Geometría" fue tan popular en Estados Unidos que se usó durante un periodo de más de 100 años y hubo 33 ediciones.

TEOREMA 13.18 RECTA DE REGRESIÓN DE MÍNIMOS CUADRADOS

La **recta de regresión de mínimos cuadrados** para $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ está dada por $f(x) = ax + b$, donde

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad y \quad b = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

DEMOSTRACIÓN Sea $S(a, b)$ la suma de los cuadrados de los errores para el modelo $f(x) = ax + b$ y el conjunto de puntos dado. Es decir,

$$\begin{aligned} S(a, b) &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \end{aligned}$$

donde los puntos (x_i, y_i) representan constantes. Como S es una función de a y b , se pueden usar los métodos de la sección anterior para encontrar el valor mínimo de S . Las primeras derivadas parciales de S son

$$\begin{aligned} S_a(a, b) &= \sum_{i=1}^n 2x_i(ax_i + b - y_i) \\ &= 2a \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ S_b(a, b) &= \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) \\ &= 2a \sum_{i=1}^n x_i + 2nb - 2 \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned}$$

Igualando estas dos derivadas parciales a 0, se obtienen los valores de a y b que indica el teorema. Se deja como ejercicio aplicar el criterio de las segundas derivadas parciales (ver ejercicio 47) para verificar que estos valores de a y b dan un mínimo.

Si los valores de x están simétricamente distribuidos respecto al eje y , entonces $\sum x_i = 0$ y las fórmulas para a y b se simplifican:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

y

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Esta simplificación es a menudo posible mediante una traslación de los valores x . Por ejemplo, si los valores x en una colección de datos son los años 2005, 2006, 2007, 2008 y 2009, se puede tomar 2007 como 0.

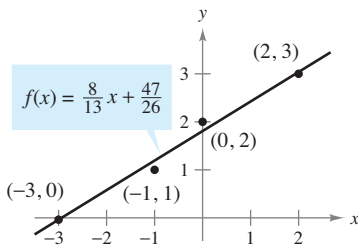
EJEMPLO 3 Hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados

Hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos $(-3, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$ y $(2, 3)$.

Solución La tabla muestra los cálculos necesarios para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados usando $n = 4$.

x	y	xy	x^2
-3	0	0	9
-1	1	-1	1
0	2	0	0
2	3	6	4
$\sum_{i=1}^n x_i = -2$	$\sum_{i=1}^n y_i = 6$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 5$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 14$

TECNOLOGÍA Muchas calculadoras tienen “incorporados” programas de regresión de mínimos cuadrados. Se puede utilizar una calculadora con estos programas para reproducir los resultados del ejemplo 3.



Recta de regresión de mínimos cuadrados
Figura 13.77

Aplicando el teorema 13.18 se obtiene

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} = \frac{4(5) - (-2)(6)}{4(14) - (-2)^2} = \frac{8}{13}$$

y

$$b = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i \right) = \frac{1}{4} \left[6 - \frac{8}{13}(-2) \right] = \frac{47}{26}$$

La recta de regresión de mínimos cuadrados es $f(x) = \frac{8}{13}x + \frac{47}{26}$, como se muestra en la figura 13.77.

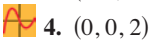
13.9 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, hallar la distancia mínima del punto al plano $x - y + z = 3$. (*Sugerencia: Para simplificar los cálculos, minimizar el cuadrado de la distancia.*)

- 1. $(0, 0, 0)$
- 2. $(1, 2, 3)$

En los ejercicios 3 y 4, encontrar la distancia mínima desde el punto a la superficie $z = \sqrt{1 - 2x - 2y}$. (*Sugerencia: En el ejercicio 4, usar la operación raíz de una herramienta de graficación.*)

- 3. $(-2, -2, 0)$



- 4. $(0, 0, 2)$

En los ejercicios 5 a 8, hallar tres números positivos x, y y z que satisfagan las condiciones dadas.

- 5. El producto es 27 y la suma es mínima.
- 6. La suma es 32 y $P = xy^2z$ es máxima.
- 7. La suma es 30 y la suma de los cuadrados es mínima.
- 8. El producto es 1 y la suma de los cuadrados es mínima.

9. **Costos** Un contratista de mejorías caseras está pintando las paredes y el techo de una habitación rectangular. El volumen de la habitación es de 668.25 pies cúbicos. El costo de pintura de pared es de \$0.06 por pie cuadrado y el costo de pintura de techo es de \$0.11 por pie cuadrado. Encontrar las dimensiones de la habitación que den por resultado un mínimo costo para la pintura. ¿Cuál es el mínimo costo por la pintura?

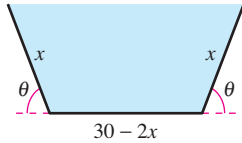
10. **Volumen máximo** El material para construir la base de una caja abierta cuesta 1.5 veces más por unidad de área que el material para construir los lados. Dada una cantidad fija de dinero C , hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede ser fabricada.

11. **Volumen máximo** El volumen de un elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es $4\pi abc/3$. Dada una suma fija $a + b + c$, mostrar que el elipsoide de volumen máximo es una esfera.

- 12. **Volumen máximo** Mostrar que la caja rectangular de volumen máximo inscrita en una esfera de radio r es un cubo.
- 13. **Volumen y área exterior** Mostrar que una caja rectangular de volumen dado y área exterior mínima es un cubo.
- 14. **Área** Un comedero de secciones transversales en forma de trapecio se forma doblando los extremos de una lámina de aluminio de 30 pulgadas de ancho (ver la figura). Hallar la sección transversal de área máxima.



- 15. **Ingreso máximo** Una empresa fabrica dos tipos de zapatos tenis, tenis para correr y tenis para baloncesto. El ingreso total de x_1 unidades de tenis para correr y x_2 unidades de tenis de baloncesto es $R = -5x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_1x_2 + 42x_1 + 102x_2$, donde x_1 y x_2 están en miles de unidades. Hallar las x_1 y x_2 que maximizan el ingreso.
- 16. **Ganancia o beneficio máximo** Una empresa fabrica velas en dos lugares. El costo de producción de x_1 unidades en el lugar 1 es

$$C_1 = 0.02x_1^2 + 4x_1 + 500$$

y el costo de producción de x_2 unidades en el lugar 2 es

$$C_2 = 0.05x_2^2 + 4x_2 + 275.$$

Las velas se venden a \$15 por unidad. Hallar la cantidad que debe producirse en cada lugar para aumentar al máximo el beneficio $P = 15(x_1 + x_2) - C_1 - C_2$.

- 17. **Ley de Hardy-Weinberg** Los tipos sanguíneos son genéticamente determinados por tres alelos A, B y O. (Alelo es cualquiera de las posibles formas de mutación de un gen.) Una persona cuyo tipo sanguíneo es AA, BB u OO es homocigótica. Una persona cuyo tipo sanguíneo es AB, AO o BO es heterocigótica. La ley Hardy-Weinberg establece que la proporción P de individuos heterocigótica en cualquier población dada es

$$P(p, q, r) = 2pq + 2pr + 2qr$$

donde p representa el porcentaje de alelos A en la población, q representa el porcentaje de alelos B en la población y r representa el porcentaje de alelos O en la población. Utilizar el hecho de que $p + q + r = 1$ para mostrar que la proporción máxima de individuos heterocigóticos en cualquier población es $\frac{2}{3}$.

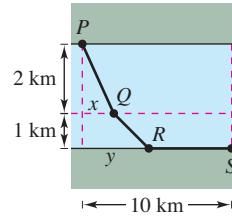
- 18. **Índice de diversidad de Shannon** Una forma de medir diversidad de especies es usar el índice de diversidad de Shannon H . Si un hábitat consiste de tres especies, A, B y C, su índice de diversidad de Shannon es

$$H = -x \ln x - y \ln y - z \ln z$$

donde x es el porcentaje de especies A en el hábitat, y es el porcentaje de especies B en el hábitat y z es el porcentaje de especies C en el hábitat.

- a) Usar el factor de $x + y + z = 1$ para demostrar que el valor máximo de H ocurre cuando $x = y = z = \frac{1}{3}$.
- b) Usar el resultado del inciso a) para demostrar que el valor máximo de H en este hábitat es de $\ln 3$.

- 19. **Costo mínimo** Hay que construir un conducto para agua desde el punto P al punto S y debe atravesar regiones donde los costos de construcción difieren (ver la figura). El costo por kilómetro en dólares es $3k$ de P a Q , $2k$ de Q a R y k de R a S . Hallar x y y tales que el costo total C se minimice.



- 20. **Distancia** Una empresa tiene tres tiendas de ventas al menudeo localizadas en los puntos $(0, 0)$, $(2, 2)$ y $(-2, 2)$ (ver la figura). La dirección planea construir un centro de distribución localizado de tal manera que la suma S de las distancias del centro a las tiendas sea mínimo. Por la simetría del problema es claro que el centro de distribución se localizará en el eje y , y por consiguiente S es una función de una variable y . Utilizando las técnicas presentadas en el capítulo 3, calcular el valor de y requerido.

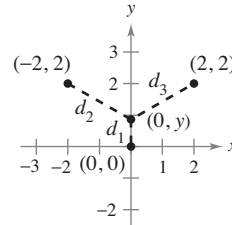


Figura para 20

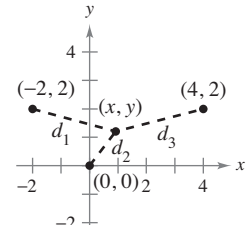


Figura para 21

- CAS 21. Investigación** Las tiendas de ventas al menudeo descritas en el ejercicio 20 se localizan en $(0, 0)$, $(4, 2)$ y $(-2, 2)$ (ver la figura). La localización del centro de distribución es (x, y) , y por consiguiente la suma S de las distancias es una función de x y y .

- a) Escribir la expresión que da la suma S de las distancias. Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar S . ¿Tiene esta superficie un mínimo?
- b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y obtener S_x y S_y . Observar que resolver el sistema $S_x = 0$ y $S_y = 0$ es muy difícil. Por tanto, aproximar la localización del centro de distribución.
- c) Una estimación inicial del punto crítico es $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Calcular $-\nabla S(1, 1)$ con componentes $-S_x(1, 1)$ y $-S_y(1, 1)$. ¿Qué dirección es la dada por el vector $-\nabla S(1, 1)$?
- d) La segunda estimación del punto crítico es $(x_2, y_2) = (x_1 - S_x(x_1, y_1)t, y_1 - S_y(x_1, y_1)t)$. Si se sustituyen estas coordenadas en $S(x, y)$, entonces S se convierte en una función de una variable t . Hallar el valor de t que minimiza S . Utilizar este valor de t para estimar (x_2, y_2) .
- e) Realizar dos iteraciones más del proceso del inciso d) para obtener (x_4, y_4) . Dada esta localización del centro de distribución, ¿cuál es la suma de las distancias a las tiendas al menudeo?
- f) Explicar por qué se usó $-\nabla S(x, y)$ para aproximar el valor mínimo de S . ¿En qué tipo de problemas se usaría $\nabla S(x, y)$?

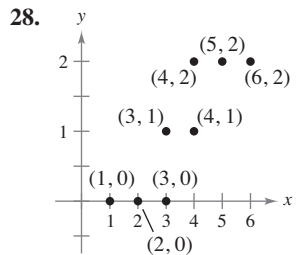
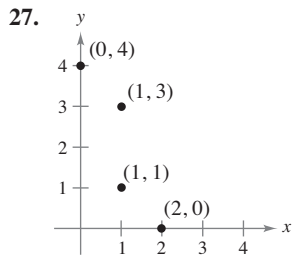
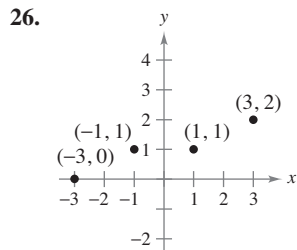
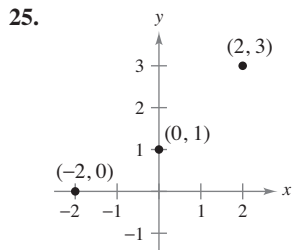
22. **Investigación** Repetir el ejercicio 21 con tiendas de ventas al menudeo localizadas en los puntos $(-4, 0)$, $(1, 6)$ y $(12, 2)$.

Desarrollo de conceptos

23. Con las propias palabras, describir la estrategia para la solución de problemas de aplicación de mínimos y máximos.

24. Con las propias palabras, describir el método de mínimos cuadrados para elaborar modelos matemáticos.

En los ejercicios 25 a 28, *a*) hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados y *b*) calcular S , la suma de los errores al cuadrado. Utilizar el programa para regresión de una herramienta de graficación para verificar los resultados.



En los ejercicios 29 a 32, hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos dados. Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para verificar los resultados. Utilizar la herramienta de graficación para trazar los puntos y representar la recta de regresión.

- 29. $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$, $(5, 5)$
- 30. $(1, 0)$, $(3, 3)$, $(5, 6)$
- 31. $(0, 6)$, $(4, 3)$, $(5, 0)$, $(8, -4)$, $(10, -5)$
- 32. $(6, 4)$, $(1, 2)$, $(3, 3)$, $(8, 6)$, $(11, 8)$, $(13, 8)$

33. **Modelo matemático** En la tabla se muestran las edades x (en años) y las presiones arteriales sistólicas y de siete hombres.

Edad, x	16	25	39	45	49	64	70
Presión arterial sistólica, y	109	122	150	165	159	183	199

- a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos.
- b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los datos y representar el modelo.
- c) Utilizar el modelo para aproximar la variación en la presión arterial sistólica por cada incremento de un año en la edad.

34. **Modelo matemático** El gerente de tienda quiere conocer la demanda y de una barra de energía en función del precio x . Las ventas diarias a tres precios diferentes de la barra de energía se muestran en la tabla.

Precio, x	\$1.29	\$1.49	\$1.69
Demanda, y	450	375	330

- a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos.
- b) Usar el modelo para estimar la demanda cuando el precio es \$1.59.

35. **Modelo matemático** Un agrónomo prueba cuatro fertilizantes en los campos de cultivo para determinar la relación entre la producción de trigo y (en bushels por acre) y la cantidad de fertilizante x (en cientos de libras por acre). Los resultados se muestran en la tabla.

Fertilizante, x	1.0	1.5	2.0	2.5
Rendimiento, y	32	41	48	53

Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos, y estimar la producción para una aplicación de 160 libras de fertilizante por acre.

36. **Modelo matemático** La tabla muestra los porcentajes x y los números y (en millones) de mujeres en la fuerza laboral en determinados años. (Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics)

Año	1970	1975	1980	1985
Porcentaje, x	43.3	46.3	51.5	54.5
Número, y	31.5	37.5	45.5	51.1

Año	1990	1995	2000	2005
Porcentaje, x	57.5	58.9	59.9	59.3
Número, y	56.8	60.9	66.3	69.3

- a) Utilizar el programa para regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos.
- b) Según este modelo, ¿aproximadamente cuántas mujeres ingresan a la fuerza laboral por cada incremento de un punto en el porcentaje de mujeres en la fuerza laboral?

37. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución proporcione los coeficientes a , b y c para el modelo cuadrático de regresión de mínimos cuadrados $y = ax^2 + bx + c$ para los puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , \dots , (x_n, y_n) minimizando la suma

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2.$$

Para discusión

38. La suma de las longitudes y el tamaño (perímetro de una sección transversal) de un paquete llevado por un servicio de entrega a domicilio no puede exceder 108 pulgadas. Encontrar las dimensiones del paquete rectangular de más grande volumen que puede ser enviado.

En los ejercicios 39 a 42, utilizar el resultado del ejercicio 37 para hallar el modelo cuadrático de regresión de mínimos cuadrados para los puntos dados. Usar el programa de regresión de una herramienta de graficación para confirmar los resultados. Utilizar la herramienta de graficación para trazar los puntos y representar la curva de regresión de mínimos cuadrados.

39. $(-2, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 5)$

40. $(-4, 5), (-2, 6), (2, 6), (4, 2)$

41. $(0, 0), (2, 2), (3, 6), (4, 12)$ 42. $(0, 10), (1, 9), (2, 6), (3, 0)$

43. Modelo matemático Después de que fue desarrollado un nuevo turbopropulsor para un motor de automóvil, se obtuvieron los datos experimentales siguientes de velocidad y en millas por hora a intervalos x de dos segundos.

Tiempo, x	0	2	4	6	8	10
Velocidad, y	0	15	30	50	65	70

- a) Hallar un modelo cuadrático de regresión de mínimos cuadrados para los datos. Utilizar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.
- b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los puntos y representar el modelo.

44. Modelo matemático La tabla muestra la población mundial y (en miles de millones) para cinco diferentes años. Considerar que $x = 8$ representa el año 2008. (Fuente: U.S. Census Bureau, International Data Base)

Año, x	1998	2000	2002	2004	2006
Población, y	5.9	6.1	6.2	6.4	6.5

- a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos.
- b) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar el modelo cuadrático de regresión de mínimos cuadrados para los datos.
- c) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los datos y representar los modelos.
- d) Utilizar ambos modelos para estimar la población mundial en el año 2014. ¿Cómo difieren los dos modelos cuando se extrapola hacia el futuro?

45. Modelo matemático Un meteorólogo mide la presión atmosférica P (en kilogramos por metro cuadrado) a una altitud h (en kilómetros). Los datos se muestran en la tabla.

Altitud, h	0	5	10	15	20
Presión, P	10 332	5 583	2 376	1 240	517

- a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar una recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos $(h, \ln P)$.
- b) El resultado del inciso a) es una ecuación de la forma $\ln P = ah + b$. Expresar esta forma logarítmica en forma exponencial.
- c) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los datos originales y representar el modelo exponencial del inciso b).
- d) Si una herramienta de graficación puede ajustar modelos logarítmicos a datos, utilizarla para verificar el resultado del inciso b).

46. Modelo matemático Los puntos terminales del intervalo de visión se llaman punto próximo y punto lejano del ojo. Con la edad, estos puntos cambian. La tabla muestra los puntos próximos y (en pulgadas) a varias edades x (en años). (Fuente: *Ophthalmology & Physiological Optics*)

Edad, x	16	32	44	50	60
Punto próximo, y	3.0	4.7	9.8	19.7	39.4

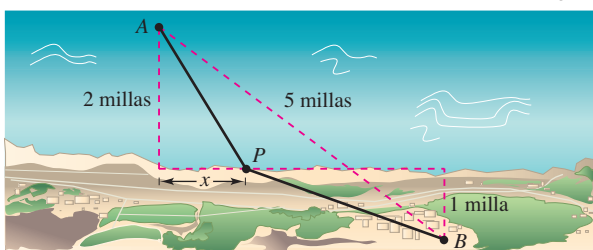
- a) Hallar un modelo racional para los datos tomando el recíproco o inverso de los puntos próximos para generar los puntos $(x, 1/y)$. Utilizar el programa para regresión de una herramienta de graficación para hallar una recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos revisados. La recta resultante tiene la forma $1/y = ax + b$. Despejar y .
 - b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los datos y representar el modelo.
 - c) ¿Puede utilizarse el modelo para predecir el punto próximo en una persona de 70 años? Explicar.
47. Usar el criterio de las segundas derivadas parciales para verificar que las fórmulas para a y b proporcionadas en el teorema 13.18 llevan a un mínimo.

[Sugerencia: Considerar el hecho que $n \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$]

PROYECTO DE TRABAJO

Construcción de un oleoducto

Una empresa petrolera desea construir un oleoducto desde su plataforma A hasta su refinería B . La plataforma está a 2 millas de la costa, y la refinería está 1 milla tierra adentro. Además, A y B están a 5 millas de distancia una de otra, como se muestra en la figura.



El costo de construcción del oleoducto es \$3 millones por milla en el mar, y \$4 millones por milla en tierra. Por tanto, el costo del oleoducto depende de la localización del punto P en la orilla. ¿Cuál sería la ruta más económica para el oleoducto?

Imaginar que hay que redactar un informe para la empresa petrolera acerca de este problema. Sea x la distancia mostrada en la figura. Determinar el costo de construir el oleoducto de A a P , y el costo de P a B . Analizar alguna trayectoria muestra para el oleoducto y sus costos correspondientes. Por ejemplo, ¿cuál es el costo de la ruta más directa? Utilizar después el cálculo para determinar la ruta del oleoducto que minimiza el costo. Explicar todos los pasos del desarrollo e incluir una gráfica pertinente.

13.10 Multiplicadores de Lagrange

- Entender el método de los multiplicadores de Lagrange.
- Utilizar los multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de optimización con restricciones.
- Utilizar el método de multiplicadores de Lagrange con dos restricciones.

Multiplicadores de Lagrange

Muchos problemas de optimización tienen **restricciones**, o **ligaduras**, para los valores que pueden usarse para dar la solución óptima. Tales restricciones tienden a complicar los problemas de optimización porque la solución óptima puede presentarse en un punto frontera del dominio. En esta sección se estudia una ingeniosa técnica para resolver tales problemas. Es el **método de los multiplicadores de Lagrange**.

Para ver cómo funciona esta técnica, supóngase que se quiere hallar el rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la elipse dada por

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Sea (x, y) el vértice del rectángulo que se encuentra en el primer cuadrante, como se muestra en la figura 13.78. Como el rectángulo tiene lados de longitudes $2x$ y $2y$, su área está dada por

$$f(x, y) = 4xy. \quad \text{Función objetivo.}$$

Se quieren hallar x y y tales que $f(x, y)$ es un máximo. La elección de (x, y) está restringida a puntos del primer cuadrante que están en la elipse

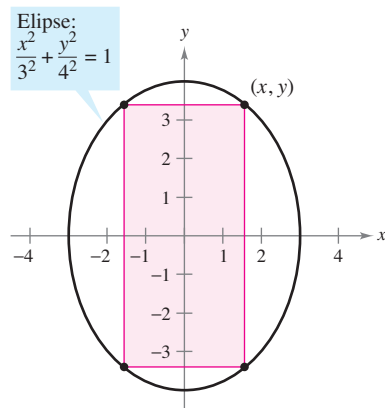
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1. \quad \text{Restricción.}$$

Ahora, considérese la ecuación restrictiva o de ligadura como una curva de nivel fija de

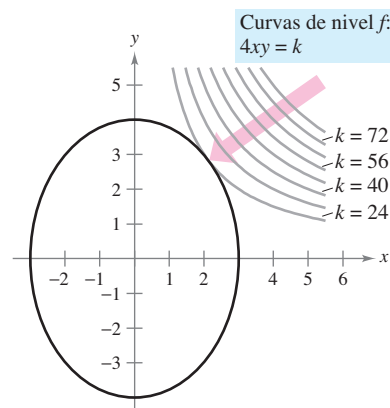
$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2}.$$

Las curvas de nivel de f representan una familia de hipérbolas $f(x, y) = 4xy = k$. En esta familia, las curvas de nivel que satisfacen la restricción dada corresponden a hipérbolas que cortan a la elipse. Es más, para maximizar $f(x, y)$, se quiere hallar la hipérbola que justo satisfaga la restricción. La curva de nivel que hace esto es la que es *tangente* a la elipse, como se muestra en la figura 13.79.

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813)
 El método de los multiplicadores de Lagrange debe su nombre al matemático francés Joseph Louis Lagrange. Lagrange presentó el método por primera vez en su famoso trabajo sobre mecánica, escrito cuando tenía apenas 19 años.



Función objetivo: $f(x, y) = 4xy$
Figura 13.78



Restricción: $g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$
Figura 13.79

Para encontrar la hipérbola apropiada se usa el hecho de que dos curvas son tangentes en un punto si y sólo si sus vectores gradiente son paralelos. Esto significa que $\nabla f(x, y)$ debe ser un múltiplo escalar de $\nabla g(x, y)$ en el punto de tangencia. En el contexto de los problemas de optimización con restricciones, este escalar se denota con la letra griega λ (*lambda* minúscula del alfabeto griego).

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

Al escalar λ se le conoce como un **multiplicador de Lagrange**. El teorema 13.19 da las condiciones necesarias para la existencia de tales multiplicadores.

TEOREMA 13.19 TEOREMA DE LAGRANGE

Sean f y g funciones con primeras derivadas parciales continuas, y tales que f tiene un extremo en un punto (x_0, y_0) sobre la curva suave de restricción $g(x, y) = c$.

Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

DEMOSTRACIÓN Para empezar, se representa la curva suave dada por $g(x, y) = c$ mediante la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$$

donde x' y y' son continuas en un intervalo abierto I . Se define la función h como $h(t) = f(x(t), y(t))$. Entonces, como $f(x_0, y_0)$ es un valor extremo de f , se sabe que

$$h(t_0) = f(x(t_0), y(t_0)) = f(x_0, y_0)$$

es un valor extremo de h . Esto implica que $h'(t_0) = 0$, y, por la regla de la cadena,

$$h'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

Así, $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$. Por el teorema 13.12, $\nabla g(x_0, y_0)$ también es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$. Por consiguiente, los gradientes $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0)$ son paralelos y debe existir un escalar λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

El método de los multiplicadores de Lagrange emplea el teorema 13.19 para encontrar los valores extremos de una función f sujeta a una restricción.

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Sean f y g funciones que satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange, y sea f una función que tiene un mínimo o un máximo sujeto a la restricción $g(x, y) = c$. Para hallar el mínimo o el máximo de f , seguir los pasos descritos a continuación.

1. Resolver simultáneamente las ecuaciones $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ y $g(x, y) = c$ resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente.

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y)$$

$$f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y)$$

$$g(x, y) = c$$

2. Evaluar f en cada punto solución obtenido en el primer paso. El valor mayor da el máximo de f sujeto a la restricción $g(x, y) = c$, y el valor menor da el mínimo de f sujeto a la restricción $g(x, y) = c$.

NOTA Se puede demostrar que el teorema de Lagrange también es válido para funciones de tres variables, usando un argumento similar con superficies de nivel y con el teorema 13.14. ■

NOTA Como se verá en los ejemplos 1 y 2, el método de los multiplicadores de Lagrange requiere resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Esto a menudo requiere de alguna manipulación algebraica ingeniosa. ■

Problemas de optimización con restricciones o ligaduras

En el problema presentado al principio de esta sección, se quería maximizar el área de un rectángulo inscrito en una elipse. El ejemplo 1 muestra cómo usar los multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

EJEMPLO 1 Multiplicador de Lagrange con una restricción o ligadura

Hallar el valor máximo de $f(x, y) = 4xy$ donde $x > 0$ y $y > 0$, sujeto a la restricción $(x^2/3^2) + (y^2/4^2) = 1$.

NOTA El ejemplo 1 también puede resolverse utilizando las técnicas aprendidas en el capítulo 3. Para ver cómo se hace esto, calcular el valor máximo de $A = 4xy$ dado que

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Para empezar, de la segunda ecuación se despeja y y se obtiene

$$y = \frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}.$$

Después se sustituye este valor en la primera ecuación para obtener

$$A = 4x\left(\frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}\right).$$

Por último, se usan las técnicas del capítulo 3 para maximizar A .

Solución Para comenzar, sea

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Igualando $\nabla f(x, y) = 4y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j}$ y $\lambda \nabla g(x, y) = (2\lambda x/9)\mathbf{i} + (\lambda y/8)\mathbf{j}$, se puede obtener el sistema de ecuaciones siguiente.

$$4y = \frac{2}{9}\lambda x \quad f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y).$$

$$4x = \frac{1}{8}\lambda y \quad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y).$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \quad \text{Restricción.}$$

De la primera ecuación, se obtiene $\lambda = 18y/x$, que sustituido en la segunda ecuación da

$$4x = \frac{1}{8}\left(\frac{18y}{x}\right)y \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{9}{16}y^2.$$

Sustituyendo en la tercera ecuación x^2 por este valor se tiene

$$\frac{1}{9}\left(\frac{9}{16}y^2\right) + \frac{1}{16}y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 8.$$

Así, $y = \pm 2\sqrt{2}$. Como se requiere que $y > 0$, se elige el valor positivo y se halla que

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{9}{16}y^2 \\ &= \frac{9}{16}(8) = \frac{9}{2} \\ x &= \frac{3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Por tanto, el valor máximo de f es

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right) = 4xy = 4\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)(2\sqrt{2}) = 24.$$

Nótese que el expresar la restricción como

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \quad \text{o} \quad g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0$$

no afecta la solución, la constante se elimina cuando se calcula ∇g .

EJEMPLO 2 Una aplicación a la economía

La función de producción de Cobb-Douglas (ver ejemplo 5, sección 13.1) para un fabricante de software está dada por

$$f(x, y) = 100x^{3/4}y^{1/4} \quad \text{Función objetivo.}$$

donde x representa las unidades de trabajo (a \$150 por unidad) y y representa las unidades de capital (a \$250 por unidad). El costo total de trabajo y capital está limitado a \$50 000. Hallar el nivel máximo de producción de este fabricante.

PARA MAYOR INFORMACIÓN

Para más información sobre la utilización de los multiplicadores de Lagrange en economía, ver el artículo “Lagrange Multiplier Problems in Economics” de John V. Baxley y John C. Moorhouse en *The American Mathematical Monthly*.

Solución De la función dada, se tiene

$$\nabla f(x, y) = 75x^{-1/4}y^{1/4} \mathbf{i} + 25x^{3/4}y^{-3/4} \mathbf{j}.$$

El límite para el costo de trabajo y capital se refleja en la restricción o ligadura

$$g(x, y) = 150x + 250y = 50\,000. \quad \text{Restricción.}$$

Así, $\lambda \nabla g(x, y) = 150\lambda \mathbf{i} + 250\lambda \mathbf{j}$. Esto da lugar al sistema de ecuaciones siguiente.

$$75x^{-1/4}y^{1/4} = 150\lambda \quad f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y).$$

$$25x^{3/4}y^{-3/4} = 250\lambda \quad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y).$$

$$150x + 250y = 50\,000 \quad \text{Restricción.}$$

Resolviendo para λ en la primera ecuación

$$\lambda = \frac{75x^{-1/4}y^{1/4}}{150} = \frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2}$$

y despejando λ de la segunda ecuación, se obtiene

$$25x^{3/4}y^{-3/4} = 250 \left(\frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2} \right)$$

$$25x = 125y. \quad \text{Multiplicar por } x^{1/4}y^{3/4}.$$

Así, $x = 5y$. Sustituyendo en la tercera ecuación, se tiene

$$150(5y) + 250y = 50\,000$$

$$1\,000y = 50\,000$$

$$y = 50 \text{ unidades de capital}$$

$$x = 250 \text{ unidades de trabajo.}$$

Por tanto, el nivel máximo de producción es

$$\begin{aligned} f(250, 50) &= 100(250)^{3/4}(50)^{1/4} \\ &\approx 16\,719 \text{ unidades del producto.} \end{aligned}$$

Los economistas llaman al multiplicador de Lagrange obtenido en una función de producción **productividad marginal del capital**. Por ejemplo, en el ejemplo 2 la productividad marginal de capital en $x = 250$ y $y = 50$ es

$$\lambda = \frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2} = \frac{(250)^{-1/4}(50)^{1/4}}{2} \approx 0.334$$

lo cual significa que por cada dólar adicional gastado en la producción, puede producirse 0.334 unidades adicionales del producto.

EJEMPLO 3 Multiplicadores de Lagrange y tres variables

Hallar el valor mínimo de

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 \quad \text{Función objetivo.}$$

sujeto a la restricción o ligadura $2x - 3y - 4z = 49$.

Solución Sea $g(x, y, z) = 2x - 3y - 4z = 49$. Entonces, como

$$\nabla f(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \lambda \nabla g(x, y, z) = 2\lambda\mathbf{i} - 3\lambda\mathbf{j} - 4\lambda\mathbf{k}$$

se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} 4x &= 2\lambda & f_x(x, y, z) &= \lambda g_x(x, y, z). \\ 2y &= -3\lambda & f_y(x, y, z) &= \lambda g_y(x, y, z). \\ 6z &= -4\lambda & f_z(x, y, z) &= \lambda g_z(x, y, z). \\ 2x - 3y - 4z &= 49 & \text{Restricción.} \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $x = 3, y = -9$ y $z = -4$. Por tanto, el valor óptimo de f es

$$\begin{aligned} f(3, -9, -4) &= 2(3)^2 + (-9)^2 + 3(-4)^2 \\ &= 147. \end{aligned}$$

De la función original y de la restricción, resulta claro que $f(x, y, z)$ no tiene máximo. Por tanto, el valor óptimo de f determinado arriba es un mínimo.

Al principio de esta sección se dio una interpretación gráfica del problema de optimización con restricciones para dos variables. Con tres variables, la interpretación es similar, sólo que se usan superficies de nivel en lugar de curvas de nivel. Así, en el ejemplo 3, las superficies de nivel de f son elipsoides centradas en el origen, y la restricción

$$2x - 3y - 4z = 49$$

es un plano. El valor mínimo de f está representado por la elipsoide tangente al plano de la restricción, como se muestra en la figura 13.80.

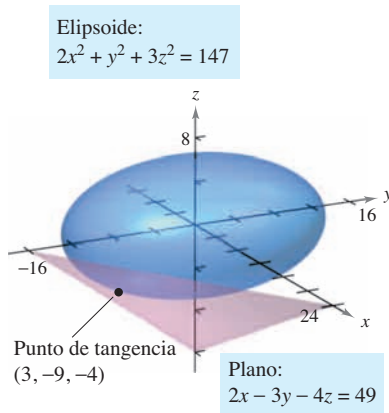


Figura 13.80

EJEMPLO 4 Optimización en el interior de una región

Hallar los valores extremos de

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3 \quad \text{Función objetivo.}$$

sujeto a la restricción $x^2 + y^2 \leq 10$.

Solución Para resolver este problema, se puede dividir la restricción en dos casos.

a) Para los puntos *en el círculo* $x^2 + y^2 = 10$, se pueden usar los multiplicadores de Lagrange para hallar que el valor máximo de $f(x, y)$ es 24; este valor se presenta en $(-1, 3)$ y en $(-1, -3)$. De manera similar, se puede determinar que el valor mínimo de $f(x, y)$ es aproximadamente 6.675; este valor se presenta en $(\sqrt{10}, 0)$.

b) Para los puntos *interiores al círculo*, se pueden usar las técnicas analizadas en la sección 13.8 para concluir que la función tiene un mínimo relativo de 2 en el punto $(1, 0)$.

Combinando estos dos resultados, se puede concluir que f tiene un máximo de 24 en $(-1, \pm 3)$ y un mínimo de 2 en $(1, 0)$, como se muestra en la figura 13.81.

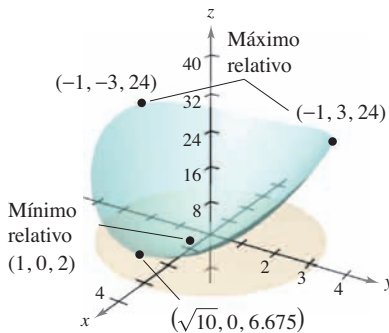


Figura 13.81

El método de multiplicadores de Lagrange con dos restricciones

En problemas de optimización que involucran *dos* funciones de restricción g y h , se puede introducir un segundo multiplicador de Lagrange, μ (letra minúscula *mu* del alfabeto griego), y resolver la ecuación

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

donde los vectores gradiente no son paralelos, como se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Optimización con dos restricciones

Sea $T(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ la temperatura en cada punto en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 11$. Hallar las temperaturas extremas en la curva formada por la intersección del plano $x + y + z = 3$ y la esfera.

Solución Las dos restricciones son

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 11 \quad \text{y} \quad h(x, y, z) = x + y + z = 3.$$

Usando

$$\nabla T(x, y, z) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

$$\lambda \nabla g(x, y, z) = 2\lambda x\mathbf{i} + 2\lambda y\mathbf{j} + 2\lambda z\mathbf{k}$$

y

$$\mu \nabla h(x, y, z) = \mu\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \mu\mathbf{k}$$

se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{array}{ll} 2 = 2\lambda x + \mu & T_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z). \\ 2 = 2\lambda y + \mu & T_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z). \\ 2z = 2\lambda z + \mu & T_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z). \\ x^2 + y^2 + z^2 = 11 & \text{Restricción 1.} \\ x + y + z = 3 & \text{Restricción 2.} \end{array}$$

Restando la segunda ecuación de la primera, se obtiene el sistema siguiente.

$$\begin{array}{l} \lambda(x - y) = 0 \\ 2z(1 - \lambda) - \mu = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 11 \\ x + y + z = 3 \end{array}$$

De la primera ecuación, se concluye que $\lambda = 0$ o $x = y$. Si $\lambda = 0$, se puede demostrar que los puntos críticos son $(3, -1, 1)$ y $(-1, 3, 1)$. (Tratar de hacer esto toma un poco de trabajo.) Si $\lambda \neq 0$, entonces $x = y$ y se puede mostrar que los puntos críticos se presentan donde $x = y = (3 \pm 2\sqrt{3})/3$ y $z = (3 \mp 4\sqrt{3})/3$. Por último, para encontrar las soluciones óptimas, se deben comparar las temperaturas en los cuatro puntos críticos.

$$\begin{aligned} T(3, -1, 1) &= T(-1, 3, 1) = 25 \\ T\left(\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 4\sqrt{3}}{3}\right) &= \frac{91}{3} \approx 30.33 \\ T\left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 - 4\sqrt{3}}{3}\right) &= \frac{91}{3} \approx 30.33 \end{aligned}$$

Así, $T = 25$ es la temperatura mínima y $T = \frac{91}{3}$ es la temperatura máxima en la curva.

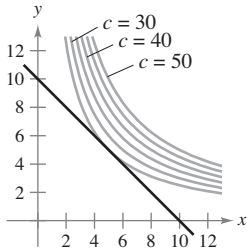
AYUDA DE ESTUDIO El sistema de ecuaciones que se obtiene en el método de los multiplicadores de Lagrange no es, en general, un sistema lineal, y a menudo hallar la solución requiere de ingenio.

13.10 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, identificar la restricción o ligadura y las curvas de nivel de la función objetivo mostradas en la figura. Utilizar la figura para aproximar el extremo indicado, suponiendo que x y y son positivos. Utilizar los multiplicadores de Lagrange para verificar el resultado.

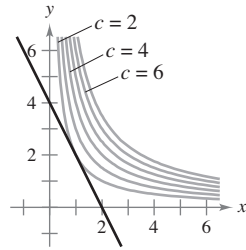
1. Maximizar $z = xy$

Restricción o ligadura: $x + y = 10$



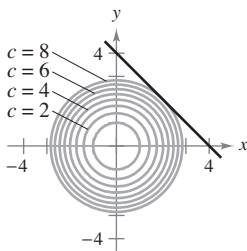
2. Maximizar $z = xy$

Restricción o ligadura: $2x + y = 4$



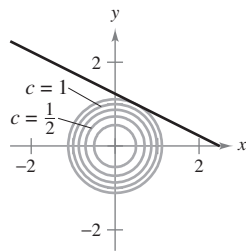
3. Minimizar $z = x^2 + y^2$

Restricción o ligadura: $x + y - 4 = 0$



4. Minimizar $z = x^2 + y^2$

Restricción o ligadura: $2x + 4y = 5$



En los ejercicios 5 a 10, utilizar multiplicadores de Lagrange para hallar el extremo indicado, suponer que x y y son positivos.

5. Minimizar $f(x, y) = x^2 + y^2$
Restricción: $x + 2y - 5 = 0$
6. Maximizar $f(x, y) = x^2 - y^2$
Restricción: $2y - x^2 = 0$
7. Maximizar $f(x, y) = 2x + 2xy + y$
Restricción: $2x + y = 100$
8. Minimizar $f(x, y) = 3x + y + 10$
Restricción: $x^2y = 6$
9. Maximizar $f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$
Restricción: $x + y - 2 = 0$
10. Minimizar $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
Restricción: $2x + 4y - 15 = 0$

En los ejercicios 11 a 14, utilizar los multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos indicados, suponiendo que x , y y z son positivos.

11. Minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
Restricción o ligadura: $x + y + z - 9 = 0$
12. Maximizar $f(x, y, z) = xyz$
Restricción o ligadura: $x + y + z - 3 = 0$

13. Minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Restricción: $x + y + z = 1$

14. Minimizar $f(x, y) = x^2 - 10x + y^2 - 14y + 28$

Restricción: $x + y = 10$

En los ejercicios 15 y 16, utilizar los multiplicadores de Lagrange para hallar todos los extremos de la función sujetos a la restricción $x^2 + y^2 \leq 1$.

15. $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ 16. $f(x, y) = e^{-xy/4}$

En los ejercicios 17 y 18, utilizar los multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos de f indicados sujetos a dos restricciones. En cada caso, suponer que x , y y z son no negativos.

17. Maximizar $f(x, y, z) = xyz$

Restricción: $x + y + z = 32$, $x - y + z = 0$

18. Minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Restricción: $x + 2z = 6$, $x + y = 12$

En los ejercicios 19 a 28, usar los multiplicadores de Lagrange para encontrar la distancia mínima desde la curva o superficie al punto indicado. [Sugerencia: En el ejercicio 19, minimizar $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $x + y = 1$. En el ejercicio 25, usar la operación raíz de una herramienta de graficación.]

Curva	Punto
19. Recta: $x + y = 1$	(0, 0)
20. Recta: $2x + 3y = -1$	(0, 0)
21. Recta: $x - y = 4$	(0, 2)
22. Recta: $x + 4y = 3$	(1, 0)
23. Parábola: $y = x^2$	(0, 3)
24. Parábola: $y = x^2$	(-3, 0)
25. Parábola: $y = x^2 + 1$	($\frac{1}{2}$, 1)
26. Círculo: $(x - 4)^2 + y^2 = 4$	(0, 10)
Superficie	Punto
27. Plano: $x + y + z = 1$	(2, 1, 1)
28. Cono: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$	(4, 0, 0)

En los ejercicios 29 y 30, hallar el punto más alto de la curva de intersección de las superficies.

29. Cono: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, Plano: $x + 2z = 4$
30. Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, Plano: $2x + y - z = 2$

Desarrollo de conceptos

31. Explicar qué se quiere decir con problemas de optimización con restricciones.
32. Explicar el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de optimización con restricciones.

En los ejercicios 33 a 42, usar los multiplicadores de Lagrange para resolver el ejercicio indicado en la sección 13.9.

- 33. Ejercicio 1
- 35. Ejercicio 5
- 37. Ejercicio 9
- 39. Ejercicio 11
- 41. Ejercicio 17
- 34. Ejercicio 2
- 36. Ejercicio 6
- 38. Ejercicio 10
- 40. Ejercicio 12
- 42. Ejercicio 18

43. Volumen máximo Utilizar multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones de la caja rectangular de volumen máximo que puede ser inscrita (con los bordes paralelos a los ejes de coordenadas) en el elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$.

Para discusión

44. La suma de las longitudes y el tamaño (perímetro de una sección transversal) de un paquete llevado por un servicio de entrega a domicilio no puede exceder 108 pulgadas.

- a) Determinar si los multiplicadores de Lagrange se pueden usar para encontrar las dimensiones del paquete rectangular de más grande volumen que puede ser enviado. Explicar el razonamiento.
- b) Si se pueden usar los multiplicadores de Lagrange, encontrar las dimensiones. Comparar su respuesta con la obtenida en el ejercicio 38, sección 13.9.

45. Costo mínimo Un contenedor de carga (en forma de un sólido rectangular) debe tener un volumen de 480 pies cúbicos. La parte inferior costará \$5 por pie cuadrado para construir, y los lados y la parte superior costarán \$3 por pie cuadrado para construcción. Usar los multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones del contenedor de este tamaño que tiene costo mínimo.

46. Medias geométrica y aritmética

a) Utilizar los multiplicadores de Lagrange para demostrar que el producto de tres números positivos x, y y z cuya suma tiene un valor constante S , es máximo cuando los tres números son iguales. Utilizar este resultado para demostrar que

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}$$

b) Generalizar el resultado del inciso a) para demostrar que el producto $x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$ es máximo cuando $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$, $\sum_{i=1}^n x_i = S$, y todo $x_i \geq 0$. Después, demostrar que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Esto demuestra que la media geométrica nunca es mayor que la media aritmética.

47. Superficie mínima Utilizar multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones de un cilindro circular recto con volumen de V_0 unidades cúbicas y superficie mínima.

48. Distribución de temperatura Sea $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$ la temperatura en cada punto sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 50$. Hallar la temperatura máxima en la curva formada por la intersección de la esfera y el plano $x - z = 0$.

49. Refracción de la luz Cuando las ondas de luz que viajan en un medio transparente atraviesan la superficie de un segundo medio transparente, tienden a “desviarse” para seguir la trayectoria de tiempo mínimo. Esta tendencia se llama refracción y está descrita por la ley de refracción de Snell, según la cual

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{v_2}$$

donde θ_1 y θ_2 son las magnitudes de los ángulos mostrados en la figura, y v_1 y v_2 son las velocidades de la luz en los dos medios. Utilizar los multiplicadores de Lagrange para deducir esta ley usando $x + y = a$.

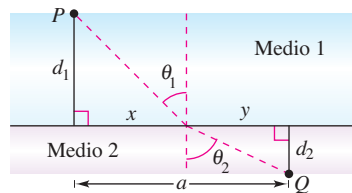


Figura para 49

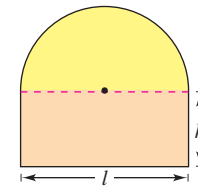


Figura para 50

50. Área y perímetro Un semicírculo está sobre un rectángulo (ver la figura). Si el área es fija y el perímetro es un mínimo, o si el perímetro es fijo y el área es un máximo, utilizar multiplicadores de Lagrange para verificar que la longitud del rectángulo es el doble de su altura.

Nivel de producción En los ejercicios 51 y 52, hallar el máximo nivel de producción P si el costo total de trabajo (a \$72 por unidad) y capital (a \$60 por unidad) está restringido a \$250 000, donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital.

51. $P(x, y) = 100x^{0.25}y^{0.75}$ 52. $P(x, y) = 100x^{0.4}y^{0.6}$

Costo En los ejercicios 53 y 54, hallar el costo mínimo para producir 50 000 unidades de un producto donde x es el número de unidades de trabajo (a \$72 por unidad) y y es el número de unidades de capital (a \$60 por unidad).

53. $P(x, y) = 100x^{0.25}y^{0.75}$ 54. $P(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$

55. Investigación Considerar la función objetivo $g(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ sujeta a la restricción o ligadura de que α, β y γ sean los ángulos de un triángulo.

- a) Utilizar los multiplicadores de Lagrange para maximizar g .
- CAS** b) Utilizar la restricción o ligadura para reducir la función g a una función de dos variables independientes. Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie definida por g . Identificar en la gráfica los valores máximos.

Preparación del examen Putman

56. Una boya está hecha de tres piezas, a saber, un cilindro y dos conos iguales, la altura de cada uno de los conos es igual a la altura del cilindro. Para una superficie dada, ¿con qué forma se tendrá el volumen máximo?

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

13 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, trazar la gráfica de la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en el valor dado de c .

1. $f(x, y, z) = x^2 - y + z^2, \quad c = 2$
2. $f(x, y, z) = 4x^2 - y^2 + 4z^2, \quad c = 0$
3. **Conjetura** Considerar la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.
 - a) Trazar la gráfica de la superficie dada por f .
 - b) Conjeturar la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = f(x, y) + 2$. Explicar el razonamiento.
 - c) Conjeturar la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = f(x, y) - 2$. Explicar el razonamiento.
 - d) Sobre la superficie en el inciso a), trazar las gráficas de $z = f(1, y)$ y $z = f(x, 1)$.

4. **Conjetura** Considerar la función

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

- a) Trazar la gráfica de la superficie dada por f .
- b) Conjeturar la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = f(x + 2, y)$. Explicar el razonamiento.
- c) Conjeturar la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = 4 - f(x, y)$. Explicar el razonamiento.
- d) Sobre la superficie en el inciso a), trazar las gráficas de $z = f(0, y)$ y $z = f(x, 0)$.

CAS En los ejercicios 5 a 8, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente algunas de las curvas de nivel de la función.

5. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$
6. $f(x, y) = \ln xy$
7. $f(x, y) = x^2 - y^2$
8. $f(x, y) = \frac{x}{x + y}$

CAS En los ejercicios 9 y 10, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función.

9. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$
10. $g(x, y) = |y|^{1+|x|}$

En los ejercicios 11 a 14, hallar el límite y analizar la continuidad de la función (si existe).

11. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$
12. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy}{x^2 - y^2}$
13. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y + xe^{-y^2}}{1 + x^2}$
14. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$

En los ejercicios 15 a 24, hallar todas las primeras derivadas parciales.

15. $f(x, y) = e^x \cos y$
16. $f(x, y) = \frac{xy}{x + y}$
17. $z = e^{-y} + e^{-x}$
18. $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

19. $g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$
20. $w = \sqrt{x^2 - y^2 - z^2}$
21. $f(x, y, z) = z \arctan \frac{y}{x}$
22. $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}$
23. $u(x, t) = ce^{-nt} \sin nx$
24. $u(x, t) = c \sin(akt) \cos kt$
25. **Para pensar** Dibujar una gráfica de una función $z = f(x, y)$ cuyas derivadas f_x y f_y sean siempre negativas.
26. Hallar las pendientes de la superficie $z = x^2 \ln(y + 1)$ en las direcciones x y y en el punto $(2, 0, 0)$.

En los ejercicios 27 a 30, hallar todas las segundas derivadas parciales y verificar que las segundas derivadas parciales mixtas son iguales.

27. $f(x, y) = 3x^2 - xy + 2y^3$
28. $h(x, y) = \frac{x}{x + y}$
29. $h(x, y) = x \sin y + y \cos x$
30. $g(x, y) = \cos(x - 2y)$

Ecuación de Laplace En los ejercicios 31 a 34, mostrar que la función satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

31. $z = x^2 - y^2$
32. $z = x^3 - 3xy^2$
33. $z = \frac{y}{x^2 + y^2}$
34. $z = e^y \sin x$

En los ejercicios 35 y 36, hallar la diferencial total.

35. $z = x \sin xy$
36. $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

37. **Análisis de errores** Al medir los lados de un triángulo rectángulo se obtienen los valores de 5 y 12 centímetros, con un posible error de $\frac{1}{2}$ centímetro. Aproximar el error máximo posible al calcular la longitud de la hipotenusa. Aproximar el error porcentual máximo.

38. **Análisis de errores** Para determinar la altura de una torre, el ángulo de elevación a la parte superior de la torre se midió desde un punto a 100 pies $\pm \frac{1}{2}$ pie de la base. La medida del ángulo da 33° , con un posible error de 1° . Suponer que el suelo es horizontal, para aproximar el error máximo al determinar la altura de la torre.

39. **Volumen** Se mide un cono circular recto. Su radio y su altura son 2 y 5 pulgadas, respectivamente. El posible error de medición es $\frac{1}{8}$ de pulgada. Aproximar el error máximo posible en el cálculo del volumen.

40. **Superficie lateral** Aproximar el error en el cálculo de la superficie lateral del cono del ejercicio 39. (La superficie lateral está dada por $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.)

En los ejercicios 41 a 44, hallar las derivadas indicadas a) utilizando la regla de la cadena apropiada y b) por sustitución antes de derivar.

$$41. w = \ln(x^2 + y), \quad \frac{dw}{dt}$$

$$x = 2t, \quad y = 4 - t$$

$$42. u = y^2 - x, \quad \frac{du}{dt}$$

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

$$43. w = \frac{xy}{z}, \quad \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$x = 2r + t, \quad y = rt, \quad z = 2r - t$$

$$44. u = x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = t$$

En los ejercicios 45 y 46, derivar implícitamente para encontrar las primeras derivadas parciales de z .

$$45. x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 = 0 \quad 46. xz^2 - y \sin z = 0$$

En los ejercicios 47 a 50, hallar la derivada direccional de la función en P en la dirección de \mathbf{v} .

$$47. f(x, y) = x^2y, \quad (-5, 5), \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

$$48. f(x, y) = \frac{1}{4}y^2 - x^2, \quad (1, 4), \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$49. w = y^2 + xz, \quad (1, 2, 2), \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$50. w = 5x^2 + 2xy - 3y^2z, \quad (1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

En los ejercicios 51 a 54, hallar el gradiente de la función y el valor máximo de la derivada direccional en el punto dado.

$$51. z = x^2y, \quad (2, 1) \quad 52. z = e^{-x} \cos y, \quad \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$53. z = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (1, 1) \quad 54. z = \frac{x^2}{x - y}, \quad (2, 1)$$

En los ejercicios 55 y 56, a) encontrar el gradiente de la función en P , b) encontrar un vector normal a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en P , c) encontrar la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en P , y d) trazar la curva de nivel, el vector unitario normal y la recta tangente en el plano xy .

$$55. f(x, y) = 9x^2 - 4y^2 \quad 56. f(x, y) = 4y \sin x - y$$

$$c = 65, P(3, 2) \quad c = 3, P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$

En los ejercicios 57 a 60, hallar una ecuación del plano tangente y las ecuaciones paramétricas de la recta normal a la superficie en el punto dado.

Superficie	Punto
57. $f(x, y) = x^2y$	(2, 1, 4)
58. $f(x, y) = \sqrt{25 - y^2}$	(2, 3, 4)
59. $z = -9 + 4x - 6y - x^2 - y^2$	(2, -3, 4)
60. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$	(1, 2, 2)

En los ejercicios 61 y 62, hallar las ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto dado.

Superficies	Punto
61. $z = 9 - y^2, y = x$	(2, 2, 5)
62. $z = x^2 - y^2, z = 3$	(2, 1, 3)

63. Hallar el ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ en el punto (2, 1, 3).

64. **Aproximación** Considerar las aproximaciones siguientes a una función $f(x, y)$ centrada en (0, 0).

Aproximación lineal

$$P_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

Aproximación cuadrática

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2$$

[Observar que la aproximación lineal es el plano tangente a la superficie en (0, 0, $f(0, 0)$).]

- Hallar la aproximación lineal de $f(x, y) = \cos x + \sin y$ centrada en (0, 0).
- Hallar la aproximación cuadrática de $f(x, y) = \cos x + \sin y$ centrada en (0, 0).
- Si $y = 0$ en la aproximación cuadrática, ¿para qué función se obtiene el polinomio de Taylor de segundo grado?
- Completar la tabla.

x	y	$f(x, y)$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0			
0	0.1			
0.2	0.1			
0.5	0.3			
1	0.5			

CAS e) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente las superficies $z = f(x, y)$, $z = P_1(x, y)$ y $z = P_2(x, y)$. ¿Cómo varía la exactitud de las aproximaciones a medida que aumenta la distancia para (0, 0)?

CAS En los ejercicios 65 a 68, localizar los extremos relativos de la función. Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función y confirmar los resultados.

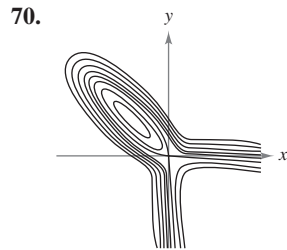
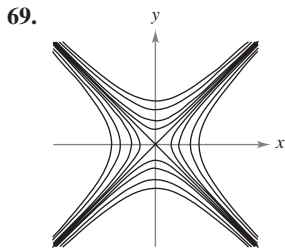
$$65. f(x, y) = 2x^2 + 6xy + 9y^2 + 8x + 14$$

$$66. f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 - 5x$$

$$67. f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$68. z = 50(x + y) - (0.1x^3 + 20x + 150) - (0.05y^3 + 20.6y + 125)$$

Redacción En los ejercicios 69 y 70, redactar un párrafo breve sobre la superficie cuyas curvas de nivel (los valores de c espacia-dos uniformemente) se muestran. Hacer un comentario acerca de los posibles extremos, puntos silla, la magnitud del gradiente, etcétera.



71. **Ganancia o beneficio máximo** Una corporación fabrica, en dos lugares, cámaras digitales. Las funciones de costo para producir x_1 unidades en el lugar 1 y x_2 unidades en el lugar 2 son

$$C_1 = 0.05x_1^2 + 15x_1 + 5400$$

$$C_2 = 0.03x_2^2 + 15x_2 + 6100$$

y la función del ingreso total es

$$R = [225 - 0.4(x_1 + x_2)](x_1 + x_2).$$

Hallar los niveles de producción en los dos lugares que maximizan el beneficio $P(x_1, x_2) = R - C_1 - C_2$.

72. **Costo mínimo** Un fabricante recibe una orden para 1 000 unidades de bancos de madera que pueden producirse en dos lugares. Sean x_1 y x_2 los números de unidades producidos en cada uno de los dos lugares. La función del costo es

$$C = 0.25x_1^2 + 10x_1 + 0.15x_2^2 + 12x_2.$$


Hallar la cantidad que debe producirse en cada lugar para satisfacer la orden y minimizar el costo.

73. **Nivel de producción** La función de producción de un fabricante de dulces es

$$f(x, y) = 4x + xy + 2y$$

donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital. Suponer que la cantidad total disponible para trabajo y capital es \$2 000, y que las unidades de trabajo y capital cuestan \$20 y \$4, respectivamente. Hallar el nivel de producción máximo de este fabricante.

74. Hallar la distancia mínima del punto $(2, 2, 0)$ a la superficie $z = x^2 + y^2$.

 75. **Modelo matemático** La tabla muestra la fuerza de fricción y en kilogramos de un vehículo de motor a las velocidades x , en kilómetros por hora, indicadas.

Velocidad, x	25	50	75	100	125
Fuerza de fricción, y	24	34	50	71	98

- Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar un modelo cuadrático de regresión por mínimos cuadrados para los datos.
- Utilizar el modelo para estimar la fuerza total de fricción cuando el vehículo está en movimiento a 80 kilómetros por hora.



76. **Modelo matemático** Los datos en la tabla muestran el rendimiento y (en miligramos) en una reacción química después de t minutos.

Minutos, t	1	2	3	4
Rendimiento, y	1.2	7.1	9.9	13.1

Minutos, t	5	6	7	8
Rendimiento, y	15.5	16.0	17.9	18.0

- Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos. Después utilizar la herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.
- Utilizar una herramienta de graficación para trazar los puntos $(\ln t, y)$. ¿Parecen seguir estos puntos un modelo lineal con más exactitud que los datos dados en el inciso a)?
- Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos $(\ln t, y)$ y obtener el modelo logarítmico $y = a + b \ln t$.
- Utilizar una herramienta de graficación para representar los datos y los modelos lineal y logarítmico. ¿Qué modelo es mejor? Explicar.

En los ejercicios 77 y 78, utilizar multiplicadores de Lagrange para localizar y clasificar todos los extremos de la función.

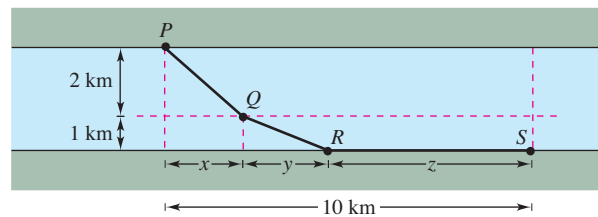
77. $w = xy + yz + xz$


Restricción: $x + y + z = 1$

78. $z = x^2y$

Restricción: $x + 2y = 2$

79. **Costo mínimo** Se va a construir un conducto para agua que va del punto P al punto S y que debe atravesar por regiones donde los costos de construcción difieren (ver la figura). El costo por kilómetro en dólares es $3k$ de P a Q , $2k$ de Q a R y k de R a S . Para simplificar, sea $k = 1$. Utilizar multiplicadores de Lagrange para localizar x , y y z tales que el costo total C se minimice.



 80. **Investigación** Considerar la función objetivo $f(x, y) = ax + by$ sujeta a la restricción $x^2/64 + y^2/36 = 1$. Suponer que x y y son positivas.

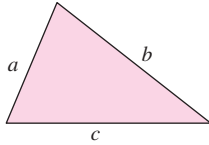
- Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la restricción o ligadura. Si $a = 4$ y $b = 3$, utilizar el sistema algebraico por computadora y representar gráficamente las curvas de nivel de la función objetivo. Mediante ensayo y error, hallar la curva de nivel que parece ser tangente a la elipse. Utilizar el resultado para aproximar el máximo de f sujeto a la restricción o ligadura.
- Repetir el inciso a) con $a = 4$ y $b = 9$.

SP Solución de problemas

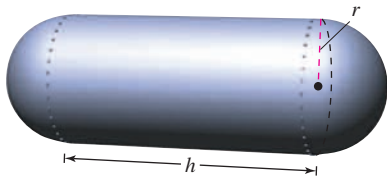
1. La **fórmula de Heron** establece que el área de un triángulo con lados de longitudes a , b y c está dada por

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

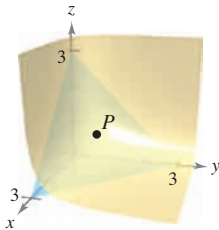
donde $s = \frac{a+b+c}{2}$, como se muestra en la figura.



- Utilizar la fórmula de Heron para calcular el área del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(3, 4)$ y $(6, 0)$.
 - Mostrar que, de todos los triángulos que tienen un mismo perímetro, el triángulo con el área mayor es un triángulo equilátero.
 - Mostrar que, de todos los triángulos que tienen una misma área, el triángulo con el perímetro menor es un triángulo equilátero.
2. Un tanque industrial tiene forma cilíndrica con extremos hemisféricos, como se muestra en la figura. El depósito debe almacenar 1 000 litros de fluido. Determinar el radio r y longitud h que minimizan la cantidad de material utilizado para la construcción del tanque.



3. Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en el primer octante en la superficie $xyz = 1$.
- Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto P .
 - Mostrar que el volumen del tetraedro formado en los tres planos de coordenadas y el plano tangente es constante, independiente del punto de tangencia (ver la figura).



4. Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$ y $g(x) = x$ en la misma pantalla.

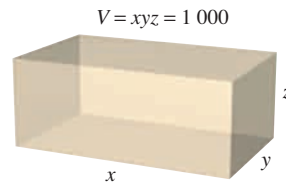
- Mostrar que $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$.

- Hallar el punto en la gráfica de f que está más alejado de la gráfica de g .

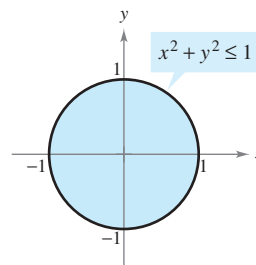
- Sean $f(x, y) = x - y$ y $g(x, y) = x^2 + y^2 = 4$. Graficar varias curvas de nivel de f y la restricción g en el plano xy . Usar la gráfica para determinar el valor mayor de f sujeto a la restricción $g = 4$. Después, verificar su resultado mediante los multiplicadores de Lagrange.

- Sean $f(x, y) = x - y$ y $g(x, y) = x^2 + y^2 = 0$. Encontrar los valores máximos y mínimos de f sujetos a la restricción $g = 0$. ¿Funcionará el método de los multiplicadores de Lagrange en este caso? Explicar.

6. Un cuarto caliente de almacenamiento tiene la forma de una caja rectangular y un volumen de 1 000 pies cúbicos, como se muestra en la figura. Como el aire caliente sube, la pérdida de calor por unidad de área a través del techo es cinco veces mayor que la pérdida de calor a través del suelo. La pérdida de calor a través de las cuatro paredes es tres veces mayor que la pérdida de calor a través del suelo. Determinar las dimensiones del cuarto que minimizan la pérdida de calor y que por consiguiente minimizan los costos de calefacción.



- Repetir el ejercicio 6 suponiendo que la pérdida de calor a través de las paredes y del techo sigue siendo la misma, pero el suelo se aísla de manera que no hay ninguna pérdida de calor a través del mismo.
- Considerar una placa circular de radio 1 dada por $x^2 + y^2 \leq 1$, como se muestra en la figura. La temperatura sobre cualquier punto $P(x, y)$ de la placa es $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y + 10$.



- Dibujar las isotermas $T(x, y) = 10$.
- Hallar el punto más caliente y el punto más frío de la placa.

9. Considerar la función de producción de Cobb-Douglas

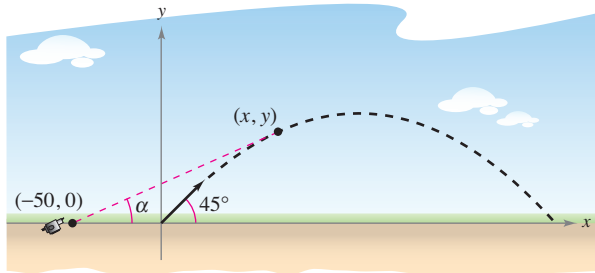
$$f(x, y) = Cx^a y^{1-a}, \quad 0 < a < 1.$$

- Mostrar que f satisface la ecuación $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = f$.

- Mostrar que $f(tx, ty) = tf(x, y)$.

10. Expresar la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ en coordenadas cilíndricas.

11. Un proyectil es lanzado a un ángulo de 45° respecto a la horizontal y con una velocidad inicial de 64 pies por segundo. Una cámara de televisión se localiza en el plano de la trayectoria del proyectil, 50 pies detrás del sitio del lanzamiento (ver la figura).



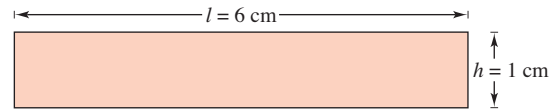
- Hallar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil en términos del parámetro t que representa tiempo.
 - Expresar el ángulo α que la cámara forma con la horizontal en términos de x y y y en términos de t .
 - Utilizar los resultados del inciso b) para calcular $d\alpha/dt$.
- A**
- Utilizar una herramienta de graficación para representar α en términos de t . ¿Es simétrica la gráfica respecto al eje del arco parabólico del proyectil? ¿En qué momento es mayor la razón de cambio de α ?
 - ¿En qué momento es máximo el ángulo α ? ¿Ocurre esto cuando el proyectil está a su mayor altura?
12. Considerar la distancia d entre el sitio del lanzamiento y el proyectil del ejercicio 11.
- Expresar la distancia d en términos de x y y y en términos del parámetro t .
 - Utilizar los resultados del inciso a) para hallar la razón de cambio de d .
 - Hallar la razón de cambio de la distancia cuando $t = 2$.
 - Durante el vuelo del proyectil, ¿cuándo es mínima la razón o cambio de d ? ¿Ocurre esto en el momento en el que el proyectil alcanza su altura máxima?

CAS 13. Considerar la función

$$f(x, y) = (\alpha x^2 + \beta y^2)e^{-(x^2+y^2)}, \quad 0 < |\alpha| < \beta.$$

- Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función empleando $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, e identificar todos los extremos o puntos silla.
 - Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función empleando $\alpha = -1$ y $\beta = 2$, e identificar todos los extremos o puntos silla.
 - Generalizar los resultados de los incisos a) y b) para la función f .
14. Demostrar que si f es una función diferenciable tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ entonces el plano tangente en (x_0, y_0) es horizontal.

15. La figura muestra un rectángulo que tiene aproximadamente $l = 6$ centímetros de largo y $h = 1$ centímetro de altura.



- Dibujar una franja rectangular a lo largo de la región rectangular que muestre un pequeño incremento en la longitud.
 - Dibuje una franja rectangular a lo largo de la región rectangular que muestre un pequeño incremento en la altura.
 - Utilizar los resultados en los incisos a) y b) para identificar la medida que tiene mayor efecto en el área A del rectángulo.
 - Verificar analíticamente la respuesta dada en el inciso c) comparando los valores de dA cuando $dl = 0.01$ y cuando $dh = 0.01$.
16. Considerar convertir un punto $(5 \pm 0.05, \pi/18 \pm 0.05)$ en coordenadas polares a coordenadas rectangulares (x, y) .
- Utilizar un argumento geométrico para determinar si la exactitud en x depende más de la exactitud en r o de la exactitud en θ . Explicar. Verificar analíticamente la respuesta.
 - Utilizar un argumento geométrico para determinar si la exactitud en y depende más de la exactitud en r o de la exactitud en θ . Explicar. Verificar analíticamente la respuesta.
17. Sea f una función de una variable derivable. Mostrar que los planos tangentes a la superficie $z = yf(x/y)$ se cortan en un punto común.
18. Considerar la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que encierra el círculo $x^2 + y^2 = 2x$. Hallar los valores de a y b que minimizan el área de la elipse.

19. Mostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\text{sen}(x - t) + \text{sen}(x + t)]$$

es una solución a la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

20. Mostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)]$$

es una solución a la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(Esta ecuación describe la vibración transversal pequeña de una cuerda elástica como las de ciertos instrumentos musicales.)

14

Integración múltiple

En este capítulo se introduce el concepto de integrales dobles sobre regiones en el plano e integrales triples sobre regiones en el espacio.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo evaluar una integral iterada y encontrar el área de una región plana. (14.1)
- Cómo usar una integral doble para encontrar el volumen de una región sólida. (14.2)
- Cómo escribir y evaluar integrales dobles en coordenadas polares. (14.3)
- Cómo encontrar la masa de una lámina plana, el centro de masa de una lámina plana y los momentos de inercia usando integrales dobles. (14.4)
- Cómo usar una integral doble para encontrar el área de una superficie. (14.5)
- Cómo usar una integral triple para encontrar el volumen, centro de masa y momentos de inercia de una región sólida. (14.6)
- Cómo escribir y evaluar integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas. (14.7)
- Cómo usar un jacobiano para cambiar variables en una integral doble. (14.8)



Langley Photography/Getty Images

El centro de presión de una vela es ese punto en el cual la fuerza total aerodinámica puede considerarse que actúa. Ya que la vela es representada por una región plana, ¿cómo se pueden usar las integrales dobles para encontrar el centro de presión sobre una vela? (Ver sección 14.4, sección proyecto.)



Se puede aproximar el volumen de una región sólida encontrando la suma de los volúmenes de prismas rectangulares representativos. Como aumenta el número de prismas rectangulares, la aproximación tiende a ser más y más exacta. En el capítulo 14 se aprenderá a usar integrales múltiples para encontrar el volumen de una región sólida.

14.1 Integrales iteradas y área en el plano

- Evaluar una integral iterada.
- Utilizar una integral iterada para hallar el área de una región plana.

NOTA En los capítulos 14 y 15 se estudiarán varias aplicaciones de la integración de funciones de varias variables. Este capítulo es muy similar al capítulo 7 ya que ilustra el uso de la integración para hallar áreas planas, volúmenes, áreas de superficies, momentos y centros de masa. ■

Integrales iteradas

En el capítulo 13 se vio cómo derivar funciones de varias variables con respecto a una variable manteniendo constantes las demás variables. Empleando un procedimiento similar se pueden *integrar* funciones de varias variables. Por ejemplo, dada la derivada parcial

$$f_x(x, y) = 2xy$$

entonces, considerando y y constante, se puede integrar con respecto a x para obtener

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int f_x(x, y) \, dx && \text{Integrar con respecto a } x. \\ &= \int 2xy \, dx && \text{Mantener y constante.} \\ &= y \int 2x \, dx && \text{Sacar y como factor constante.} \\ &= y(x^2) + C(y) && \text{Una primitiva (o antiderivada) de } 2x \text{ es } x^2. \\ &= x^2y + C(y). && C(y) \text{ es una función de } y. \end{aligned}$$

La “constante” de integración, $C(y)$, es una función de y . En otras palabras, al integrar con respecto a x , se puede recobrar $f(x, y)$ sólo parcialmente. Cómo recobrar totalmente una función de x y y a partir de sus derivadas parciales es un tema que se estudiará en el capítulo 15. Por ahora, lo que interesa es extender las integrales definidas a funciones de varias variables. Por ejemplo, al considerar y constante, se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo para evaluar

$$\int_1^{2y} 2xy \, dx = x^2y \Big|_1^{2y} = (2y)^2y - (1)^2y = 4y^3 - y.$$

↑ x es la variable de integración y y es fija.
 ↑ Sustituir x por los límites de integración.
 ↑ El resultado es una función de y .

De manera similar se puede integrar con respecto a y , manteniendo x fija. Ambos procedimientos se resumen como sigue.

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x, y) \, dx = f(x, y) \Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y), y) - f(h_1(y), y) \quad \text{Con respecto a } x.$$

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x, y) \, dy = f(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x, g_2(x)) - f(x, g_1(x)) \quad \text{Con respecto a } y.$$

Nótese que la variable de integración no puede aparecer en ninguno de los límites de integración. Por ejemplo, no tiene ningún sentido escribir

$$\int_0^x y \, dx.$$

EJEMPLO 1 Integrar con respecto a y

Evaluar $\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) dy$.

Solución Se considera x constante y se integra con respecto a y , con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) dy &= \left[\frac{-2x^2}{y} + y^2 \right]_1^x && \text{Integrar con respecto a } y. \\ &= \left(\frac{-2x^2}{x} + x^2 \right) - \left(\frac{-2x^2}{1} + 1 \right) \\ &= 3x^2 - 2x - 1. \end{aligned}$$

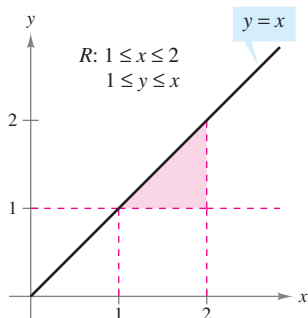
En el ejemplo 1 nótese que la integral define una función de x que puede ser integrada *ella misma*, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 La integral de una integral

Evaluar $\int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) dy \right] dx$.

Solución Utilizando el resultado del ejemplo 1, se tiene

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) dy \right] dx &= \int_1^2 (3x^2 - 2x - 1) dx \\ &= \left[x^3 - x^2 - x \right]_1^2 && \text{Integrar con respecto a } x. \\ &= 2 - (-1) \\ &= 3. \end{aligned}$$



La región de integración para

$$\int_1^2 \int_1^x f(x, y) dy dx$$

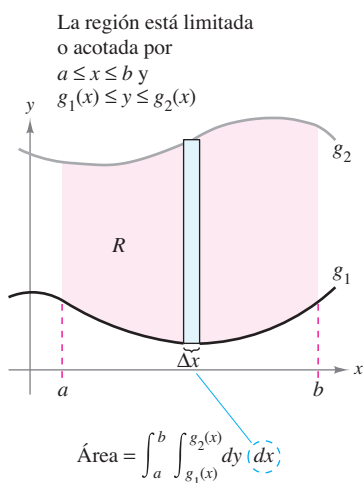
Figura 14.1

La integral del ejemplo 2 es una **integral iterada**. Los corchetes usados en el ejemplo 2 normalmente no se escriben. Las integrales iteradas se escriben normalmente como

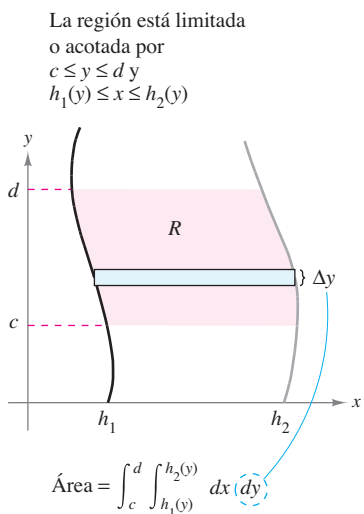
$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \quad \text{y} \quad \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Los **límites interiores de integración** pueden ser variables con respecto a la variable exterior de integración. Sin embargo, los **límites exteriores de integración** deben ser constantes con respecto a ambas variables de integración. Después de realizar la integración interior, se obtiene una integral definida “ordinaria” y la segunda integración produce un número real. Los límites de integración de una integral iterada definen dos intervalos para las variables. Así, en el ejemplo 2, los límites exteriores indican que x está en el intervalo $1 \leq x \leq 2$ y los límites interiores indican que y está en el intervalo $1 \leq y \leq x$. Juntos, estos dos intervalos determinan la **región de integración R** de la integral iterada, como se muestra en la figura 14.1.

Como una integral iterada es simplemente un tipo especial de integral definida, en el que el integrando es también una integral, se pueden utilizar las propiedades de las integrales definidas para evaluar integrales iteradas.



Región verticalmente simple
Figura 14.2



Región horizontalmente simple
Figura 14.3

Área de una región plana

En el resto de esta sección se verá desde una perspectiva nueva un viejo problema, el de hallar el área de una región plana. Considérese la región plana R acotada por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, como se muestra en la figura 14.2. El área de R está dada por la integral definida

$$\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx. \quad \text{Área de } R.$$

Usando el teorema fundamental del cálculo, se puede reescribir el integrando $g_2(x) - g_1(x)$ como una integral definida. Concretamente, si se considera x fija y se deja que y varíe desde $g_1(x)$ hasta $g_2(x)$, se puede escribir

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy = y \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = g_2(x) - g_1(x).$$

Combinando estas dos integrales, se puede expresar el área de la región R mediante una integral iterada

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx &= \int_a^b y \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx && \text{Área de } R. \\ &= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx. \end{aligned}$$

Colocar un rectángulo representativo en la región R ayuda a determinar el orden y los límites de integración. Un rectángulo vertical implica el orden $dy dx$, donde los límites interiores corresponden a los límites o cotas superior e inferior del rectángulo, como se muestra en la figura 14.2. Este tipo de región se llama **verticalmente simple**, porque los límites exteriores de integración representan las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

De manera similar, un rectángulo horizontal implica el orden $dx dy$, donde los límites interiores están determinados por los límites o cotas izquierda y derecha del rectángulo, como se muestra en la figura 14.3. Este tipo de región se llama **horizontalmente simple**, porque los límites exteriores representan las rectas horizontales $y = c$ y $y = d$. Las integrales iteradas utilizadas en estos dos tipos de regiones simples se resumen como sigue.

ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL PLANO

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, R está dada por

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx. \quad \text{Figura 14.2 (verticalmente simple).}$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces el área de R está dada por

$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx dy. \quad \text{Figura 14.3 (horizontalmente simple).}$$

NOTA Hay que observar que en estas dos integrales el orden de integración es diferente; el orden $dy dx$ corresponde a una región verticalmente simple, y el orden $dx dy$ corresponde a una región horizontalmente simple. ■

Si los cuatro límites de integración son constantes, la región de integración es rectangular, como ocurre en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Área de una región rectangular

Utilizar una integral iterada para representar el área del rectángulo que se muestra en la figura 14.4.

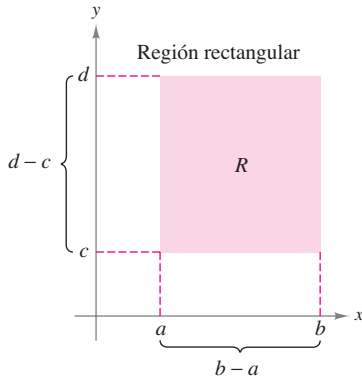


Figura 14.4

Solución La región de la figura 14.4 es verticalmente simple y horizontalmente simple, por tanto se puede emplear cualquier orden de integración. Eligiendo el orden $dy dx$, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d dy dx &= \int_a^b y \Big|_c^d dx && \text{Integrar con respecto a } y. \\ &= \int_a^b (d - c) dx \\ &= \left[(d - c)x \right]_a^b && \text{Integrar con respecto a } x. \\ &= (d - c)(b - a) \end{aligned}$$

Nótese que esta respuesta es consistente con los conocimientos de la geometría.

EJEMPLO 4 Hallar el área por medio de una integral iterada

Utilizar una integral iterada para hallar el área de la región limitada o acotada por las gráficas de

$$f(x) = \text{sen } x$$

La curva seno constituye el límite o cota superior.

$$g(x) = \text{cos } x$$

La curva coseno constituye el límite o cota inferior.

$$\text{entre } x = \pi/4 \text{ y } x = 5\pi/4.$$

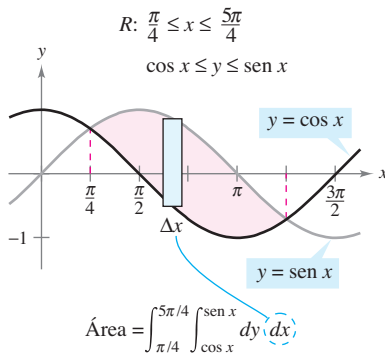


Figura 14.5

Solución Como f y g se dan como funciones de x , es conveniente un rectángulo representativo vertical, y se puede elegir $dy dx$ como orden de integración, como se muestra en la figura 14.5. Los límites exteriores de integración son $\pi/4 \leq x \leq 5\pi/4$. Dado que el rectángulo está limitado o acotado, superiormente por $f(x) = \text{sen } x$ e inferiormente por $g(x) = \text{cos } x$, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Área de } R &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{\text{cos } x}^{\text{sen } x} dy dx \\ &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} y \Big|_{\text{cos } x}^{\text{sen } x} dx && \text{Integrar con respecto a } y. \\ &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\text{sen } x - \text{cos } x) dx \\ &= \left[-\text{cos } x - \text{sen } x \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} && \text{Integrar con respecto a } x. \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

NOTA La región de integración en una integral iterada no necesariamente debe estar acotada por rectas. Por ejemplo, la región de integración que se muestra en la figura 14.5 es *verticalmente simple* aun cuando no tiene rectas verticales como fronteras izquierda y derecha. Lo que hace que la región sea verticalmente simple es que está limitada o acotada superiormente e inferiormente por gráficas de *funciones de x*.

Con frecuencia, uno de los órdenes de integración hace que un problema de integración resulte más sencillo de como resulta con el otro orden de integración. Por ejemplo, hacer de nuevo el ejemplo 4 con el orden $dx dy$; sorprenderá ver que la tarea es formidable. Sin embargo, si se llega al resultado, se verá que la respuesta es la misma. En otras palabras, el orden de integración afecta la complejidad de la integración, pero no el valor de la integral.

EJEMPLO 5 Comparación de diferentes órdenes de integración

Dibujar la región cuya área está representada por la integral

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx dy.$$

Después hallar otra integral iterada que utilice el orden $dy dx$ para representar la misma área y mostrar que ambas integrales dan el mismo valor.

Solución De acuerdo con los límites de integración dados, se sabe que

$$y^2 \leq x \leq 4 \quad \text{Límites interiores de integración.}$$

lo cual significa que la región R está limitada o acotada a la izquierda por la parábola $x = y^2$ y a la derecha por la recta $x = 4$. Además, como

$$0 \leq y \leq 2 \quad \text{Límites exteriores de integración.}$$

se sabe que R está limitada o acotada inferiormente por el eje x , como se muestra en la figura 14.6a. El valor de esta integral es

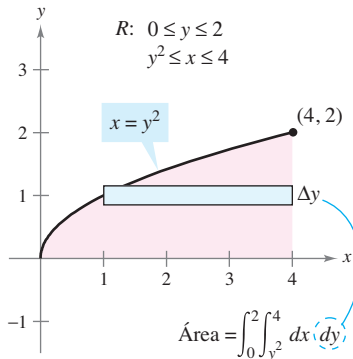
$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{y^2}^4 dx dy &= \int_0^2 x \Big|_{y^2}^4 dy && \text{Integrar con respecto a } x. \\ &= \int_0^2 (4 - y^2) dy \\ &= \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3}. && \text{Integrar con respecto a } y. \end{aligned}$$

Para cambiar el orden de integración a $dy dx$, se coloca un rectángulo vertical en la región, como se muestra en la figura 14.6b. Con esto se puede ver que los límites o cotas constantes $0 \leq x \leq 4$ sirven como límites exteriores de integración. Despejando y de la ecuación $x = y^2$, se concluye que los límites interiores son $0 \leq y \leq \sqrt{x}$. Por tanto, el área de la región también se puede representar por

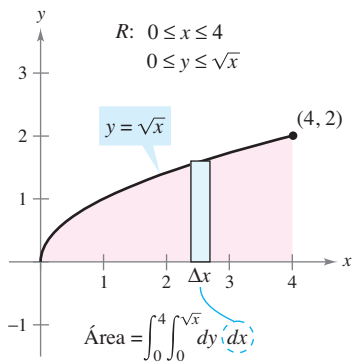
$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy dx.$$

Evaluando esta integral, se ve que tiene el mismo valor que la integral original.

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy dx &= \int_0^4 y \Big|_0^{\sqrt{x}} dx && \text{Integrar con respecto a } y. \\ &= \int_0^4 \sqrt{x} dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} && \text{Integrar con respecto a } x. \end{aligned}$$



a)



b)

Figura 14.6

Algunas veces no es posible calcular el área de una región con una sola integral iterada. En estos casos se divide la región en subregiones de manera que el área de cada subregión pueda calcularse por medio de una integral iterada. El área total es entonces la suma de las integrales iteradas.

TECNOLOGÍA Algunos paquetes de software pueden efectuar integración simbólica de integrales como las del ejemplo 6. Tales programas se pueden utilizar para evaluar las integrales de los ejercicios y ejemplos dados en esta sección.

EJEMPLO 6 Un área representada por dos integrales iteradas

Hallar el área de la región R que se encuentra bajo la parábola

$$y = 4x - x^2 \quad \text{La parábola forma el límite o cota superior.}$$

sobre el eje x , y sobre la recta

$$y = -3x + 6. \quad \text{La recta y el eje } x \text{ forman el límite o cota inferior.}$$

Solución Para empezar se divide R en dos subregiones R_1 y R_2 como se muestra en la figura 14.7.

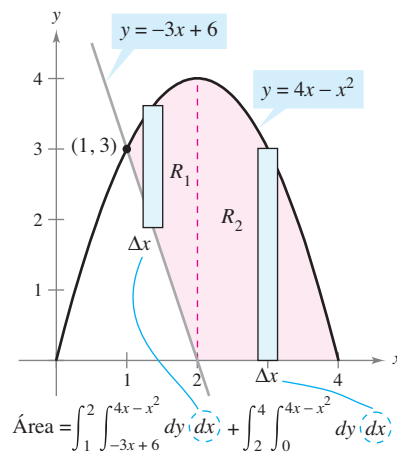


Figura 14.7

En ambas regiones es conveniente usar rectángulos verticales y se tiene

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dy \, dx + \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dy \, dx \\ &= \int_1^2 (4x - x^2 + 3x - 6) \, dx + \int_2^4 (4x - x^2) \, dx \\ &= \left[\frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x \right]_1^2 + \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_2^4 \\ &= \left(14 - \frac{8}{3} - 12 - \frac{7}{2} + \frac{1}{3} + 6 \right) + \left(32 - \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3} \right) = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

El área de la región es $15/2$ unidades cuadradas. Tratar de comprobar el resultado usando el procedimiento para hallar el área entre dos curvas, que se presentó en la sección 7.1.

NOTA En los ejemplos 3 a 6, hay que observar la ventaja de dibujar la región de integración. Se recomienda desarrollar el hábito de hacer dibujos como ayuda para determinar los límites de integración de todas las integrales iteradas de este capítulo. ■

En este punto, uno se puede preguntar para qué se necesitan las integrales iteradas. Después de todo, ya se sabe usar la integración convencional para hallar el área de una región en el plano. (Por ejemplo, comparar la solución del ejemplo 4 de esta sección con la del ejemplo 3 en la sección 7.1.) La necesidad de las integrales iteradas será más clara en la sección siguiente. En esta sección se presta especial atención a los procedimientos para determinar los límites de integración de las integrales iteradas, y el conjunto de ejercicios siguiente está diseñado para adquirir práctica en este procedimiento importante.

14.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, evaluar la integral.

- | | |
|---|---|
| 1. $\int_0^x (x + 2y) dy$ | 2. $\int_x^{x^2} \frac{y}{x} dy$ |
| 3. $\int_1^{2y} \frac{y}{x} dx, y > 0$ | 4. $\int_0^{\cos y} y dx$ |
| 5. $\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y dy$ | 6. $\int_{x^3}^{\sqrt{x}} (x^2 + 3y^2) dy$ |
| 7. $\int_{e^y}^y \frac{y \ln x}{x} dx, y > 0$ | 8. $\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx$ |
| 9. $\int_0^{x^3} ye^{-y/x} dy$ | 10. $\int_y^{\pi/2} \sin^3 x \cos y dx$ |

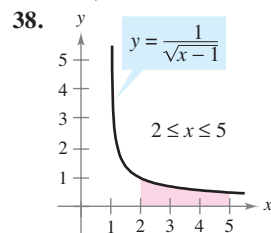
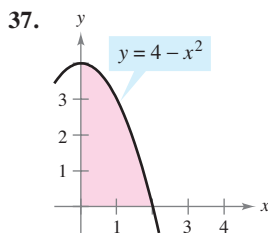
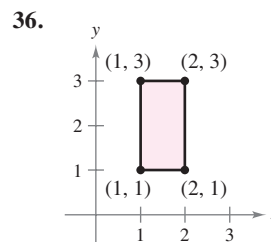
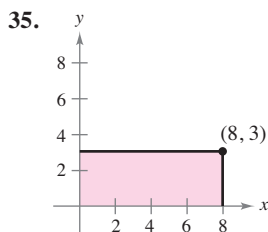
En los ejercicios 11 a 30, evaluar la integral iterada.

- | | |
|---|--|
| 11. $\int_0^1 \int_0^2 (x + y) dy dx$ | 12. $\int_{-1}^1 \int_{-2}^2 (x^2 - y^2) dy dx$ |
| 13. $\int_1^2 \int_0^4 (x^2 - 2y^2) dx dy$ | 14. $\int_{-1}^2 \int_1^3 (x + y^2) dx dy$ |
| 15. $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 y \cos x dy dx$ | 16. $\int_0^{\ln 4} \int_0^{\ln 3} e^{x+y} dy dx$ |
| 17. $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} (1 + \cos x) dy dx$ | |
| 18. $\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x} dy dx$ | |
| 19. $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2} dy dx$ | 20. $\int_{-4}^4 \int_0^{x^2} \sqrt{64-x^3} dy dx$ |
| 21. $\int_{-1}^5 \int_0^{3y} \left(3 + x^2 + \frac{1}{4}y^2\right) dx dy$ | |
| 22. $\int_0^2 \int_y^{2y} (10 + 2x^2 + 2y^2) dx dy$ | |
| 23. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x + y) dx dy$ | 24. $\int_0^2 \int_{3y^2-6y}^{2y-y^2} 3y dx dy$ |
| 25. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}} dx dy$ | 26. $\int_1^3 \int_0^y \frac{4}{x^2 + y^2} dx dy$ |
| 27. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r dr d\theta$ | 28. $\int_0^{\pi/4} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3} \cos \theta} r dr d\theta$ |
| 29. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin \theta} \theta r dr d\theta$ | |
| 30. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \theta} 3r^2 \sin \theta dr d\theta$ | |

En los ejercicios 31 a 34, evaluar la integral iterada impropia.

- | | |
|--|--|
| 31. $\int_1^{\infty} \int_0^{1/x} y dy dx$ | 32. $\int_0^1 \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+y^2} dy dx$ |
| 33. $\int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{xy} dx dy$ | 34. $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} xye^{-(x^2+y^2)} dx dy$ |

En los ejercicios 35 a 38, utilizar una integral iterada para hallar el área de la región.



En los ejercicios 39 a 46, utilizar una integral iterada para calcular el área de la región limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones.

39. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, x = 0, y = 0$
 40. $y = x^{3/2}, y = 2x$
 41. $2x - 3y = 0, x + y = 5, y = 0$
 42. $xy = 9, y = x, y = 0, x = 9$
 43. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
 44. $y = x, y = 2x, x = 2$
 45. $y = 4 - x^2, y = x + 2$
 46. $x^2 + y^2 = 4, x = 0, y = 0$

En los ejercicios 47 a 54, dibujar la región R de integración y cambiar el orden de integración.

- | | |
|---|---|
| 47. $\int_0^4 \int_0^y f(x, y) dx dy$ | 48. $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx dy$ |
| 49. $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx$ | 50. $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy dx$ |
| 51. $\int_1^{10} \int_0^{\ln y} f(x, y) dx dy$ | 52. $\int_{-1}^2 \int_0^{e^{-x}} f(x, y) dy dx$ |
| 53. $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) dy dx$ | 54. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos x} f(x, y) dy dx$ |

En los ejercicios 55 a 64, dibujar la región R cuya área está dada por la integral iterada. Después cambiar el orden de integración y mostrar que ambos órdenes dan la misma área.

- | | |
|--|---|
| 55. $\int_0^1 \int_0^2 dy dx$ | 56. $\int_1^2 \int_2^4 dx dy$ |
| 57. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy$ | 58. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy dx$ |

59. $\int_0^2 \int_0^{2x} dy dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dy dx$

60. $\int_0^4 \int_0^{x/2} dy dx + \int_4^6 \int_0^{6-x} dy dx$

61. $\int_0^2 \int_{x/2}^1 dy dx$

62. $\int_0^9 \int_{\sqrt{x}}^3 dy dx$

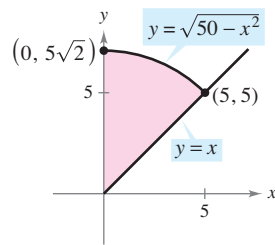
63. $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx dy$

64. $\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} dx dy$

65. **Para pensar** Dar un argumento geométrico para la igualdad. Verificar la igualdad analíticamente.

$$\int_0^5 \int_x^{\sqrt{50-x^2}} x^2 y^2 dy dx =$$

$$\int_0^5 \int_0^y x^2 y^2 dx dy + \int_5^{5\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{50-y^2}} x^2 y^2 dx dy$$

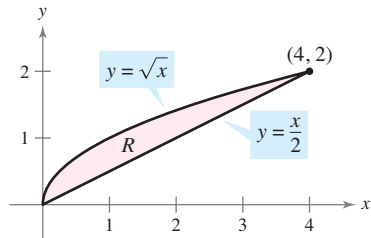


Para discusión

66. **Para pensar** Completar las integrales iteradas en forma tal que cada una represente el área de la región R (ver la figura). Entonces demostrar que ambas integrales tienen la misma área.

a) Área = $\iint dx dy$

b) Área = $\iint dy dx$



En los ejercicios 67 a 72, trazar la región de integración. Después evaluar la integral iterada. (Observar que es necesario cambiar el orden de integración.)

67. $\int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1+y^3} dy dx$

68. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{3}{2+y^3} dy dx$

69. $\int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2} dy dx$

70. $\int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2} dy dx$

71. $\int_0^1 \int_y^1 \sin x^2 dx dy$

72. $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \sqrt{x} \sin x dx dy$

CAS En los ejercicios 73 a 76, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral iterada.

73. $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 3y^2) dy dx$

74. $\int_0^1 \int_y^{2y} \sin(x+y) dx dy$

75. $\int_0^4 \int_0^y \frac{2}{(x+1)(y+1)} dx dy$

76. $\int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy dx$

CAS En los ejercicios 77 y 78, a) dibujar la región de integración, b) cambiar el orden de integración y c) usar un sistema algebraico por computadora y mostrar que ambos órdenes dan el mismo valor.

77. $\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} (x^2 y - xy^2) dx dy$

78. $\int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2/4} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1} dy dx$

CAS En los ejercicios 79 a 82, usar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral iterada.

79. $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} e^{-xy} dy dx$

80. $\int_0^2 \int_x^2 \sqrt{16-x^3-y^3} dy dx$

81. $\int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} 6r^2 \cos\theta dr d\theta$

82. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{1+\cos\theta} 15\theta r dr d\theta$

Desarrollo de conceptos

- 83. Explicar qué se quiere decir con una integral iterada. ¿Cómo se evalúa?
- 84. Describir regiones que sean verticalmente simples y regiones que sean horizontalmente simples.
- 85. Dar una descripción geométrica de la región de integración si los límites interiores y exteriores de integración son constantes.
- 86. Explicar por qué algunas veces es una ventaja cambiar el orden de integración.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 87 y 88, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.

87. $\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy$

88. $\int_0^1 \int_0^x f(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_0^y f(x,y) dx dy$

14.2 Integrales dobles y volumen

- Utilizar una integral doble para representar el volumen de una región sólida.
- Utilizar las propiedades de las integrales dobles.
- Evaluar una integral doble como una integral iterada.
- Hallar el valor promedio de una función sobre una región.

Integrales dobles y volumen de una región sólida

Se sabe que una integral definida sobre un *intervalo* utiliza un proceso de límite para asignar una medida a cantidades como el área, el volumen, la longitud de arco y la masa. En esta sección, se usará un proceso similar para definir la **integral doble** de una función de dos variables sobre una *región en el plano*.

Considérese una función continua f tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en una región R del plano xy . El objetivo es hallar el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie dada por

$$z = f(x, y) \quad \text{Superficie sobre el plano } xy.$$

y el plano xy , como se muestra en la figura 14.8. Para empezar se sobrepone una red o cuadrícula rectangular sobre la región, como se muestra en la figura 14.9. Los rectángulos que se encuentran completamente dentro de R forman una **partición interior** Δ , cuya **norma** $\|\Delta\|$ está definida como la longitud de la diagonal más larga de los n rectángulos. Después, se elige un punto (x_i, y_i) en cada rectángulo y se forma el prisma rectangular cuya altura es $f(x_i, y_i)$, como se muestra en la figura 14.10. Como el área del i -ésimo rectángulo es

$$\Delta A_i \quad \text{Área del rectángulo } i\text{-ésimo.}$$

se sigue que el volumen del prisma i -ésimo es

$$f(x_i, y_i) \Delta A_i \quad \text{Volumen del prisma } i\text{-ésimo.}$$

y el volumen de la región sólida se puede aproximar por la suma de Riemann de los volúmenes de todos los n prismas,

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i \quad \text{Suma de Riemann.}$$

como se muestra en la figura 14.11. Esta aproximación se puede mejorar tomando redes o cuadrículas con rectángulos más y más pequeños, como se muestra en el ejemplo 1.

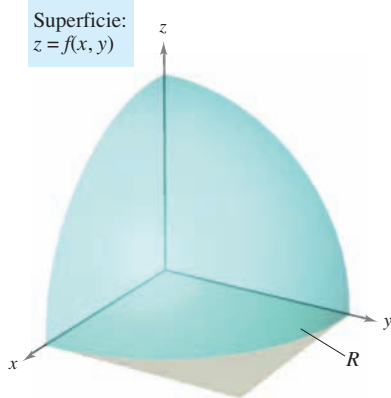
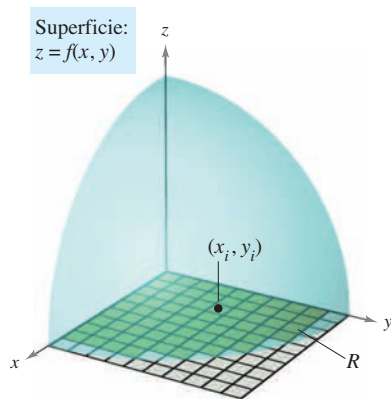
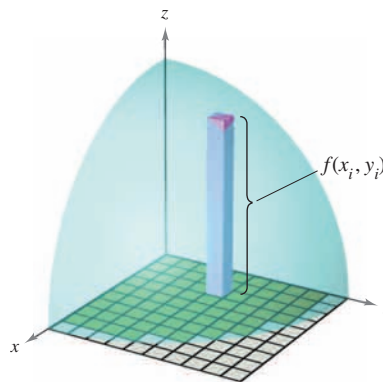


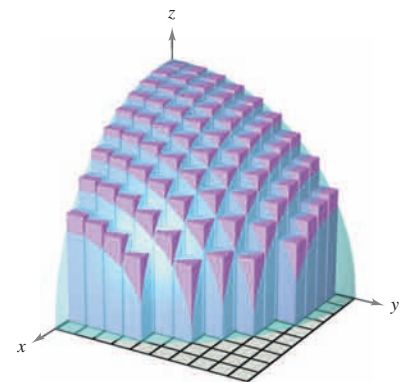
Figura 14.8



Los rectángulos que se encuentran dentro de R forman una partición interior de R
Figura 14.9



Prisma rectangular cuya base tiene un área de ΔA_i y cuya altura es $f(x_i, y_i)$
Figura 14.10



Volumen aproximado por prismas rectangulares
Figura 14.11

EJEMPLO 1 Aproximar el volumen de un sólido

Aproximar el volumen del sólido comprendido entre el paraboloides

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

y la región cuadrada R dada por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Utilizar una partición formada por los cuadrados cuyos lados tengan una longitud de $\frac{1}{4}$.

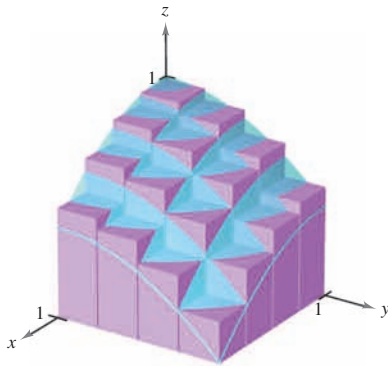
Solución Para empezar se forma la partición especificada de R . En esta partición, es conveniente elegir los centros de las subregiones como los puntos en los que se evalúa $f(x, y)$.

$$\begin{array}{cccc} \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) \\ \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right) \\ \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right) \\ \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right) \end{array}$$

Como el área de cada cuadrado es $\Delta A_i = \frac{1}{16}$, el volumen se puede aproximar por la suma

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{16} f(x_i, y_i) \Delta A_i &= \sum_{i=1}^{16} \left(1 - \frac{1}{2}x_i^2 - \frac{1}{2}y_i^2\right) \left(\frac{1}{16}\right) \\ &\approx 0.672. \end{aligned}$$

Esta aproximación se muestra gráficamente en la figura 14.12. El volumen exacto del sólido es $\frac{2}{3}$ (ver el ejemplo 2). Se obtiene una mejor aproximación si se usa una partición más fina. Por ejemplo, con una partición con cuadrados con lados de longitud $\frac{1}{10}$, la aproximación es 0.668.



Superficie:
 $f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

Figura 14.12

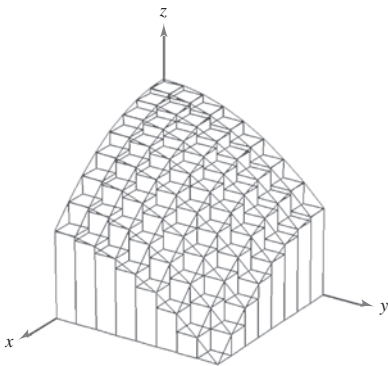


Figura 14.13

TECNOLOGÍA Algunas herramientas de graficación tridimensionales pueden representar figuras como la mostrada en la figura 14.12. La gráfica mostrada en la figura 14.13 se dibujó con una herramienta de graficación. En esta gráfica, obsérvese que cada uno de los prismas rectangulares está dentro de la región sólida.

En el ejemplo 1, hay que observar que, usando particiones más finas, se obtienen mejores aproximaciones al volumen. Esta observación sugiere que se podría obtener el volumen exacto tomando un límite. Es decir,

$$\text{Volumen} = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i.$$

El significado exacto de este límite es que el límite es igual a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left| L - \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i \right| < \varepsilon$$

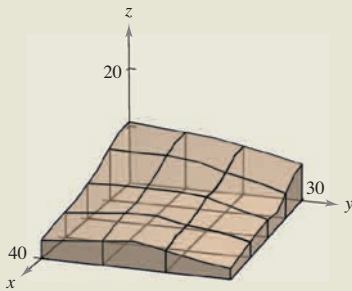
para toda partición Δ de la región plana R (que satisfaga $\|\Delta\| < \delta$) y para toda elección posible de x_i y y_i en la región i -ésima.

El uso del límite de una suma de Riemann para definir un volumen es un caso especial del uso del límite para definir una **integral doble**. Sin embargo, el caso general no requiere que la función sea positiva o continua.

EXPLORACIÓN

Las cantidades en la tabla representan la profundidad (en unidades de 10 yardas) de la tierra en el centro de cada cuadrado de la figura.

$x \backslash y$	1	2	3
1	10	9	7
2	7	7	4
3	5	5	4
4	4	5	3



Aproximar el número de yardas cúbicas de tierra en el primer octante. (Esta exploración la sugirió Robert Vojack, Ridgewood High School, Ridgewood, NJ.)

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DOBLE

Si f está definida en una región cerrada y acotada R del plano xy , entonces la **integral doble de f sobre R** está dada por

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i$$

siempre que el límite exista. Si existe el límite, entonces f es **integrable** sobre R .

NOTA Una vez definidas las integrales dobles, se verá que una integral definida ocasionalmente se llama **integral simple**.

Para que la integral doble de f en la región R exista es suficiente que R pueda expresarse como la unión de un número finito de subregiones que no se sobrepongan (ver la figura 14.14) y que sean vertical u horizontalmente simples, y que f sea continua en la región R .

Una integral doble se puede usar para hallar el volumen de una región sólida que se encuentra entre el plano xy y la superficie dada por $z = f(x, y)$.

VOLUMEN DE UNA REGIÓN SÓLIDA

Si f es integrable sobre una región plana R y $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en R , entonces el volumen de la región sólida que se encuentra sobre R y bajo la gráfica de f se define como

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA.$$

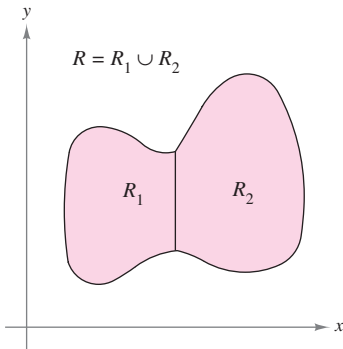
Propiedades de las integrales dobles

Las integrales dobles tienen muchas de las propiedades de las integrales simples.

TEOREMA 14.1 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DOBLES

Sean f y g continuas en una región cerrada y acotada R del plano, y sea c una constante.

- $\iint_R cf(x, y) \, dA = c \iint_R f(x, y) \, dA$
- $\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)] \, dA = \iint_R f(x, y) \, dA \pm \iint_R g(x, y) \, dA$
- $\iint_R f(x, y) \, dA \geq 0$, si $f(x, y) \geq 0$
- $\iint_R f(x, y) \, dA \geq \iint_R g(x, y) \, dA$, si $f(x, y) \geq g(x, y)$
- $\iint_R f(x, y) \, dA = \iint_{R_1} f(x, y) \, dA + \iint_{R_2} f(x, y) \, dA$, donde R es la unión de dos subregiones R_1 y R_2 que no se sobreponen.



Dos regiones no se sobreponen si su intersección es un conjunto de área 0. En esta figura, el área del segmento de la recta común a R_1 y R_2 es 0

Figura 14.14

Evaluación de integrales dobles

Normalmente, el primer paso para evaluar una integral doble es reescribirla como una integral iterada. Para mostrar cómo se hace esto, se utiliza el modelo geométrico de una integral doble: el volumen de un sólido.

Considérese la región sólida acotada por el plano $z = f(x, y) = 2 - x - 2y$ y por los tres planos coordenados, como se muestra en la figura 14.15. Cada sección transversal vertical paralela al plano yz es una región triangular cuya base tiene longitud $y = (2 - x)/2$ y cuya altura es $z = 2 - x$. Esto implica que para un valor fijo de x , el área de la sección transversal triangular es

$$A(x) = \frac{1}{2} (\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2} \left(\frac{2-x}{2} \right) (2-x) = \frac{(2-x)^2}{4}.$$

De acuerdo con la fórmula para el volumen de un sólido de secciones transversales conocidas (sección 7.2), el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= \int_a^b A(x) \, dx \\ &= \int_0^2 \frac{(2-x)^2}{4} \, dx \\ &= -\frac{(2-x)^3}{12} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

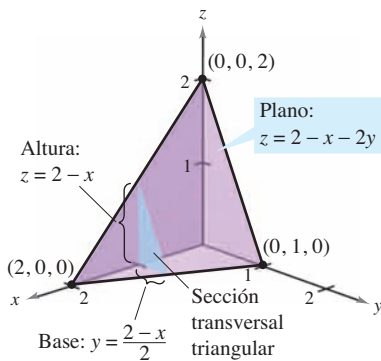
Este procedimiento funciona sin importar cómo se obtenga $A(x)$. En particular, $A(x)$ se puede hallar por integración, como se muestra en la figura 14.16. Es decir, se considera x constante, y se integra $z = 2 - x - 2y$ desde 0 hasta $(2 - x)/2$ para obtener

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^{(2-x)/2} (2-x-2y) \, dy \\ &= \left[(2-x)y - y^2 \right]_0^{(2-x)/2} \\ &= \frac{(2-x)^2}{4}. \end{aligned}$$

Combinando estos resultados, se tiene la *integral iterada*

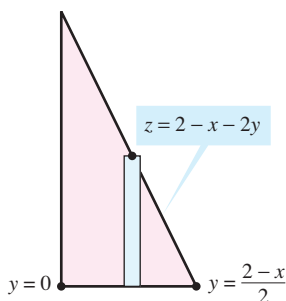
$$\text{Volumen} = \iint_R f(x, y) \, dA = \int_0^2 \int_0^{(2-x)/2} (2-x-2y) \, dy \, dx.$$

Para comprender mejor este procedimiento, se puede imaginar la integración como dos barridos. En la integración interior, una recta vertical barre el área de una sección transversal. En la integración exterior, la sección transversal triangular barre el volumen, como se muestra en la figura 14.17.

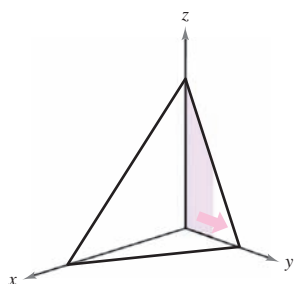


Volumen: $\int_0^2 A(x) \, dx$

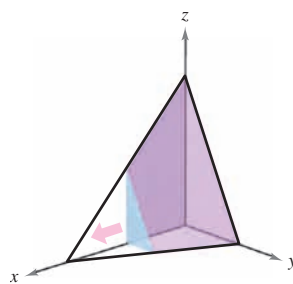
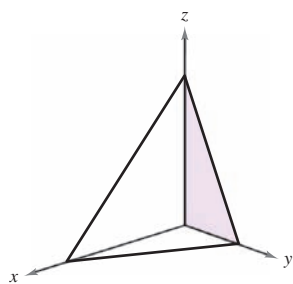
Figura 14.15



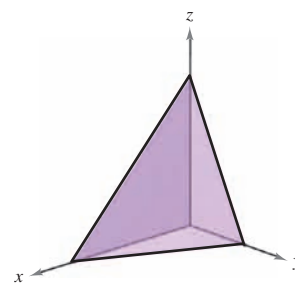
Sección transversal triangular
Figura 14.16



Integrar con respecto a y para obtener el área de la sección transversal
Figura 14.17



Integrar con respecto a x para obtener el volumen del sólido



El teorema siguiente lo demostró el matemático italiano Guido Fubini (1879-1943). El teorema establece que si R es vertical u horizontalmente simple y f es continua en R , la integral doble de f en R es igual a una integral iterada.

TEOREMA 14.2 TEOREMA DE FUBINI

Sea f continua en una región plana R .

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral doble como integral iterada

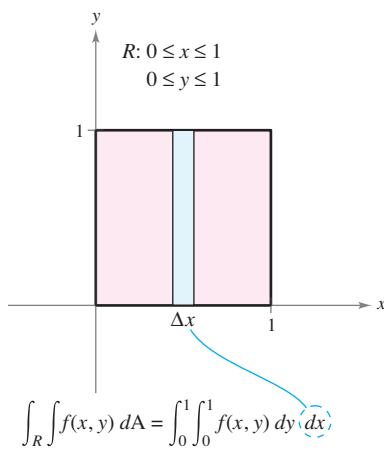
Evaluar

$$\iint_R \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) \, dA$$

donde R es la región dada por $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Solución Como la región R es un cuadrado, es vertical y horizontalmente simple y se puede emplear cualquier orden de integración. Se elige $dy \, dx$ colocando un rectángulo representativo vertical en la región, como se muestra en la figura 14.18. Con esto se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \iint_R \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) \, dA &= \int_0^1 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)y - \frac{y^3}{6} \right]_0^1 \, dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}x^2\right) \, dx \\ &= \left[\frac{5}{6}x - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$



El volumen de la región sólida es $\frac{2}{3}$
Figura 14.18

La integral doble evaluada en el ejemplo 2 representa el volumen de la región sólida que fue aproximado en el ejemplo 1. Nótese que la aproximación obtenida en el ejemplo 1 es buena (0.672 contra $\frac{2}{3}$) aun cuando se empleó una partición que constaba sólo en 16 cuadrados. El error se debe a que se usaron los centros de las subregiones cuadradas como los puntos para la aproximación. Esto es comparable a la aproximación de una integral simple con la regla del punto medio.

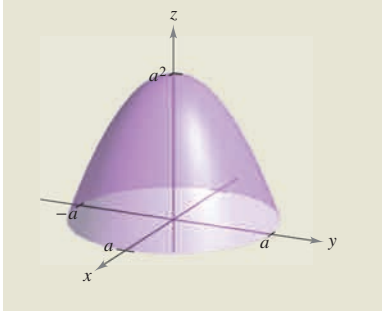
EXPLORACIÓN

El volumen de un sector de paraboloides

El sólido del ejemplo 3 tiene una base elíptica (no circular). Considerar la región limitada o acotada por el paraboloides circular

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy . ¿Cuántas maneras de hallar el volumen de este sólido se conocen ahora? Por ejemplo, se podría usar el método del disco para encontrar el volumen como un sólido de revolución. ¿Todos los métodos emplean integración?



NOTA En el ejemplo 3, observar la utilidad de la fórmula de Wallis para evaluar $\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta$. Esta fórmula se puede consultar en la sección 8.3. ■

La dificultad para evaluar una integral simple $\int_a^b f(x) \, dx$ depende normalmente de la función f , y no del intervalo $[a, b]$. Ésta es una diferencia importante entre las integrales simples y las integrales dobles. En el ejemplo siguiente se integra una función similar a la de los ejemplos 1 y 2. Nótese que una variación en la región R lleva a un problema de integración mucho más difícil.

EJEMPLO 3 Hallar el volumen por medio de una integral doble

Hallar el volumen de la región sólida acotada por el paraboloides $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano xy .

Solución Haciendo $z = 0$, se ve que la base de la región, en el plano xy , es la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$, como se muestra en la figura 14.19a. Esta región plana es vertical y horizontalmente simple, por tanto el orden $dy \, dx$ es apropiado.

Límites o cotas variables para y : $-\sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}}$

Límites o cotas constantes para x : $-2 \leq x \leq 2$

El volumen está dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (4 - x^2 - 2y^2) \, dy \, dx && \text{Ver figura 14.19b.} \\ &= \int_{-2}^2 \left[(4 - x^2)y - \frac{2y^3}{3} \right]_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} \, dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{2}} \int_{-2}^2 (4 - x^2)^{3/2} \, dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16 \cos^4 \theta \, d\theta && x = 2 \operatorname{sen} \theta. \\ &= \frac{64}{3\sqrt{2}} (2) \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta \\ &= \frac{128}{3\sqrt{2}} \left(\frac{3\pi}{16} \right) && \text{Fórmula de Wallis.} \\ &= 4\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

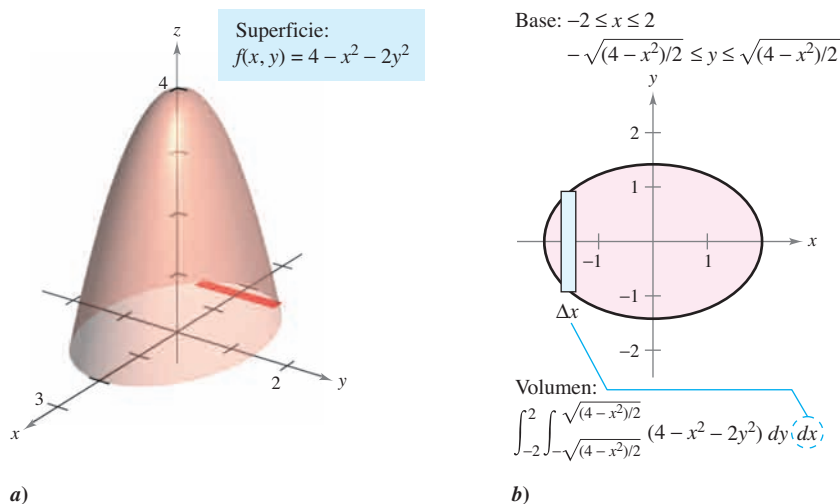


Figura 14.19

En los ejemplos 2 y 3, los problemas se podrían haber resuelto empleando cualquiera de los órdenes de integración porque las regiones eran vertical y horizontalmente simples. En caso de haber usado el orden $dx\ dy$ se habrían obtenido integrales con dificultad muy parecida. Sin embargo, hay algunas ocasiones en las que uno de los órdenes de integración es mucho más conveniente que otro. El ejemplo 4 muestra uno de estos casos.

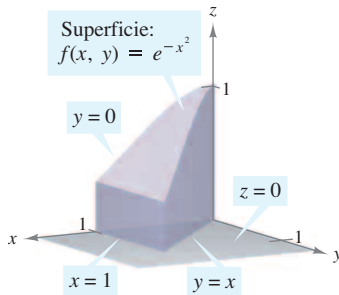
EJEMPLO 4 Comparación de diferentes órdenes de integración

Hallar el volumen de la región sólida R acotada por la superficie

$$f(x, y) = e^{-x^2} \quad \text{Superficie.}$$

y los planos $z = 0, y = 0, y = x$ y $x = 1$, como se muestra en la figura 14.20.

Solución La base de R en el plano xy está acotada por las rectas $y = 0, x = 1$ y $y = x$. Los dos posibles órdenes de integración se muestran en la figura 14.21.



La base está acotada por $y = 0, y = x$ y $x = 1$

Figura 14.20

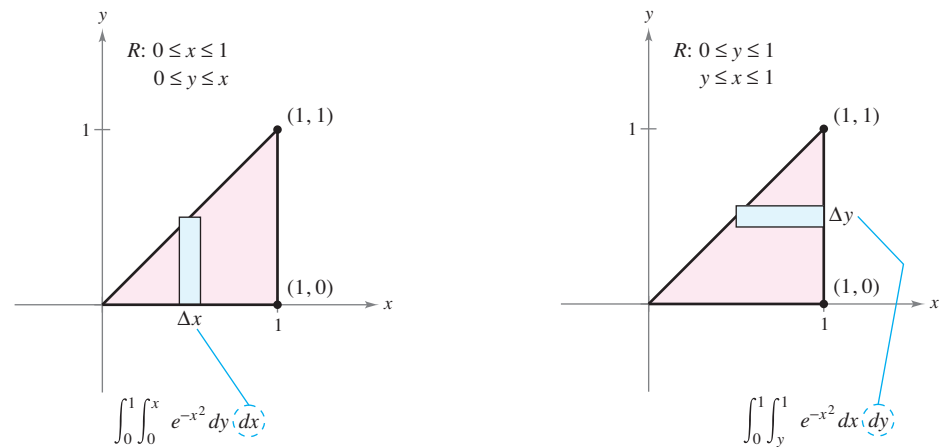


Figura 14.21

Estableciendo las integrales iteradas correspondientes, se ve que el orden $dx\ dy$ requiere la primitiva (o antiderivada) $\int e^{-x^2} dx$, la cual no es una función elemental. Por otro lado con el orden $dy\ dx$ se obtiene la integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dy dx &= \int_0^1 e^{-x^2} y \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^1 x e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \\ &= \frac{e - 1}{2e} \\ &\approx 0.316. \end{aligned}$$

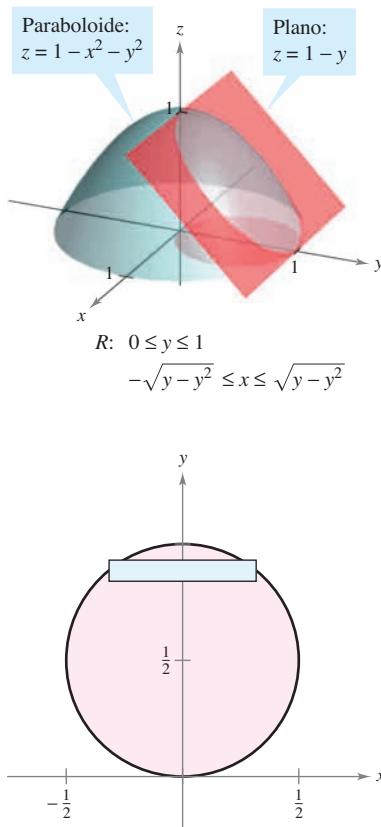
EJEMPLO 5 Volumen de una región acotada por dos superficies

Figura 14.22

Hallar el volumen de la región sólida R acotada superiormente por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1 - y$, como se muestra en la figura 14.22.

Solución Igualando los valores z , se determina que la intersección de las dos superficies se produce en el cilindro circular recto dado por

$$1 - y = 1 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y - y^2.$$

Como el volumen de R es la diferencia entre el volumen bajo el paraboloide y el volumen bajo el plano, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy - \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (y - y^2 - x^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left[(y - y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} \, dy \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 (y - y^2)^{3/2} \, dy \\ &= \left(\frac{4}{3} \right) \left(\frac{1}{8} \right) \int_0^1 [1 - (2y - 1)^2]^{3/2} \, dy \\ &= \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^4 \theta}{2} \, d\theta \quad 2y - 1 = \text{sen } \theta. \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta \\ &= \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{3\pi}{16} \right) = \frac{\pi}{32}. \quad \text{Fórmula de Wallis.} \end{aligned}$$

Valor promedio de una función

Recordar de la sección 4.4 que para una función f en una variable, el valor promedio de f sobre $[a, b]$ es

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Dada una función de f en dos variables, se puede encontrar el valor de f sobre la región R como se muestra en la siguiente definición.

DEFINICIÓN DEL VALOR PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN SOBRE UNA REGIÓN

Si f es integrable sobre la región plana R , entonces el **valor promedio** de f sobre R es

$$\frac{1}{A} \iint_R f(x, y) \, dA$$

donde A es el área de R .

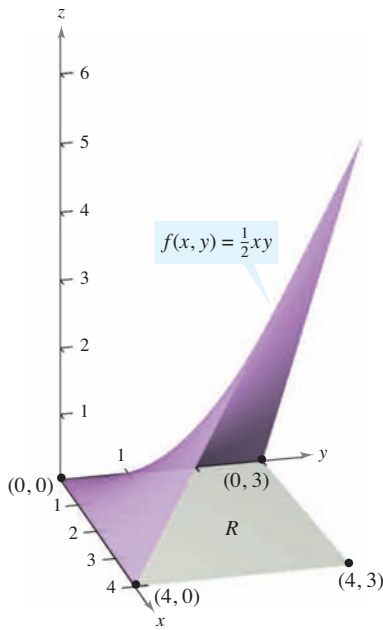


Figura 14.23

EJEMPLO 6 Encontrar el valor promedio de una función

Encontrar el valor promedio de $f(x, y) = \frac{1}{2}xy$ sobre la región R , donde R es un rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 3)$ y $(0, 3)$.

Solución El área de la región rectangular R es $A = 12$ (ver la figura 14.23). El valor promedio está dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \iint_R f(x, y) \, dA &= \frac{1}{12} \int_0^4 \int_0^3 \frac{1}{2}xy \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{12} \int_0^4 \left[\frac{1}{4}xy^2 \right]_0^3 \, dx \\ &= \left(\frac{1}{12} \right) \left(\frac{9}{4} \right) \int_0^4 x \, dx \\ &= \frac{3}{16} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 \\ &= \left(\frac{3}{16} \right) (8) \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

14.2 Ejercicios

Aproximación En los ejercicios 1 a 4, aproximar la integral $\iint_R f(x, y) \, dA$ dividiendo el rectángulo R con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$ y $(0, 2)$ en ocho cuadrados iguales y hallando la suma $\sum_{i=1}^8 f(x_i, y_i) \Delta A_i$ donde (x_i, y_i) es el centro del cuadrado i -ésimo.

Evaluar la integral iterada y compararla con la aproximación.

1. $\int_0^4 \int_0^2 (x + y) \, dy \, dx$
2. $\frac{1}{2} \int_0^4 \int_0^2 x^2 y \, dy \, dx$
3. $\int_0^4 \int_0^2 (x^2 + y^2) \, dy \, dx$
4. $\int_0^4 \int_0^2 \frac{1}{(x + 1)(y + 1)} \, dy \, dx$

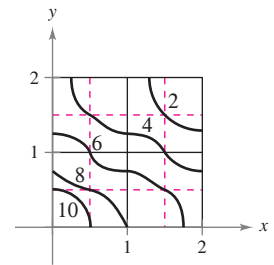
5. Aproximación La tabla muestra valores de una función f sobre una región cuadrada R . Dividir la región en 16 cuadrados iguales y elegir (x_i, y_i) como el punto más cercano al origen en el cuadrado i -ésimo. Comparar esta aproximación con la obtenida usando el punto más lejano al origen en el cuadrado i -ésimo.

$$\int_0^4 \int_0^4 f(x, y) \, dy \, dx$$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4
0	32	31	28	23	16
1	31	30	27	22	15
2	28	27	24	19	12
3	23	22	19	14	7
4	16	15	12	7	0

6. Aproximación La figura muestra las curvas de nivel de una función f en una región cuadrada R . Aproximar la integral empleando cuatro cuadrados y tomando el punto medio de cada cuadrado como (x_i, y_i) .

$$\int_0^2 \int_0^2 f(x, y) \, dy \, dx$$



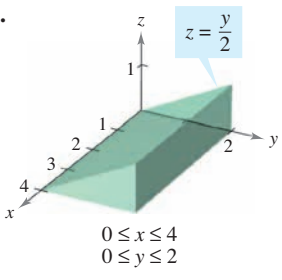
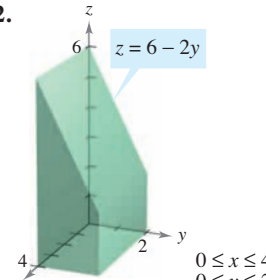
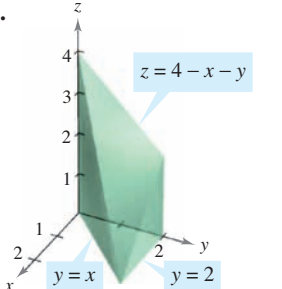
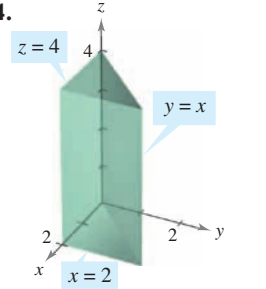
En los ejercicios 7 a 12, dibujar la región R y evaluar la integral iterada $\iint_R f(x, y) \, dA$.

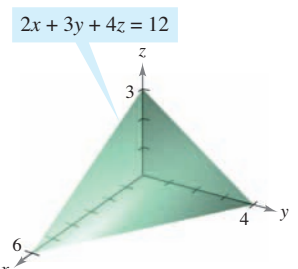
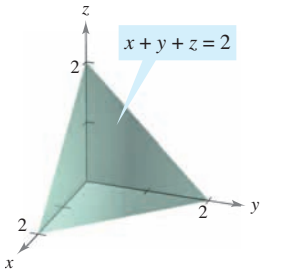
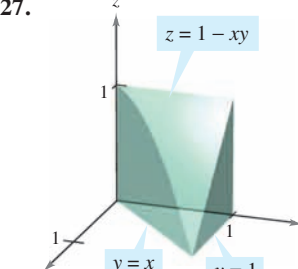
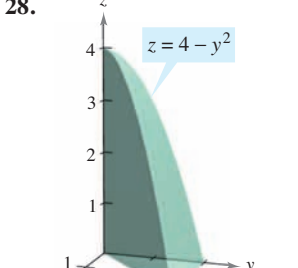
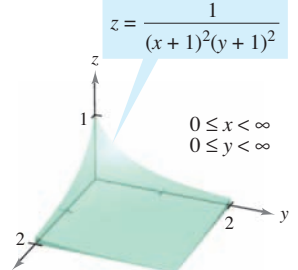
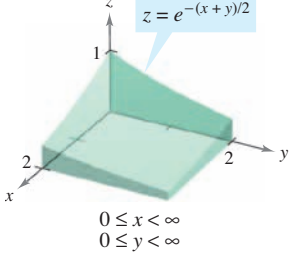
7. $\int_0^2 \int_0^1 (1 + 2x + 2y) \, dy \, dx$
8. $\int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 y \, dy \, dx$
9. $\int_0^6 \int_{y/2}^3 (x + y) \, dx \, dy$
10. $\int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} x^2 y^2 \, dx \, dy$
11. $\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x + y) \, dy \, dx$
12. $\int_0^1 \int_{y-1}^0 e^{x+y} \, dx \, dy + \int_0^1 \int_0^{1-y} e^{x+y} \, dx \, dy$

En los ejercicios 13 a 20, dar una integral para cada orden de integración y utilizar el orden más conveniente para evaluar la integral en la región R .

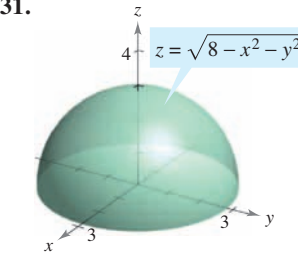
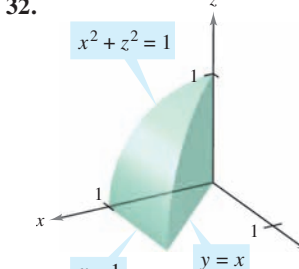
13. $\iint_R xy \, dA$
 R : rectángulo con vértices $(0, 0), (0, 5), (3, 5), (3, 0)$
14. $\iint_R \sin x \sin y \, dA$
 R : rectángulo con vértices $(-\pi, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi/2), (-\pi, \pi/2)$
15. $\iint_R \frac{y}{x^2 + y^2} \, dA$
 R : triángulo acotado por $y = x, y = 2x, x = 1, x = 2$
16. $\iint_R xe^y \, dA$
 R : triángulo acotado por $y = 4 - x, y = 0, x = 0$
17. $\iint_R -2y \, dA$
 R : región acotada por $y = 4 - x^2, y = 4 - x$
18. $\iint_R \frac{y}{1 + x^2} \, dA$
 R : región acotada por $y = 0, y = \sqrt{x}, x = 4$
19. $\iint_R x \, dA$
 R : el sector circular en el primer cuadrante acotado por $y = \sqrt{25 - x^2}, 3x - 4y = 0, y = 0$
20. $\iint_R (x^2 + y^2) \, dA$
 R : semicírculo acotado por $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0$

En los ejercicios 21 a 30, utilizar una integral doble para hallar el volumen del sólido indicado.

21. 
22. 
23. 
24. 

25. 
26. 
27. 
28. 
29. Integral impropia
 $z = \frac{1}{(x+1)^2(y+1)^2}$
 $0 \leq x < \infty$
 $0 \leq y < \infty$

30. Integral impropia
 $z = e^{-(x+y)/2}$
 $0 \leq x < \infty$
 $0 \leq y < \infty$


CAS En los ejercicios 31 y 32, utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar el volumen del sólido.

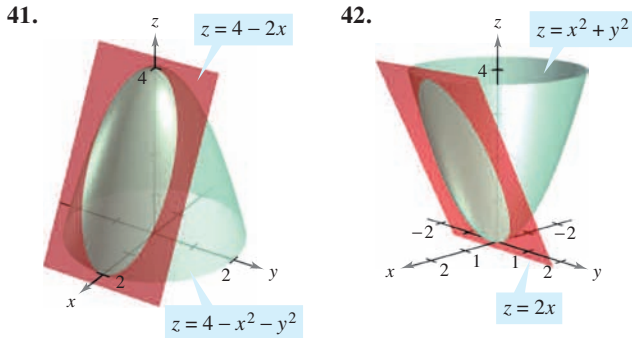
31. 
32. 

En los ejercicios 33 a 40, dar una integral doble para hallar el volumen del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.

33. $z = xy, z = 0, y = x, x = 1$, primer octante
34. $y = 0, z = 0, y = x, z = x, x = 0, x = 5$
35. $z = 0, z = x^2, x = 0, x = 2, y = 0, y = 4$
36. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

37. $x^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 1$, primer octante
 38. $y = 4 - x^2, z = 4 - x^2$, primer octante
 39. $z = x + y, x^2 + y^2 = 4$, primer octante
 40. $z = \frac{1}{1 + y^2}, x = 0, x = 2, y \geq 0$

En los ejercicios 41 a 46, establecer una integral doble para encontrar el volumen de una región sólida limitada por las gráficas de las ecuaciones. No evaluar la integral.



43. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$
 44. $z = \sin^2 x, z = 0, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 5$
 45. $z = x^2 + 2y^2, z = 4y$
 46. $z = x^2 + y^2, z = 18 - x^2 - y^2$

CAS En los ejercicios 47 a 50, utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar el volumen del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.

47. $z = 9 - x^2 - y^2, z = 0$
 48. $x^2 = 9 - y, z^2 = 9 - y$, primer octante
 49. $z = \frac{2}{1 + x^2 + y^2}, z = 0, y = 0, x = 0, y = -0.5x + 1$
 50. $z = \ln(1 + x + y), z = 0, y = 0, x = 0, x = 4 - \sqrt{y}$
 51. Si f es una función continua tal que $0 \leq f(x, y) \leq 1$ en una región R de área 1, demostrar que $0 \leq \int_R f(x, y) dA \leq 1$.
 52. Hallar el volumen del sólido que se encuentra en el primer octante, acotado por los planos coordenados y el plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$, donde $a > 0, b > 0$ y $c > 0$.

En los ejercicios 53 a 58, trazar la región de integración. Después evaluar la integral iterada y, si es necesario, cambiar el orden de integración.

53. $\int_0^1 \int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2} dx dy$ 54. $\int_0^{\ln 10} \int_{e^x}^{10} \frac{1}{\ln y} dy dx$
 55. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2} dy dx$ 56. $\int_0^3 \int_{y/3}^1 \frac{1}{1+x^4} dx dy$
 57. $\int_0^1 \int_0^{\arccos y} \sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx dy$
 58. $\int_0^2 \int_{(1/2)x^2}^2 \sqrt{y} \cos y dy dx$

Valor promedio En los ejercicios 59 a 64, encontrar el valor promedio de $f(x, y)$ sobre la región R .

59. $f(x, y) = x$
 R : rectángulo con vértices $(0, 0), (4, 0), (4, 2), (0, 2)$
 60. $f(x, y) = 2xy$
 R : rectángulo con vértices $(0, 0), (5, 0), (5, 3), (0, 3)$
 61. $f(x, y) = x^2 + y^2$
 R : cuadrado con vértices $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$
 62. $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$
 R : triángulo con vértices $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$
 63. $f(x, y) = e^{x+y}$
 R : triángulo con vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$
 64. $f(x, y) = \sin(x + y)$
 R : rectángulo con vértices $(0, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi), (0, \pi)$
 65. **Producción promedio** La función de producción Cobb-Douglas para un fabricante de automóviles es $f(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$ donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital. Estimar el nivel promedio de producción si el número x de unidades de trabajo varía entre 200 y 250 y el número y de unidades de capital varía entre 300 y 325.
 66. **Temperatura promedio** La temperatura en grados Celsius sobre la superficie de una placa metálica es $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$, donde x y y están medidas en centímetros. Estimar la temperatura promedio si x varía entre 0 y 2 centímetros y y varía entre 0 y 4 centímetros.

Desarrollo de conceptos

67. Enunciar la definición de integral doble. Dar la interpretación geométrica de una integral doble si el integrando es una función no negativa sobre la región de integración.
 68. Sea R una región en el plano xy cuya área es B . Si $f(x, y) = k$ para todo punto (x, y) en R , ¿cuál es el valor de $\int_R \int f(x, y) dA$? Explicar.
 69. Sea R un condado en la parte norte de Estados Unidos, y sea $f(x, y)$ la precipitación anual de nieve en el punto (x, y) de R . Interpretar cada uno de los siguientes.

a) $\int_R \int f(x, y) dA$ b) $\frac{\int_R \int f(x, y) dA}{\int_R \int dA}$

70. Identificar la expresión que es inválida. Explicar el razonamiento.

a) $\int_0^2 \int_0^3 f(x, y) dy dx$ b) $\int_0^2 \int_0^y f(x, y) dy dx$
 c) $\int_0^2 \int_x^3 f(x, y) dy dx$ d) $\int_0^2 \int_0^x f(x, y) dy dx$

71. Sea la región plana R un círculo unitario y el máximo valor de f sobre R sea 6. ¿Es el valor más grande posible de $\int_R \int f(x, y) dy dx$ igual a 6? ¿Por qué sí o por qué no? Si es no, ¿cuál es el valor más grande posible?

Para discusión

72. Las siguientes integrales iteradas representan la solución al mismo problema. ¿Cuál integral iterada es más fácil de evaluar? Explicar el razonamiento.

$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 \sin y^2 dy dx = \int_0^2 \int_0^{2y} \sin y^2 dx dy$$

Probabilidad Una función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias continuas x y y es una función $f(x, y)$ que satisface las propiedades siguientes.

a) $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) b) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dA = 1$

c) $P[(x, y) \in R] = \iint_R f(x, y) dA$

En los ejercicios 73 a 76, mostrar que la función es una función de densidad de probabilidad conjunta y hallar la probabilidad requerida.


73. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$
 $P(0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2)$

74. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}xy, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$
 $P(0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2)$

75. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{27}(9 - x - y), & 0 \leq x \leq 3, 3 \leq y \leq 6 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$
 $P(0 \leq x \leq 1, 4 \leq y \leq 6)$


76. $f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$
 $P(0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1)$

77. **Aproximación** En una fábrica de cemento la base de un montón de arena es rectangular con dimensiones aproximadas de 20 por 30 metros. Si la base se coloca en el plano xy con un vértice en el origen, las coordenadas de la superficie del montón son $(5, 5, 3)$, $(15, 5, 6)$, $(25, 5, 4)$, $(5, 15, 2)$, $(15, 15, 7)$ y $(25, 15, 3)$. Aproximar el volumen de la arena en el montón.

 78. **Programación** Considerar una función continua $f(x, y)$ sobre la región rectangular R con vértices (a, c) , (b, c) , (a, d) y (b, d) donde $a < b$ y $c < d$. Dividir los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ en m y n subintervalos, de modo que los subintervalos en una dirección dada sean de igual longitud. Escribir un programa para que una herramienta de graficación calcule la suma

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \Delta A_i \approx \iint_a^b \int_c^d f(x, y) dA$$

donde (x_i, y_j) es el centro de un rectángulo representativo en R .

 **CAS Aproximación** En los ejercicios 79 a 82, a) utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral iterada, y b) utilizar el programa del ejercicio 78 para aproximar la integral iterada con los valores dados de m y n .

79. $\int_0^1 \int_0^2 \sin \sqrt{x+y} dy dx$ 80. $\int_0^2 \int_0^4 20e^{-x^3/8} dy dx$
 $m = 4, n = 8$ $m = 10, n = 20$

81. $\int_4^6 \int_0^2 y \cos \sqrt{x} dx dy$ 82. $\int_1^4 \int_1^2 \sqrt{x^3 + y^3} dx dy$
 $m = 4, n = 8$ $m = 6, n = 4$

Aproximación En los ejercicios 83 y 84, determinar qué valor aproxima mejor el volumen del sólido entre el plano xy y la función sobre la región. (Hacer la elección con base en un dibujo del sólido y sin realizar ningún cálculo.)

83. $f(x, y) = 4x$
 R : cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 4)$, $(0, 4)$
a) -200 b) 600 c) 50 d) 125 e) 1000

84. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
 R : círculo acotado por $x^2 + y^2 = 9$
a) 50 b) 500 c) -500 d) 5 e) 5000

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 85 y 86, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.

85. El volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ está dado por la integral

$$V = 8 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy.$$

86. Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo (x, y) en R , y f y g son continuas en R , entonces $\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA$.

87. Sea $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$. Hallar el valor promedio de f en el intervalo $[0, 1]$.

88. Hallar $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$. (Sugerencia: Evaluar $\int_1^2 e^{-xy} dy$.)

89. Determinar la región R en el plano xy que maximiza el valor de $\iint_R (9 - x^2 - y^2) dA$.

90. Determinar la región R en el plano xy que minimiza el valor de $\iint_R (x^2 + y^2 - 4) dA$.

91. Hallar $\int_0^2 [\arctan(\pi x) - \arctan x] dx$. (Sugerencia: Convertir la integral en una integral doble.)

92. Utilizar un argumento geométrico para mostrar que

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-x^2-y^2} dx dy = \frac{9\pi}{2}.$$

Preparación del examen Putnam

93. Evaluar $\int_0^a \int_0^b e^{\max\{b^2x^2, a^2y^2\}} dy dx$, donde a y b son positivos.

94. Probar que si $\lambda > \frac{1}{2}$ no existe una función real u tal que, para todo x en el intervalo cerrado $0 \leq x \leq 1$, $u(x) = 1 + \lambda \int_x^1 u(y)u(y-x) dy$.

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

14.3 Cambio de variables: coordenadas polares

- Expresar y evaluar integrales dobles en coordenadas polares.

Integrales dobles en coordenadas polares

Algunas integrales dobles son *mucho* más fáciles de evaluar en forma polar que en forma rectangular. Esto es así especialmente cuando se trata de regiones circulares, cardioides y pétalos de una curva rosa, y de integrandos que contienen $x^2 + y^2$.

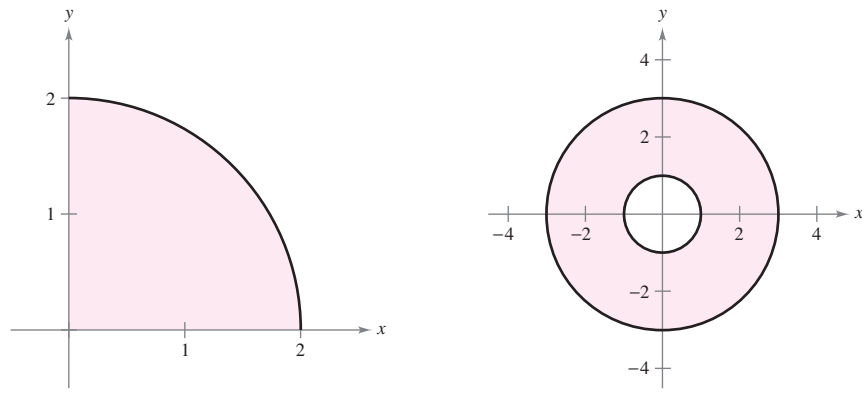
En la sección 10.4 se vio que las coordenadas polares (r, θ) de un punto están relacionadas con las coordenadas rectangulares (x, y) del punto, de la manera siguiente.

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad y \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

EJEMPLO 1 Utilizar coordenadas polares para describir una región

Utilizar coordenadas polares para describir cada una de las regiones mostradas en la figura 14.24.



a) **Figura 14.24**

b)

Solución

- a) La región R es un cuarto del círculo de radio 2. Esta región se describe en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

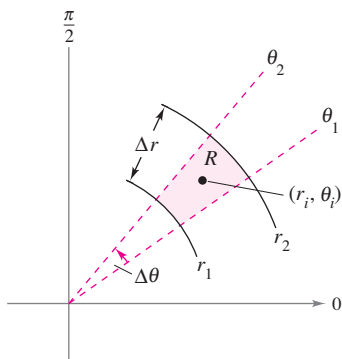
- b) La región R consta de todos los puntos comprendidos entre los círculos concéntricos de radios 1 y 3. Esta región se describe en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta): 1 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Las regiones del ejemplo 1 son casos especiales de **sectores polares**

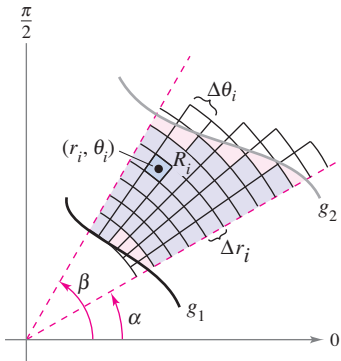
$$R = \{(r, \theta): r_1 \leq r \leq r_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$$

Sector polar.



Sector polar
Figura 14.25

como el mostrado en la figura 14.25.



La red o cuadrícula polar se superpone sobre la región R
Figura 14.26

Para definir una integral doble de una función continua $z = f(x, y)$ en coordenadas polares, considerar una región R limitada o acotada por las gráficas de $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$ y las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. En lugar de hacer una partición de R en rectángulos pequeños, se utiliza una partición en sectores polares pequeños. A R se le superpone una red o cuadrícula polar formada por rayos o semirrectas radiales y arcos circulares, como se muestra en la figura 14.26. Los sectores polares R_i que se encuentran completamente dentro de R forman una **partición polar interna** Δ , cuya **norma** $\|\Delta\|$ es la longitud de la diagonal más larga en los n sectores polares.

Considerar un sector polar específico R_i , como se muestra en la figura 14.27. Se puede mostrar (ver ejercicio 75) que el área de R_i es

$$\Delta A_i = r_i \Delta r_i \Delta \theta_i \quad \text{Área de } R_i.$$

donde $\Delta r_i = r_2 - r_1$ y $\Delta \theta_i = \theta_2 - \theta_1$. Esto implica que el volumen del sólido de altura $f(r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i)$ sobre R_i es aproximadamente

$$f(r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i) r_i \Delta r_i \Delta \theta_i$$

y se tiene

$$\iint_R f(x, y) dA \approx \sum_{i=1}^n f(r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i) r_i \Delta r_i \Delta \theta_i.$$

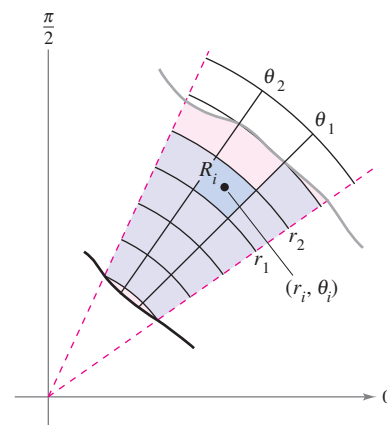
La suma de la derecha se puede interpretar como una suma de Riemann para $f(r \cos \theta, r \sin \theta)r$. La región R corresponde a una región S horizontalmente simple en el plano $r\theta$, como se muestra en la figura 14.28. Los sectores polares R_i corresponden a los rectángulos S_i , y el área ΔA_i de S_i es $\Delta r_i \Delta \theta_i$. Por tanto, el lado derecho de la ecuación corresponde a la integral doble

$$\iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dA.$$

A partir de esto, se puede aplicar el teorema 14.2 para escribir

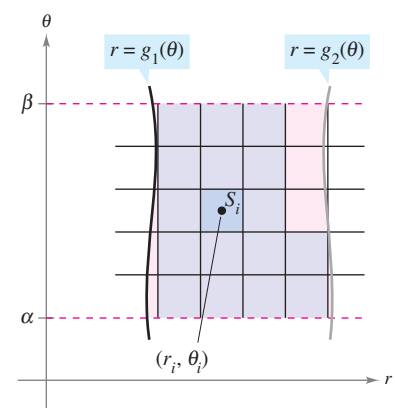
$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dA \\ &= \int_a^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \end{aligned}$$

Esto sugiere el teorema siguiente, cuya demostración se verá en la sección 14.8.



El sector polar R_i es el conjunto de todos los puntos (r, θ) tal que $r_1 \leq r \leq r_2$ y $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.

Figura 14.27



Región S horizontalmente simple

Figura 14.28

TEOREMA 14.3 CAMBIO DE VARIABLES A LA FORMA POLAR

Sea R una región plana que consta de todos los puntos $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ que satisfacen las condiciones $0 \leq g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $0 \leq (\beta - \alpha) \leq 2\pi$. Si g_1 y g_2 son continuas en $[\alpha, \beta]$ y f es continua en R , entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta.$$

EXPLORACIÓN

Volumen de un sector paraboloides

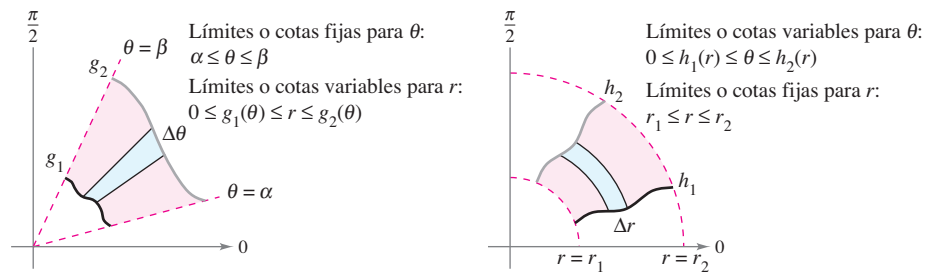
En la exploración de la página 997 se pidió resumir los diferentes métodos hasta ahora estudiados para calcular el volumen del sólido limitado o acotado por el paraboloides

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy . Ahora se conoce un método más. Utilizarlo para encontrar el volumen del sólido.

NOTA Si $z = f(x, y)$ es no negativa en R , entonces la integral del teorema 14.3 puede interpretarse como el volumen de la región sólida entre la gráfica de f y la región R . Cuando se usa la integral en el teorema 14.3, asegurarse de no omitir el factor extra de r en el integrando. ■

La región R puede ser de dos tipos básicos, regiones **r -simples** y regiones **θ -simples**, como se muestra en la figura 14.29.



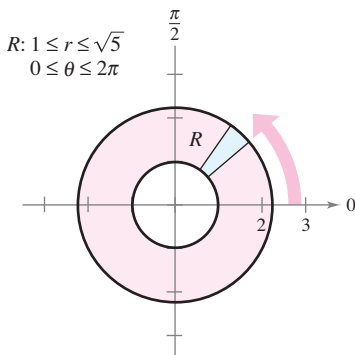
Región r -simple
Figura 14.29

Región θ -simple

EJEMPLO 2 Evaluar una integral usando coordenadas polares doble

Sea R la región anular comprendida entre los dos círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 5$. Evaluar la integral $\iint_R (x^2 + y) \, dA$.

Solución Los límites o cotas polares son $1 \leq r \leq \sqrt{5}$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, como se muestra en la figura 14.30. Además, $x^2 = (r \cos \theta)^2$ y $y = r \sin \theta$. Por tanto, se tiene



Región r -simple
Figura 14.30

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + y) \, dA &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} (r^2 \cos^2 \theta + r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} (r^3 \cos^2 \theta + r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} \cos^2 \theta + \frac{r^3}{3} \sin \theta \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(6 \cos^2 \theta + \frac{5\sqrt{5} - 1}{3} \sin \theta \right) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(3 + 3 \cos 2\theta + \frac{5\sqrt{5} - 1}{3} \sin \theta \right) \, d\theta \\ &= \left(3\theta + \frac{3 \sin 2\theta}{2} - \frac{5\sqrt{5} - 1}{3} \cos \theta \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 6\pi. \end{aligned}$$

En el ejemplo 2, notar el factor extra de r en el integrando. Esto proviene de la fórmula para el área de un sector polar. En notación diferencial, se puede escribir

$$dA = r \, dr \, d\theta$$

lo que indica que el área de un sector polar aumenta al alejarse del origen.

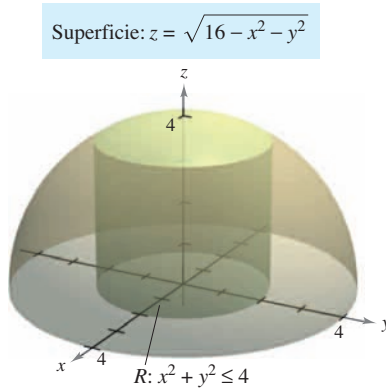


Figura 14.31

EJEMPLO 3 Cambio de variables a coordenadas polares

Utilizar las coordenadas polares para hallar el volumen de la región sólida limitada superiormente por el hemisferio

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \quad \text{Hemisferio que forma la superficie superior.}$$

e inferiormente por la región circular R dada por

$$x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{Región circular que forma la superficie inferior.}$$

como se muestra en la figura 14.31.

Solución En la figura 14.31 se puede ver que R tiene como límites o cotas

$$-\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, \quad -2 \leq y \leq 2$$

y que $0 \leq z \leq \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. En coordenadas polares, las cotas son

$$0 \leq r \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

con altura $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} = \sqrt{16 - r^2}$. Por consiguiente, el volumen V está dado por

$$\begin{aligned} V &= \iint_R f(x, y) \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{16 - r^2} \, r \, dr \, d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (16 - r^2)^{3/2} \Big|_0^2 \, d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (24\sqrt{3} - 64) \, d\theta \\ &= -\frac{8}{3} (3\sqrt{3} - 8) \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{16\pi}{3} (8 - 3\sqrt{3}) \approx 46.979. \end{aligned}$$

NOTA Para ver la ventaja de las coordenadas polares en el ejemplo 3, hay que tratar de evaluar la integral iterada rectangular correspondiente

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{16 - x^2 - y^2} \, dx \, dy.$$

TECNOLOGÍA Todo sistema algebraico por computadora que calcula integrales dobles en coordenadas rectangulares también calcula integrales dobles en coordenadas polares. La razón es que una vez que se ha formado la integral iterada, su valor no cambia al usar variables diferentes. En otras palabras, si se usa un sistema algebraico por computadora para evaluar

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{16 - x^2} \, x \, dx \, dy$$

se deberá obtener el mismo valor que se obtuvo en el ejemplo 3.

Así como ocurre con coordenadas rectangulares, la integral doble

$$\iint_R dA$$

puede usarse para calcular el área de una región en el plano.

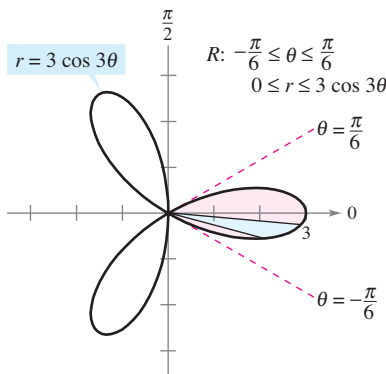


Figura 14.32

EJEMPLO 4 Hallar áreas de regiones polares

Utilizar una integral doble para hallar el área encerrada por la gráfica de $r = 3 \cos 3\theta$.

Solución Sea R un pétalo de la curva mostrada en la figura 14.32. Esta región es r -simple y los límites son los siguientes.

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$$

Límites o cotas fijas para θ .

$$0 \leq r \leq 3 \cos 3\theta$$

Límites o cotas variables para r .

Por tanto, el área de un pétalo es

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}A &= \iint_R dA = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \int_0^{3 \cos 3\theta} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{3 \cos 3\theta} d\theta \\ &= \frac{9}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\theta \, d\theta \\ &= \frac{9}{4} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (1 + \cos 6\theta) \, d\theta = \frac{9}{4} \left[\theta + \frac{1}{6} \sin 6\theta \right]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Así, el área total es $A = 9\pi/4$.

Como se ilustra en el ejemplo 4, el área de una región en el plano puede representarse mediante

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r \, dr \, d\theta.$$

Si $g_1(\theta) = 0$, se obtiene

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{g_2(\theta)} r \, dr \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{g_2(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (g_2(\theta))^2 \, d\theta$$

lo cual concuerda con el teorema 10.13.

Hasta ahora en esta sección, todos los ejemplos de integrales iteradas en forma polar han sido de la forma

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

en donde el orden de integración es primero con respecto a r . Algunas veces se puede simplificar el problema de integración cambiando el orden de integración, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Cambio del orden de integración

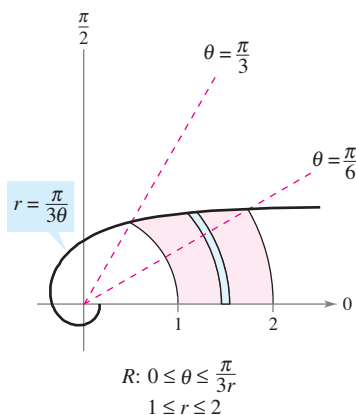
Hallar el área de la región acotada superiormente por la espiral $r = \pi/(3\theta)$ e inferiormente por el eje polar, entre $r = 1$ y $r = 2$.

Solución La región se muestra en la figura 14.33. Las cotas o límites polares de la región son

$$1 \leq r \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3r}.$$

Por tanto, el área de la región puede evaluarse como sigue.

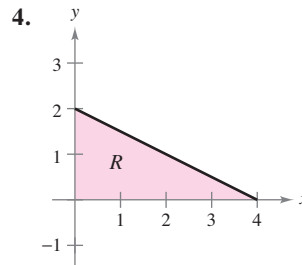
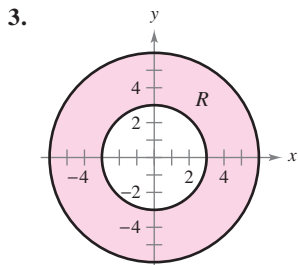
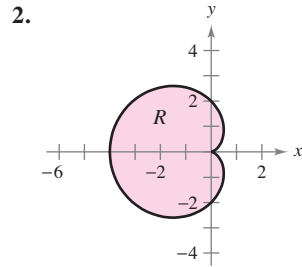
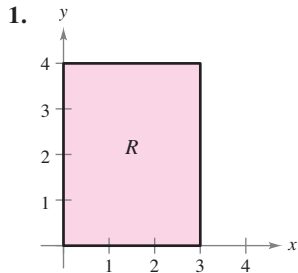
$$A = \int_1^2 \int_0^{\pi/(3r)} r \, d\theta \, dr = \int_1^2 r\theta \Big|_0^{\pi/(3r)} dr = \int_1^2 \frac{\pi}{3} dr = \frac{\pi r}{3} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{3}$$



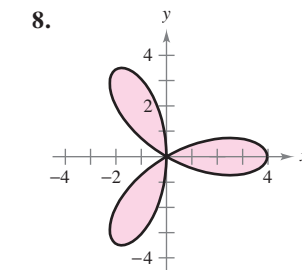
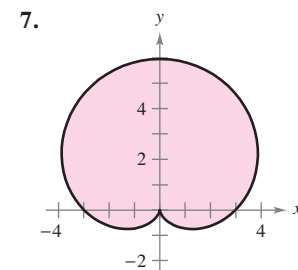
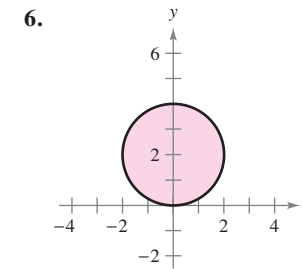
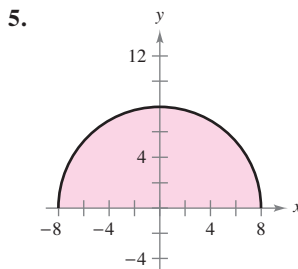
Región θ -simple
Figura 14.33

14.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4 se muestra la región R para la integral $\iint_R f(x,y) dA$. Decir si serían más convenientes coordenadas rectangulares o polares para evaluar la integral.



En los ejercicios 5 a 8, utilizar las coordenadas polares para describir la región mostrada.



En los ejercicios 9 a 16, evaluar la integral doble $\iint_R f(r, \theta) dA$, y dibujar la región R .

9. $\int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} r dr d\theta$

10. $\int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} r^2 dr d\theta$

11. $\int_0^{2\pi} \int_0^6 3r^2 \sin \theta dr d\theta$

12. $\int_0^{\pi/4} \int_0^4 r^2 \sin \theta \cos \theta dr d\theta$

13. $\int_0^{\pi/2} \int_2^3 \sqrt{9-r^2} r dr d\theta$

14. $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 r e^{-r^2} dr d\theta$

15. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{1+\sin \theta} \theta r dr d\theta$

16. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{1-\cos \theta} (\sin \theta) r dr d\theta$

En los ejercicios 17 a 26, evaluar la integral iterada pasando a coordenadas polares.

17. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y dx dy$

18. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x dy dx$

19. $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$

20. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$

21. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dy dx$

22. $\int_0^2 \int_y^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

23. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy dy dx$

24. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} x^2 dx dy$

25. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2 + y^2) dy dx$

26. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$

En los ejercicios 27 y 28, combinar la suma de las dos integrales iteradas en una sola integral iterada pasando a coordenadas polares. Evaluar la integral iterada resultante.

27. $\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$

28. $\int_0^{5\sqrt{2}/2} \int_0^x xy dy dx + \int_{5\sqrt{2}/2}^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} xy dy dx$

En los ejercicios 29 a 32, utilizar coordenadas polares para escribir y evaluar la integral doble $\iint_R f(x,y) dA$.

29. $f(x,y) = x + y, R: x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$

30. $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)/2}, R: x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0$

31. $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}, R: x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x$

32. $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2, R: x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0$

Volumen En los ejercicios 33 a 38, utilizar una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.

33. $z = xy, x^2 + y^2 = 1$, primer octante

34. $z = x^2 + y^2 + 3, z = 0, x^2 + y^2 = 1$

35. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, x^2 + y^2 = 25$

36. $z = \ln(x^2 + y^2), z = 0, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4$

37. Interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 - 4x = 0$

38. Interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$

39. **Volumen** Hallar a tal que el volumen en el interior del hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y en el exterior del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ sea la mitad del volumen del hemisferio.
40. **Volumen** Utilizar una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen de una esfera de radio a .
41. **Volumen** Determinar el diámetro de un orificio cavado verticalmente a través del centro del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones $z = 25e^{-(x^2+y^2)/4}$, $z = 0$, y $x^2 + y^2 = 16$ si se elimina la décima parte del volumen del sólido.

CAS 42. **Diseño industrial** Las superficies de una leva de doble lóbulo se representan por las desigualdades $\frac{1}{4} \leq r \leq \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta)$ y

$$\frac{-9}{4(x^2 + y^2 + 9)} \leq z \leq \frac{9}{4(x^2 + y^2 + 9)}$$

donde todas las medidas se dan en pulgadas.

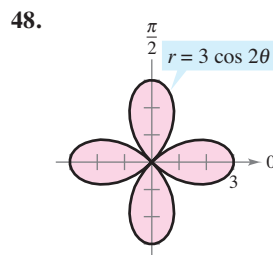
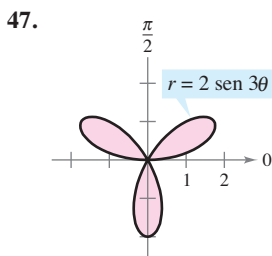
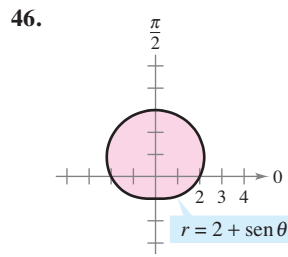
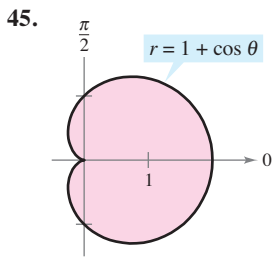
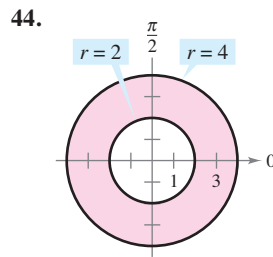
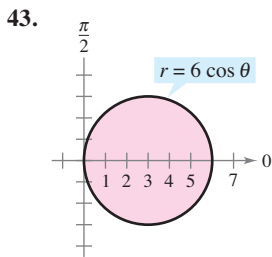
- a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la leva.
- b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar el perímetro de la curva polar

$$r = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta).$$

Ésta es la distancia que recorre una pieza en contacto con la leva durante un giro completo de ésta.

- c) Utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar el volumen del acero en la leva.

Área En los ejercicios 43 a 48, utilizar una integral doble para calcular el área de la región sombreada.

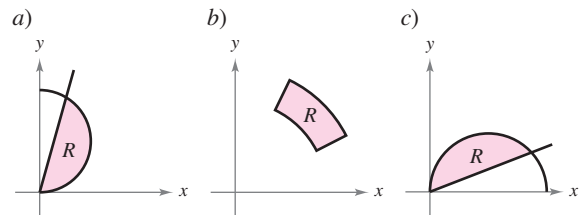


Área En los ejercicios 49 a 54, trazar una gráfica de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones. Después, usar una integral doble para encontrar el área de la región.

49. Dentro del círculo $r = 2 \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 1$.
50. Dentro de la cardioide $r = 2 + 2 \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 1$.
51. Dentro del círculo $r = 3 \cos \theta$ y fuera de la cardioide $r = 1 + \cos \theta$.
52. Dentro de la cardioide $r = 1 + \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 3 \cos \theta$.
53. Dentro de la curva rosa $r = 4 \sin 3\theta$ y fuera del círculo $r = 2$.
54. Dentro del círculo $r = 2$ y fuera de la cardioide $r = 2 - 2 \cos \theta$.

Desarrollo de conceptos

55. Describir la partición de la región de integración R en el plano xy cuando se utilizan coordenadas polares para evaluar una integral doble.
56. Explicar cómo pasar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares en una integral doble.
57. Con sus propias palabras, describir regiones r -simples y regiones θ -simples.
58. Cada figura muestra una región de integración para la integral doble $\int_R f(x, y) dA$. Para cada región, decir si es más fácil obtener los límites de integración con elementos representativos horizontales, elementos representativos verticales o con sectores polares. Explicar el razonamiento.



59. Sea R la región limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$.
- a) Establecer la integral $\iint_R f(x, y) dA$.
- b) Convertir la integral en el inciso a) a coordenadas polares.
- c) ¿Qué integral debería elegirse para evaluar? ¿Por qué?

Para discusión

60. **Para pensar** Sin desarrollar cálculos, identificar la integral doble que represente la integral de $f(x) = x^2 + y^2$ sobre un círculo de radio 4. Explicar el razonamiento.

- a) $\int_0^{2\pi} \int_0^4 r^2 dr d\theta$
- b) $\int_0^4 \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta$
- c) $\int_0^{2\pi} \int_0^4 r^3 dr d\theta$
- d) $\int_0^{2\pi} \int_{-4}^4 r^3 dr d\theta$

- 61. Para pensar** Considerar el programa escrito en el ejercicio 78 de la sección 14.2 para aproximar integrales dobles en coordenadas rectangulares. Si el programa se usa para aproximar la integral doble

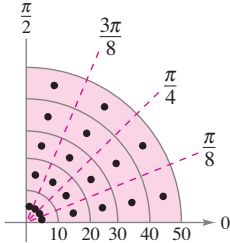
$$\iint_R f(r, \theta) dA$$

en coordenadas polares, ¿cómo hay que modificar f para introducirla al programa? Como los límites de integración son constantes, describir la región plana de integración.

- 62. Aproximación** Las secciones transversales horizontales de un bloque de hielo desprendido de un glaciar tienen forma de un cuarto de un círculo con radio aproximado de 50 pies. La base se divide en 20 subregiones como se muestra en la figura. En el centro de cada subregión, se mide la altura del hielo, dando los puntos siguientes en coordenadas cilíndricas.

$$\begin{aligned} & \left(5, \frac{\pi}{16}, 7\right), \left(15, \frac{\pi}{16}, 8\right), \left(25, \frac{\pi}{16}, 10\right), \left(35, \frac{\pi}{16}, 12\right), \left(45, \frac{\pi}{16}, 9\right), \\ & \left(5, \frac{3\pi}{16}, 9\right), \left(15, \frac{3\pi}{16}, 10\right), \left(25, \frac{3\pi}{16}, 14\right), \left(35, \frac{3\pi}{16}, 15\right), \left(45, \frac{3\pi}{16}, 10\right), \\ & \left(5, \frac{5\pi}{16}, 9\right), \left(15, \frac{5\pi}{16}, 11\right), \left(25, \frac{5\pi}{16}, 15\right), \left(35, \frac{5\pi}{16}, 18\right), \left(45, \frac{5\pi}{16}, 14\right), \\ & \left(5, \frac{7\pi}{16}, 5\right), \left(15, \frac{7\pi}{16}, 8\right), \left(25, \frac{7\pi}{16}, 11\right), \left(35, \frac{7\pi}{16}, 16\right), \left(45, \frac{7\pi}{16}, 12\right) \end{aligned}$$

- Aproximar el volumen del sólido.
- El hielo pesa aproximadamente 57 libras por pie cúbico. Aproximar el peso del sólido.
- Aproximar el número de galones de agua en el sólido si hay 7.48 galones de agua por pie cúbico.



- CAS Aproximación** En los ejercicios 63 y 64, utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral iterada.

$$63. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^5 r \sqrt{1+r^3} \sin \sqrt{\theta} dr d\theta$$

$$64. \int_0^{\pi/4} \int_0^4 5re^{\sqrt{r\theta}} dr d\theta$$

Aproximación En los ejercicios 65 y 66, determinar qué valor se aproxima más al volumen del sólido entre el plano xy y la función sobre la región. (Realizar la elección a la vista de un dibujo del sólido y no efectuando cálculo alguno.)

- $f(x, y) = 15 - 2y$; R : semicírculo: $x^2 + y^2 = 16, y \geq 0$
a) 100 b) 200 c) 300 d) -200 e) 800
- $f(x, y) = xy + 2$; R : cuarto de círculo: $x^2 + y^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0$
a) 25 b) 8 c) 100 d) 50 e) -30

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 67 y 68, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.

- Si $\int_R f(r, \theta) dA > 0$, entonces $f(r, \theta) > 0$ para todo (r, θ) en R .
- Si $f(r, \theta)$ es una función constante y el área de la región S es el doble del área de la región R , entonces $2 \int_R f(r, \theta) dA = \int_S f(r, \theta) dA$.

- 69. Probabilidad** El valor de la integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$ se requiere en el desarrollo de la función de densidad de probabilidad normal.

- Utilizar coordenadas polares para evaluar la integral impropia.

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dA \end{aligned}$$

- Utilizar el resultado del inciso a) para calcular I .

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este problema, ver el artículo “Integrating e^{-x^2} Without Polar Coordinates” de William Dunham en *Mathematics Teacher*.

- 70.** Utilizar el resultado del ejercicio 69 y un cambio de variables para evaluar cada una de las integrales siguientes. No se requiere hacer ninguna integración.

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad b) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2} dx$$

- 71. Población** La densidad de población en una ciudad se aproxima mediante el modelo $f(x, y) = 4000e^{-0.01(x^2 + y^2)}$, $x^2 + y^2 \leq 49$, donde x y y se miden en millas. Integrar la función de densidad sobre la región circular indicada para aproximar la población de la ciudad.

- 72. Probabilidad** Hallar k tal que la función

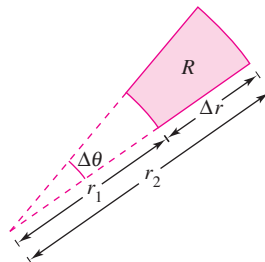
$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(x^2+y^2)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

sea una función de densidad de probabilidad.

- 73. Para pensar** Considerar la región limitada o acotada por las gráficas de $y = 2$, $y = 4$, $y = x$ y $y = \sqrt{3}x$ y la integral doble $\int_R f dA$. Determinar los límites de integración si la región R está dividida en a) elementos representativos horizontales, b) elementos representativos verticales y c) sectores polares.

- 74.** Repetir el ejercicio 73 con una región R limitada o acotada por la gráfica de la ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

- 75.** Mostrar que el área A del sector polar R (ver la figura) es $A = r\Delta r\Delta\theta$, donde $r = (r_1 + r_2)/2$ es el radio promedio de R .



14.4 Centro de masa y momentos de inercia

- Hallar la masa de una lámina plana utilizando una integral doble.
- Hallar el centro de masa de una lámina plana utilizando integrales dobles.
- Hallar los momentos de inercia utilizando integrales dobles.

Masa

En la sección 7.6 se analizaron varias aplicaciones de la integración en las que se tenía una lámina plana de densidad *constante* ρ . Por ejemplo, si la lámina que corresponde a la región R , que se muestra en la figura 14.34, tiene una densidad constante ρ , entonces la masa de la lámina está dada por

$$\text{Masa} = \rho A = \rho \iint_R dA = \iint_R \rho \, dA. \quad \text{Densidad constante.}$$

Si no se especifica otra cosa, se supone que una lámina tiene densidad constante. En esta sección, se extiende la definición del término *lámina* para abarcar también placas delgadas de densidad *variable*. Las integrales dobles pueden usarse para calcular la masa de una lámina de densidad variable, donde la densidad en (x, y) está dada por la **función de densidad** ρ .

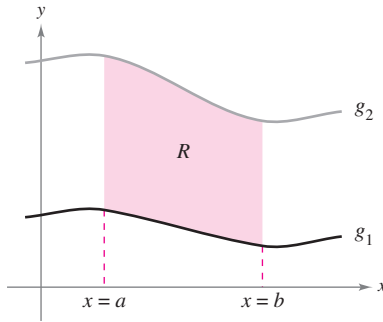


Lámina de densidad constante ρ
Figura 14.34

DEFINICIÓN DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA DE DENSIDAD VARIABLE

Si ρ es una función de densidad continua sobre la lámina que corresponde a una región plana R , entonces la masa m de la lámina está dada por

$$m = \iint_R \rho(x, y) \, dA. \quad \text{Densidad variable.}$$

NOTA La densidad se expresa normalmente como masa por unidad de volumen. Sin embargo, en una lámina plana la densidad es masa por unidad de área de superficie. ■

EJEMPLO 1 Hallar la masa de una lámina plana

Hallar la masa de la lámina triangular con vértices $(0, 0)$, $(0, 3)$ y $(2, 3)$, dado que la densidad en (x, y) es $\rho(x, y) = 2x + y$.

Solución Como se muestra en la figura 14.35, la región R tiene como fronteras $x = 0$, $y = 3$ y $y = 3x/2$ (o $x = 2y/3$). Por consiguiente, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} m &= \iint_R (2x + y) \, dA = \int_0^3 \int_0^{2y/3} (2x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \left[x^2 + xy \right]_0^{2y/3} dy \\ &= \frac{10}{9} \int_0^3 y^2 \, dy \\ &= \frac{10}{9} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^3 \\ &= 10. \end{aligned}$$

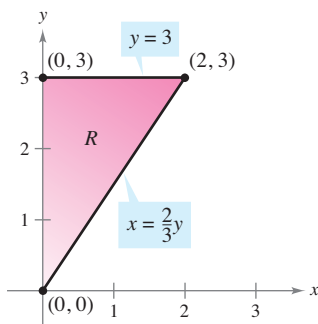
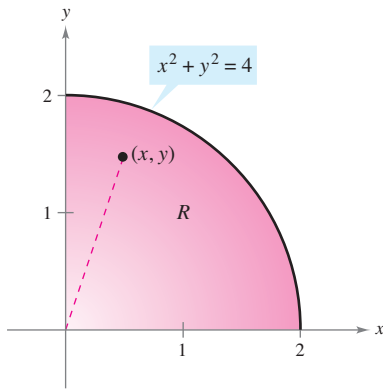


Lámina de densidad variable
 $\rho(x, y) = 2x + y$
Figura 14.35

NOTA En la figura 14.35, nótese que la lámina plana está sombreada; el sombreado más oscuro corresponde a la parte más densa. ■

EJEMPLO 2 Hallar la masa empleando coordenadas polares

Densidad en (x, y) : $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$
Figura 14.36

Hallar la masa de la lámina correspondiente a la porción en el primer cuadrante del círculo

$$x^2 + y^2 = 4$$

donde la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia entre el punto y el origen, como se muestra en la figura 14.36.

Solución En todo punto (x, y) , la densidad de la lámina es

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= k\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \\ &= k\sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Como $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$, la masa está dada por

$$\begin{aligned}m &= \iint_R k\sqrt{x^2 + y^2} dA \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} k\sqrt{x^2 + y^2} dy dx.\end{aligned}$$

Para simplificar la integración, se puede convertir a coordenadas polares, utilizando los límites o cotas $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y $0 \leq r \leq 2$. Por tanto, la masa es

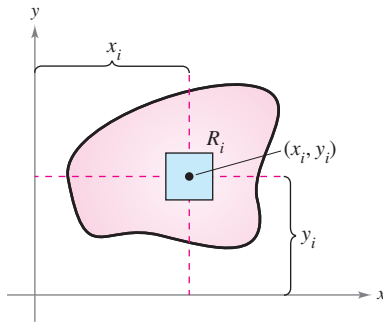
$$\begin{aligned}m &= \iint_R k\sqrt{x^2 + y^2} dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 k\sqrt{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 kr^2 dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left. \frac{kr^3}{3} \right|_0^2 d\theta \\ &= \frac{8k}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{8k}{3} \left[\theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{4\pi k}{3}.\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA En muchas ocasiones, en este texto, se han mencionado las ventajas de utilizar programas de computación que realizan integración simbólica. Aun cuando se utilicen tales programas con regularidad, hay que recordar que sus mejores ventajas sólo son aprovechables en manos de un usuario conocedor. Por ejemplo, nótese la simplificación de la integral del ejemplo 2 cuando se convierte a la forma polar.

<i>Forma rectangular</i>	<i>Forma polar</i>
$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} k\sqrt{x^2 + y^2} dy dx$	$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 kr^2 dr d\theta$

Si se tiene acceso a programas que realicen integración simbólica, se recomienda utilizarlos para evaluar ambas integrales. Algunos programas no pueden manejar la primera integral, pero cualquier programa que calcule integrales dobles puede evaluar la segunda integral.

Momentos y centros de masa



$$M_x = (\text{masa})(y_i)$$

$$M_y = (\text{masa})(x_i)$$

Figura 14.37

En láminas de densidad variable, los momentos de masa se definen de manera similar a la empleada en el caso de densidad uniforme. Dada una partición Δ de una lámina, correspondiente a una región plana R , considerar el rectángulo i -ésimo R_i de área ΔA_i , como se muestra en la figura 14.37. Suponer que la masa de R_i se concentra en uno de sus puntos interiores (x_i, y_i) . El momento de masa de R_i respecto al eje x puede aproximarse por medio de

$$(\text{Masa})(y_i) \approx [\rho(x_i, y_i) \Delta A_i](y_i).$$

De manera similar, el momento de masa con respecto al eje y puede aproximarse por medio de

$$(\text{Masa})(x_i) \approx [\rho(x_i, y_i) \Delta A_i](x_i).$$

Formando la suma de Riemann de todos estos productos y tomando límites cuando la norma de Δ se aproxima a 0, se obtienen las definiciones siguientes de momentos de masa con respecto a los ejes x y y .

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA DE DENSIDAD VARIABLE

Sea ρ una función de densidad continua sobre la lámina plana R . Los **momentos de masa** con respecto a los ejes x y y son

$$M_x = \iint_R y\rho(x, y) dA \quad \text{y} \quad M_y = \iint_R x\rho(x, y) dA.$$

Si m es la masa de la lámina, entonces el **centro de masa** es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right).$$

Si R representa una región plana simple en lugar de una lámina, el punto (\bar{x}, \bar{y}) se llama el **centroide** de la región.

En algunas láminas planas con densidad constante ρ , se puede determinar el centro de masa (o una de sus coordenadas) utilizando la simetría en lugar de usar integración. Por ejemplo, considerar las láminas de densidad constante mostradas en la figura 14.38. Utilizando la simetría, se puede ver que $\bar{y} = 0$ en la primera lámina y $\bar{x} = 0$ en la segunda lámina.

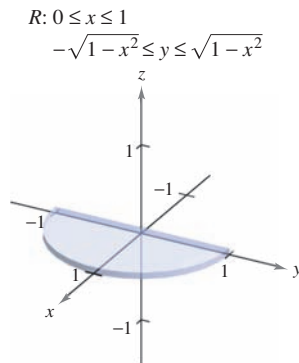


Lámina de densidad constante y simétrica con respecto al eje x
Figura 14.38

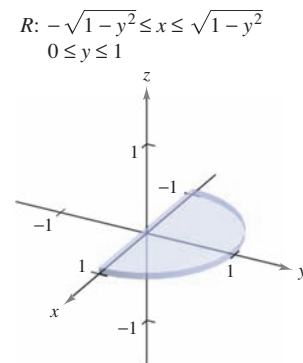
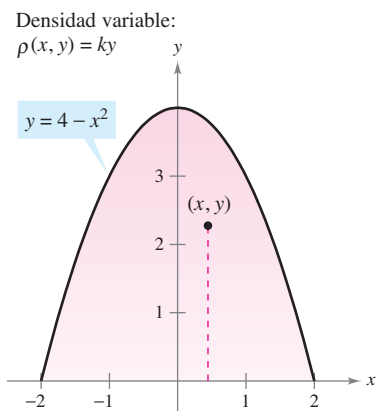


Lámina de densidad constante y simétrica con respecto al eje y



Región parabólica de densidad variable
Figura 14.39

EJEMPLO 3 Hallar el centro de masa

Hallar el centro de masa de la lámina que corresponde a la región parabólica

$$0 \leq y \leq 4 - x^2 \quad \text{Región parabólica.}$$

donde la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia entre (x, y) y el eje x , como se muestra en la figura 14.39.

Solución Como la lámina es simétrica con respecto al eje y y

$$\rho(x, y) = ky$$

el centro de masa está en el eje y . Así, $\bar{x} = 0$. Para hallar \bar{y} , primero calcular la masa de la lámina.

$$\begin{aligned} \text{Masa} &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} ky \, dy \, dx = \frac{k}{2} \int_{-2}^2 y^2 \Big|_0^{4-x^2} dx \\ &= \frac{k}{2} \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx \\ &= \frac{k}{2} \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 \\ &= k \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) \\ &= \frac{256k}{15} \end{aligned}$$

Después se halla el momento con respecto al eje x .

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} (y)(ky) \, dy \, dx = \frac{k}{3} \int_{-2}^2 y^3 \Big|_0^{4-x^2} dx \\ &= \frac{k}{3} \int_{-2}^2 (64 - 48x^2 + 12x^4 - x^6) dx \\ &= \frac{k}{3} \left[64x - 16x^3 + \frac{12x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{4096k}{105} \end{aligned}$$

Así,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4096k/105}{256k/15} = \frac{16}{7}$$

y el centro de masa es $(0, \frac{16}{7})$.

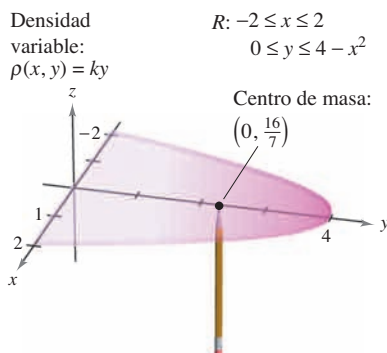


Figura 14.40

Aunque los momentos M_x y M_y se pueden interpretar como una medida de la tendencia a girar en torno a los ejes x o y , el cálculo de los momentos normalmente es un paso intermedio hacia una meta más tangible. El uso de los momentos M_x y M_y es encontrar el centro de masa. La determinación del centro de masa es útil en muchas aplicaciones, ya que permite tratar una lámina como si su masa se concentrara en un solo punto. Intuitivamente, se puede concebir el centro de masa como el punto de equilibrio de la lámina. Por ejemplo, la lámina del ejemplo 3 se mantendrá en equilibrio sobre la punta de un lápiz colocado en $(0, \frac{16}{7})$, como se muestra en la figura 14.40.

Momentos de inercia

Los momentos M_x y M_y utilizados en la determinación del centro de masa de una lámina se suelen llamar **primeros momentos** con respecto a los ejes x y y . En cada uno de los casos, el momento es el producto de una masa por una distancia.

$$M_x = \iint_R (y) \rho(x, y) \, dA \qquad M_y = \iint_R (x) \rho(x, y) \, dA$$

↑ ↑
↑ ↑

Distancia Masa
Distancia Masa

al eje x
al eje y

Ahora se introducirá otro tipo de momento, el **segundo momento o momento de inercia** de una lámina respecto de una recta. Del mismo modo que la masa es una medida de la tendencia de la materia a resistirse a cambios en el movimiento rectilíneo, el momento de inercia respecto de una recta es una *medida de la tendencia de la materia a resistirse a cambios en el movimiento de rotación*. Por ejemplo, si una partícula de masa m está a una distancia d de una recta fija, su momento de inercia respecto de la recta se define como

$$I = md^2 = (\text{masa})(\text{distancia})^2.$$

Igual que ocurre con los momentos de masa, se puede generalizar este concepto para obtener los momentos de inercia de una lámina de densidad variable respecto de los ejes x y y . Estos segundos momentos se denotan por I_x e I_y , y en cada caso el momento es el producto de una masa por el cuadrado de una distancia.

$$I_x = \iint_R (y^2) \rho(x, y) \, dA \qquad I_y = \iint_R (x^2) \rho(x, y) \, dA$$

↑ ↑
↑ ↑

Cuadrado de Masa
Cuadrado de Masa

la distancia
la distancia

al eje x
al eje y

NOTA En el caso de una lámina en el plano xy , I_0 representa el momento de inercia de la lámina con respecto al eje z . El término “momento polar de inercia” se debe a que en el cálculo se utiliza el cuadrado de la distancia polar r .

A la suma de los momentos I_x e I_y se le llama el **momento polar de inercia** y se denota por I_0 .

EJEMPLO 4 Hallar el momento de inercia

Hallar el momento de inercia respecto del eje x de la lámina del ejemplo 3.

Solución De acuerdo con la definición de momento de inercia, se tiene

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) \, dA$$

$$= \iint_R r^2 \rho(x, y) \, dA$$

$$I_x = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} y^2(ky) \, dy \, dx$$

$$= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 y^4 \Big|_0^{4-x^2} \, dx$$

$$= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 (256 - 256x^2 + 96x^4 - 16x^6 + x^8) \, dx$$

$$= \frac{k}{4} \left[256x - \frac{256x^3}{3} + \frac{96x^5}{5} - \frac{16x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \right]_{-2}^2$$

$$= \frac{32\,768k}{315}.$$

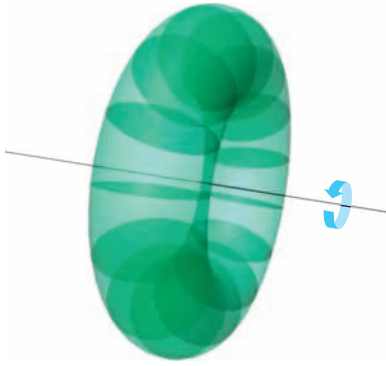


Lámina plana girando a ω radianes por segundo
Figura 14.41

El momento de inercia I de una lámina en rotación puede utilizarse para medir su energía cinética. Por ejemplo, consideremos una lámina plana que gira en torno a una recta con una **velocidad angular** de ω radianes por segundo, como se muestra en la figura 14.41. La energía cinética E de la lámina en rotación es

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad \text{Energía cinética del movimiento giratorio.}$$

Por otro lado, la energía cinética E de una masa m que se mueve en línea recta a una velocidad v es

$$E = \frac{1}{2} m v^2. \quad \text{Energía cinética del movimiento rectilíneo.}$$

Por lo tanto, la energía cinética de una masa que se mueve en línea recta es proporcional a su masa, pero la energía cinética de una masa que gira en torno a un eje es proporcional a su momento de inercia.

El **radio de giro** \bar{r} de una masa en rotación m con momento de inercia I se define como

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{I}{m}}. \quad \text{Radio de giro.}$$

Si toda la masa se localizara a una distancia \bar{r} de su eje de giro o eje de rotación, tendría el mismo momento de inercia y, por consiguiente, la misma energía cinética. Por ejemplo, el radio de giro de la lámina del ejemplo 4 respecto al eje x está dado por

$$\bar{y} = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \sqrt{\frac{32\,768k/315}{256k/15}} = \sqrt{\frac{128}{21}} \approx 2.469.$$

EJEMPLO 5 Cálculo del radio de giro

Hallar el radio de giro con respecto al eje y de la lámina que corresponde a la región R : $0 \leq y \leq \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, donde la densidad en (x, y) está dada por $\rho(x, y) = x$.

Solución La región R se muestra en la figura 14.42. Integrando $\rho(x, y) = x$ sobre la región R , se puede determinar que la masa de la región es π . El momento de inercia con respecto al eje y es

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^\pi \int_0^{\sin x} x^3 \, dy \, dx \\ &= \int_0^\pi x^3 y \Big|_0^{\sin x} \, dx \\ &= \int_0^\pi x^3 \sin x \, dx \\ &= \left[(3x^2 - 6)(\sin x) - (x^3 - 6x)(\cos x) \right]_0^\pi \\ &= \pi^3 - 6\pi. \end{aligned}$$

Por tanto, el radio de giro con respecto al eje y es

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sqrt{\frac{I_y}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi^3 - 6\pi}{\pi}} \\ &= \sqrt{\pi^2 - 6} \approx 1.967. \end{aligned}$$

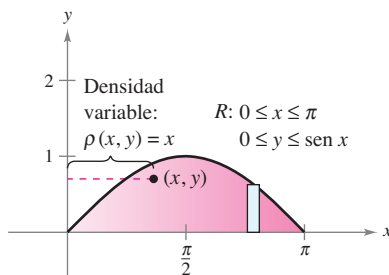


Figura 14.42

14.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, hallar la masa de la lámina descrita por las desigualdades, dado que su densidad es $\rho(x, y) = xy$. (Sugerencia: Algunas de las integrales son más simples en coordenadas polares.)

1. $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$
2. $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 9 - x^2$
3. $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$
4. $x \geq 0, 3 \leq y \leq 3 + \sqrt{9 - x^2}$

En los ejercicios 5 a 8, hallar la masa y el centro de masa de la lámina con cada densidad.

5. R : cuadrado con vértices $(0, 0), (a, 0), (0, a), (a, a)$
 a) $\rho = k$ b) $\rho = ky$ c) $\rho = kx$
6. R : rectángulo con vértices $(0, 0), (a, 0), (0, b), (a, b)$
 a) $\rho = kxy$ b) $\rho = k(x^2 + y^2)$
7. R : triángulo con vértices $(0, 0), (0, a), (a, a)$
 a) $\rho = k$ b) $\rho = ky$ c) $\rho = kx$
8. R : triángulo con vértices $(0, 0), (a/2, a), (a, 0)$
 a) $\rho = k$ b) $\rho = kxy$

9. **Traslaciones en el plano** Trasladar la lámina del ejercicio 5 cinco unidades a la derecha y determinar el centro de masa resultante.

10. **Conjetura** Utilizar el resultado del ejercicio 9 para formular una conjetura acerca del cambio en el centro de masa cuando una lámina de densidad constante se traslada c unidades horizontalmente o d unidades verticalmente. ¿Es la conjetura verdadera si la densidad no es constante? Explicar.

En los ejercicios 11 a 22, hallar la masa y el centro de masa de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad o densidades que se especifican. (Sugerencia: Algunas de las integrales son más sencillas en coordenadas polares.)

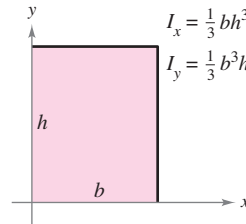
11. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1, \rho = ky$
12. $y = x^2, y = 0, x = 2, \rho = kxy$
13. $y = 4/x, y = 0, x = 1, x = 4, \rho = kx^2$
14. $y = \frac{1}{1 + x^2}, y = 0, x = -1, x = 1, \rho = k$
15. $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$
 a) $\rho = k$ b) $\rho = ky$
16. $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 1$
 a) $\rho = ky$ b) $\rho = ky^2$
17. $y = 4 - x^2, y = 0, \rho = ky$
18. $x = 9 - y^2, x = 0, \rho = kx$
19. $y = \sin \frac{\pi x}{L}, y = 0, x = 0, x = L, \rho = k$
20. $y = \cos \frac{\pi x}{L}, y = 0, x = 0, x = \frac{L}{2}, \rho = ky$
21. $y = \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq y \leq x, \rho = k$
22. $x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq x, 0 \leq y, \rho = k(x^2 + y^2)$

CAS En los ejercicios 23 a 26, utilizar un sistema algebraico por computadora para hallar la masa y el centro de masa de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad dada.

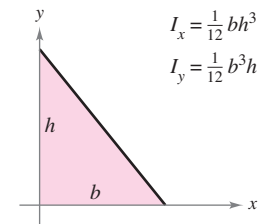
23. $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 2, \rho = ky$
24. $y = \ln x, y = 0, x = 1, x = e, \rho = kxy$
25. $r = 2 \cos 3\theta, -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \rho = k$
26. $r = 1 + \cos \theta, \rho = k$

En los ejercicios 27 a 32, verificar los momentos de inercia dados y hallar \bar{x} y \bar{y} . Suponer que la densidad de cada lámina es $\rho = 1$ gramos por centímetro cuadrado. (Estas regiones son formas de uso común empleadas en diseño.)

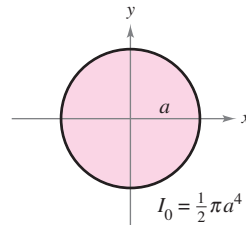
27. Rectángulo



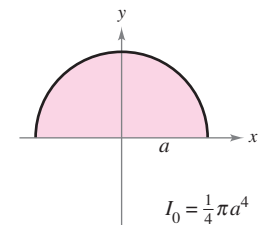
28. Triángulo rectángulo



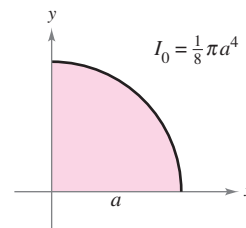
29. Círculo



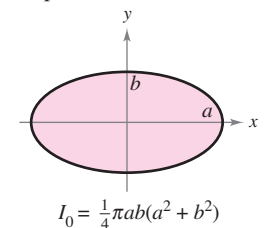
30. Semicírculo



31. Cuarto del círculo



32. Elipse



CAS En los ejercicios 33 a 40, hallar $I_x, I_y, I_0, \bar{x},$ y \bar{y} para la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones. Utilizar un sistema algebraico por computadora a fin de evaluar las integrales dobles.

33. $y = 0, y = b, x = 0, x = a, \rho = ky$
34. $y = \sqrt{a^2 - x^2}, y = 0, \rho = ky$
35. $y = 4 - x^2, y = 0, x > 0, \rho = kx$
36. $y = x, y = x^2, \rho = kxy$
37. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4, \rho = kxy$
38. $y = x^2, y^2 = x, \rho = x^2 + y^2$
39. $y = x^2, y^2 = x, \rho = kx$
40. $y = x^3, y = 4x, \rho = k|y|$

CAS En los ejercicios 41 a 46, dar la integral doble requerida para hallar el momento de inercia I , con respecto a la recta dada, de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral doble.

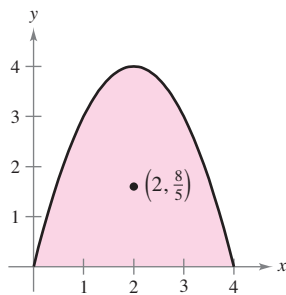
- 41. $x^2 + y^2 = b^2$, $\rho = k$, recta: $x = a$ ($a > b$)
- 42. $y = 0$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 4$, $\rho = k$, recta: $x = 6$
- 43. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$, $\rho = kx$, recta: $x = 6$
- 44. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$, $\rho = ky$, recta: $y = a$
- 45. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$, $x \geq 0$, $\rho = k(a - y)$, recta: $y = a$
- 46. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $\rho = k$, recta: $y = 2$

Desarrollo de conceptos

- 47. Dar las fórmulas para hallar los momentos y el centro de masa de una lámina plana de densidad variable.
- 48. Dar las fórmulas para hallar los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y de una lámina plana de densidad variable.
- 49. Con las propias palabras, describir qué mide el radio de giro.

Para discusión

50. El centro de masa de la lámina de densidad constante mostrado en la figura es $(2, \frac{8}{5})$. Hacer una conjetura acerca de cómo cambiará el centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) si la densidad $\rho(x, y)$ no es constante. Explicar. (Hacer la conjetura *sin* realizar cálculo alguno.)



- a) $\rho(x, y) = ky$
- b) $\rho(x, y) = k|2 - x|$
- c) $\rho(x, y) = kxy$
- d) $\rho(x, y) = k(4 - x)(4 - y)$

PROYECTO DE TRABAJO

Centro de presión sobre una vela

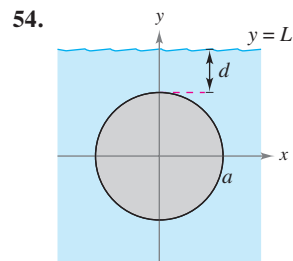
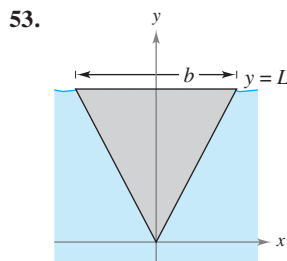
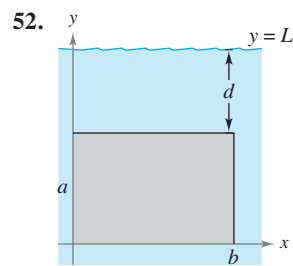
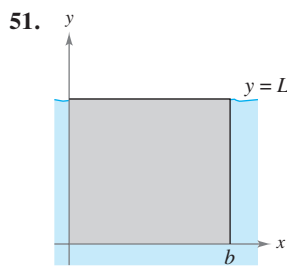
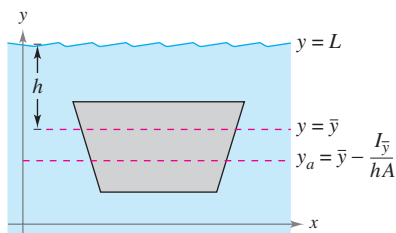
El centro de presión sobre una vela es aquel punto (x_p, y_p) en el cual puede suponerse que actúa la fuerza aerodinámica total. Si la vela se representa mediante una región plana R , el centro de presión es

$$x_p = \frac{\int_R \int xy \, dA}{\int_R \int y \, dA} \quad \text{y} \quad y_p = \frac{\int_R \int y^2 \, dA}{\int_R \int y \, dA}$$

Hidráulica En los ejercicios 51 a 54, determinar la posición del eje horizontal y_a en el que debe situarse una compuerta vertical en una presa para lograr que no haya momento que ocasione la rotación bajo la carga indicada (ver la figura). El modelo para y_a es

$$y_a = \bar{y} - \frac{I_{\bar{y}}}{hA}$$

donde \bar{y} es la coordenada y del centroide de la compuerta, $I_{\bar{y}}$ es el momento de inercia de la compuerta con respecto a la recta $y = \bar{y}$, h es la profundidad del centroide bajo la superficie y A es el área de la compuerta.



55. Demostrar el teorema de Pappus siguiente: sea R una región plana y sea L una recta en el mismo plano tal que L no corta el interior de R . Si r es la distancia entre el centroide de R y la recta, entonces el volumen V del sólido de revolución generado por revolución de R en torno a la recta está dado por $V = 2\pi rA$, donde A es el área de R .

Considerar una vela triangular con vértices en $(0, 0)$, $(2, 1)$ y $(0, 5)$. Verificar los valores de cada integral.

a) $\int_R \int y \, dA = 10$ b) $\int_R \int xy \, dA = \frac{35}{6}$ c) $\int_R \int y^2 \, dA = \frac{155}{6}$

Calcular las coordenadas (x_p, y_p) del centro de presión. Dibujar una gráfica de la vela e indicar la localización del centro de presión.

14.5 Área de una superficie

- Utilizar una integral doble para hallar el área de una superficie.

Área de una superficie

En este punto ya se tiene una gran cantidad de conocimientos acerca de la región sólida que se encuentra entre una superficie y una región R en el plano xy cerrada y limitada o acotada, como se muestra en la figura 14.43. Por ejemplo, se sabe cómo hallar los extremos de f en R (sección 13.8), el área de la base R del sólido (sección 14.1), el volumen del sólido (sección 14.2) y el centroide de la base de R (sección 14.4).

En esta sección se verá cómo hallar el **área de la superficie** superior del sólido. Más adelante se aprenderá a calcular el centroide del sólido (sección 14.6) y el área de la superficie lateral (sección 15.2).

Para empezar, considerar una superficie S dada por

$$z = f(x, y) \quad \text{Superficie definida sobre una región } R.$$

definida sobre una región R . Suponer que R es cerrada y acotada y que f tiene primeras derivadas parciales continuas. Para hallar el área de la superficie, se construye una partición interna de R que consiste en n rectángulos donde el área del rectángulo i -ésimo R_i es $\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$, como se muestra en la figura 14.44. En cada R_i sea (x_i, y_i) el punto más próximo al origen. En el punto $(x_i, y_i, z_i) = (x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ de la superficie S , se construye un plano tangente T_i . El área de la porción del plano tangente que se encuentra directamente sobre R_i es aproximadamente igual al área de la superficie que se encuentra directamente sobre R_i . Es decir, $\Delta T_i \approx \Delta S_i$. Por tanto, el área de la superficie de S está dada por

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n \Delta T_i.$$

Para hallar el área del paralelogramo ΔT_i , notar que sus lados están dados por los vectores

$$\mathbf{u} = \Delta x_i \mathbf{i} + f_x(x_i, y_i) \Delta x_i \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{v} = \Delta y_i \mathbf{j} + f_y(x_i, y_i) \Delta y_i \mathbf{k}.$$

De acuerdo con el teorema 11.8, el área de ΔT_i está dada por $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_i & 0 & f_x(x_i, y_i) \Delta x_i \\ 0 & \Delta y_i & f_y(x_i, y_i) \Delta y_i \end{vmatrix} \\ &= -f_x(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i \mathbf{i} - f_y(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i \mathbf{j} + \Delta x_i \Delta y_i \mathbf{k} \\ &= (-f_x(x_i, y_i) \mathbf{i} - f_y(x_i, y_i) \mathbf{j} + \mathbf{k}) \Delta A_i. \end{aligned}$$

Por tanto, el área de ΔT_i es $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{[f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2 + 1} \Delta A_i$, y

$$\begin{aligned} \text{El área de la superficie de } &\approx \sum_{i=1}^n \Delta S_i \\ &\approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2} \Delta A_i. \end{aligned}$$

Esto sugiere la definición siguiente de área de una superficie.

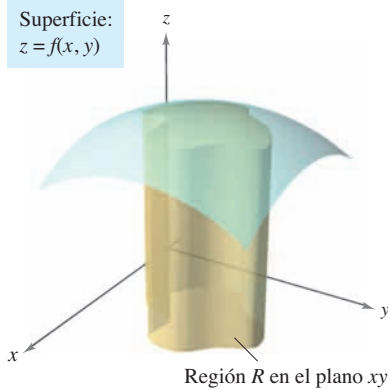


Figura 14.43

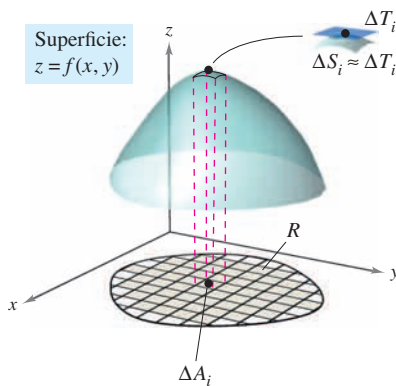


Figura 14.44

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE

Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas en la región cerrada R en el plano xy , entonces el **área de la superficie** S dada por $z = f(x, y)$ sobre R está dada por

$$\begin{aligned} \text{Área de la superficie} &= \iint_R dS \\ &= \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA. \end{aligned}$$

Para memorizar la integral doble para el área de una superficie, es útil notar su semejanza con la integral de la longitud del arco.

Longitud sobre el eje x : $\int_a^b dx$

Longitud de arco en el plano xy : $\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

Área en el plano xy : $\iint_R dA$

Área de una superficie en el espacio: $\iint_R dS = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA$

Igual que las integrales para la longitud de arco, las integrales para el área de una superficie son a menudo muy difíciles de calcular. Sin embargo, en el ejemplo siguiente se muestra un tipo que se evalúa con facilidad.

EJEMPLO 1 El área de la superficie de una región plana

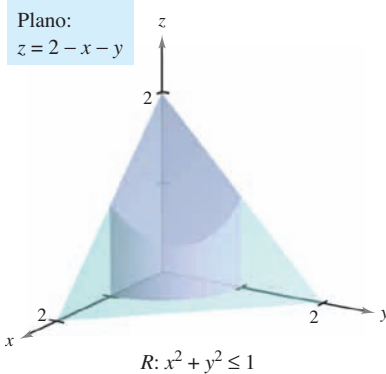


Figura 14.45

Hallar el área de la superficie de la porción del plano

$$z = 2 - x - y$$

que se encuentra sobre el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante, como se muestra en la figura 14.45.

Solución Como $f_x(x, y) = -1$ y $f_y(x, y) = -1$, el área de la superficie está dada por

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA && \text{Fórmula para el área de la superficie.} \\ &= \iint_R \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dA && \text{Sustituir.} \\ &= \iint_R \sqrt{3} dA \\ &= \sqrt{3} \iint_R dA. \end{aligned}$$

Observar que la última integral es simplemente $\sqrt{3}$ por el área de la región R . R es un cuarto del círculo de radio 1, cuya área es $\frac{1}{4}\pi(1^2)$ o $\pi/4$. Por tanto, el área de S es

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{3} (\text{área de } R) \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3} \pi}{4}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Hallar el área de una superficie

Hallar el área de la porción de la superficie

$$f(x, y) = 1 - x^2 + y$$

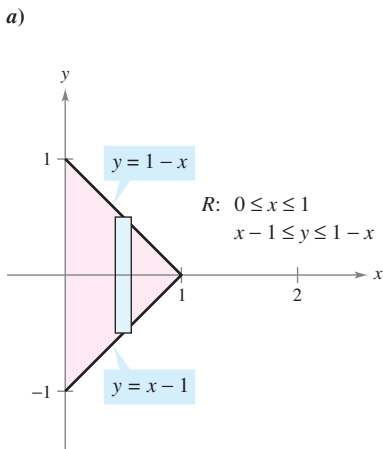
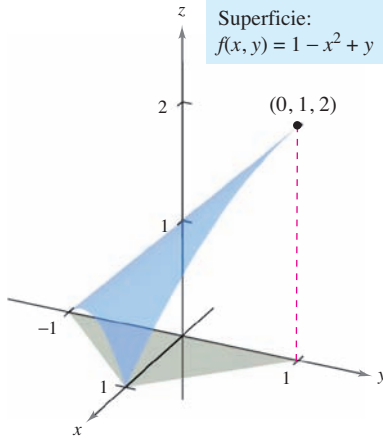
que se encuentra sobre la región triangular cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ y $(0, 1, 0)$, como se muestra en la figura 14.46a.

Solución Como $f_x(x, y) = -2x$ y $f_y(x, y) = 1$, se tiene

$$S = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA = \iint_R \sqrt{1 + 4x^2 + 1} dA.$$

En la figura 14.46b se ve que los límites o cotas de R son $0 \leq x \leq 1$ y $x - 1 \leq y \leq 1 - x$. Por lo que la integral será

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \sqrt{2 + 4x^2} dy dx \\ &= \int_0^1 y \sqrt{2 + 4x^2} \Big|_{x-1}^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 [(1-x)\sqrt{2 + 4x^2} - (x-1)\sqrt{2 + 4x^2}] dx \\ &= \int_0^1 (2\sqrt{2 + 4x^2} - 2x\sqrt{2 + 4x^2}) dx && \text{Tablas de integración (apéndice B).} \\ &= \left[x\sqrt{2 + 4x^2} + \ln(2x + \sqrt{2 + 4x^2}) - \frac{(2 + 4x^2)^{3/2}}{6} \right]_0^1 && \text{Fórmula 26 y regla de la potencia.} \\ &= \sqrt{6} + \ln(2 + \sqrt{6}) - \sqrt{6} - \ln \sqrt{2} + \frac{1}{3} \sqrt{2} \approx 1.618. \end{aligned}$$



b) **Figura 14.46**

EJEMPLO 3 Cambio de variables a coordenadas polares

Hallar el área de la superficie del paraboloides $z = 1 + x^2 + y^2$ que se encuentra sobre el círculo unidad o unitario, como se muestra en la figura 14.47.

Solución Como $f_x(x, y) = 2x$ y $f_y(x, y) = 2y$, se tiene

$$S = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA = \iint_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA.$$

Se puede pasar a coordenadas polares haciendo $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$. Entonces, como la región R está acotada por $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se tiene

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{5\sqrt{5} - 1}{12} d\theta \\ &= \frac{5\sqrt{5} - 1}{12} \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6} \\ &\approx 5.33. \end{aligned}$$

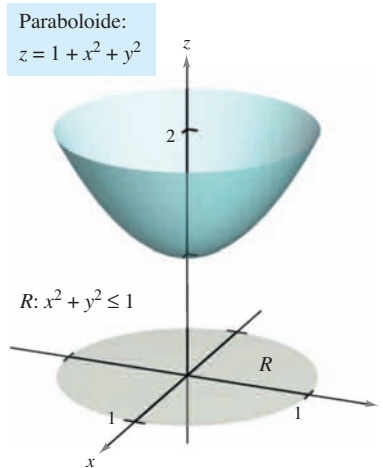


Figura 14.47

EJEMPLO 4 Hallar el área de una superficie

Hallar el área de la superficie S correspondiente a la porción del hemisferio

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \quad \text{Hemisferio.}$$

que se encuentra sobre la región R limitada o acotada por el círculo $x^2 + y^2 \leq 9$, como se muestra en la figura 14.48.

Solución Las primeras derivadas parciales de f son

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

y, de acuerdo con la fórmula para el área de una superficie, se tiene

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\right)^2} dA \\ &= \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dA. \end{aligned}$$

Así, el área de la superficie es

$$S = \iint_R \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dA.$$

Se puede pasar a coordenadas polares haciendo $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$. Entonces, como la región R está acotada por $0 \leq r \leq 3$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se obtiene

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \frac{5}{\sqrt{25 - r^2}} r dr d\theta \\ &= 5 \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{25 - r^2}\right]_0^3 d\theta \\ &= 5 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 10\pi. \end{aligned}$$

El procedimiento utilizado en el ejemplo 4 puede extenderse para hallar el área de la superficie de una esfera utilizando la región R limitada o acotada por el círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$, donde $0 < a < 5$, como se muestra en la figura 14.49. Se puede mostrar que el área de la superficie de la porción del hemisferio

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

que se encuentra sobre la región circular es

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{5}{\sqrt{25 - r^2}} r dr d\theta \\ &= 10\pi(5 - \sqrt{25 - a^2}). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando a tiende a 5 y multiplicando el resultado por dos, se obtiene el área total, que es 100π . (El área de la superficie de una esfera de radio r es $S = 4\pi r^2$.)

Hemisferio:
 $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

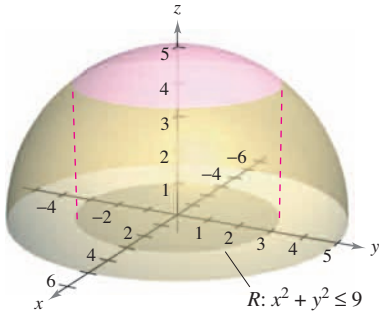


Figura 14.48

Hemisferio:
 $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

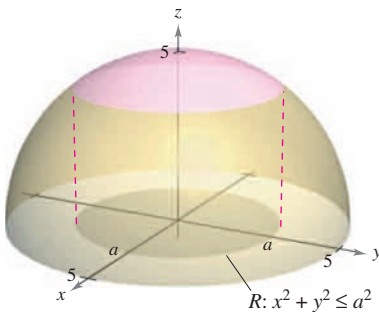


Figura 14.49

La regla de Simpson o la regla del trapecio pueden usarse para aproximar el valor de una integral doble, *siempre* que se pueda obtener la primera integral. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Aproximación del área de una superficie mediante la regla de Simpson

Hallar el área de la superficie del paraboloides

$$f(x, y) = 2 - x^2 - y^2 \quad \text{Paraboloides.}$$

que se encuentra sobre la región cuadrada acotada por $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$, como se muestra en la figura 14.50.

Solución Utilizando las derivadas parciales

$$f_x(x, y) = -2x \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2y$$

se tiene que el área de la superficie es

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} \, dA \\ &= \iint_R \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2} \, dA \\ &= \iint_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dA. \end{aligned}$$

En coordenadas polares, la recta $x = 1$ está dada por $r \cos \theta = 1$ o $r = \sec \theta$, y en la figura 14.51 se puede determinar que un cuarto de la región R está limitada o acotada por

$$0 \leq r \leq \sec \theta \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Haciendo $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S &= \frac{1}{4} \iint_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dA \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sec \theta} \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^{\sec \theta} \, d\theta \\ &= \frac{1}{12} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(1 + 4 \sec^2 \theta)^{3/2} - 1] \, d\theta. \end{aligned}$$

Por último, usando la regla de Simpson con $n = 10$, se aproxima esta integral simple

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(1 + 4 \sec^2 \theta)^{3/2} - 1] \, d\theta \\ &\approx 7.450. \end{aligned}$$

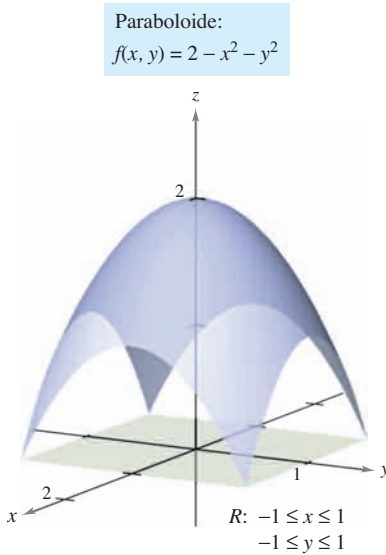
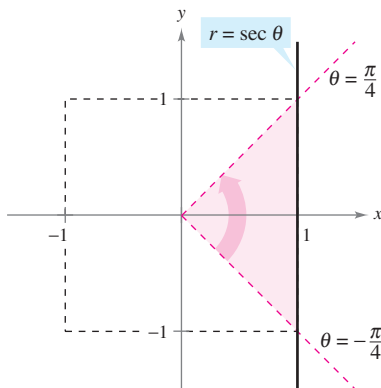


Figura 14.50



Un cuarto de la región R está acotada por $0 \leq r \leq \sec \theta$ y $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Figura 14.51

TECNOLOGÍA La mayor parte de los programas de computación que realizan integración simbólica con integrales múltiples también realizan técnicas de aproximación numéricas. Si se dispone de uno de estos programas, se recomienda usarlo para aproximar el valor de la integral del ejemplo 5.

14.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 14, hallar el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R . (Sugerencia: Algunas de las integrales son más sencillas en coordenadas polares.)

- $f(x, y) = 2x + 2y$
 R : triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 4)$
- $f(x, y) = 15 + 2x - 3y$
 R : cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 3)$
- $f(x, y) = 7 + 2x + 2y$ 4. $f(x, y) = 12 + 2x - 3y$
 $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$ $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}$
- $f(x, y) = 9 - x^2$
 R : cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$
- $f(x, y) = y^2$
 R : cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 3)$
- $f(x, y) = 3 + x^{3/2}$
 R : rectángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(3, 4)$, $(3, 0)$
- $f(x, y) = 2 + \frac{2}{3}y^{3/2}$
 $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$
- $f(x, y) = \ln|\sec x|$
 $R = \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \tan x \right\}$
- $f(x, y) = 13 + x^2 - y^2$
 $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y) \leq 1\}$
- $f(x, y) = xy$, $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 16\}$
- $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
 $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq b^2, 0 < b < a\}$
- $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
 $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq a^2\}$

En los ejercicios 15 a 18, hallar el área de la superficie.

- Porción del plano $z = 24 - 3x - 2y$ en el primer octante
- Porción del paraboloides $z = 16 - x^2 - y^2$ en el primer octante
- Porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 9$
- Porción del cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

CAS En los ejercicios 19 a 24, dar una integral doble que represente el área de la superficie $z = f(x, y)$ sobre la región R . Utilizando un sistema algebraico por computadora, evaluar la integral doble.

- $f(x, y) = 2y + x^2$
 R : triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$
- $f(x, y) = 2x + y^2$
 R : triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$
- $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ 22. $f(x, y) = x^2 + y^2$
 $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y)\}$ $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y) \leq 16\}$

- $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
 $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
- $f(x, y) = \frac{2}{3}x^{3/2} + \cos x$
 $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Aproximación En los ejercicios 25 y 26, determinar qué valor se aproxima más al área de la superficie $z = f(x, y)$ sobre la región R . (Elegir el valor basándose en un dibujo de la superficie y no mediante la utilización de cálculos.)

- $f(x, y) = 10 - \frac{1}{2}y^2$
 R : cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 4)$, $(0, 4)$
a) 16 b) 200 c) -100 d) 72 e) 36
- $f(x, y) = \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + y^2}$
 R : círculo limitado o acotado por $x^2 + y^2 = 9$
a) -100 b) 150 c) 9π d) 55 e) 500

CAS En los ejercicios 27 y 28, utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral doble que representa el área de la superficie de la gráfica de f sobre la región $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

- $f(x, y) = e^x$ 28. $f(x, y) = \frac{2}{5}y^{5/2}$

En los ejercicios 29 a 34, formular una integral doble que proporcione el área de la superficie en la gráfica de f sobre la región R .

- $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$
 R : cuadrado cuyos vértices son $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$
- $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$
 $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$
- $f(x, y) = e^{-x} \sin y$ 32. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$
 $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$ $R = \left\{ (x, y): x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2} \right\}$
- $f(x, y) = e^{xy}$
 $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 10\}$
- $f(x, y) = e^{-x} \sin y$
 $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

Desarrollo de conceptos

- Enunciar la definición, con integral doble, del área de una superficie S dada por $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy .
- Considerar la superficie $f(x, y) = x^2 + y^2$ y el área de superficie de f sobre cada región R . Sin integrar, ordenar las áreas de superficie desde la menor hasta la mayor. Explicar el razonamiento.
a) R : rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$
b) R : triángulo con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$
c) $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4$ sólo el primer cuadrante}
- ¿Aumentará el área de superficie de la gráfica de una función $z = f(x, y)$ sobre una región R si la gráfica de f cambió k unidades verticalmente? ¿Por qué sí o por qué no?

Para discusión

38. Responder las siguientes preguntas acerca del área de superficie S sobre una superficie dada por una función positiva $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy . Explicar cada respuesta.
- a) ¿Es posible para S igualar el área de R ?
 - b) ¿Puede S ser mayor que el área de R ?
 - c) ¿Puede S ser menor que el área de R ?

39. Hallar el área de la superficie del sólido intersección de los cilindros $x^2 + z^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$ (ver la figura).

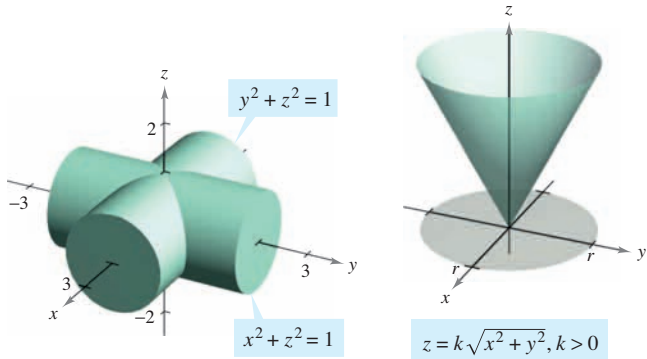


Figura para 39

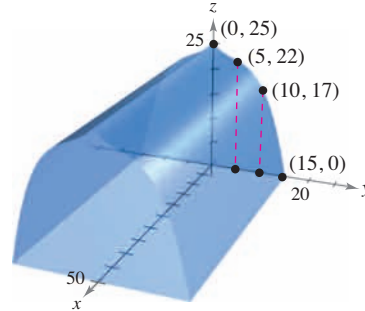
Figura para 40

40. Mostrar que el área de la superficie del cono $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $k > 0$ sobre la región circular $x^2 + y^2 \leq r^2$ en el plano xy es $\pi r^2 \sqrt{k^2 + 1}$ (ver la figura).

41. **Diseño industrial** Una empresa produce un objeto esférico de 25 centímetros de radio. Se hace una perforación de 4 centímetros de radio a través del centro del objeto. Calcular a) el volumen del objeto y b) el área de la superficie exterior del objeto.



42. **Modelo matemático** Un rancho construye un granero de dimensiones 30 por 50 pies. En la figura se muestra la forma simétrica y la altura elegidas para el tejado.



- a) Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para hallar un modelo de la forma $z = ay^3 + by^2 + cy + d$ para el perfil del techo.
- b) Utilizar las funciones de integración numérica de una herramienta de graficación y el modelo del inciso a) para aproximar el volumen del espacio de almacenaje en el granero.
- c) Utilizar las funciones de integración numérica de una herramienta de graficación y el modelo del inciso a) para aproximar el área de la superficie del techo.
- d) Aproximar la longitud de arco de la recta del techo y calcular el área de la superficie del techo multiplicando la longitud de arco por la longitud del granero. Comparar los resultados y las integraciones con los encontrados en el inciso c).

PROYECTO DE TRABAJO

Capilaridad

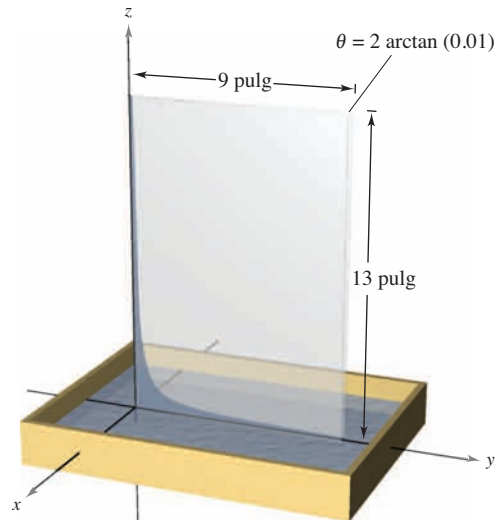
Una propiedad muy conocida de los líquidos se llama “capilaridad”, y consiste en que ascienden por conductos verticales muy estrechos. La figura muestra dos placas que forman una cuña estrecha dentro de un recipiente con líquido. La superficie superior del líquido toma una forma hiperbólica dada por

$$z = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

donde x, y y z están medidas en pulgadas. La constante k depende del ángulo de la cuña, del tipo de líquido y del material de las placas.

- a) Hallar el volumen del líquido que ha ascendido por la cuña. (Tomar $k = 1$.)
- b) Hallar el área de la superficie horizontal del líquido que ha ascendido por la cuña.

Adaptación de un problema sobre capilaridad de “Capillary Phenomena” de Thomas B. Greenslade, Jr., *Physics Teacher*, mayo de 1992. Con autorización del autor.



14.6 Integrales triples y aplicaciones

- Utilizar una integral triple para calcular el volumen de una región sólida.
- Hallar el centro de masa y los momentos de inercia de una región sólida.

Integrales triples

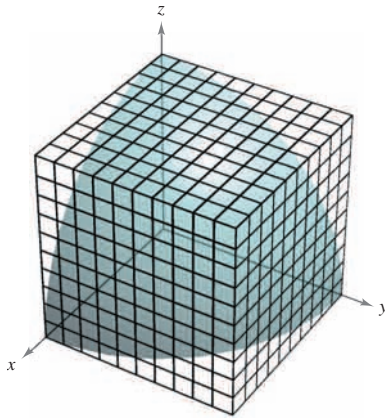
El procedimiento utilizado para definir una **integral triple** es análogo al utilizarlo para integrales dobles. Considerar una función f en tres variables que es continua sobre una región sólida acotada Q . Entonces, se encierra Q en una red de cubos y se forma una **partición interna** que consta de todos los cubos que quedan completamente dentro de Q , como se muestra en la figura 14.52. El volumen del i -ésimo cubo es

$$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i. \quad \text{Volumen del } i\text{-ésimo cubo.}$$

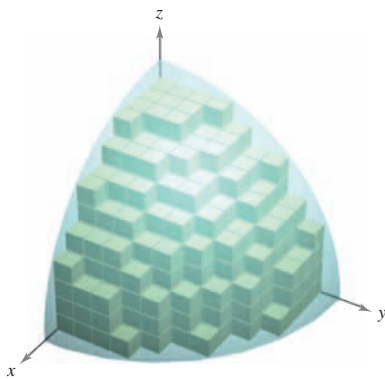
La **norma** $\|\Delta\|$ de la partición es la longitud de la diagonal más larga en los n cubos de la partición. En cada cubo se elige un punto (x_i, y_i, z_i) y se forma la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Tomando el límite cuando $\|\Delta\| \rightarrow 0$ se llega a la siguiente definición.



Región sólida Q



$$\text{Volumen de } Q \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i$$

Figura 14.52

DEFINICIÓN DE INTEGRAL TRIPLE

Si f es continua sobre una región sólida acotada Q , entonces la **integral triple de f sobre Q** se define como

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

siempre que el límite exista. El **volumen** de la región sólida Q está dado por

$$\text{Volumen de } Q = \iiint_Q dV.$$

Algunas de las propiedades de las integrales dobles expuestas en el teorema 14.1 pueden replantearse en términos de integrales triples.

- $\iiint_Q cf(x, y, z) dV = c \iiint_Q f(x, y, z) dV$
- $\iiint_Q [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] dV = \iiint_Q f(x, y, z) dV \pm \iiint_Q g(x, y, z) dV$
- $\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iiint_{Q_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{Q_2} f(x, y, z) dV$

En las propiedades dadas arriba, Q es la unión de dos subregiones sólidas que no se superponen Q_1 y Q_2 . Si la región sólida Q es simple, la integral triple $\iiint f(x, y, z) dV$ puede evaluarse con una integral iterada utilizando alguno de los seis posibles órdenes de integración:

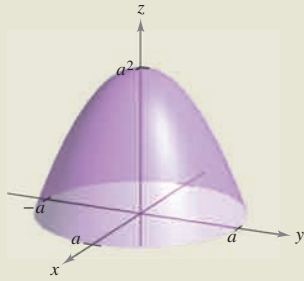
$$dx dy dz \quad dy dx dz \quad dz dx dy \quad dx dz dy \quad dy dz dx \quad dz dy dx.$$

EXPLORACIÓN

Volumen de un sector paraboloides
 En las páginas 997 y 1006, se pidió resumir las diferentes formas estudiadas hasta ahora para hallar el volumen del sólido limitado o acotado por el paraboloides

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy . Ahora se conoce un método más. Utilizarse para hallar el volumen del sólido.



La versión siguiente del teorema de Fubini describe una región que es considerada simple con respecto al orden $dz \, dy \, dx$. Para los otros cinco órdenes pueden formularse descripciones similares.

TEOREMA 14.4 EVALUACIÓN MEDIANTE INTEGRALES ITERADAS

Sea f continua en una región sólida definida por Q

$$a \leq x \leq b, \quad h_1(x) \leq y \leq h_2(x), \quad g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)$$

donde h_1, h_2, g_1 y g_2 son funciones continuas. Entonces,

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$$

Para evaluar una integral iterada triple en el orden $dz \, dy \, dx$, se mantienen x y y constantes para la integración más interior. Después, se mantiene x constante para la segunda integración.

EJEMPLO 1 Evaluar una integral iterada triple

Evaluar la integral iterada triple

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x(y + 2z) \, dz \, dy \, dx.$$

Solución Para la primera integración, se mantienen x y y constantes y se integra con respecto a z .

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x(y + 2z) \, dz \, dy \, dx &= \int_0^2 \int_0^x e^x(yz + z^2) \Big|_0^{x+y} \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^x e^x(x^2 + 3xy + 2y^2) \, dy \, dx \end{aligned}$$

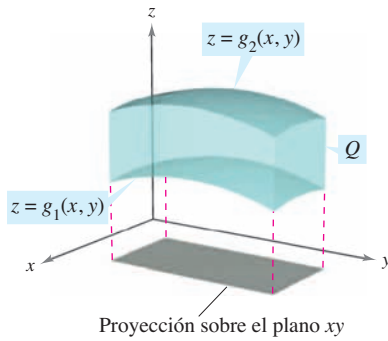
Para la segunda integración, mantener x constante y se integra con respecto a y .

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^x e^x(x^2 + 3xy + 2y^2) \, dy \, dx &= \int_0^2 \left[e^x \left(x^2y + \frac{3xy^2}{2} + \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^x \right] dx \\ &= \frac{19}{6} \int_0^2 x^3 e^x \, dx \end{aligned}$$

Por último, se integra con respecto a x .

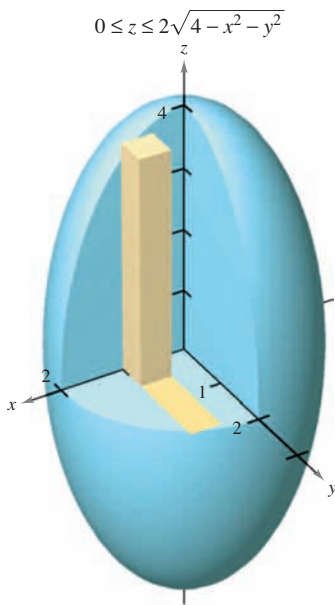
$$\begin{aligned} \frac{19}{6} \int_0^2 x^3 e^x \, dx &= \frac{19}{6} \left[e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) \right]_0^2 \\ &= 19 \left(\frac{e^2}{3} + 1 \right) \\ &\approx 65.797 \end{aligned}$$

El ejemplo 1 muestra el orden de integración $dz \, dy \, dx$. Con otros órdenes, se puede seguir un procedimiento similar. Por ejemplo, para evaluar una integral iterada triple en el orden $dx \, dy \, dz$, se mantienen y y z constantes para la integración más interior y se integra con respecto a x . Después, para la segunda integración, se mantiene z constante y se integra con respecto a y . Por último, para la tercera integración, se integra con respecto a z .



La región sólida Q se encuentra entre dos superficies

Figura 14.53



Elipsoide: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$

Figura 14.54

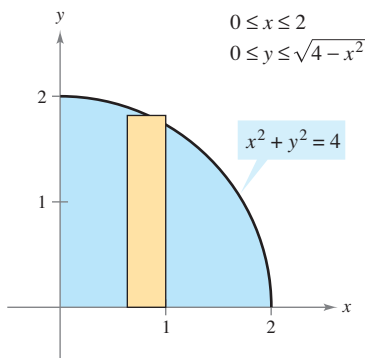


Figura 14.55

Para hallar los límites dado un orden determinado de integración, por lo general se aconseja determinar primero los límites más interiores, que pueden ser funciones de las dos variables exteriores. Después, proyectando el sólido Q sobre el plano coordenado de las dos variables exteriores, se pueden determinar sus límites de integración mediante los métodos usados para las integrales dobles. Por ejemplo, para evaluar

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

primero se determinan los límites de z , y entonces la integral toma la forma

$$\iint \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy \, dx.$$

Proyectando el sólido Q sobre el plano xy , se pueden determinar los límites de x y de y de la misma manera que se hizo en el caso de las integrales dobles, como se muestra en la figura 14.53.

EJEMPLO 2 Integral triple para hallar un volumen

Hallar el volumen del elipsoide dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$.

Solución Como en la ecuación x , y y z juegan papeles similares, el orden de integración es probablemente irrelevante, y se puede elegir arbitrariamente $dz \, dy \, dx$. Además, se pueden simplificar los cálculos considerando sólo la porción del elipsoide que se encuentra en el primer octante, como se muestra en la figura 14.54. Para el orden $dz \, dy \, dx$, se determinan primero los límites o cotas de z .

$$0 \leq z \leq 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Los límites o cotas de x y y son, como se ve en la figura 14.55, x y y y $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$, por lo que el volumen del elipsoide es

$$\begin{aligned} V &= \iiint_Q dV \\ &= 8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx \\ &= 8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} z \Big|_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dy \, dx \\ &= 16 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{(4-x^2)-y^2} \, dy \, dx && \text{Tablas de integración (apéndice B), fórmula 37.} \\ &= 8 \int_0^2 \left[y\sqrt{4-x^2-y^2} + (4-x^2) \arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{4-x^2}}\right) \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= 8 \int_0^2 [0 + (4-x^2) \arcsen(1) - 0 - 0] dx \\ &= 8 \int_0^2 (4-x^2) \left(\frac{\pi}{2}\right) dx \\ &= 4\pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{64\pi}{3}. \end{aligned}$$

El ejemplo 2 es poco usual en el sentido de que con los seis posibles órdenes de integración se obtienen integrales de dificultad comparable. Tratar de emplear algún otro de los posibles órdenes de integración para hallar el volumen del elipsoide. Por ejemplo, con el orden $dx dy dz$ se obtiene la integral

$$V = 8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}/2} \int_0^{\sqrt{16-4y^2-z^2}/2} dx dy dz.$$

Si se resuelve esta integral, se obtiene el mismo volumen que en el ejemplo 2. Esto es siempre así; el orden de integración no afecta el valor de la integral. Sin embargo, el orden de integración a menudo afecta la complejidad de la integral. En el ejemplo 3, el orden de integración propuesto no es conveniente, por lo que se puede cambiar el orden para simplificar el problema.

EJEMPLO 3 Cambiar el orden de integración

Evaluar $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \int_1^3 \text{sen}(y^2) dz dy dx$.

Solución Obsérvese que después de una integración en el orden dado, se encontraría la integral $2 \int \text{sen}(y^2) dy$, que no es una función elemental. Para evitar este problema, se cambia el orden de integración a $dz dx dy$, de manera que y sea la variable exterior. Como se muestra en la figura 14.56, la región sólida Q está dada por

$$0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad x \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad 1 \leq z \leq 3$$

y la proyección de Q en el plano xy proporciona los límites

$$0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{y} \quad 0 \leq x \leq y.$$

Por tanto, la evaluación de la integral triple usando el orden $dz dx dy$ produce

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y \int_1^3 \text{sen}(y^2) dz dx dy &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y z \text{sen}(y^2) \Big|_1^3 dx dy \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y \text{sen}(y^2) dx dy \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \text{sen}(y^2) \Big|_0^y dy \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\pi/2}} y \text{sen}(y^2) dy \\ &= -\cos(y^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

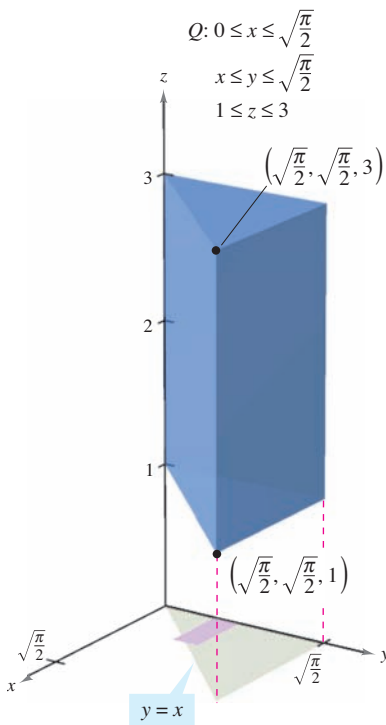


Figura 14.56

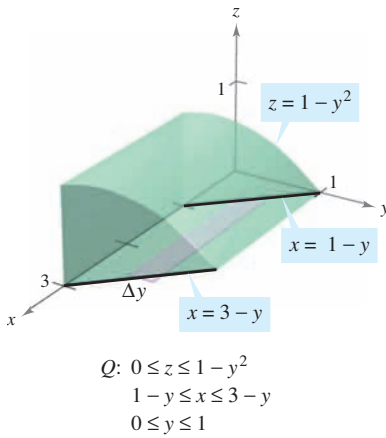


Figura 14.57

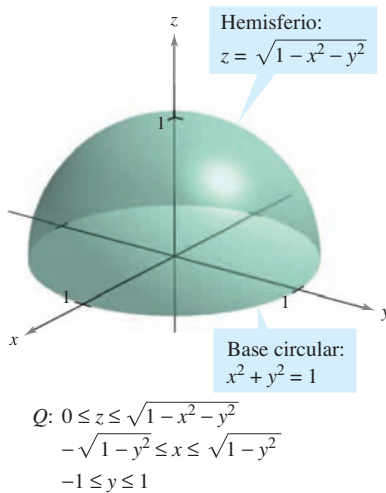


Figura 14.58

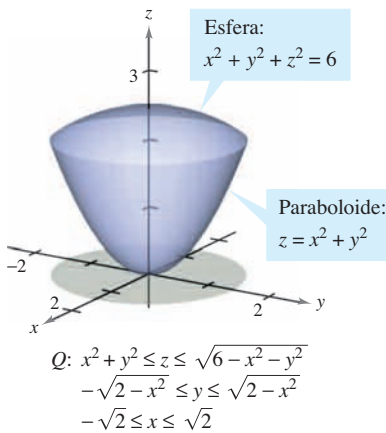


Figura 14.59

EJEMPLO 4 Determinación de los límites de integración

Dar una integral triple para el volumen de cada una de las regiones sólidas.

- a) La región en el primer octante acotada superiormente por el cilindro $z = 1 - y^2$ y comprendida entre los planos verticales $x + y = 1$ y $x + y = 3$
- b) El hemisferio superior dado por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- c) La región acotada inferiormente por el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

Solución

- a) En la figura 14.57, obsérvese que el sólido está acotado inferiormente por el plano xy ($z = 0$) y superiormente por el cilindro $z = 1 - y^2$. Por tanto,

$$0 \leq z \leq 1 - y^2. \quad \text{Límites o cotas para } z.$$

Proyectando la región sobre el plano xy se obtiene un paralelogramo. Como dos de los lados del paralelogramo son paralelos al eje x , se tienen las cotas siguientes:

$$1 - y \leq x \leq 3 - y \quad y \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Por tanto, el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^1 \int_{1-y}^{3-y} \int_0^{1-y^2} dz \, dx \, dy.$$

- b) Para el hemisferio superior dado por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, se tiene

$$0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \quad \text{Cotas para } z.$$

En la figura 14.58, obsérvese que la proyección del hemisferio sobre el plano xy es el círculo dado por $x^2 + y^2 = 1$, y se puede usar el orden $dx \, dy$ o el orden $dy \, dx$. Eligiendo el primero se obtiene

$$-\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \quad y \quad -1 \leq y \leq 1$$

lo cual implica que el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \, dx \, dy.$$

- c) Para la región acotada inferiormente por el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, se tiene

$$x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}. \quad \text{Cotas para } z.$$

La esfera y el paraboloides se cortan en $z = 2$. Además, en la figura 14.59 se puede ver que la proyección de la región sólida sobre el plano xy es el círculo dado por $x^2 + y^2 = 2$. Utilizando el orden $dy \, dx$ se obtiene

$$-\sqrt{2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2} \quad y \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

lo cual implica que el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx.$$

EXPLORACIÓN

Dibujar el sólido (de densidad uniforme) limitado o acotado por $z = 0$ y

$$z = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

donde $x^2 + y^2 \leq 1$. A partir del dibujo, estimar las coordenadas del centro de masa del sólido. Ahora utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar la estimación. ¿Qué se observa?

NOTA En ingeniería y en física, el momento de inercia de una masa se usa para hallar el tiempo requerido para que una masa alcance una velocidad de rotación dada con respecto a un eje, como se muestra en la figura 14.60. Cuanto mayor es el momento de inercia, mayor es la fuerza que hay que aplicar a la masa para que alcance la velocidad deseada. ■

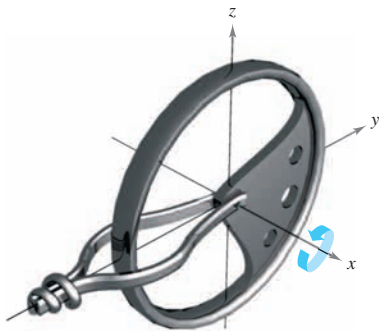


Figura 14.60

Centro de masa y momentos de inercia

En el resto de esta sección se analizan dos aplicaciones importantes de las integrales triples a la ingeniería. Considérese una región sólida Q cuya densidad está dada por la **función de densidad** ρ . El **centro de masa** de una región sólida Q de masa m está dado por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$m = \iiint_Q \rho(x, y, z) \, dV \quad \text{Masa del sólido.}$$

$$M_{yz} = \iiint_Q x\rho(x, y, z) \, dV \quad \text{Primer momento con respecto al plano } yz.$$

$$M_{xz} = \iiint_Q y\rho(x, y, z) \, dV \quad \text{Primer momento con respecto al plano } xz.$$

$$M_{xy} = \iiint_Q z\rho(x, y, z) \, dV \quad \text{Primer momento con respecto al plano } xy.$$

y

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Las cantidades M_{yz} , M_{xz} y M_{xy} se conocen como los **primeros momentos** de la región Q con respecto a los planos yz , xz y xy , respectivamente.

Los primeros momentos de las regiones sólidas se toman con respecto a un plano, mientras que los segundos momentos de los sólidos se toman con respecto a una recta. Los **segundos momentos** (o **momentos de inercia**) con respecto a los ejes x , y y z son los siguientes.

$$I_x = \iiint_Q (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dV \quad \text{Momento de inercia con respecto al eje } x.$$

$$I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dV \quad \text{Momento de inercia con respecto al eje } y.$$

$$I_z = \iiint_Q (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) \, dV \quad \text{Momento de inercia con respecto al eje } z.$$

En problemas que requieren el cálculo de los tres momentos, puede ahorrarse una cantidad considerable de trabajo empleando la propiedad aditiva de las integrales triples y escribiendo

$$I_x = I_{xz} + I_{xy}, \quad I_y = I_{yz} + I_{xy} \quad \text{e} \quad I_z = I_{yz} + I_{xz}$$

donde I_{xy} , I_{xz} e I_{yz} son

$$I_{xy} = \iiint_Q z^2\rho(x, y, z) \, dV$$

$$I_{xz} = \iiint_Q y^2\rho(x, y, z) \, dV$$

$$I_{yz} = \iiint_Q x^2\rho(x, y, z) \, dV$$

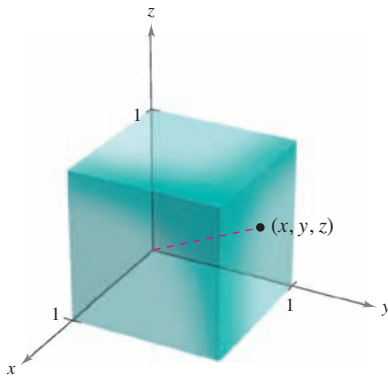
EJEMPLO 5 Hallar el centro de masa de una región sólida

Hallar el centro de masa del cubo unidad mostrado en la figura 14.61, dado que la densidad en el punto (x, y, z) es proporcional al cuadrado de su distancia al origen.

Solución Como la densidad en (x, y, z) es proporcional al cuadrado de la distancia entre $(0, 0, 0)$ y (x, y, z) , se tiene

$$\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2).$$

Esta función de densidad se puede utilizar para hallar la masa del cubo. Debido a la simetría de la región, cualquier orden de integración producirá integrales de dificultad comparable.



Densidad variable:

$$\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$$

Figura 14.61

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 k(x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx \\ &= k \int_0^1 \int_0^1 \left[(x^2 + y^2)z + \frac{z^3}{3} \right]_0^1 dy dx \\ &= k \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3} \right) dy dx \\ &= k \int_0^1 \left[\left(x^2 + \frac{1}{3} \right)y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx \\ &= k \int_0^1 \left(x^2 + \frac{2}{3} \right) dx \\ &= k \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3} \right]_0^1 = k \end{aligned}$$

El primer momento con respecto al plano yz es

$$\begin{aligned} M_{yz} &= k \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x(x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx \\ &= k \int_0^1 x \left[\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dz dy \right] dx. \end{aligned}$$

Nótese que x puede sacarse como factor fuera de las dos integrales interiores, ya que es constante con respecto a y y a z . Después de factorizar, las dos integrales interiores son iguales con respecto a la masa m . Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} M_{yz} &= k \int_0^1 x \left(x^2 + \frac{2}{3} \right) dx \\ &= k \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{7k}{12}. \end{aligned}$$

Así,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{7k/12}{k} = \frac{7}{12}.$$

Por último, por la naturaleza de ρ y la simetría de x , y y z en esta región sólida, se tiene $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$, y el centro de masa es $\left(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12} \right)$.

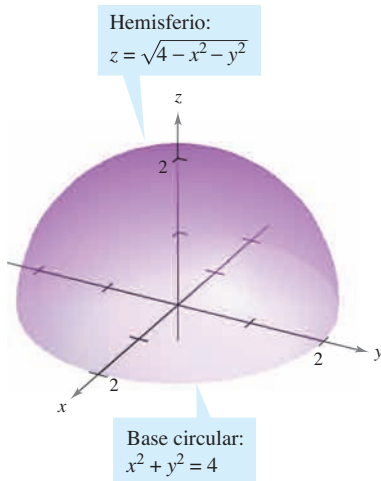
EJEMPLO 6 Momentos de inercia de una región sólida

Hallar los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y de la región sólida comprendida entre el hemisferio

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

y el plano xy , dado que la densidad en (x, y, z) es proporcional a la distancia entre (x, y, z) y el plano xy .

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$



Densidad variable: $\rho(x, y, z) = kz$
Figura 14.62

Solución La densidad de la región está dada por $\rho(x, y, z) = kz$. Considerando la simetría de este problema, se sabe que $I_x = I_y$, y sólo se necesita calcular un momento, digamos I_x . De acuerdo con la figura 14.62, se elige el orden $dz \, dy \, dx$ y se escribe

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_Q (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dV \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (y^2 + z^2)(kz) \, dz \, dy \, dx \\ &= k \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{y^2 z^2}{2} + \frac{z^4}{4} \right]_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \, dy \, dx \\ &= k \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{y^2(4-x^2-y^2)}{2} + \frac{(4-x^2-y^2)^2}{4} \right] \, dy \, dx \\ &= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} [(4-x^2)^2 - y^4] \, dy \, dx \\ &= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 \left[(4-x^2)^2 y - \frac{y^5}{5} \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \, dx \\ &= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 \frac{8}{5} (4-x^2)^{5/2} \, dx \\ &= \frac{4k}{5} \int_0^2 (4-x^2)^{5/2} \, dx && x = 2 \operatorname{sen} \theta. \\ &= \frac{4k}{5} \int_0^{\pi/2} 64 \cos^6 \theta \, d\theta && \text{Fórmula de Wallis.} \\ &= \left(\frac{256k}{5} \right) \left(\frac{5\pi}{32} \right) \\ &= 8k\pi. \end{aligned}$$

Por tanto, $I_x = 8k\pi = I_y$.

En el ejemplo 6, los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y son iguales. Sin embargo, el momento con respecto al eje z es diferente. ¿Parece que el momento de inercia con respecto al eje z deba ser menor o mayor que los momentos calculados en el ejemplo 6? Realizando los cálculos, se determina que

$$I_z = \frac{16}{3} k\pi.$$

Esto indica que el sólido mostrado en la figura 14.62 presenta resistencia mayor a la rotación en torno a los ejes x o y que en torno al eje z .

14.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, evaluar la integral iterada.

- $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$
- $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 z^2 \, dx \, dy \, dz$
- $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x \, dz \, dy \, dx$
- $\int_0^9 \int_{y/3}^9 \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z \, dz \, dx \, dy$
- $\int_1^4 \int_0^1 \int_0^x 2ze^{-x^2} \, dy \, dx \, dz$
- $\int_1^4 \int_1^{e^2} \int_0^{1/xz} \ln z \, dy \, dz \, dx$
- $\int_0^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{1-x} x \cos y \, dz \, dy \, dx$
- $\int_0^{\pi/2} \int_0^{y/2} \int_0^{1/y} \operatorname{sen} y \, dz \, dx \, dy$

CAS En los ejercicios 9 y 10, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral iterada.

- $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^{y^2} y \, dz \, dx \, dy$
- $\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} y \, dz \, dy \, dx$

CAS En los ejercicios 11 y 12, utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral iterada.

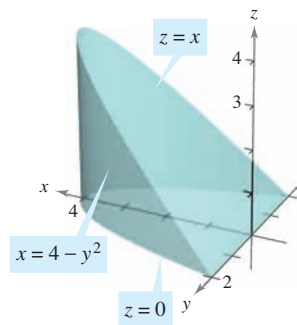
- $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_1^4 \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{z} \, dz \, dy \, dx$
- $\int_0^3 \int_0^{2-(2y/3)} \int_0^{6-2y-3z} ze^{-x^2 y^2} \, dx \, dz \, dy$

En los ejercicios 13 a 18, dar una integral triple para el volumen del sólido.

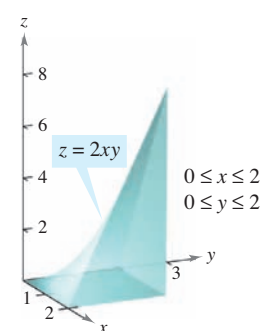
- El sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y el plano $z = 5 - x - y$
- El sólido acotado por $z = 9 - x^2$, $z = 0$, $y = 0$ y $y = 2x$
- El sólido acotado por el paraboloides $z = 6 - x^2 - y^2$ y $z = 0$
- El sólido limitado por $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y $z = 0$.
- El sólido que es el interior común bajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 80$ y sobre el paraboloides $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$
- El sólido limitado arriba por el cilindro $z = 4 - x^2$ y abajo por el paraboloides $z = x^2 + 3y^2$

Volumen En los ejercicios 19 a 22, utilizar una integral triple para hallar el volumen del sólido mostrado en la figura.

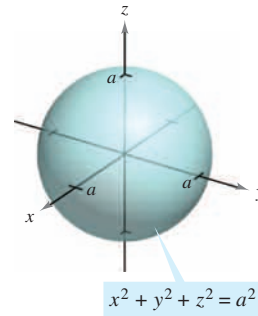
19.



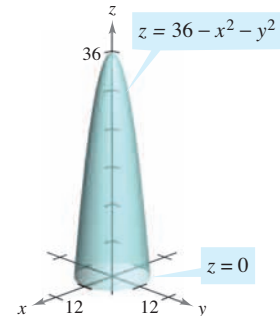
20.



21.



22.



Volumen En los ejercicios 23 a 26, usar una integral triple para encontrar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones.

- $z = 4 - x^2$, $y = 4 - x^2$, primer octante
- $z = 9 - x^3$, $y = -x^2 + 2$, $y = 0$, $z = 0$, $x \geq 0$
- $z = 2 - y$, $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$
- $z = x$, $y = x + 2$, $y = x^2$, primer octante

En los ejercicios 27 a 32, dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada y reescribir la integral utilizando el orden de integración indicado.

$$27. \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} dz \, dy \, dx$$

Reescribir usando el orden $dy \, dz \, dx$.

$$28. \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} dz \, dx \, dy$$

Reescribir usando el orden $dx \, dz \, dy$.

$$29. \int_0^4 \int_0^{(4-x)/2} \int_0^{(12-3x-6y)/4} dz \, dy \, dx$$

Reescribir utilizando el orden $dy \, dx \, dz$.

$$30. \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{6-x-y} dz \, dy \, dx$$

Reescribir utilizando el orden $dz \, dx \, dy$.

$$31. \int_0^1 \int_y^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \, dx \, dy$$

Reescribir utilizando el orden $dz \, dy \, dx$.

$$32. \int_0^2 \int_{2x}^4 \int_0^{\sqrt{y^2-4x^2}} dz \, dy \, dx$$

Reescribir utilizando el orden $dx \, dy \, dz$.

En los ejercicios 33 a 36, dar los seis posibles órdenes de integración de la integral triple sobre la región sólida Q , $\iiint_Q xyz \, dV$.

$$33. Q = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 3\}$$

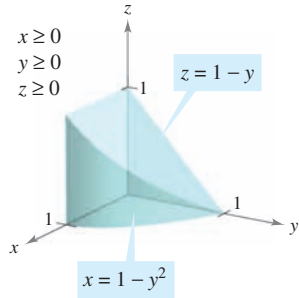
$$34. Q = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2 - x\}$$

$$35. Q = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 4\}$$

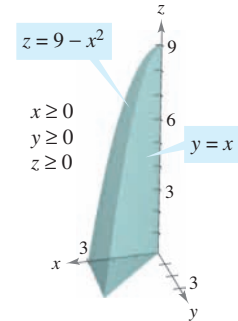
$$36. Q = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq 6\}$$

En los ejercicios 37 y 38, la figura muestra la región de integración de la integral dada. Reescribir la integral como una integral iterada equivalente con los otros cinco órdenes.

37. $\int_0^1 \int_0^{1-y^2} \int_0^{1-y} dz dx dy$



38. $\int_0^3 \int_0^x \int_0^{9-x^2} dz dy dx$



Masa y centro de masa En los ejercicios 39 a 42, hallar la masa y las coordenadas indicadas del centro de masa del sólido de densidad dada acotado por las gráficas de las ecuaciones.

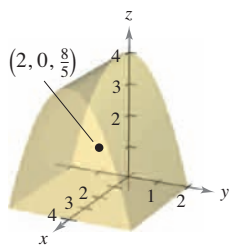
- 39. Hallar \bar{x} utilizando $\rho(x, y, z) = k$.
 $Q: 2x + 3y + 6z = 12, x = 0, y = 0, z = 0$
- 40. Hallar \bar{y} utilizando $\rho(x, y, z) = ky$.
 $Q: 3x + 3y + 5z = 15, x = 0, y = 0, z = 0$
- 41. Hallar \bar{z} utilizando $\rho(x, y, z) = kz$.
 $Q: z = 4 - x, z = 0, y = 0, y = 4, x = 0$
- 42. Hallar \bar{y} utilizando $\rho(x, y, z) = k$.
 $Q: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 (a, b, c > 0), x = 0, y = 0, z = 0$

Masa y centro de masa En los ejercicios 43 y 44, formular las integrales triples para hallar la masa y el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.

- 43. $x = 0, x = b, y = 0, y = b, z = 0, z = b$
 $\rho(x, y, z) = kxy$
- 44. $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$
 $\rho(x, y, z) = kz$

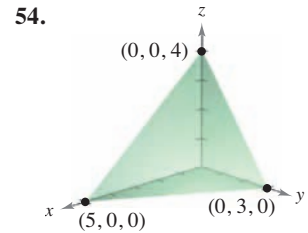
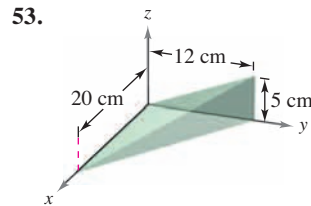
Para pensar En la figura se muestra el centro de masa de un sólido de densidad constante. En los ejercicios 45 a 48, hacer una conjetura acerca de cómo cambiará el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con la densidad no constante $\rho(x, y, z)$. Explicar.

- 45. $\rho(x, y, z) = kx$
- 46. $\rho(x, y, z) = kz$
- 47. $\rho(x, y, z) = k(y + 2)$
- 48. $\rho(x, y, z) = kxz^2(y + 2)^2$



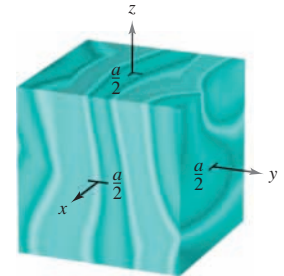
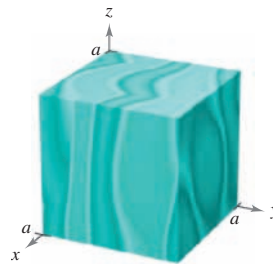
CAS Centroides En los ejercicios 49 a 54, hallar el centroide de la región sólida acotada por las gráficas de las ecuaciones o descrita en la figura. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales triples. (Suponer densidad uniforme y hallar el centro de masa.)

- 49. $z = \frac{h}{r} \sqrt{x^2 + y^2}, z = h$
- 50. $y = \sqrt{9 - x^2}, z = y, z = 0$
- 51. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, z = 0$
- 52. $z = \frac{1}{y^2 + 1}, z = 0, x = -2, x = 2, y = 0, y = 1$

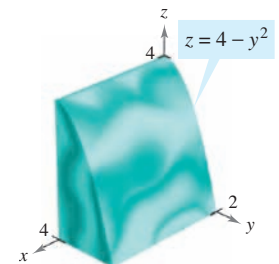
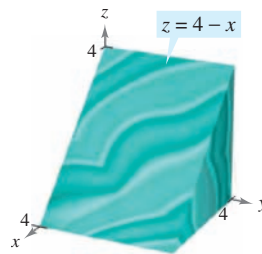


CAS Momentos de inercia En los ejercicios 55 a 58, hallar $I_x, I_y,$ e I_z para el sólido de densidad dada. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales triples.

- 55. a) $\rho = k$
 b) $\rho = kxyz$
- 56. a) $\rho(x, y, z) = k$
 b) $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2)$

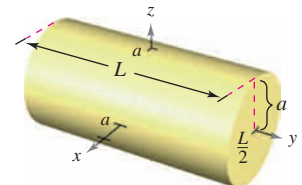


- 57. a) $\rho(x, y, z) = k$
 b) $\rho = ky$
- 58. a) $\rho = kz$
 b) $\rho = k(4 - z)$

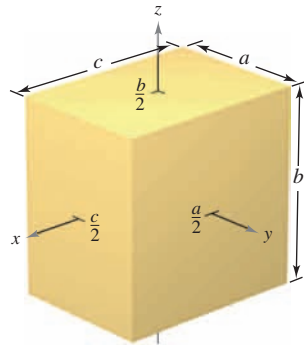


CAS Momentos de inercia En los ejercicios 59 y 60, verificar los momentos de inercia del sólido de densidad uniforme. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales triples.

- 59. $I_x = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$
 $I_y = \frac{1}{2}ma^2$
 $I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$



$$60. \begin{aligned} I_x &= \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \\ I_y &= \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) \\ I_z &= \frac{1}{12}m(a^2 + c^2) \end{aligned}$$



Momentos de inercia En los ejercicios 61 y 62, dar una integral triple que represente el momento de inercia con respecto al eje z de la región sólida Q de densidad ρ .

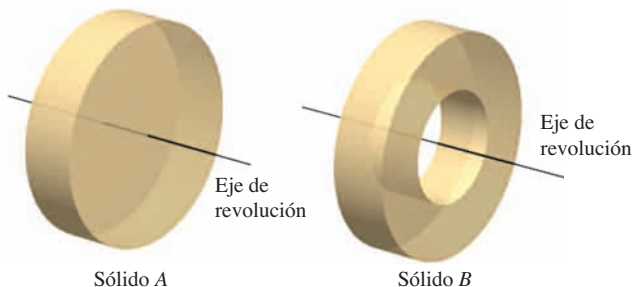
61. $Q = \{(x, y, z): -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x\}$
 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
62. $Q = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$
 $\rho = kx^2$

En los ejercicios 63 y 64, utilizando la descripción de región sólida, dar la integral para $a)$ la masa, $b)$ el centro de masa y $c)$ el momento de inercia con respecto al eje z .

63. El sólido acotado por $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$ con la función de densidad $\rho = kz$
64. El sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ con función de densidad $\rho = kxy$

Desarrollo de conceptos

65. Definir una integral triple y describir un método para evaluar una integral triple.
66. Determinar si el momento de inercia con respecto al eje y del cilindro del ejercicio 59 aumentará o disminuirá con la densidad no constante $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$ y $a = 4$.
67. Considerar el sólido A y el sólido B de pesos iguales que se muestran en la figura.
- Como los sólidos tienen el mismo peso, ¿cuál tiene la densidad mayor? Explicar.
 - ¿Cuál sólido tiene el momento de inercia mayor? Explicar.
 - Los sólidos se hacen rodar hacia abajo en un plano inclinado. Empiezan al mismo tiempo y a la misma altura. ¿Cuál llegará abajo primero? Explicar.



Para discusión

68. **Para pensar** De las integrales $a)$ a $c)$, ¿cuál es igual a $\int_1^3 \int_0^2 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dz dy dx$? Explicar.

- $\int_1^3 \int_0^2 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dz dx dy$
- $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_1^3 f(x, y, z) dx dy dz$
- $\int_0^2 \int_1^3 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dy dx dz$

Valor promedio En los ejercicios 69 a 72, hallar el valor promedio de la función sobre el sólido dado. El valor promedio de una función continua $f(x, y, z)$ sobre una región sólida Q es

$$\frac{1}{V} \iiint_Q f(x, y, z) dV$$

donde V es el volumen de la región sólida Q .

69. $f(x, y, z) = z^2 + 4$ sobre el cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados, y los planos $x = 1, y = 1$ y $z = 1$.
70. $f(x, y, z) = xyz$ sobre el cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 4, y = 4$ y $z = 4$.
71. $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre el tetraedro en el primer octante cuyos vértices son $(0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$
72. $f(x, y, z) = x + y$ sobre el sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

CAS 73. Hallar la región sólida Q donde la integral triple

$$\iiint_Q (1 - 2x^2 - y^2 - 3z^2) dV$$

es un máximo. Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar el valor máximo. ¿Cuál es el valor máximo exacto?

CAS 74. Hallar la región sólida Q donde la integral triple

$$\iiint_Q (1 - x^2 - y^2 - z^2) dV$$

es un máximo. Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar el valor máximo. ¿Cuál es el valor máximo exacto?

75. Encontrar a en la integral triple.

$$\int_0^1 \int_0^{3-a-y^2} \int_a^{4-x-y^2} dz dx dy = \frac{14}{15}$$

76. Determinar el valor de b de manera que el volumen del elipsoide $x^2 + (y^2/b^2) + (z^2/9) = 1$ es 16π .

Preparación del examen Putnam

77. Evaluar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \right\} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

14.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

- Expresar y evaluar una integral triple en coordenadas cilíndricas.
- Expresar y evaluar una integral triple en coordenadas esféricas.

Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Muchas regiones sólidas comunes como esferas, elipsoides, conos y paraboloides pueden dar lugar a integrales triples difíciles de calcular en coordenadas rectangulares. De hecho, fue precisamente esta dificultad la que llevó a la introducción de sistemas de coordenadas no rectangulares. En esta sección se aprenderá a usar coordenadas *cilíndricas* y *esféricas* para evaluar integrales triples.

Recuérdese que en la sección 11.7 se vio que las ecuaciones rectangulares de conversión a coordenadas cilíndricas son

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \\ z &= z. \end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO Una manera fácil de recordar estas ecuaciones es observar que las ecuaciones para obtener x y y son iguales que en el caso de coordenadas polares y que z no cambia.

En este sistema de coordenadas, la región sólida más simple es un bloque cilíndrico determinado por

$$r_1 \leq r \leq r_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad z_1 \leq z \leq z_2$$

como se muestra en la figura 14.63. Para expresar una integral triple por medio de coordenadas cilíndricas, supóngase que Q es una región sólida cuya proyección R sobre el plano xy puede describirse en coordenadas polares. Es decir,

$$Q = \{(x, y, z): (x, y) \text{ está en } R, \quad h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

$$R = \{(r, \theta): \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}.$$

Si f es una función continua sobre el sólido Q , se puede expresar la integral triple de f sobre Q como

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \iint_R \left[\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dA$$

donde la integral doble sobre R se evalúa en coordenadas polares. Es decir, R es una región plana que es r -simple o θ -simple. Si R es r -simple, la forma iterada de la integral triple en forma cilíndrica es

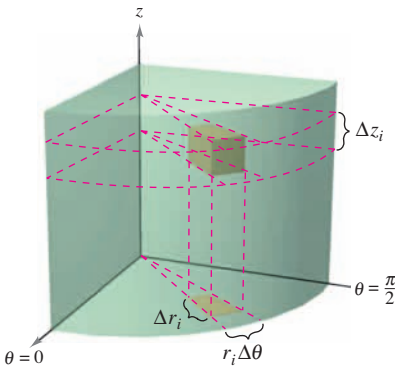
$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)}^{h_2(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) r \, dz \, dr \, d\theta.$$

NOTA Éste es sólo uno de los seis posibles órdenes de integración. Los otros cinco son $dz \, d\theta \, dr$, $dr \, dz \, d\theta$, $dr \, d\theta \, dz$, $d\theta \, dz \, dr$ y $d\theta \, dr \, dz$.



PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749-1827)

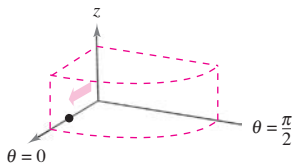
Uno de los primeros en utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas fue el matemático francés Pierre Simon de Laplace. Laplace ha sido llamado el "Newton de Francia", y publicó muchos trabajos importantes en mecánica, ecuaciones diferenciales y probabilidad.



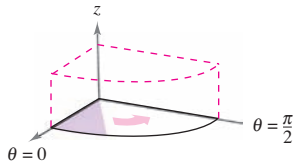
Volumen del bloque cilíndrico:

$$\Delta V_i = r_i \Delta r_i \Delta \theta_i \Delta z_i$$

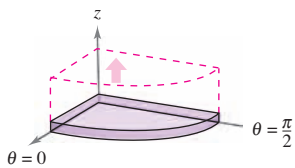
Figura 14.63



Integrar con respecto a r



Integrar con respecto a θ



Integrar con respecto a z

Figura 14.64

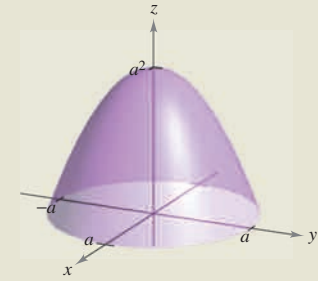
Para visualizar un orden de integración determinado ayuda contemplar la integral iterada en términos de tres movimientos de barrido, cada uno de los cuales agrega una dimensión al sólido. Por ejemplo, en el orden $dr d\theta dz$, la primera integración ocurre en la dirección r , aquí un punto barre (recorre) un rayo. Después, a medida que θ aumenta, la recta barre (recorre) un sector. Por último a medida que z aumenta, el sector barre (recorre) una cuña sólida como se muestra en la figura 14.64.

EXPLORACIÓN

Volumen de un sector paraboloides En las páginas 997, 1006 y 1028, se pidió resumir las formas, conocidas para hallar el volumen del sólido acotado por el paraboloides

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy . Ahora ya se conoce un método más. Utilícese para hallar el volumen del sólido. Comparar los diferentes métodos. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada uno?



EJEMPLO 1 Hallar el volumen empleando coordenadas cilíndricas

Hallar el volumen de la región sólida Q que corta en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ el cilindro $r = 2 \operatorname{sen} \theta$, como se muestra en la figura 14.65.

Solución Como $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2 = 4$, los límites o cotas de z son

$$-\sqrt{4-r^2} \leq z \leq \sqrt{4-r^2}.$$

Sea R la proyección circular del sólido sobre el plano $r\theta$. Entonces los límites o cotas de R son $0 \leq r \leq 2 \operatorname{sen} \theta$ y $0 \leq \theta \leq \pi$. Por tanto, el volumen de Q es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} 2r \sqrt{4-r^2} \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{2}{3} (4-r^2)^{3/2} \right]_0^{2 \operatorname{sen} \theta} d\theta \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (8 - 8 \cos^3 \theta) \, d\theta \\ &= \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} [1 - (\cos \theta)(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)] \, d\theta \\ &= \frac{32}{3} \left[\theta - \operatorname{sen} \theta + \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{16}{9} (3\pi - 4) \\ &\approx 9.644. \end{aligned}$$

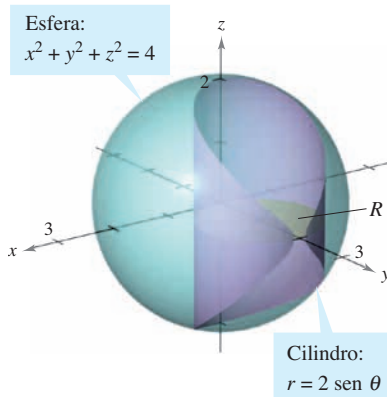


Figura 14.65

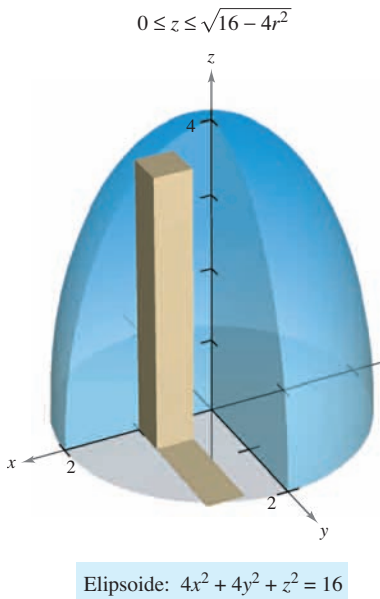


Figura 14.66

EJEMPLO 2 Hallar la masa empleando coordenadas cilíndricas

Hallar la masa de la porción del elipsoide Q dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$, situada sobre el plano xy . La densidad en un punto del sólido es proporcional a la distancia entre el punto y el plano xy .

Solución La función de densidad es $\rho(r, \theta, z) = kz$. Los límites o cotas de z son

$$0 \leq z \leq \sqrt{16 - 4x^2 - 4y^2} = \sqrt{16 - 4r^2}$$

donde $0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, como se muestra en la figura 14.66. La masa del sólido es

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{16-4r^2}} kzr \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[z^2 r \right]_0^{\sqrt{16-4r^2}} \, dr \, d\theta \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (16r - 4r^3) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \left[8r^2 - r^4 \right]_0^2 \, d\theta \\ &= 8k \int_0^{2\pi} d\theta = 16\pi k. \end{aligned}$$

La integración en coordenadas cilíndricas es útil cuando en el integrando aparecen factores con la expresión $x^2 + y^2$ como se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Hallar el momento de inercia

Hallar el momento de inercia con respecto al eje de simetría del sólido Q limitado o acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$, como se muestra en la figura 14.67. La densidad en cada punto es proporcional a la distancia entre el punto y el eje z .

Solución Como el eje z es el eje de simetría, y $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, sigue que

$$I_z = \iiint_Q k(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} \, dV.$$

En coordenadas cilíndricas, $0 \leq r \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z}$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} I_z &= k \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r^2(r)r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= k \int_0^4 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^{\sqrt{z}} \, d\theta \, dz \\ &= k \int_0^4 \int_0^{2\pi} \frac{z^{5/2}}{5} \, d\theta \, dz \\ &= \frac{k}{5} \int_0^4 z^{5/2} (2\pi) \, dz \\ &= \frac{2\pi k}{5} \left[\frac{2}{7} z^{7/2} \right]_0^4 = \frac{512k\pi}{35}. \end{aligned}$$

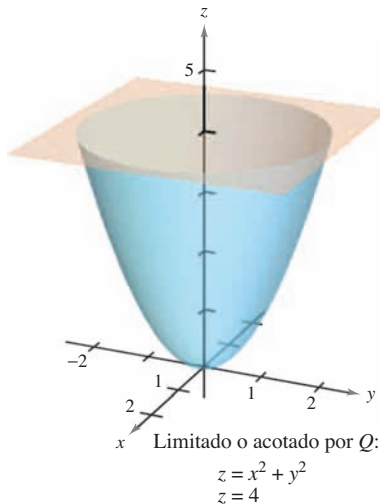


Figura 14.67

Integrales triples en coordenadas esféricas

Las integrales triples que involucran esferas o conos son a menudo más fáciles de calcular mediante la conversión a coordenadas esféricas. Recordar que en la sección 11.7 se vieron las ecuaciones rectangulares para conversión a coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z &= \rho \cos \phi. \end{aligned}$$

En este sistema de coordenadas, la región más simple es un bloque esférico determinado por

$$\{(\rho, \theta, \phi): \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$$

donde $\rho_1 \geq 0, \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \pi$, como se muestra en la figura 14.68. Si (ρ, θ, ϕ) es un punto en el interior de uno de estos bloques, entonces el volumen del bloque puede ser aproximado por $\Delta V \approx \rho^2 \operatorname{sen} \phi \Delta \rho \Delta \phi \Delta \theta$ (ver ejercicio 18 en los ejercicios de solución de problemas de este capítulo).

Utilizando el proceso habitual que comprende una partición interior, una suma y un límite, se desarrolla la versión siguiente de una integral triple en coordenadas esféricas para una función continua f en la región sólida Q .

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Esta fórmula puede modificarse para emplear diferentes órdenes de integración y se puede generalizar a regiones con límites o cotas variables.

Como las integrales triples en coordenadas cilíndricas, las integrales triples en coordenadas esféricas se evalúan empleando integrales iteradas. Como sucede con las coordenadas cilíndricas, se puede visualizar un orden determinado de integración contemplando la integral iterada en términos de tres movimientos de barrido, cada uno de los cuales agrega una dimensión al sólido. Por ejemplo, la integral iterada

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

(que se usó en el ejemplo 4) se ilustra en la figura 14.69.

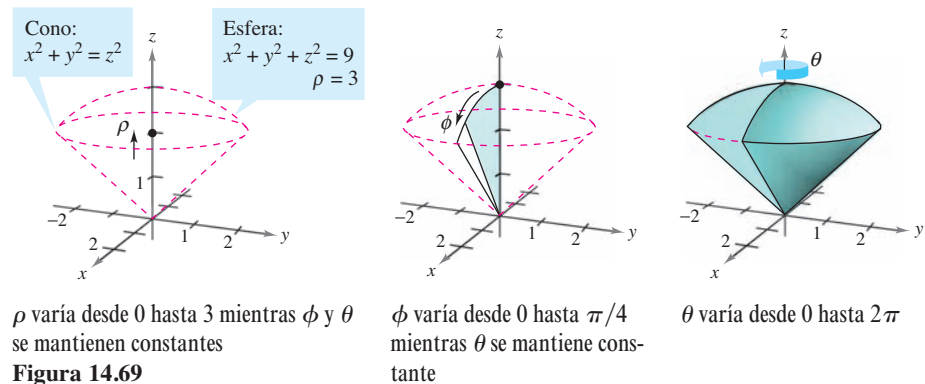


Figura 14.69

NOTA Cuando la letra griega ρ se emplea en coordenadas esféricas no está relacionada con la densidad. Es la análoga tridimensional de la r que se utiliza en coordenadas polares. En este texto, en los problemas en los que se empleen coordenadas esféricas y una función de densidad, se usará un símbolo diferente para denotar la densidad.

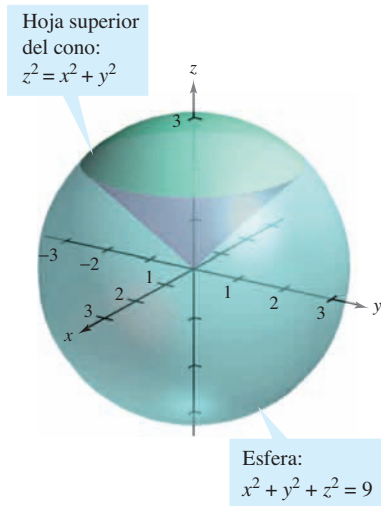


Figura 14.70

EJEMPLO 4 Hallar un volumen en coordenadas esféricas

Hallar el volumen de la región sólida Q limitada o acotada inferiormente por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, como se muestra en la figura 14.70.

Solución En coordenadas esféricas, la ecuación de la esfera es

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \rho = 3.$$

La esfera y el cono se cortan cuando

$$(x^2 + y^2) + z^2 = (z^2) + z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

y, como $z = \rho \cos \phi$, se tiene que

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \cos \phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Por consiguiente, se puede utilizar el orden de integración $d\rho d\phi d\theta$, donde $0 \leq \rho \leq 3$, $0 \leq \phi \leq \pi/4$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} 9 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} [-\cos \phi]_0^{\pi/4} \, d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) d\theta = 9\pi(2 - \sqrt{2}) \approx 16.563. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Hallar el centro de masa de una región sólida

Hallar el centro de masa de la región sólida Q de densidad uniforme, limitada o acotada inferiormente por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Solución Como la densidad es uniforme, se puede considerar que la densidad en el punto (x, y, z) es k . Por la simetría, el centro de masa se encuentra en el eje z , y sólo se necesita calcular $\bar{z} = M_{xy}/m$, donde $m = kV = 9k\pi(2 - \sqrt{2})$ por el ejemplo 4. Como $z = \rho \cos \phi$, se sigue que

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_Q kz \, dV = k \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho \\ &= k \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3 \sin^2 \phi}{2} \right]_0^{\pi/4} d\theta \, d\rho \\ &= \frac{k}{4} \int_0^3 \int_0^{2\pi} \rho^3 \, d\theta \, d\rho = \frac{k\pi}{2} \int_0^3 \rho^3 \, d\rho = \frac{81k\pi}{8}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{81k\pi/8}{9k\pi(2 - \sqrt{2})} = \frac{9(2 + \sqrt{2})}{16} \approx 1.920$$

y el centro de masa es aproximadamente $(0, 0, 1.92)$.

14.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, evaluar la integral iterada.

- $\int_{-1}^5 \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r \cos \theta \, dr \, d\theta \, dz$
- $\int_0^{\pi/4} \int_0^6 \int_0^{6-r} rz \, dz \, dr \, d\theta$
- $\int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos^2 \theta} \int_0^{4-r^2} r \sin \theta \, dx \, dr \, d\theta$
- $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^2 e^{-\rho^3} \rho^2 \, d\rho \, d\theta \, d\phi$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
- $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \theta} \rho^2 \sin \phi \cos \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

CAS En los ejercicios 7 y 8, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral iterada.

- $\int_0^4 \int_0^z \int_0^{\pi/2} re^r \, d\theta \, dr \, dz$
- $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^{\sin \theta} (2 \cos \phi) \rho^2 \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

En los ejercicios 9 a 12, dibujar la región sólida cuyo volumen está dado por la integral iterada, y evaluar la integral iterada.

- $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^{e^{-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{5-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$
- $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^4 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_2^5 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

En los ejercicios 13 a 16, convertir la integral de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas, y evaluar la integral iterada más sencilla.

- $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 x \, dz \, dy \, dx$
- $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, dz \, dy \, dx$
- $\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_a^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x \, dz \, dy \, dx$
- $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dz \, dy \, dx$

Volumen En los ejercicios 17 a 22, utilizar coordenadas cilíndricas para hallar el volumen del sólido.

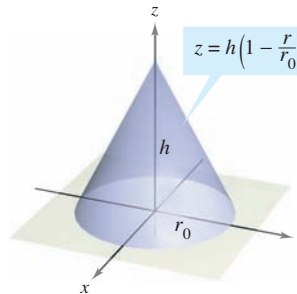
- Sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $(x - a/2)^2 + y^2 = (a/2)^2$
- Sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y exterior a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Sólido limitado arriba por $z = 2x$ y abajo por $z = 2x^2 + 2y^2$
- Sólido limitado arriba por $z = 2 - x^2 - y^2$ y abajo por $z = x^2 + y^2$

- Sólido limitado o acotado por las gráficas de la esfera $r^2 + z^2 = a^2$ y del cilindro $r = a \cos \theta$
- Sólido interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y sobre la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$

Masa En los ejercicios 23 y 24, utilizar coordenadas cilíndricas para hallar la masa del sólido Q .

- $Q = \{(x, y, z): 0 \leq z \leq 9 - x - 2y, x^2 + y^2 \leq 4\}$
 $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$
- $Q = \{(x, y, z): 0 \leq z \leq 12e^{-(x^2+y^2)}, x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$
 $\rho(x, y, z) = k$

En los ejercicios 25 a 30, utilizar coordenadas cilíndricas para hallar la característica indicada del cono que se muestra en la figura.



25. **Volumen** Hallar el volumen del cono.

26. **Centroide** Hallar el centroide del cono.

CAS 27. **Centro de masa** Hallar el centro de masa del cono suponiendo que su densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia entre el punto y el eje del cono. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral triple.

CAS 28. **Centro de masa** Hallar el centro de masa del cono suponiendo que su densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia entre el punto y la base. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral triple.

29. **Momento de inercia** Suponer que el cono tiene densidad uniforme y mostrar que el momento de inercia con respecto al eje z es

$$I_z = \frac{3}{10}mr_0^2.$$

30. **Momento de inercia** Suponer que la densidad del cono es $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ y hallar el momento de inercia con respecto al eje z .

Momento de inercia En los ejercicios 31 y 32, usar coordenadas cilíndricas para verificar la fórmula dada para el momento de inercia del sólido de densidad uniforme.

31. Capa cilíndrica: $I_z = \frac{1}{2}m(a^2 + b^2)$

$$0 < a \leq r \leq b, \quad 0 \leq z \leq h$$

CAS 32. Cilindro circular recto: $I_z = \frac{3}{2}ma^2$

$$r = 2a \sin \theta, \quad 0 \leq z \leq h$$

Utilizar un sistema algebraico por computadora y calcular la integral triple.

Volumen En los ejercicios 33 a 36, utilizar coordenadas esféricas para calcular el volumen del sólido.

33. Sólido interior $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, exterior $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, y arriba del plano xy .

34. Sólido limitado arriba por $x^2 + y^2 + z^2 = z$ y abajo por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

CAS 35. El toro dado por $\rho = 4 \sin \phi$. (Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral triple.)

36. El sólido comprendido entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $b > a$, e interior al cono $z^2 = x^2 + y^2$

Masa En los ejercicios 37 y 38, utilizar coordenadas esféricas para hallar la masa de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ de densidad especificada.

37. La densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia entre el punto y el origen.

38. La densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia del punto al eje z .

Centro de masa En los ejercicios 39 y 40, utilizar coordenadas esféricas para hallar el centro de masa del sólido de densidad uniforme.

39. Sólido hemisférico de radio r

40. Sólido comprendido entre dos hemisferios concéntricos de radios r y R , donde $r < R$

Momento de inercia En los ejercicios 41 y 42, utilizar coordenadas esféricas para hallar el momento de inercia con respecto al eje z del sólido de densidad uniforme.

41. Sólido limitado o acotado por el hemisferio $\rho = \cos \phi$, $\pi/4 \leq \phi \leq \pi/2$, y el cono $\phi = \pi/4$

42. Sólido comprendido entre dos hemisferios concéntricos de radios r y R , donde $r < R$

Desarrollo de conceptos

43. Dar las ecuaciones de conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y viceversa.

44. Dar las ecuaciones de conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas y viceversa.

45. Dar la forma iterada de la integral triple $\iiint_Q f(x, y, z) dV$ en forma cilíndrica.

46. Dar la forma iterada de la integral triple $\iiint_Q f(x, y, z) dV$ en forma esférica.

47. Describir la superficie cuya ecuación es una coordenada igual a una constante en cada una de las coordenadas en a) el sistema de coordenadas cilíndricas y b) el sistema de coordenadas esféricas.

Para discusión

48. Convertir la integral desde coordenadas rectangulares a a) coordenadas cilíndricas y b) esféricas. Sin calcular, ¿qué integral parece ser más sencilla de evaluar? ¿Por qué?

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dy dx$$

49. Hallar el “volumen” de la “esfera en cuatro dimensiones”

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2$$

evaluando

$$16 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} dw dz dy dx.$$

50. Utilizar las coordenadas esféricas para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = 2\pi.$$

Preparación del examen Putnam

51. Encontrar el volumen de la región de puntos (x, y, z) en forma tal que $(x^2 + y^2 + z^2 + 8)^2 \leq 36(x^2 + y^2)$.

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

PROYECTO DE TRABAJO

Esferas deformadas

En los incisos a) y b), hallar el volumen de las esferas deformadas. Estos sólidos se usan como modelos de tumores.

a) Esfera deformada

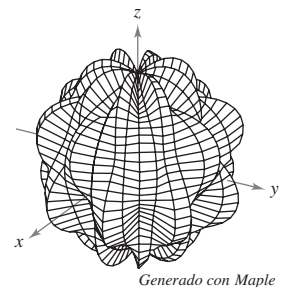
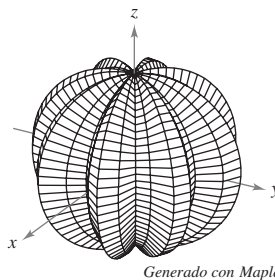
$$\rho = 1 + 0.2 \sin 8\theta \sin \phi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$$

b) Esfera deformada

$$\rho = 1 + 0.2 \sin 8\theta \sin 4\phi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$$



PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre estos tipos de esferas, ver el artículo “Heat Therapy for Tumors” de Leah Edelstein-Keshet en *The UMAP Journal*.

14.8 Cambio de variables: jacobianos

- Comprender el concepto de jacobiano.
- Utilizar un jacobiano para cambiar variables en una integral doble.

CARL GUSTAV JACOBI (1804-1851)

El jacobiano recibe su nombre en honor al matemático alemán Carl Gustav Jacobi, conocido por su trabajo en muchas áreas de matemática, pero su interés en integración provenía del problema de hallar la circunferencia de una elipse.

Jacobianos

En una integral simple

$$\int_a^b f(x) dx$$

se puede tener un cambio de variables haciendo $x = g(u)$, con lo que $dx = g'(u) du$, y obtener

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u))g'(u) du$$

donde $a = g(c)$ y $b = g(d)$. Nótese que el proceso de cambio de variables introduce, en el integrando, un factor adicional $g'(u)$. Esto también ocurre en el caso de las integrales dobles

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \underbrace{\left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right|}_{\text{Jacobiano}} du dv$$

donde el cambio de variables $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ introduce un factor llamado **jacobiano** de x y y con respecto a u y v . Al definir el jacobiano, es conveniente utilizar la notación siguiente que emplea determinantes.

DEFINICIÓN DEL JACOBIANO

Si $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$, entonces el **jacobiano** de x y y con respecto a u y v , denotado por $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

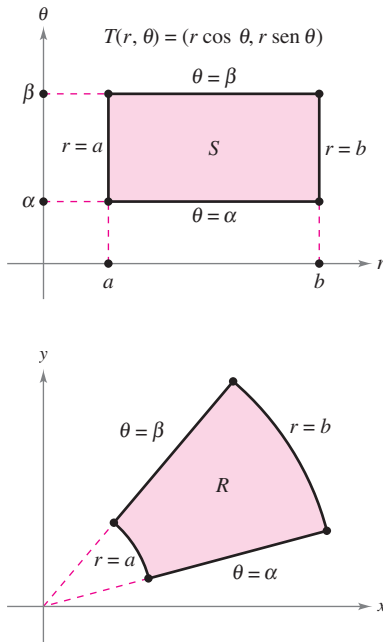
EJEMPLO 1 El jacobiano de la conversión rectangular-polar

Hallar el jacobiano para el cambio de variables definido por

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta.$$

Solución De acuerdo con la definición de un jacobiano, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta \\ &= r. \end{aligned}$$



S es la región en el plano $r\theta$ que corresponde a R en el plano xy
Figura 14.71

El ejemplo 1 indica que el cambio de variables de coordenadas rectangulares a polares en una integral doble se puede escribir como

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dA &= \iint_S f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r \, dr \, d\theta, \quad r > 0 \\ &= \iint_S f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

donde S es la región en el plano $r\theta$ que corresponde a la región R en el plano xy , como se muestra en la figura 14.71. Esta fórmula es semejante a la de la página 1006.

En general, un cambio de variables está dado por una **transformación** biyectiva (o uno a uno) T de una región S en el plano uv en una región R en el plano xy dada por

$$T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$$

donde g y h tienen primeras derivadas parciales continuas en la región S . Nótese que el punto (u, v) se encuentra en S y el punto (x, y) se encuentra en R . En la mayor parte de las ocasiones, se busca una transformación en la que la región S sea más simple que la región R .

EJEMPLO 2 Hallar un cambio de variables para simplificar una región

Sea R la región limitada o acotada por las rectas

$$x - 2y = 0, \quad x - 2y = -4, \quad x + y = 4 \quad \text{y} \quad x + y = 1$$

como se muestra en la figura 14.72. Hallar una transformación T de una región S a R tal que S sea una región rectangular (con lados paralelos a los ejes u o v).

Solución Para empezar, sea $u = x + y$ y $v = x - 2y$. Resolviendo este sistema de ecuaciones para encontrar x y y se obtiene $T(u, v) = (x, y)$, donde

$$x = \frac{1}{3}(2u + v) \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{3}(u - v).$$

Los cuatro límites de R en el plano xy dan lugar a los límites siguientes de S en el plano uv .

<u>Límites en el plano xy</u>		<u>Límites en el plano uv</u>
$x + y = 1$	➡	$u = 1$
$x + y = 4$	➡	$u = 4$
$x - 2y = 0$	➡	$v = 0$
$x - 2y = -4$	➡	$v = -4$

La región S se muestra en la figura 14.73. Nótese que la transformación T

$$T(u, v) = (x, y) = \left(\frac{1}{3}[2u + v], \frac{1}{3}[u - v] \right)$$

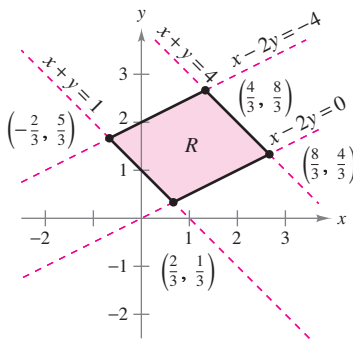
transforma los vértices de la región S en los vértices de la región R . Por ejemplo,

$$T(1, 0) = \left(\frac{1}{3}[2(1) + 0], \frac{1}{3}[1 - 0] \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

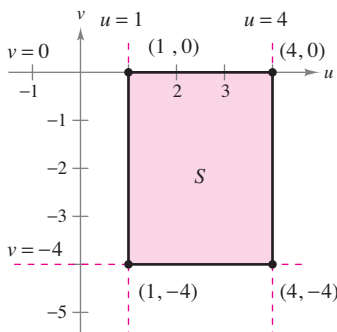
$$T(4, 0) = \left(\frac{1}{3}[2(4) + 0], \frac{1}{3}[4 - 0] \right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

$$T(4, -4) = \left(\frac{1}{3}[2(4) - 4], \frac{1}{3}[4 - (-4)] \right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3} \right)$$

$$T(1, -4) = \left(\frac{1}{3}[2(1) - 4], \frac{1}{3}[1 - (-4)] \right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right).$$



Región R en el plano xy
Figura 14.72



Región S en el plano uv
Figura 14.73

Cambio de variables en integrales dobles

TEOREMA 14.5 CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES DOBLES

Sea R una región vertical u horizontalmente sencilla en el plano xy y sea S una región vertical u horizontalmente sencilla en el plano uv . Sea T desde S hasta R dado por $T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$, donde g y h tienen primeras derivadas parciales continuas. Suponer que T es uno a uno excepto posiblemente en la frontera de S . Si f es continua en R y $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ no es cero en S , entonces

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

DEMOSTRACIÓN

Considerar el caso en el que S es una región rectangular en el plano uv con vértices (u, v) , $(u + \Delta u, v)$, $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ y $(u, v + \Delta v)$ como se muestra en la figura 14.74. Las imágenes de estos vértices en el plano xy se muestran en la figura 14.75. Si Δu y Δv son pequeños, la continuidad de g y de h implica que R es aproximadamente un paralelogramo determinado por los vectores \overrightarrow{MN} y \overrightarrow{MQ} . Así pues, el área de R es

$$\Delta A \approx \|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\|.$$

Para Δu y Δv pequeños, las derivadas parciales de g y h con respecto a u pueden ser aproximadas por

$$g_u(u, v) \approx \frac{g(u + \Delta u, v) - g(u, v)}{\Delta u} \quad \text{y} \quad h_u(u, v) \approx \frac{h(u + \Delta u, v) - h(u, v)}{\Delta u}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= [g(u + \Delta u, v) - g(u, v)]\mathbf{i} + [h(u + \Delta u, v) - h(u, v)]\mathbf{j} \\ &\approx [g_u(u, v) \Delta u]\mathbf{i} + [h_u(u, v) \Delta u]\mathbf{j} \\ &= \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \mathbf{j}. \end{aligned}$$

De manera similar, se puede aproximar \overrightarrow{MQ} por $\frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \mathbf{j}$, lo que implica que

$$\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ} \approx \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \mathbf{k}.$$

Por tanto, en la notación del jacobiano,

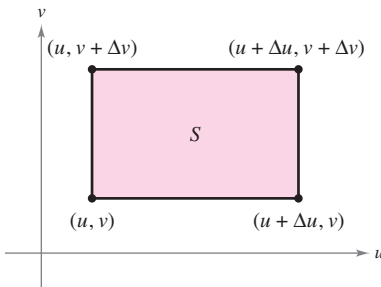
$$\Delta A \approx \|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\| \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v.$$

Como esta aproximación mejora cuando Δu y Δv se aproximan a 0, el caso límite puede escribirse como

$$dA \approx \|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\| \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

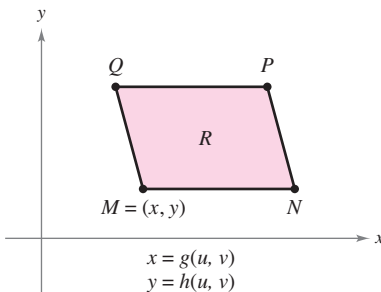
Por tanto,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$



Área de $S = \Delta u \Delta v$
 $\Delta u > 0, \Delta v > 0$

Figura 14.74



Los vértices en el plano xy son
 $M(g(u, v), h(u, v))$, $N(g(u + \Delta u, v),$
 $h(u + \Delta u, v))$, $P(g(u + \Delta u, v + \Delta v),$
 $h(u + \Delta u, v + \Delta v))$ y
 $Q(g(u, v + \Delta v), h(u, v + \Delta v))$.

Figura 14.75

Los dos ejemplos siguientes muestran cómo un cambio de variables puede simplificar el proceso de integración. La simplificación se puede dar de varias maneras. Se puede hacer un cambio de variables para simplificar la *región R* o el *integrando* $f(x, y)$, o ambos.

EJEMPLO 3 Un cambio de variables para simplificar una región

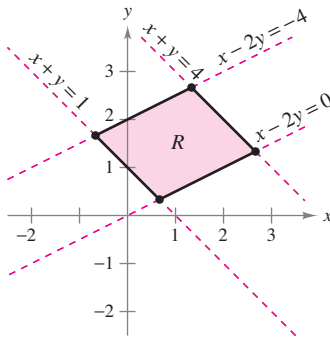


Figura 14.76

Sea R la región limitada o acotada por las rectas

$$x - 2y = 0, \quad x - 2y = -4, \quad x + y = 4 \quad \text{y} \quad x + y = 1$$

como se muestra en la figura 14.76. Evaluar la integral doble

$$\iint_R 3xy \, dA.$$

Solución De acuerdo con el ejemplo 2, se puede usar el cambio siguiente de variables.

$$x = \frac{1}{3}(2u + v) \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{3}(u - v)$$

Las derivadas parciales de x y y son

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{3}$$

lo cual implica que el jacobiano es

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

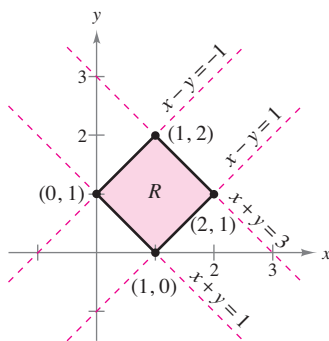
Por tanto, por el teorema 14.5, se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_R 3xy \, dA &= \iint_S 3 \left[\frac{1}{3}(2u + v) \frac{1}{3}(u - v) \right] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, dv \, du \\ &= \int_1^4 \int_{-4}^0 \frac{1}{9}(2u^2 - uv - v^2) \, dv \, du \\ &= \frac{1}{9} \int_1^4 \left[2u^2v - \frac{uv^2}{2} - \frac{v^3}{3} \right]_{-4}^0 \, du \\ &= \frac{1}{9} \int_1^4 \left(8u^2 + 8u - \frac{64}{3} \right) \, du \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{8u^3}{3} + 4u^2 - \frac{64}{3}u \right]_1^4 \\ &= \frac{164}{9}. \end{aligned}$$

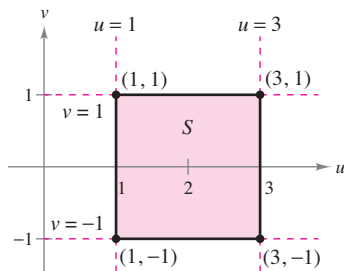
EJEMPLO 4 Un cambio de variables para simplificar un integrando

Sea R la región limitada o acotada por el cuadrado cuyos vértices son $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ y $(1, 0)$. Evaluar la integral

$$\int_R \int (x + y)^2 \text{sen}^2(x - y) \, dA.$$



Región R en el plano xy
Figura 14.77



Región S en el plano uv
Figura 14.78

Solución Obsérvese que los lados de R se encuentran sobre las rectas $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x + y = 3$ y $x - y = -1$, como se muestra en la figura 14.77. Haciendo $u = x + y$ y $v = x - y$, se tiene que los límites o cotas de la región S en el plano uv son

$$1 \leq u \leq 3 \quad \text{y} \quad -1 \leq v \leq 1$$

como se muestra en la figura 14.78. Despejando x y y en términos de u y v se obtiene

$$x = \frac{1}{2}(u + v) \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{2}(u - v).$$

Las derivadas parciales de x y y son

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2}$$

lo cual implica que el jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Por el teorema 14.5, sigue que

$$\begin{aligned} \int_R \int (x + y)^2 \text{sen}^2(x - y) \, dA &= \int_{-1}^1 \int_1^3 u^2 \text{sen}^2 v \left(\frac{1}{2}\right) \, du \, dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\text{sen}^2 v) \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^3 \, dv \\ &= \frac{13}{3} \int_{-1}^1 \text{sen}^2 v \, dv \\ &= \frac{13}{6} \int_{-1}^1 (1 - \cos 2v) \, dv \\ &= \frac{13}{6} \left[v - \frac{1}{2} \text{sen} 2v \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{13}{6} \left[2 - \frac{1}{2} \text{sen} 2 + \frac{1}{2} \text{sen}(-2) \right] \\ &= \frac{13}{6} (2 - \text{sen} 2) \\ &\approx 2.363. \end{aligned}$$

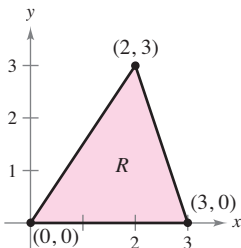
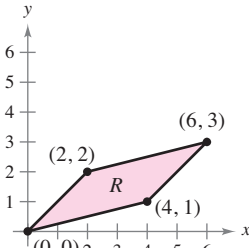
En cada uno de los ejemplos de cambio de variables de esta sección, la región S ha sido un rectángulo con lados paralelos a los ejes u o v . En ocasiones, se puede usar un cambio de variables para otros tipos de regiones. Por ejemplo, $T(u, v) = (x, \frac{1}{2}y)$ transforma la región circular $u^2 + v^2 = 1$ en la región elíptica $x^2 + (y^2/4) = 1$.

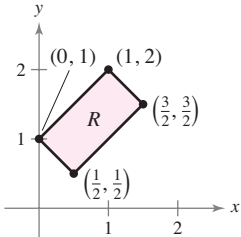
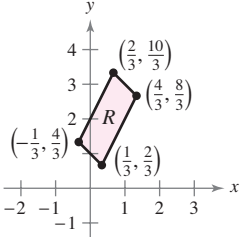
14.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, hallar el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ para el cambio de variables indicado.

1. $x = -\frac{1}{2}(u - v), y = \frac{1}{2}(u + v)$
2. $x = au + bv, y = cu + dv$
3. $x = u - v^2, y = u + v$
4. $x = uv - 2u, y = uv$
5. $x = u \cos \theta - v \sin \theta, y = u \sin \theta + v \cos \theta$
6. $x = u + a, y = v + a$
7. $x = e^u \sin v, y = e^u \cos v$
8. $x = \frac{u}{v}, y = u + v$

En los ejercicios 9 a 12, dibujar la imagen S en el plano uv de la región R en el plano xy utilizando las transformaciones dadas.

9. $x = 3u + 2v$
 $y = 3v$

10. $x = \frac{1}{3}(4u - v)$
 $y = \frac{1}{3}(u - v)$


11. $x = \frac{1}{2}(u + v)$
 $y = \frac{1}{2}(u - v)$

12. $x = \frac{1}{3}(v - u)$
 $y = \frac{1}{3}(2v + u)$


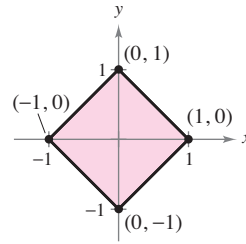


Figura para 15

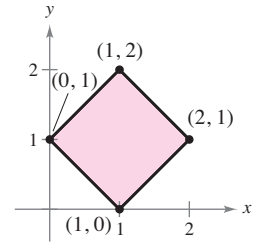
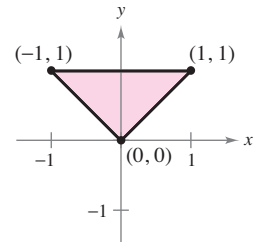
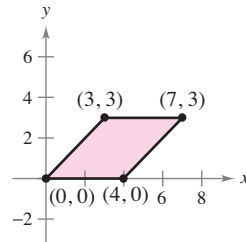
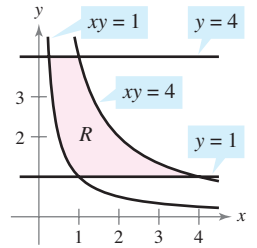
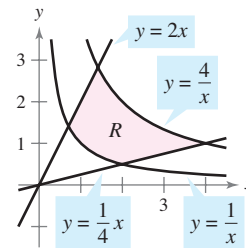


Figura para 16

17. $\iint_R y(x - y) dA$
 $x = u + v$
 $y = u$
18. $\iint_R 4(x + y)e^{x-y} dA$
 $x = \frac{1}{2}(u + v)$
 $y = \frac{1}{2}(u - v)$



19. $\iint_R e^{-xy/2} dA$
 $x = \sqrt{\frac{v}{u}}, y = \sqrt{uv}$
20. $\iint_R y \sin xy dA$
 $x = \frac{u}{v}, y = v$



CAS En los ejercicios 13 y 14, verificar el resultado del ejemplo indicado por establecer la integral usando $dy dx$ o $dx dy$ para dA . Después, usar un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral.

13. Ejemplo 3
14. Ejemplo 4

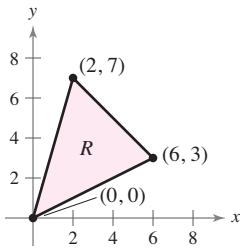
En los ejercicios 15 a 20, utilizar el cambio de variables indicado para hallar la integral doble.

15. $\iint_R 4(x^2 + y^2) dA$
 $x = \frac{1}{2}(u + v)$
 $y = \frac{1}{2}(u - v)$
16. $\iint_R 60xy dA$
 $x = \frac{1}{2}(u + v)$
 $y = -\frac{1}{2}(u - v)$

En los ejercicios 21 a 28, utilizar un cambio de variables para hallar el volumen de la región sólida que se encuentra bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región plana R .

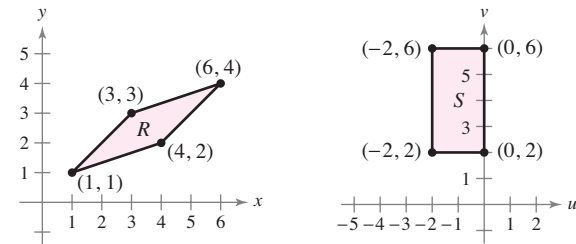
21. $f(x, y) = 48xy$
 R : región limitada por el cuadrado con vértices $(1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1)$
22. $f(x, y) = (3x + 2y)^2 \sqrt{2y - x}$
 R : región limitada por el paralelogramo con vértices $(0, 0), (-2, 3), (2, 5), (4, 2)$
23. $f(x, y) = (x + y)e^{x-y}$
 R : región acotada por el cuadrado cuyos vértices son $(4, 0), (6, 2), (4, 4), (2, 2)$

24. $f(x, y) = (x + y)^2 \text{sen}^2(x - y)$
 R: región acotada por el cuadrado cuyos vértices son $(\pi, 0)$, $(3\pi/2, \pi/2)$, (π, π) , $(\pi/2, \pi/2)$
25. $f(x, y) = \sqrt{(x - y)(x + 4y)}$
 R: región acotada por el paralelogramo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(5, 0)$, $(4, -1)$
26. $f(x, y) = (3x + 2y)(2y - x)^{3/2}$
 R: región acotada por el paralelogramo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(-2, 3)$, $(2, 5)$, $(4, 2)$
27. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$
 R: región acotada por el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a)$, donde $a > 0$
28. $f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2y^2}$
 R: región acotada por las gráficas de $xy = 1$, $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$ (Sugerencia: Hacer $x = u$, $y = v/u$.)
29. La sustitución $u = 2x - y$ y $v = x + y$ hacen la región R (ver la figura) en una simple región S en el plano uv. Determinar el número total de lados de S que son paralelos a cualquiera de los ejes u o v.



Para discusión

30. Encontrar una transformación $T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$ que al aplicar a la región R resultará en la imagen S (ver la figura). Explicar el razonamiento.



31. Considerar la región R en el plano xy acotada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y las transformaciones $x = au$ y $y = bv$.

- a) Dibujar la gráfica de la región R y su imagen S bajo la transformación dada.
- b) Hallar $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.
- c) Hallar el área de la elipse.

32. Utilizar el resultado del ejercicio 31 para hallar el volumen de cada uno de los sólidos abovedados que se encuentra bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región elíptica R. (Sugerencia: Después de hacer el cambio de variables dado por los resultados del ejercicio 31, hacer un segundo cambio de variables a coordenadas polares.)

a) $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$
 $R: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1$

b) $f(x, y) = A \cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right)$
 $R: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$

Desarrollo de conceptos

33. Enunciar la definición de jacobiano.
34. Describir cómo usar el jacobiano para hacer un cambio de variables en integrales dobles.

En los ejercicios 35 a 40, hallar el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ para el cambio de variables indicado. Si $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$ y $z = h(u, v, w)$, entonces el jacobiano de x, y y z con respecto a u, v y w es

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

35. $x = u(1 - v)$, $y = uv(1 - w)$, $z = uvw$
36. $x = 4u - v$, $y = 4v - w$, $z = u + w$
37. $x = \frac{1}{2}(u + v)$, $y = \frac{1}{2}(u - v)$, $z = 2uvw$
38. $x = u - v + w$, $y = 2uv$, $z = u + v + w$

39. Coordenadas esféricas

$$x = \rho \text{sen } \phi \cos \theta, y = \rho \text{sen } \phi \text{sen } \theta, z = \rho \cos \phi$$

40. Coordenadas cilíndricas

$$x = r \cos \theta, y = r \text{sen } \theta, z = z$$

Preparación del examen Putnam

41. Sea A el área de la región del primer cuadrante acotada por la recta $y = \frac{1}{2}x$, el eje x y la elipse $\frac{1}{9}x^2 + y^2 = 1$. Hallar el número positivo m tal que A es igual al área de la región del primer cuadrante acotada por la recta $y = mx$, el eje y y la elipse $\frac{1}{9}x^2 + y^2 = 1$.

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

14 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, evaluar la integral.

- $\int_1^{x^2} x \ln y \, dy$
- $\int_y^{2y} (x^2 + y^2) \, dx$

En los ejercicios 3 a 6, trazar la región de integración. Después, evaluar la integral iterada. Cambiar el sistema de coordenadas cuando sea conveniente.

- $\int_0^1 \int_0^{1+x} (3x + 2y) \, dy \, dx$
- $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + 2y) \, dy \, dx$
- $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} 4x \, dy \, dx$
- $\int_0^{\sqrt{3}} \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} dx \, dy$

Área En los ejercicios 7 a 14, dar los límites para la integral doble

$$\iint_R f(x, y) \, dA$$

para ambos órdenes de integración. Calcular el área de R haciendo $f(x, y) = 1$ e integrando.

- Triángulo: vértices $(0, 0), (3, 0), (0, 1)$
- Triángulo: vértices $(0, 0), (3, 0), (2, 2)$
- El área mayor entre las gráficas de $x^2 + y^2 = 25$ y $x = 3$
- Región acotada por las gráficas de $y = 6x - x^2$ y $y = x^2 - 2x$
- Región encerrada por la gráfica de $y^2 = x^2 - x^4$
- Región acotada por las gráficas de $x = y^2 + 1, x = 0, y = 0$ y $y = 2$
- Región acotada por las gráficas de $x = y + 3$ y $x = y^2 + 1$
- Región acotada por las gráficas de $x = -y$ y $x = 2y - y^2$

Para pensar En los ejercicios 15 y 16, dar un argumento geométrico para la igualdad dada. Verificar la igualdad analíticamente.

- $\int_0^1 \int_{2y}^{\sqrt{2-2y^2}} (x + y) \, dx \, dy = \int_0^2 \int_0^{x/2} (x + y) \, dy \, dx + \int_2^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}/2} (x + y) \, dy \, dx$
- $\int_0^2 \int_{3y/2}^{5-y} e^{x+y} \, dx \, dy = \int_0^3 \int_0^{2x/3} e^{x+y} \, dy \, dx + \int_3^5 \int_0^{5-x} e^{x+y} \, dy \, dx$

Volumen En los ejercicios 17 y 18, utilizar una integral múltiple y un sistema de coordenadas adecuado para hallar el volumen del sólido.

- Sólido acotado por las gráficas de $z = x^2 - y + 4, z = 0, y = 0, x = 0$ y $x = 4$

- Sólido acotado por las gráficas de $z = x + y, z = 0, x = 0, x = 3$ y $y = x$

Valor promedio En los ejercicios 19 y 20, encontrar el promedio de $f(x, y)$ sobre la región R .

- $f(x) = 16 - x^2 - y^2$
 R : rectángulo con vértices $(2, 2), (-2, 2), (-2, -2), (2, -2)$
- $f(x) = 2x^2 + y^2$
 R : cuadrado con vértices $(0, 0), (3, 0), (3, 3), (0, 3)$

21. Temperatura promedio La temperatura en grados Celsius sobre la superficie de una placa metálica es

$$T(x, y) = 40 - 6x^2 - y^2$$

donde x y y están medidos en centímetros. Estimar la temperatura promedio si x varía entre 0 y 3 centímetros y y varía entre 0 y 5 centímetros.

CAS 22. Ganancia promedio La ganancia para la empresa P gracias al marketing de dos bebidas dietéticas es

$$P = 192x + 576y - x^2 - 5y^2 - 2xy - 5\,000$$

donde x y y representan el número de unidades de las dos bebidas dietéticas. Usar un sistema algebraico por computadora para evaluar la doble integral alcanzando la ganancia promedio semanal si x varía entre 40 y 50 unidades y y varía entre 45 y 60 unidades.

Probabilidad En los ejercicios 23 y 24, hallar k tal que la función sea una función de densidad conjunta y hallar la probabilidad requerida, donde

$$P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy.$$

- $f(x, y) = \begin{cases} kxye^{-(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$
 $P(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$
- $f(x, y) = \begin{cases} kxy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$
 $P(0 \leq x \leq 0.5, 0 \leq y \leq 0.25)$

Aproximación En los ejercicios 25 y 26, determinar qué valor se aproxima mejor al volumen del sólido entre el plano xy y la función sobre la región. (Hacer la elección a la vista de un dibujo del sólido y *no* realizando cálculo alguno.)

- $f(x, y) = x + y$
 R : triángulo con vértices $(0, 0), (3, 0), (3, 3)$
 a) $\frac{9}{2}$ b) 5 c) 13 d) 100 e) -100
- $f(x, y) = 10x^2y^2$
 R : círculo limitado o acotado por $x^2 + y^2 = 1$
 a) π b) -15 c) $\frac{2}{3}$ d) 3 e) 15

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 27 a 30, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.

$$27. \int_a^b \int_c^d f(x)g(y) dy dx = \left[\int_a^b f(x) dx \right] \left[\int_c^d g(y) dy \right]$$

28. Si f es continua sobre R_1 y R_2 , y

$$\int_{R_1} \int dA = \int_{R_2} \int dA$$

entonces

$$\int_{R_1} \int f(x, y) dA = \int_{R_2} \int f(x, y) dA.$$

$$29. \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cos(x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^1 \int_0^1 \cos(x^2 + y^2) dx dy$$

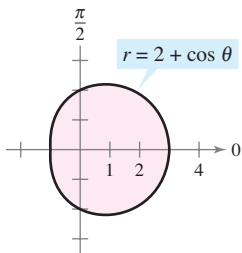
$$30. \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy < \frac{\pi}{4}$$

En los ejercicios 31 y 32, evaluar la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

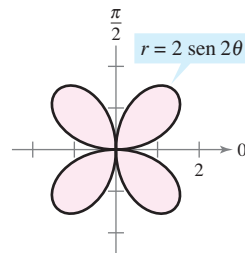
$$31. \int_0^h \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy dx \quad 32. \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

Área En los ejercicios 33 y 34, usar la doble integral para encontrar el área en la región sombreada.

33.



34.



Volumen En los ejercicios 35 y 36, utilizar una integral múltiple y un sistema de coordenadas adecuado para hallar el volumen del sólido.

35. Sólido limitado o acotado por las gráficas de $z = 0$ y $z = h$, exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e interior al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

36. Sólido restante después de perforar un orificio de radio b a través del centro de una esfera de radio R ($b < R$)

37. Considerar la región R en el plano xy limitada o acotada por la gráfica de la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2).$$



a) Convertir la ecuación a coordenadas polares. Utilizar una herramienta de graficación para representar la ecuación.

b) Utilizar una integral doble para hallar el área de la región R .

CAS c) Utilizar un sistema algebraico por computadora y determinar el volumen del sólido sobre la región R y bajo el hemisferio $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

38. Combinar la suma de las dos integrales iteradas en una sola integral iterada convirtiendo a coordenadas polares. Evaluar la integral iterada resultante.

$$\int_0^{8/\sqrt{13}} \int_0^{3x/2} xy dy dx + \int_{8/\sqrt{13}}^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} xy dy dx$$

CAS Masa y centro de masa En los ejercicios 39 y 40, hallar la masa y el centro de masa de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad o densidades dadas. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales múltiples.

39. $y = 2x$, $y = 2x^3$, primer cuadrante

$$a) \rho = kxy \quad b) \rho = k(x^2 + y^2)$$

40. $y = \frac{h}{2} \left(2 - \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right)$, $\rho = k$, primer cuadrante

CAS En los ejercicios 41 y 42, hallar I_x , I_y , I_0 , \bar{x} y \bar{y} para la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales dobles.

41. $y = 0$, $y = b$, $x = 0$, $x = a$, $\rho = kx$

42. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x > 0$, $\rho = ky$

Área de una superficie En los ejercicios 43 a 46, hallar el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R .

43. $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$

$$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 25\}$$

CAS 44. $f(x, y) = 16 - x - y^2$

$$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$$

Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral.

45. $f(x, y) = 9 - y^2$

R : triángulo limitado por las gráficas de las ecuaciones $y = x$, $y = -x$ y $y = 3$.

46. $f(x, y) = 4 - x^2$

R : triángulo limitado por las gráficas de las ecuaciones $y = x$, $y = -x$ y $y = 2$.

47. **Proyectar construcción** Un nuevo auditorio es construido con un cimiento en forma de un cuarto de un círculo de 50 pies de radio. Así, se forma una región R limitada por la gráfica de

$$x^2 + y^2 = 50^2$$

con $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Las siguientes ecuaciones son modelos para el piso y el techo.

$$\text{Piso: } z = \frac{x + y}{5}$$

$$\text{Techo: } z = 20 + \frac{xy}{100}$$

a) Calcular el volumen del cuarto, el cual es necesario para determinar los requisitos de calor y enfriamiento.

b) Encontrar el área de superficie del techo.

CAS 48. Área de una superficie El techo del escenario de un teatro al aire libre en un parque se modela por

$$f(x, y) = 25 \left[1 + e^{-(x^2+y^2)/1000} \cos^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{1000} \right) \right]$$

donde el escenario es un semicírculo limitado o acotado por las gráficas de $y = \sqrt{50^2 - x^2}$ y $y = 0$.

- Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie.
- Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la cantidad de pies cuadrados de techo requeridos para cubrir la superficie.

En los ejercicios 49 a 52, evaluar la integral iterada.

49. $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{x^2+y^2}^9 \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$

50. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{(x^2+y^2)/2} (x^2 + y^2) \, dz \, dy \, dx$

51. $\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$

52. $\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} \, dz \, dy \, dx$

CAS En los ejercicios 53 y 54, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral iterada.

53. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) \, dz \, dy \, dx$

54. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz \, dz \, dy \, dx$

Volumen En los ejercicios 55 y 56, utilizar una integral múltiple para calcular el volumen del sólido.

- El sólido interior a las gráficas de $r = 2 \cos \theta$ y $r^2 + z^2 = 4$
- El sólido interior a las gráficas de $r^2 + z = 16$, $z = 0$ y $r = 2 \sin \theta$

Centro de masa En los ejercicios 57 a 60, hallar el centro de masa del sólido de densidad uniforme limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.

- El sólido interior al hemisferio $\rho = \cos \phi$, $\pi/4 \leq \phi \leq \pi/2$, y exterior al cono $\phi = \pi/4$
- La caña: $x^2 + y^2 = a^2$, $z = cy$ ($c > 0$), $y \geq 0$, $z \geq 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, primer octante
- $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z = 4$ (el sólido mayor)

Momento de inercia En los ejercicios 61 y 62, hallar el momento de inercia I_z del sólido de densidad dada.

- El sólido de densidad uniforme interior al paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$, y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$, $z \geq 0$.
- $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, densidad proporcional a la distancia al centro

63. Investigación Considerar un segmento esférico de altura h de una esfera de radio a , donde $h \leq a$ y de densidad constante $\rho(x, y, z) = k$ (ver la figura).



- Hallar el volumen del sólido.
- Hallar el centroide del sólido.
- Utilizar el resultado del inciso b) para localizar el centroide de un hemisferio de radio a .
- Hallar $\lim_{h \rightarrow 0} \bar{z}$.
- Hallar I_z .
- Utilizar el resultado del inciso e) para hallar I_z para un hemisferio.

64. Momento de inercia Hallar el momento de inercia con respecto al eje z del elipsoide $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{a^2} = 1$, donde $a > 0$.

En los ejercicios 65 y 66, dar una interpretación geométrica de la integral iterada.

65. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{6 \sin \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

66. $\int_0^{\pi} \int_0^2 \int_0^{1+r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$

En los ejercicios 67 y 68, hallar el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ para el cambio de variables indicado.

67. $x = u + 3v, \quad y = 2u - 3v$

68. $x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2$

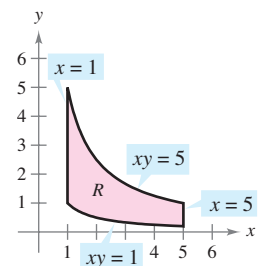
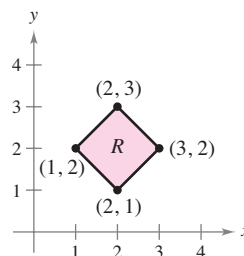
En los ejercicios 69 y 70, utilizar el cambio de variables indicado para evaluar la integral doble.

69. $\int_R \int \ln(x + y) \, dA$

$x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$

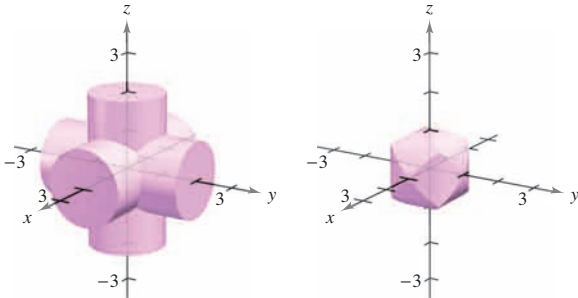
70. $\int_R \int \frac{x}{1 + x^2 y^2} \, dA$

$x = u, \quad y = \frac{v}{u}$



SP Solución de problemas

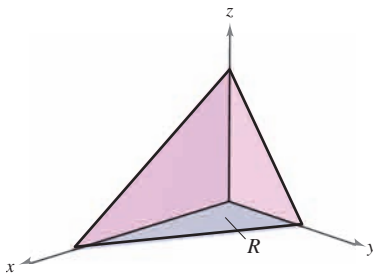
1. Hallar el volumen del sólido de intersección de los tres cilindros $x^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$ (ver la figura).



2. Sean a, b, c y d números reales positivos. El primer octante del plano $ax + by + cz = d$ se muestra en la figura. Mostrar que el área de la superficie de esta porción del plano es igual a

$$\frac{A(R)}{c} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

donde $A(R)$ es el área de la región triangular R en el plano xy , como se muestra en la figura.



3. Deducir el famoso resultado de Euler que se menciona en la sección 9.3, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, completando cada uno de los pasos.

a) Demostrar que
$$\int \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} = \frac{1}{\sqrt{2 - u^2}} \arctan \frac{v}{\sqrt{2 - u^2}} + C.$$

b) Demostrar que
$$I_1 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_{-u}^u \frac{2}{2 - u^2 + v^2} dv du = \frac{\pi^2}{18}$$
 utilizando la sustitución $u = \sqrt{2} \sin \theta$.

c) Demostrar que
$$I_2 = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \int_{u-\sqrt{2}}^{-u+\sqrt{2}} \frac{2}{2 - u^2 + v^2} dv du = 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \arctan \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} d\theta$$

utilizando la sustitución $u = \sqrt{2} \sin \theta$.

- d) Demostrar la identidad trigonométrica

$$\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} = \tan\left(\frac{(\pi/2) - \theta}{2}\right).$$

e) Demostrar que
$$I_2 = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \int_{u-\sqrt{2}}^{-u+\sqrt{2}} \frac{2}{2 - u^2 + v^2} dv du = \frac{\pi^2}{9}.$$

f) Utilizar la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita para verificar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} dx dy.$$

g) Utilizar el cambio de variables $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ y $v = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$ para demostrar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} dx dy = I_1 + I_2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Considerar un césped circular de 10 pies de radio, como se muestra en la figura. Supóngase que un rociador distribuye agua de manera radial de acuerdo con la fórmula

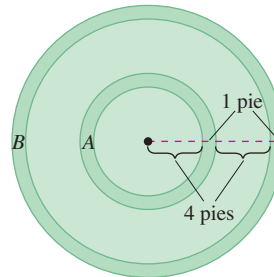
$$f(r) = \frac{r}{16} - \frac{r^2}{160}$$

(medido en pies cúbicos de agua por hora por pie cuadrado de césped), donde r es la distancia en pies al rociador. Hallar la cantidad de agua que se distribuye en 1 hora en las dos regiones anulares siguientes.

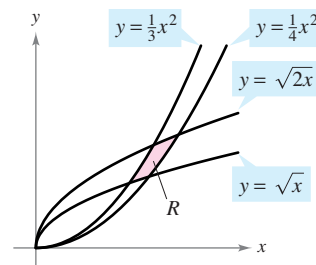
$$A = \{(r, \theta): 4 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$B = \{(r, \theta): 9 \leq r \leq 10, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

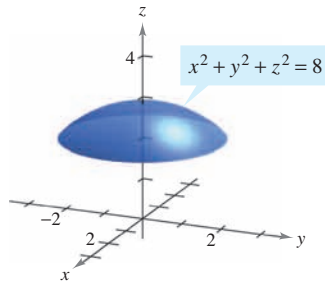
¿Es uniforme la distribución del agua? Determinar la cantidad de agua que recibe todo el césped en 1 hora.



5. La figura muestra la región R limitada o acotada por las curvas $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{2x}, y = \frac{x^2}{3}$ y $y = \frac{x^2}{4}$. Utilizar el cambio de variables $x = u^{1/3}v^{2/3}$ y $y = u^{2/3}v^{1/3}$ para hallar el área de la región R .



6. La figura muestra un sólido acotado inferiormente por el plano $z = 2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.



- a) Hallar el volumen del sólido utilizando coordenadas cilíndricas.
 b) Hallar el volumen del sólido utilizando coordenadas esféricas.
7. Dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la suma de las integrales iteradas

$$\int_0^6 \int_{z/2}^3 \int_{z/2}^y dx dy dz + \int_0^6 \int_3^{(12-z)/2} \int_{z/2}^{6-y} dx dy dz.$$

Después, expresar el volumen mediante una integral iterada simple con el orden $dy dz dx$.

8. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n dx dy = 0$.

En los ejercicios 9 y 10, evaluar la integral. (Sugerencia: Ver el ejercicio 69 de la sección 14.3.)

9. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

10. $\int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx$

11. Considerar la función

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(x+y)/a}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Hallar la relación entre las constantes positivas a y k de manera que f sea una función de densidad conjunta de las variables aleatorias continuas x y y .

12. Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región en el primer cuadrante limitado por $y = e^{-x^2}$ alrededor del eje y . Usar este resultado para encontrar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

13. De 1963 a 1986, el volumen del lago Great Salt se triplicó, mientras que el área de su superficie superior se duplicó. Leer el artículo "Relations between Surface Area and Volume in Lakes" de Daniel Cass y Gerald Wildenberg en *The College Mathematics Journal*. Después, proporcionar ejemplos de sólidos que tengan "niveles de agua" a y b tales que $V(b) = 3V(a)$ y $A(b) = 2A(a)$ (ver la figura), donde V es el volumen y A es el área.

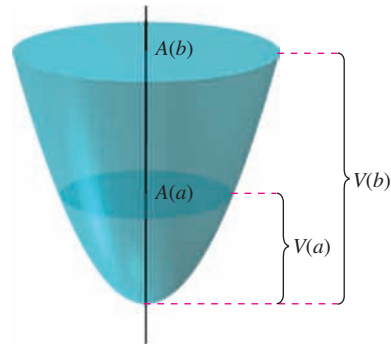
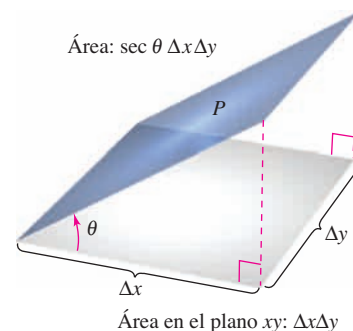


Figura para 13

14. El ángulo entre un plano P y el plano xy es θ , donde $0 \leq \theta < \pi/2$. La proyección de una región rectangular en P sobre el plano xy es un rectángulo en el que las longitudes de sus lados son Δx y Δy , como se muestra en la figura. Demostrar que el área de la región rectangular en P es $\sec \theta \Delta x \Delta y$.



15. Utilizar el resultado del ejercicio 14 para ordenar los planos, en orden creciente de sus áreas de superficie, en una región fija R del plano xy . Explicar el orden elegido sin hacer ningún cálculo.

- a) $z_1 = 2 + x$
 b) $z_2 = 5$
 c) $z_3 = 10 - 5x + 9y$
 d) $z_4 = 3 + x - 2y$

16. Evaluar la integral $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx dy$.

17. Evaluar las integrales

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy \quad \text{y} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx.$$

¿Son iguales los resultados? ¿Por qué sí o por qué no?

18. Mostrar que el volumen de un bloque esférico puede ser aproximado por

$$\Delta V \approx \rho^2 \sin \phi \Delta \rho \Delta \phi \Delta \theta.$$