$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^8 x\, dx = \frac{7}{8}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\, dx$$
$$= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\, dx$$
$$= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx$$
$$= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1\, dx$$
$$= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35}{256}\pi$$ ■

La fórmula general para $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx$ puede encontrarse de una manera análoga (fórmula 113 en la parte posterior del libro).

Revisión de conceptos

1. La fórmula de integración por partes dice que $\int u\, dv =$ ____.

2. Para aplicar esta fórmula a $\int x \operatorname{sen} x\, dx$, se hace $u =$ _____ y $dv =$ ______.

3. Al aplicar la fórmula de integración por partes se obtiene el valor ________ para $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx$.

4. Una fórmula que expresa $\int f^n(x)\, g(x)\, dx$ en términos de $\int f^k(x)\, g(x)\, dx$, donde $k < n$, se denomina fórmula de ______.

Conjunto de problemas 7.2

En los problemas del 1 al 36 utilice la integración por partes para evaluar cada integral.

1. $\int xe^x\, dx$

2. $\int xe^{3x}\, dx$

3. $\int te^{5t+\pi}\, dt$

4. $\int (t+7)e^{2t+3}\, dt$

5. $\int x \cos x\, dx$

6. $\int x \operatorname{sen} 2x\, dx$

7. $\int (t-3)\cos(t-3)\, dt$

8. $\int (x-\pi)\operatorname{sen} x\, dx$

9. $\int t\sqrt{t+1}\, dt$

10. $\int t\sqrt[3]{2t+7}\, dt$

11. $\int \ln 3x\, dx$

12. $\int \ln(7x^5)\, dx$

13. $\int \arctan x\, dx$

14. $\int \arctan 5x\, dx$

15. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

16. $\int_2^3 \frac{\ln 2x^5}{x^2}\, dx$

17. $\int_1^e \sqrt{t}\ln t\, dt$

18. $\int_1^5 \sqrt{2x}\ln x^3\, dx$

19. $\int z^3 \ln z\, dz$

20. $\int t \arctan t\, dt$

21. $\int \arctan(1/t)\, dt$

22. $\int t^5 \ln(t^7)\, dt$

23. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} x\csc^2 x\, dx$

24. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} x\sec^2 x\, dx$

25. $\int x^5\sqrt{x^3+4}\, dx$

26. $\int x^{13}\sqrt{x^7+1}\, dx$

27. $\int \frac{t^7}{(7-3t^4)^{3/2}}\, dt$

28. $\int x^3\sqrt{4-x^2}\, dx$

29. $\int \frac{z^7}{(4-z^4)^2}\, dz$

30. $\int x\cosh x\, dx$

31. $\int x \operatorname{senh} x\, dx$

32. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

33. $\int x(3x+10)^{49}\, dx$

34. $\int_0^1 t(t-1)^{12}\, dt$

35. $\int x\, 2^x\, dx$

36. $\int z\, a^z\, dz$

En los problemas del 37 al 48 aplique dos veces la integración por partes para evaluar cada integral (véanse los ejemplos 5 y 6).

37. $\int x^2 e^x\, dx$

38. $\int x^5 e^{x^2}\, dx$

39. $\int \ln^2 z\, dz$

40. $\int \ln^2 x^{20}\, dx$

41. $\int e^t \cos t\, dt$

42. $\int e^{at} \operatorname{sen} t\, dt$

43. $\int x^2 \cos x\, dx$

44. $\int r^2 \operatorname{sen} r\, dr$

45. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

46. $\int \cos(\ln x)\, dx$

47. $\int (\ln x)^3\, dx$ *Sugerencia:* use el problema 39.

48. $\displaystyle\int (\ln x)^4\,dx$ *Sugerencia:* utilice los problemas 39 y 47.

En los problemas del 49 al 54 utilice integración por partes para deducir la fórmula que se da.

49. $$\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\,dx = -\tfrac{3}{8}\operatorname{sen} x\cos 3x + \tfrac{1}{8}\cos x\operatorname{sen} 3x + C$$

50. $$\int \cos 5x\operatorname{sen} 7x\,dx = -\tfrac{7}{24}\cos 5x\cos 7x - \tfrac{5}{24}\operatorname{sen} 5x\operatorname{sen} 7x + C$$

51. $$\int e^{\alpha z}\operatorname{sen}\beta z\,dz = \frac{e^{\alpha z}(\alpha\operatorname{sen}\beta z - \beta\cos\beta z)}{\alpha^2+\beta^2} + C$$

52. $$\int e^{\alpha z}\cos\beta z\,dz = \frac{e^{\alpha z}(\alpha\cos\beta z + \beta\operatorname{sen}\beta z)}{\alpha^2+\beta^2} + C$$

53. $$\int x^\alpha \ln x\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C,\ \alpha \neq -1$$

54. $$\int x^\alpha(\ln x)^2\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln x)^2 - 2\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\ln x + 2\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^3} + C,\ \alpha\neq -1$$

En los problemas del 55 al 61 deduzca la fórmula de reducción que se da utilizando integración por partes.

55. $$\int x^\alpha e^{\beta x}\,dx = \frac{x^\alpha e^{\beta x}}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}e^{\beta x}\,dx$$

56. $$\int x^\alpha\operatorname{sen}\beta x\,dx = -\frac{x^\alpha\cos\beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}\cos\beta x\,dx$$

57. $$\int x^\alpha\cos\beta x\,dx = \frac{x^\alpha\operatorname{sen}\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}\operatorname{sen}\beta x\,dx$$

58. $$\int (\ln x)^\alpha\,dx = x(\ln x)^\alpha - \alpha\int(\ln x)^{\alpha-1}\,dx$$

59. $$\int (a^2-x^2)^\alpha\,dx = x(a^2-x^2)^\alpha + 2\alpha\int x^2(a^2-x^2)^{\alpha-1}\,dx$$

60. $$\int \cos^\alpha x\,dx = \frac{\cos^{\alpha-1}x\operatorname{sen} x}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\int\cos^{\alpha-2}x\,dx$$

61. $$\int\cos^\alpha\beta x\,dx = \frac{\cos^{\alpha-1}\beta x\operatorname{sen}\beta x}{\alpha\beta} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\int\cos^{\alpha-2}\beta x\,dx$$

62. Utilice el problema 55 para deducir

$$\int x^4e^{3x}\,dx = \tfrac{1}{3}x^4e^{3x} - \tfrac{4}{9}x^3e^{3x} + \tfrac{4}{9}x^2e^{3x} - \tfrac{8}{27}xe^{3x} + \tfrac{8}{81}e^{3x} + C$$

63. Utilice los problemas 56 y 57 para deducir

$$\int x^4\cos 3x\,dx = \tfrac{1}{3}x^4\operatorname{sen} 3x + \tfrac{4}{9}x^3\cos 3x - \tfrac{4}{9}x^2\operatorname{sen} 3x - \tfrac{8}{27}x\cos 3x + \tfrac{8}{81}\operatorname{sen} 3x + C.$$

64. Utilice el problema 61 para deducir

$$\int\cos^6 3x\,dx = \tfrac{1}{18}\operatorname{sen} 3x\cos^5 3x + \tfrac{5}{72}\operatorname{sen} 3x\cos^3 3x + \tfrac{5}{48}\operatorname{sen} 3x\cos 3x + \tfrac{5}{16}x + C.$$

65. Encuentre el área de la región acotada por la curva $y = \ln x$, el eje x y la recta $x = e$.

66. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región del problema 65 alrededor del eje x.

67. Encuentre el área de la región acotada por las curvas $y = 3e^{-x/3}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 9$. Haga un dibujo.

68. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región descrita en el problema 67, alrededor del eje x.

69. Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = x\operatorname{sen} x$ y $y = x\cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = \pi/4$.

70. Encuentre el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región bajo la gráfica de $y = \operatorname{sen}(x/2)$ desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$ alrededor del eje y.

71. Encuentre el centroide (véase la sección 5.6) de la región acotada por $y = \ln x^2$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = e$.

72. Evalúe la integral $\displaystyle\int \cot x\csc^2 x\,dx$ por partes de dos maneras diferentes:

(a) Derivando $\cot x$ (b) Derivando $\csc x$

(c) Demuestre que los dos resultados son equivalentes, salvo por una constante.

73. Si $p(x)$ es un polinomio de grado n y $G_1, G_2, \ldots, G_{n+1}$ son antiderivadas sucesivas de una función g, entonces por medio de repetidas integraciones por partes,

$$\int p(x)g(x)\,dx = p(x)G_1(x) - p'(x)G_2(x) + p''(x)G_3(x) - \cdots + (-1)^n p^{(n)}(x)G_{n+1}(x) + C$$

Utilice este resultado para encontrar cada una de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int (x^3-2x)e^x\,dx$ (b) $\displaystyle\int (x^2-3x+1)\operatorname{sen} x\,dx$

74. La gráfica de $y = x\operatorname{sen} x$ para $x \geq 0$ se bosqueja en la figura 2.

(a) Encuentre una fórmula para el área de n-ésimo arco.

(b) El segundo arco se hace girar alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

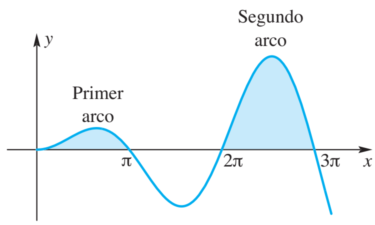

Figura 2

75. La cantidad $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$ desempeña un papel importante en matemáticas aplicadas. Demuestre que si $f'(x)$ es continua en $[-\pi, \pi]$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Sugerencia:* integración por partes.

76. Sea $G_n = \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty}(G_n/n) = 4/e$. *Sugerencia:* considere $\ln(G_n/n)$, identifíquela como una suma de Riemann y utilice el ejemplo 2.

77. Encuentre el error en la siguiente "demostración" de que $0 = 1$. En $\int(1/t)\,dt$, haga $u = 1/t$ y $dv = dt$. Entonces $du = -t^{-2}\,dt$ y $uv = 1$. La integración por partes da

$$\int (1/t)\,dt = 1 - \int(-1/t)\,dt$$

o $0 = 1$.

78. Suponga que quiere evaluar la integral

$$\int e^{5x}(4\cos 7x + 6\,\text{sen}\,7x)\,dx$$

y por su experiencia sabe que el resultado será de la forma $e^{5x}(C_1 \cos 7x + C_2\,\text{sen}\,7x) + C_3$. Calcule C_1 y C_2 derivando el resultado y hágala igual al integrando.

Muchos resultados teóricos sorprendentes pueden deducirse mediante el uso de integración por partes. En todos los casos, uno inicia con una integral. Aquí exploramos dos de estos resultados.

79. *Demuestre que*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= [xf(x)]_a^b - \int_a^b xf'(x)\,dx \\ &= [(x-a)f(x)]_a^b - \int_a^b (x-a)f'(x)\,dx\end{aligned}$$

80. Utilice el problema 79 y reemplace f por f' para demostrar que

$$\begin{aligned}f(b) - f(a) &= \int_a^b f'(x)\,dx \\ &= f'(b)(b-a) - \int_a^b (x-a)f''(x)\,dx \\ &= f'(a)(b-a) - \int_a^b (x-b)f''(x)\,dx\end{aligned}$$

81. Demuestre que

$$f(t) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i + \int_a^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx,$$

siempre que f pueda derivarse $n+1$ veces.

82. La *función beta*, que es importante en muchas ramas de las matemáticas, está definida como

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx,$$

con la condición de que $\alpha \geq 1$ y $\beta \geq 1$.

(a) Por medio de un cambio de variables, demuestre que

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}\,dx = B(\beta, \alpha)$$

(b) Integrando por partes demuestre que

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - 1}{\beta} B(\alpha - 1, \beta + 1) = \frac{\beta - 1}{\alpha} B(\alpha + 1, \beta - 1)$$

(c) Ahora, suponga que $\alpha = n$ y $\alpha = m$ y que n y m son enteros positivos. Utilizando, de manera repetida, el resultado de la parte (b) demuestre que

$$B(n, m) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(n+m-1)!}$$

Este resultado es válido incluso para el caso en donde n y m no son enteros, con tal que podamos dar significado a $(n-1)!$, $(m-1)!$ y $(n+m-1)!$

83. Suponga que $f(t)$ tiene la propiedad de que $f'(a) = f'(b) = 0$ y que $f(t)$ tiene dos derivadas continuas. Utilice integración por partes para demostrar que $\int_a^b f''(t)f(t)\,dt \leq 0$. *Sugerencia:* use integración por partes derivando $f(t)$ e integrando $f''(t)$. Este resultado tiene muchas aplicaciones en el campo de las matemáticas aplicadas y en ecuaciones diferenciales parciales.

84. Deduzca la fórmula

$$\int_0^x \left(\int_0^t f(z)\,dz \right) dt = \int_0^x f(t)(x-t)\,dt$$

utilizando la integración por partes.

85. Generalice la fórmula dada en el problema 84 a uno para una integral iterada n-veces

$$\int_0^x \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n \ldots dt_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t_1)(x-t_1)^{n-1}\,dt_1$$

86. Si $P_n(x)$ es un polinomio de grado n, demuestre que

$$\int e^x P_n(x)\,dx = e^x \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{d^j P_n(x)}{dx^j}$$

87. Utilice el resultado del problema 86 para evaluar

$$\int (3x^4 + 2x^2)e^x\,dx$$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $uv - \int v\,du$ **2.** x; sen $x\,dx$ **3.** 1 **4.** reducción

7.3 Algunas integrales trigonométricas

Cuando hemos combinado el método de sustitución con un uso adecuado de identidades trigonométricas, podemos integrar una gran variedad de formas trigonométricas. Consideremos tres tipos encontrados comúnmente.

1. $\int \text{sen}^n\,x\,dx$ y $\int \cos^n x\,dx$
2. $\int \text{sen}^m\,x \cos^n x\,dx$
3. $\int \text{sen}\,mx \cos nx\,dx$, $\int \text{sen}\,mx\,\text{sen}\,nx\,dx$, $\int \cos mx \cos nx\,dx$
4. $\int \tan^n x\,dx$, $\int \cot^n x\,dx$
5. $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$, $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$

Identidades útiles

Algunas identidades trigonométricas que se necesitan en esta sección son las siguientes.

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades del ángulo medio

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Tipo 1 $\left(\int \operatorname{sen}^n x\,dx,\ \int \cos^n x\,dx\right)$ Primero considere el caso en donde n es un entero positivo. Después factorice el factor sen x o cos x, utilice la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

EJEMPLO 1 **(n impar)** Encuentre $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x\,dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx \\
&= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x\,dx \\
&= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)(-\operatorname{sen} x\,dx) \\
&= -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x + C
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 **(n par)** Encuentre $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$ y $\int \cos^4 x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí hemos utilizado las identidades del medio ángulo.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x\,dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int (\cos 2x)(2\,dx) \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\,dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int (\cos 2x)(2)\,dx + \frac{1}{8}\int (1 + \cos 4x)\,dx \\
&= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x(2\,dx) + \frac{1}{32}\int \cos 4x(4\,dx) \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C
\end{aligned}$$

Tipo 2 $\left(\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx\right)$ Si m o n son enteros impares positivos y el otro exponente es cualquier número, factorizamos sen x o cos x y utilizamos la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

EJEMPLO 3 **(m o n impares)** Encuentre $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^{-4} x\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x \cos^{-4} x\, dx &= \int (1 - \cos^2 x)(\cos^{-4} x)(\operatorname{sen} x)\, dx \\ &= -\int (\cos^{-4} x - \cos^{-2} x)(-\operatorname{sen} x\, dx) \\ &= -\left[\frac{(\cos x)^{-3}}{-3} - \frac{(\cos x)^{-1}}{-1}\right] + C \\ &= \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C\end{aligned}$$

■

Si m y n son enteros positivos pares, utilizamos las identidades para el medio ángulo a fin de reducir el grado del integrando. El ejemplo 4 proporciona una ilustración.

EJEMPLO 4 **(m y n pares)** Encuentre $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}&\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx \\ &\quad = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &\quad = \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx \\ &\quad = \frac{1}{8}\int \left[1 + \cos 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) - (1 - \operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\right] dx \\ &\quad = \frac{1}{8}\int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x + \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\right] dx \\ &\quad = \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x(4\, dx) + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2 2x(2\cos 2x\, dx)\right] \\ &\quad = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2x\right] + C\end{aligned}$$

■

¿Son diferentes?

Las integraciones indefinidas pueden llevar a respuestas que parecen diferentes. Por un método

$$\begin{aligned}&\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx \\ &\quad = -\int \cos x(-\operatorname{sen} x)\, dx \\ &\quad = -\tfrac{1}{2}\cos^2 x + C\end{aligned}$$

Por un segundo método

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx &= \int \operatorname{sen} x(\cos x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C\end{aligned}$$

Pero las dos respuestas deben diferir por, a lo más, en una constante. Sin embargo, observe que

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos^2 x) + C \\ &= -\tfrac{1}{2}\cos^2 x + \left(\tfrac{1}{2} + C\right)\end{aligned}$$

Ahora compare estas respuestas con una tercera respuesta.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx &= \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\, dx \\ &= -\tfrac{1}{4}\cos 2x + C\end{aligned}$$

Tipo 3 $\left(\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx,\ \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx,\ \int \cos mx \cos nx\, dx\right)$

Las integrales de este tipo aparecen en muchos problemas de aplicaciones de física e ingeniería. Para manejar estas integrales utilizamos las identidades para la multiplicación.

1. $\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m + n)x + \operatorname{sen}(m - n)x]$
2. $\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = -\frac{1}{2}[\cos(m + n)x - \cos(m - n)x]$
3. $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m + n)x + \cos(m - n)x]$

EJEMPLO 5 Encuentre $\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x\, dx$.

SOLUCIÓN Aplique la identidad 1 para el producto.

$$\begin{aligned}\int \text{sen } 2x \cos 3x \, dx &= \frac{1}{2}\int [\text{sen } 5x + \text{sen}(-x)] \, dx \\ &= \frac{1}{10}\int \text{sen } 5x(5 \, dx) - \frac{1}{2}\int \text{sen } x \, dx \\ &= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Si m y n son enteros positivos, demuestre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } mx \text{ sen } nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$$

SOLUCIÓN Aplique la identidad 2 para el producto. Si $m \neq n$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } mx \text{ sen } nx \, dx &= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x] \, dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\text{sen}(m+n)x - \frac{1}{m-n}\text{sen}(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

Si $m = n$,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } mx \text{ sen } nx \, dx &= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos 2mx - 1] \, dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2m}\text{sen } 2mx - x\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{2}[-2\pi] = \pi\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 7 Si m y n son enteros positivos, encuentre

$$\int_{-L}^{L} \text{sen}\frac{m\pi x}{L} \text{ sen}\frac{n\pi x}{L} \, dx$$

SOLUCIÓN Sean $u = \pi x/L$, $du = \pi dx/L$. Si $x = -L$, entonces $u = -\pi$, y si $x = L$, entonces $u = \pi$. Por lo que

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} \text{sen}\frac{m\pi x}{L} \text{ sen}\frac{n\pi x}{L} \, dx &= \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } mu \text{ sen } nu \, du \\ &= \begin{cases} \dfrac{L}{\pi}\cdot 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{L}{\pi}\cdot \pi & \text{si } m = n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ L & \text{si } m = n \end{cases}\end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado el resultado del ejemplo 6. ■

Varias veces en este texto hemos sugerido que debe ver las cosas desde el punto de vista algebraico y desde el punto de vista geométrico. Hasta el momento, esta sección ha sido completamente algebraica, pero con integrales definidas como las de los ejemplos 6 y 7, tenemos la oportunidad de ver cosas geométricamente.

La figura 1 muestra las gráficas de $y = \text{sen}(3x)\text{sen}(2x)$ y $y = \text{sen}(3\pi x/10)\text{sen}(2\pi x/10)$. Las gráficas sugieren que las áreas por arriba y por abajo del eje x son iguales, llevando a $A_{\text{rriba}} - A_{\text{bajo}} = 0$. Los ejemplos 6 y 7 confirman esto.

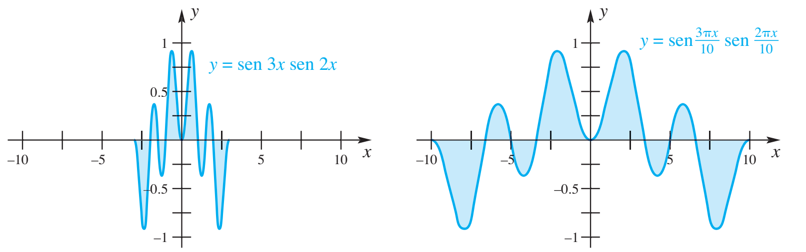

Figura 1

La figura 2 muestra las gráficas de $y = \text{sen } 2x \text{ sen } 2x = \text{sen}^2\, 2x, -\pi \le x \le \pi$, y $y = \text{sen}(2\pi x/10)\text{ sen}(2\pi x/10) = \text{sen}^2(2\pi x/10), -10 \le x \le 10$. Estas dos gráficas se ven iguales, salvo que la de la derecha se ha estirado en el sentido horizontal por un factor $10/\pi$, ¿entonces tiene sentido que el área aumentará por este mismo factor? Esto haría que el área sombreada en la figura de la derecha fuese igual a $10/\pi$ veces el área sombreada en la figura de la izquierda; esto es, el área de la derecha debería ser $(10/\pi)\cdot\pi = 10$, lo cual corresponde al resultado del ejemplo 7 con $L = 10$.

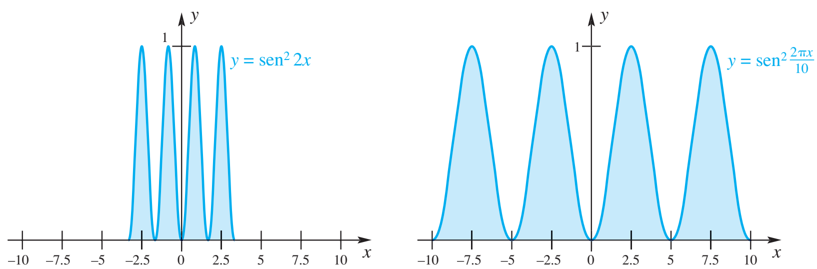

Figura 2

Tipo 4 $\left(\int \tan^n x\, dx, \int \cot^n x\, dx\right)$ En el caso de la tangente, utilice $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$; en el caso de cotangente, utilice $\cot^2 x = \csc^2 - 1$.

EJEMPLO 8 Determine $\int \cot^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \cot^4 x\, dx &= \int \cot^2 x\,(\csc^2 x - 1)\, dx\\ &= \int \cot^2 x \csc^2 x\, dx - \int \cot^2 x\, dx\\ &= -\int \cot^2 x\,(-\csc^2 x\, dx) - \int (\csc^2 x - 1)\, dx\\ &= -\tfrac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C\end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Determine $\int \tan^5 x\, dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x\,dx &= \int \tan^3 x\,(\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \int \tan^3 x \sec^2 x\,dx - \int \tan^3 x\,dx \\ &= \int \tan^3 x\,(\sec^2 x\,dx) - \int \tan x\,(\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \int \tan^3 x\,(\sec^2 x\,dx) - \int \tan x\,(\sec^2 x\,dx) + \int \tan x\,dx \\ &= \tfrac{1}{4}\tan^4 x - \tfrac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

■

Tipo 5 $\left(\int \tan^m x \sec^n x\,dx,\ \int \cot^m x \csc^n x\,dx\right)$

EJEMPLO 10 **(*n* par, *m* cualquier número)** Determine $\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x\,dx &= \int (\tan^{-3/2} x)(1 + \tan^2 x)\sec^2 x\,dx \\ &= \int (\tan^{-3/2} x)\sec^2 x\,dx + \int (\tan^{1/2} x)\sec^2 x\,dx \\ &= -2\tan^{-1/2} x + \tfrac{2}{3}\tan^{3/2} x + C\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 11 **(*m* impar, *n* cualquier número)** Determine $\int \tan^3 x \sec^{-1/2} x\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^{-1/2} x\,dx &= \int (\tan^2 x)(\sec^{-3/2} x)(\sec x \tan x)\,dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)\sec^{-3/2} x\,(\sec x \tan x\,dx) \\ &= \int \sec^{1/2} x\,(\sec x \tan x\,dx) - \int \sec^{-3/2} x\,(\sec x \tan x\,dx) \\ &= \tfrac{2}{3}\sec^{3/2} x + 2\sec^{-1/2} x + C\end{aligned}$$

■

Revisión de conceptos

1. Para calcular $\int \cos^2 x\,dx$, primero la escribimos como _____.

2. Para manejar $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$, primero la escribimos como _____.

3. Para obtener $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$, primero la reescribimos como _____.

4. Para resolver $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx$, donde $m \neq n$, utilizamos la identidad trigonométrica _____.

Conjunto de problemas 7.3

En los problemas del 1 al 28 realice las integraciones que se indican.

1. $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

2. $\int \operatorname{sen}^4 6x\, dx$

3. $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$

4. $\int \cos^3 x\, dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta\, d\theta$

6. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 \theta\, d\theta$

7. $\int \operatorname{sen}^5 4x \cos^2 4x\, dx$

8. $\int (\operatorname{sen}^3 2t)\sqrt{\cos 2t}\, dt$

9. $\int \cos^3 3\theta \operatorname{sen}^{-2} 3\theta\, d\theta$

10. $\int \operatorname{sen}^{1/2} 2z \cos^3 2z\, dz$

11. $\int \operatorname{sen}^4 3t \cos^4 3t\, dt$

12. $\int \cos^6 \theta \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta$

13. $\int \operatorname{sen} 4y \cos 5y\, dy$

14. $\int \cos y \cos 4y\, dy$

15. $\int \operatorname{sen}^4\left(\frac{w}{2}\right) \cos^2\left(\frac{w}{2}\right) dw$

16. $\int \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t\, dt$

17. $\int x \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx$. *Sugerencia:* utilice integración por partes.

18. $\int x \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$

19. $\int \tan^4 x\, dx$

20. $\int \cot^4 x\, dx$

21. $\int \tan^3 x\, dx$

22. $\int \cot^3 2t\, dt$

23. $\int \tan^5\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$

24. $\int \cot^5 2t\, dt$

25. $\int \tan^{-3} x \sec^4 x\, dx$

26. $\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x\, dx$

27. $\int \tan^3 x \sec^2 x\, dx$

28. $\int \tan^3 x \sec^{-1/2} x\, dx$

29. Encuentre $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx$, $m \neq n$; m, n enteros.

30. Determine $\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L} dx$, $m \neq n$, m, n enteros.

≈ **31.** La región acotada por $y = x + \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = \pi$ se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

≈ **32.** La región acotada por $y = \operatorname{sen}^2(x^2)$; $y = 0$ y $x = \sqrt{\pi/2}$ se hace girar con respecto al eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

33. Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen}(nx)$. Utilice el ejemplo 6 para demostrar cada una de las siguientes proposiciones para un entero positivo m.

(a) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(mx)\, dx = \begin{cases} a_m & \text{si } m \leq N \\ 0 & \text{si } m > N \end{cases}$

(b) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{N} a_n^2$

Nota: las integrales de este tipo aparecen en un tema llamado *series de Fourier*, que tiene aplicación en calor, cuerdas vibrantes y otros fenómenos físicos.

34. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{4} \cos\frac{x}{8} \cdots \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

completando los siguientes pasos.

(a) $\cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{4} \cdots \cos\frac{x}{2^n} =$

$$\left[\cos\frac{1}{2^n}x + \cos\frac{3}{2^n}x + \cdots + \cos\frac{2^n - 1}{2^n}x\right]\frac{1}{2^{n-1}}$$

(Véase el problema 46 de la sección 0.7.)

(b) Identifique una suma de Riemann que lleve a una integral definida.

(c) Evalúe esta integral definida.

35. Utilice el resultado del problema 34 para obtener la famosa fórmula de François Viète (1540–1603):

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

36. La región sombreada (véase la figura 3) entre un arco de $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$ y la recta $y = k$, $0 \leq k \leq 1$, se hace girar alrededor de la recta $y = k$, generando un sólido S. Determine k de modo que S tenga

(a) volumen mínimo y

(b) volumen máximo.

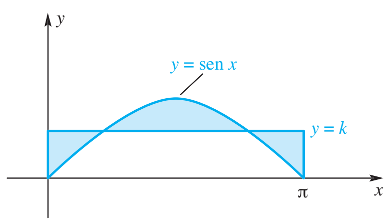

Figura 3

Respuestas a la revisión de conceptos:

1. $\int [(1 + \cos 2x)/2]\, dx$ **2.** $\int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx$

3. $\int \operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx$

4. $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m + n)x + \cos(m - n)x]$

7.4 Sustituciones para racionalizar

Los radicales en un integrando siempre son problemáticos y por lo común tratamos de librarnos de ellos. Con frecuencia, una sustitución apropiada racionalizará el integrando.

Integrandos que incluyen $\sqrt[n]{ax+b}$ Si $\sqrt[n]{ax+b}$ aparece en una integral, la sustitución $u = \sqrt[n]{ax+b}$ eliminará el radical.

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt{x}$, de modo que $u^2 = x$ y $2u\,du = dx$. Entonces

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2u}{u^2-u}\,du = 2\int \frac{1}{u-1}\,du$$
$$= 2\ln|u-1| + C = 2\ln|\sqrt{x}-1| + C \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Encuentre $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt[3]{x-4}$, por lo que $u^3 = x - 4$ y $3u^2du = dx$. Entonces

$$\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx = \int (u^3+4)u\cdot(3u^2\,du) = 3\int (u^6+4u^3)\,du$$
$$= 3\left[\frac{u^7}{7} + u^4\right] + C = \frac{3}{7}(x-4)^{7/3} + 3(x-4)^{4/3} + C \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = (x+1)^{1/5}$, de modo que $u^5 = x + 1$ y $5u^4\,du = dx$. Entonces,

$$\int x(x+1)^{2/5}\,dx = \int (u^5-1)u^2\cdot 5u^4\,du$$
$$= 5\int (u^{11}-u^6)\,du = \tfrac{5}{12}u^{12} - \tfrac{5}{7}u^7 + C$$
$$= \tfrac{5}{12}(x+1)^{12/5} - \tfrac{5}{7}(x+1)^{7/5} + C \qquad \blacksquare$$

Integrandos que incluyen $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ y $\sqrt{x^2-a^2}$ Para racionalizar estas tres expresiones, podemos suponer que a es positiva y hacer las siguientes sustituciones trigonométricas.

	Radical	Sustitución	Restricción sobre t
1.	$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\,\text{sen}\,t$	$-\pi/2 \le t \le \pi/2$
2.	$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan t$	$-\pi/2 < t < \pi/2$
3.	$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec t$	$0 \le t \le \pi,\ t \ne \pi/2$

Ahora observe las simplificaciones que realizan estas sustituciones.

1. $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\,\text{sen}^2\,t} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = |a\cos t| = a\cos t$
2. $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2 t} = \sqrt{a^2\sec^2 t} = |a\sec t| = a\sec t$
3. $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = \sqrt{a^2\tan^2 t} = |a\tan t| = \pm a\tan t$

Las restricciones sobre t nos permitieron eliminar los signos de valor absoluto en los primeros dos casos, pero también realizan algo más. Estas restricciones son exactamente las mismas que introdujimos en la sección 6.7 para hacer que fuesen invertibles seno, tangente y secante. Esto significa que, en cada caso, podemos resolver las ecuaciones de las sustituciones para t y esto nos permitirá escribir nuestras respuestas finales en los ejemplos siguientes en términos de x.

EJEMPLO 4 Encuentre $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Hacemos la sustitución

$$x = a \operatorname{sen} t, \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Entonces, $dx = a \cos t\, dt$ y $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$. Así,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \int a \cos t \cdot a \cos t\, dt = a^2 \int \cos^2 t\, dt \\ &= \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)\,dt \\ &= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) + C \\ &= \frac{a^2}{2}(t + \operatorname{sen} t \cos t) + C\end{aligned}$$

Ahora, $x = a \operatorname{sen} t$ es equivalente a $x/a = \operatorname{sen} t$ y, como t estaba restringida a hacer invertible a la función seno,

$$t = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

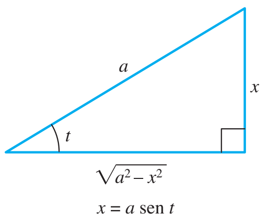

Figura 1

Utilizando el triángulo rectángulo de la figura 1 (como lo hicimos en la sección 6.8), vemos que

$$\cos t = \cos\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Por lo que

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C \qquad \blacksquare$$

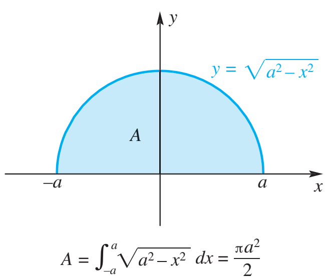

Figura 2

El resultado en el ejemplo 4 nos permite calcular la siguiente integral definida que representa el área de un semicírculo (véase la figura 2). Así, el cálculo confirma un resultado que ya conocíamos.

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left[\frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi a^2}{2}$$

EJEMPLO 5 Encuentre $\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}$.

SOLUCIÓN Sea $x = 3 \tan t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$. Entonces $dx = 3 \sec^2 t\; dt$ y $\sqrt{9 + x^2} = 3 \sec t$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}} &= \int \frac{3 \sec^2 t}{3 \sec t}\,dt = \int \sec t\, dt \\ &= \ln|\sec t + \tan t| + C\end{aligned}$$

El último paso, la integración de $\sec t$, fue resuelto en el problema 56 de la sección 7.1. Ahora, $\tan t = x/3$, que sugiere el triángulo en la figura 3, con base en el cual concluimos que $\sec t = \sqrt{9 + x^2}/3$. Así,

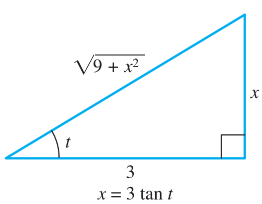

Figura 3

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}} &= \ln\left|\frac{\sqrt{9 + x^2} + x}{3}\right| + C \\ &= \ln\left|\sqrt{9 + x^2} + x\right| - \ln 3 + C \\ &= \ln\left|\sqrt{9 + x^2} + x\right| + K \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

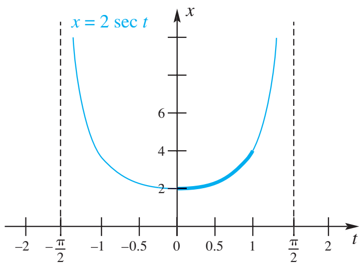

Figura 4

EJEMPLO 6 Calcule $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $x = 2\sec t$, donde $0 \le t < \pi/2$. Observe que es aceptable la restricción de t a este intervalo, ya que x está en el intervalo $2 \le x \le 4$ (véase la figura 4). Eso es importante porque nos permite eliminar el signo de valor absoluto que normalmente aparece cuando simplificamos $\sqrt{x^2-a^2}$. En nuestro caso,

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\sec^2 t - 4} = \sqrt{4\tan^2 t} = 2|\tan t| = 2\tan t$$

Ahora utilizamos el teorema sobre la sustitución en una integral definida (que requiere cambiar los límites de integración) para escribir

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{2\tan t}{2\sec t}\,2\sec t\tan t\,dt\\ &= \int_0^{\pi/3} 2\tan^2 t\,dt = 2\int_0^{\pi/3}(\sec^2 t - 1)\,dt\\ &= 2\big[\tan t - t\big]_0^{\pi/3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \approx 1.37\end{aligned}$$

■

Completando cuadrados Cuando aparece una expresión cuadrática del tipo $x^2 + Bx + C$ bajo un radial, completar el cuadrado la preparará para una sustitución trigonométrica.

EJEMPLO 7 Encuentre (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}}$ y (b) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) $x^2 + 2x + 26 = x^2 + 2x + 1 + 25 = (x+1)^2 + 25$. Sean $u = x + 1$ y $du = dx$. Entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+25}}$$

Ahora, sea $u = 5\tan t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$. Entonces $du = 5\sec^2 t\,dt$ y $\sqrt{u^2+25} = \sqrt{25(\tan^2 t + 1)} = 5\sec t$, así que

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+25}} &= \int \frac{5\sec^2 t\,dt}{5\sec t} = \int \sec t\,dt\\ &= \ln|\sec t + \tan t| + C\\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+25}}{5} + \frac{u}{5}\right| + C \qquad \text{(por la figura 5)}\\ &= \ln\left|\sqrt{u^2+25} + u\right| - \ln 5 + C\\ &= \ln\left|\sqrt{x^2+2x+26} + x + 1\right| + K\end{aligned}$$

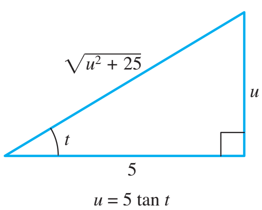

Figura 5

(b) Para calcular la segunda integral escribimos

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx$$

La primera de las integrales de la derecha se resuelve por medio de la sustitución $u = x^2 + 2x + 26$; la segunda es la que recientemente se hizo. Obtenemos

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx = 2\sqrt{x^2+2x+26} - 2\ln\left|\sqrt{x^2+2x+26} + x + 1\right| + K$$

■

Revisión de conceptos

1. Para resolver $\int x\sqrt{x-3}\,dx$, se hace la sustitución $u =$ ______.

2. Para resolver una integral que incluya $\sqrt{4-x^2}$, se hace la sustitución $x =$ ________.

3. Para resolver una integral que incluya $\sqrt{4+x^2}$, se hace la sustitución $x =$ ________.

4. Para resolver una integral que incluya $\sqrt{x^2-4}$, se hace la sustitución $x =$ ________.

Conjunto de problemas 7.4

En los problemas del 1 al 16 evalúe las integrales que se indican.

1. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

2. $\int x\sqrt[3]{x+\pi}\,dx$

3. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{3t+4}}$

4. $\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x+4}}\,dx$

5. $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}+e}$

6. $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,dt$

7. $\int t(3t+2)^{3/2}\,dt$

8. $\int x(1-x)^{2/3}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$

10. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$

11. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}}$

12. $\int_2^3 \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}$

13. $\int_{-2}^{-3} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3}\,dt$

14. $\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

15. $\int \frac{2z-3}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$

16. $\int_0^{\pi} \frac{\pi x-1}{\sqrt{x^2+\pi^2}}\,dx$

En los problemas del 17 al 26 utilice el método de completar el cuadrado, junto con una sustitución trigonométrica, si es necesaria, para evaluar cada integral.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

19. $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$

20. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$

21. $\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}}$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

24. $\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

25. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx$

26. $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+18}\,dx$

27. La región acotada por $y = 1/(x^2+2x+5)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$, se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

28. La región del problema 27 se hace girar alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

29. Encuentre $\int \frac{x\,dx}{x^2+9}$ por medio de

(a) una sustitución algebraica y

(b) una sustitución trigonométrica. Después compare sus respuestas.

30. Encuentre $\int_0^3 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9+x^2}}$ haciendo las sustituciones

$$u = \sqrt{9+x^2},\quad u^2 = 9+x^2,\quad 2u\,du = 2x\,dx$$

31. Encuentre $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$ por medio de

(a) la sustitución $u = \sqrt{4-x^2}$ y

(b) una sustitución trigonométrica. Después compare sus resultados.

Sugerencia: $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$.

32. Dos círculos de radio b se intersecan como se muestra en la figura 6 con sus centros $2a$ unidades separados ($0 \le a \le b$). Encuentre el área de la región en que se traslapan.

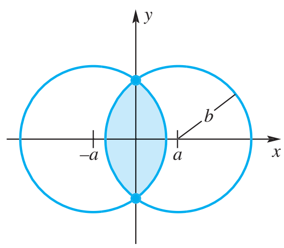

Figura 6

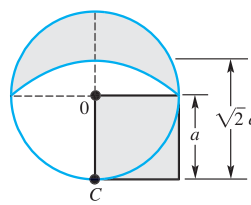

Figura 7

33. Hipócrates de Quios (aproximadamente 430 a. C.) demostró que las dos regiones sombreadas en la figura 7 tienen la misma área (él cuadró la Luna). Obsérvese que C es el centro del arco inferior de la Luna. Demuestre el resultado de Hipócrates.

(a) por medio de cálculo y (b) sin cálculo.

34. Generalice la idea del problema 33 encontrando una fórmula para el área de la región sombreada de la Luna que se muestra en la figura 8.

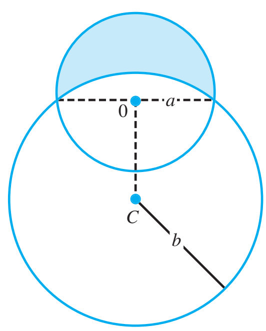

Figura 8

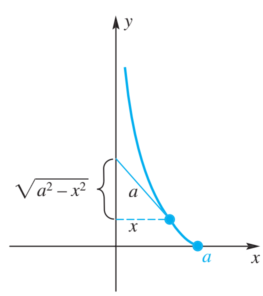

Figura 9

35. Comenzando en $(a, 0)$ se jala un objeto por medio de una cuerda de longitud a, con el extremo que se jala moviéndose a lo largo de la parte positiva del eje y (véase la figura 9). La trayectoria del objeto es una curva denominada **tractriz** y tiene la propiedad de que la cuerda siempre es tangente a la curva. Establezca una ecuación diferencial para la curva y resuélvala.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\sqrt{x-3}$ **2.** $2 \operatorname{sen} t$ **3.** $2 \tan t$ **4.** $2 \sec t$

7.5 Integración de funciones racionales por medio de fracciones parciales

Una **función racional**, por definición, es el cociente de dos funciones polinómicas. Ejemplos son

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, \qquad g(x) = \frac{2x+2}{x^2-4x+8}, \qquad h(x) = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}$$

De éstas, f y g son **funciones racionales propias**, lo cual quiere decir que el grado del numerador es menor que el del denominador. Una función racional impropia (no propia) siempre puede escribirse como una suma de una función polinomial y una función racional propia. Así, por ejemplo,

$$h(x) = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x} = x^2 - 3 + \frac{14x+1}{x^3+5x}$$

un resultado obtenido por medio de división larga (véase la figura 1). Los polinomios son fáciles de integrar, el problema de integrar funciones racionales realmente es la de integrar funciones racionales propias. Pero, ¿siempre podemos integrar funciones racionales propias? En teoría, la respuesta es sí, aunque los detalles prácticos pueden llegar a abrumarnos. Primero considere las integrales de las f y g anteriores.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 3 \\ \hline
x^3+5x & x^5 + 2x^3 - x + 1 \\
 & \underline{x^5 + 5x^3} \\
 & -3x^3 - x \\
 & \underline{-3x^3 - 15x} \\
 & 14x + 1
\end{array}$$

Figura 1

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\int \frac{2}{(x+1)^3}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere la sustitución $u = x + 1$.

$$\int \frac{2}{(x+1)^3}\,dx = 2\int (x+1)^{-3}\,dx = \frac{2(x+1)^{-2}}{-2} + C$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} + C$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre $\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx$.

SOLUCIÓN Primero considere la sustitución $u = x^2 - 4x + 8$ para la cual $du = (2x - 4)\,dx$. Entonces escriba la integral dada como una suma de dos integrales.

$$\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx + \int \frac{6}{x^2-4x+8}\,dx$$

$$= \ln|x^2-4x+8| + 6\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

En la segunda integral, complete el cuadrado.

$$\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{1}{x^2-4x+4+4}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+4}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-2)^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

Concluimos que

$$\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx = \ln|x^2-4x+8| + 3\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + K$$

■

Un hecho destacado es que cualquier función racional propia puede escribirse como una suma de funciones racionales propias *simples,* como las que se ilustran en los ejemplos 1 y 2. Debemos ser más precisos.

Descomposición en fracciones parciales (factores lineales) Sumar fracciones es un ejercicio algebraico sencillo: encuentre un común denominador y sume. Por ejemplo,

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2(x+1)+3(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{5x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{5x-1}{x^2-1}$$

El proceso inverso de descomponer una fracción en una suma de fracciones más simples es el que ahora nos interesa. Centramos nuestra atención en el denominador y consideramos casos.

EJEMPLO 3 **Factores lineales simples** Descomponga $(3x-1)/(x^2-x-6)$ y luego encuentre su integral indefinida.

SOLUCIÓN Ya que el denominador se factoriza como $(x+2)(x-3)$, parece razonable esperar una descomposición de la forma siguiente:

(1) $$\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}$$

Por supuesto, nuestro trabajo es determinar A y B de modo que (1) sea una identidad, una tarea que encontramos más fácil después de que hemos multiplicado ambos lados por $(x+2)(x-3)$. Obtenemos

(2) $$3x-1=A(x-3)+B(x+2)$$

o de manera equivalente,

(3) $$3x-1=(A+B)x+(-3A+2B)$$

Sin embargo, (3) es una identidad si y sólo si los coeficientes de potencias iguales de x en ambos lados son iguales; esto es,

$$\begin{aligned}A+B&=3\\-3A+2B&=-1\end{aligned}$$

Al resolver este par de ecuaciones para A y B, obtenemos $A=\frac{7}{5}$, $B=\frac{8}{5}$. En consecuencia,

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6}=\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{\frac{7}{5}}{x+2}+\frac{\frac{8}{5}}{x-3}$$

y

$$\begin{aligned}\int\frac{3x-1}{x^2-x-6}\,dx&=\frac{7}{5}\int\frac{1}{x+2}\,dx+\frac{8}{5}\int\frac{1}{x-3}\,dx\\&=\frac{7}{5}\ln|x+2|+\frac{8}{5}\ln|x-3|+C\end{aligned}$$ ■

Si hubo alguna dificultad en este proceso, fue la determinación de A y B. Encontramos sus valores usando la "fuerza bruta", pero existe una manera más sencilla. En (2), la cual queremos que sea una identidad (es decir, verdadera para *todos* los valores de x), sustituya los valores convenientes de $x=3$ y $x=-2$, obteniendo

$$\begin{aligned}8&=A\cdot 0+B\cdot 5\\-7&=A\cdot(-5)+B\cdot 0\end{aligned}$$

De inmediato esto da $B=\frac{8}{5}$ y $A=\frac{7}{5}$.

Acabamos de ser testigos de una extraña pero correcta maniobra matemática. La ecuación (1) se vuelve una identidad (cierta para toda x, excepto –2 y 3) si y sólo si la esencialmente equivalente ecuación (2) es cierta en –2 y 3. Pregúntese por qué esto

Resuelva esta ecuación diferencial

"Con frecuencia, hay poco parecido entre una ecuación diferencial y su solución. Quién supondría que una ecuación tan sencilla como

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a^2-x^2}$$

podría transformarse en

$$y=\frac{1}{2a}\log_e\left(\frac{a+x}{a-x}\right)+C$$

Esto parece la transformación de una crisálida en una mariposa".

Silvanus P. Thompson

El método de fracciones parciales hace de esto una transformación sencilla. ¿Ve cómo se hizo?

es así. En última instancia, depende del hecho de que dos lados de la ecuación (2), ambos polinomios lineales, son idénticos si tienen los mismos valores en cualesquiera dos puntos.

EJEMPLO 4 **Factores lineales distintos** Encuentre $\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx$.

SOLUCIÓN Ya que el denominador se factoriza como $x(x+1)(x-3)$, escribimos

$$\frac{5x+3}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

y buscamos determinar A, B y C. La eliminación de las fracciones produce

$$5x+3 = A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)$$

Al sustituir los valores $x=0$, $x=-1$ y $x=3$ se obtiene

$$\begin{aligned} 3 &= A(-3) \\ -2 &= B(4) \\ 18 &= C(12) \end{aligned}$$

o $A=-1$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{3}{2}$. Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx &= -\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-3}\,dx \\ &= -\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-3| + C \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 **Factores lineales repetidos** Encuentre $\int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Ahora la descomposición toma la forma

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

con A y B por determinar. Después de quitar fracciones, obtenemos

$$x = A(x-3) + B$$

Si ahora sustituimos el valor conveniente $x=3$ y cualquier otro valor, tal como $x=0$, obtenemos $B=3$ y $A=1$. Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx &= \int \frac{1}{x-3}\,dx + 3\int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx \\ &= \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + C \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 **Factores lineales, algunos distintos y otros repetidos** Encuentre

$$\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}\,dx$$

SOLUCIÓN Descomponemos el integrando de la siguiente manera:

$$\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Quitando las fracciones esto cambia a

$$3x^2-8x+13 = A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3)$$

Al sustituir $x = 1, x = -3$ y $x = 0$ se obtiene $C = 2, A = 4$ y $B = -1$. Por lo tanto,

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x + 3)(x - 1)^2}\, dx = 4\int \frac{dx}{x + 3} - \int \frac{dx}{x - 1} + 2\int \frac{dx}{(x - 1)^2}$$

$$= 4 \ln|x + 3| - \ln|x - 1| - \frac{2}{x - 1} + C \qquad \blacksquare$$

Asegúrese de observar la inclusión, en la descomposición anterior, de las dos fracciones $B/(x - 1)$ y $C/(x - 1)^2$. La regla general para descomponer fracciones con factores lineales repetidos en el denominador es ésta: por cada factor $(ax + b)^k$ en el denominador, existen k términos en la descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \frac{A_3}{(ax + b)^3} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$

Descomposición en fracciones parciales (factores cuadráticos) Al factorizar el denominador de una fracción, bien podríamos obtener algunos factores cuadráticos (tal como $x^2 + 1$), que no pueden factorizarse en factores lineales sin introducir números complejos.

EJEMPLO 7 **Un solo factor cuadrático** Descomponga $\dfrac{6x^2 - 3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)}$ y después encuentre su integral indefinida.

SOLUCIÓN Lo mejor que podemos desear es una descomposición de la forma

$$\frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{4x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Para determinar las constantes A, B y C multiplicamos ambos miembros por $(4x + 1)(x^2 + 1)$ y obtenemos

$$6x^2 - 3x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(4x + 1)$$

Al sustituir $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$ y $x = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \tfrac{6}{16} + \tfrac{3}{4} + 1 &= A\left(\tfrac{17}{16}\right) &\Rightarrow\quad A &= 2 \\ 1 &= 2 + C &\Rightarrow\quad C &= -1 \\ 4 &= 4 + (B - 1)5 &\Rightarrow\quad B &= 1 \end{aligned}$$

Así,

$$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)}\, dx = \int \frac{2}{4x + 1}\, dx + \int \frac{x - 1}{x^2 + 1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{4\, dx}{4x + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|4x + 1| + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \tan^{-1} x + C \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 8 **Un factor cuadrático repetido** Encuentre $\displaystyle\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x + 3)(x^2 + 2)^2} dx$.

SOLUCIÓN En este caso, la descomposición apropiada es

$$\frac{6x^2 - 15x + 22}{(x + 3)(x^2 + 2)^2} = \frac{A}{x + 3} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2)^2}$$

Después de un considerable trabajo, descubrimos que $A = 1$, $B = -1$, $C = 3$ y $D = -5$ y $E = 0$. Así,

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2}\,dx$$
$$= \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{x-3}{x^2+2}\,dx - 5\int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx$$
$$= \int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + 3\int \frac{dx}{x^2+2} - \frac{5}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+2)^2}$$
$$= \ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{5}{2(x^2+2)} + C \quad \blacksquare$$

Resumen Para descomponer una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ en fracciones parciales, procedemos como sigue:

Paso 1: Si $f(x)$ es impropia, esto es, si $p(x)$ es de un grado mayor o igual al de $q(x)$, divida $p(x)$ entre $q(x)$, para obtener

$$f(x) = \text{un polinomio} + \frac{N(x)}{D(x)}$$

Paso 2: Factorice $D(x)$ en un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales. Por un teorema de álgebra, esto siempre es posible (teóricamente).

Paso 3: Por cada factor de la forma $(ax + b)^k$, se espera que la descomposición tenga los términos

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

Paso 4: Por cada factor de la forma $(ax^2 + bx + c)^m$, se espera que la descomposición tenga los términos

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_mx + C_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

Paso 5: Iguale $N(x)/D(x)$ a la suma de todos los términos determinados en los pasos 3 y 4. El número de constantes por determinarse debe ser igual al grado del denominador, $D(x)$.

Paso 6: Multiplique ambos miembros de la ecuación encontrada en el paso 5 por $D(x)$ y despeje las constantes desconocidas. Esto puede hacerse por dos métodos: (1) Iguale coeficientes de términos del mismo grado, o (2) asigne valores convenientes a la variable x.

Ecuación diferencial logística En el último capítulo vimos que la hipótesis de que la tasa de crecimiento de una población es proporcional a su tamaño, es decir, $y' = ky$, conduce al crecimiento exponencial. Esta hipótesis puede ser realista hasta que los recursos disponibles en el sistema son insuficientes para sostener a la población. En tal caso, suposiciones más razonables son que existe una capacidad máxima, L, que el sistema puede sostener, y que la tasa de crecimiento es proporcional al producto del tamaño de la población y y el "espacio disponible" $L - y$. Estas hipótesis conducen a la ecuación diferencial

$$y' = ky(L - y)$$

Ésta se denomina **ecuación diferencial logística**. Es separable y ahora que hemos estudiado el método de fracciones parciales, podemos realizar la integración necesaria para resolverla.

> **Una cota para la respuesta**
>
> El tamaño de la población inicial es de 800 y la tasa de cambio en el tamaño de la población, y', es positiva, así que la población crece. Cuando es cercana a 2000, la tasa de cambio se aproxima a cero, así que cuando $t \to \infty$, tenemos que $y \to 2000$. La población en el instante $t = 2$ debe estar entre 800 y 2000.

EJEMPLO 9 Una población crece de acuerdo con la ecuación diferencial logística $y' = 0.0003y(2000 - y)$. El tamaño de la población inicial es de 800. Resuelva esta ecuación diferencial para predecir el tamaño de la población en el instante $t = 2$.

SOLUCIÓN Al escribir y' como dy/dt, vemos que la ecuación diferencial puede escribirse como

$$\frac{dy}{dt} = 0.0003y(2000 - y)$$

$$\frac{dy}{y(2000 - y)} = 0.0003\,dt$$

$$\int \frac{dy}{y(2000 - y)} = \int 0.0003\,dt$$

La integral del lado izquierdo puede evaluarse mediante el método de fracciones parciales. Escribimos

$$\frac{1}{y(2000 - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{2000 - y}$$

que lleva a

$$1 = A(2000 - y) + By$$

Al sustituir $y = 0$ y $y = 2000$ se obtiene

$$1 = 2000A$$

$$1 = 2000B$$

Así, $A = \frac{1}{2000}$ y $B = \frac{1}{2000}$, lleva a

$$\int \left(\frac{1}{2000y} + \frac{1}{2000(2000 - y)} \right) dy = 0.0003t + C$$

$$\frac{1}{2000}\ln y - \frac{1}{2000}\ln(2000 - y) = 0.0003t + C$$

$$\ln \frac{y}{2000 - y} = 0.6t + 2000C$$

$$\frac{y}{2000 - y} = e^{0.6t + 2000C}$$

$$\frac{y}{2000 - y} = C_1 e^{0.6t}$$

Aquí, $C_1 = e^{2000C}$. En este punto podemos utilizar la condición inicial $y(0) = 800$ para determinar C_1.

$$\frac{800}{2000 - 800} = C_1 e^{0.6 \cdot 0}$$

$$C_1 = \frac{800}{1200} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto,

$$\frac{y}{2000 - y} = \frac{2}{3}e^{0.6t}$$

$$y = \frac{2}{3}(2000 - y)e^{0.6t}$$

$$y + \frac{2}{3}ye^{0.6t} = \frac{4000}{3}e^{0.6t}$$

$$y = \frac{(4000/3)e^{0.6t}}{1 + (2/3)e^{0.6t}} = \frac{4000/3}{2/3 + e^{-0.6t}}$$

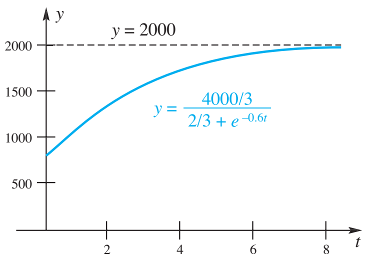

Figura 2

Así que la población en el instante $t = 2$ es

$$y = \frac{4000/3}{2/3 + e^{-0.6 \cdot 2}} \approx 1378$$

En la figura 2 se muestra un bosquejo del tamaño de la población. ■

Revisión de conceptos

1. Si el grado del polinomio $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$, entonces $f(x) = p(x)/q(x)$ se denomina función racional _______.

2. Para integrar la función racional impropia $f(x) = (x^2 + 4)/(x + 1)$, primero la reescribimos como $f(x) =$ _______.

3. Si $(x - 1)(x + 1) + 3x + x^2 = ax^2 + bx + c$, entonces $a =$ ______, $b =$ _______ y $c =$ _______.

4. $(3x + 1)/[(x - 1)^2(x^2 + 1)]$ puede descomponerse en la forma _______.

Conjunto de problemas 7.5

En los problemas del 1 al 40 utilice el método de la descomposición en fracciones parciales para realizar la integración que se pide.

1. $\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

2. $\int \frac{2}{x^2 + 3x}\,dx$

3. $\int \frac{3}{x^2 - 1}\,dx$

4. $\int \frac{5x}{2x^3 + 6x^2}\,dx$

5. $\int \frac{x - 11}{x^2 + 3x - 4}\,dx$

6. $\int \frac{x - 7}{x^2 - x - 12}\,dx$

7. $\int \frac{3x - 13}{x^2 + 3x - 10}\,dx$

8. $\int \frac{x + \pi}{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2}\,dx$

9. $\int \frac{2x + 21}{2x^2 + 9x - 5}\,dx$

10. $\int \frac{2x^2 - x - 20}{x^2 + x - 6}\,dx$

11. $\int \frac{17x - 3}{3x^2 + x - 2}\,dx$

12. $\int \frac{5 - x}{x^2 - x(\pi + 4) + 4\pi}\,dx$

13. $\int \frac{2x^2 + x - 4}{x^3 - x^2 - 2x}\,dx$

14. $\int \frac{7x^2 + 2x - 3}{(2x - 1)(3x + 2)(x - 3)}\,dx$

15. $\int \frac{6x^2 + 22x - 23}{(2x - 1)(x^2 + x - 6)}\,dx$

16. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{4x^3 - 28x^2 + 56x - 32}\,dx$

17. $\int \frac{x^3}{x^2 + x - 2}\,dx$

18. $\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 5x + 6}\,dx$

19. $\int \frac{x^4 + 8x^2 + 8}{x^3 - 4x}\,dx$

20. $\int \frac{x^6 + 4x^3 + 4}{x^3 - 4x^2}\,dx$

21. $\int \frac{x + 1}{(x - 3)^2}\,dx$

22. $\int \frac{5x + 7}{x^2 + 4x + 4}\,dx$

23. $\int \frac{3x + 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}\,dx$

24. $\int \frac{x^6}{(x - 2)^2(1 - x)^5}\,dx$

25. $\int \frac{3x^2 - 21x + 32}{x^3 - 8x^2 + 16x}\,dx$

26. $\int \frac{x^2 + 19x + 10}{2x^4 + 5x^3}\,dx$

27. $\int \frac{2x^2 + x - 8}{x^3 + 4x}\,dx$

28. $\int \frac{3x + 2}{x(x + 2)^2 + 16x}\,dx$

29. $\int \frac{2x^2 - 3x - 36}{(2x - 1)(x^2 + 9)}\,dx$

30. $\int \frac{1}{x^4 - 16}\,dx$

31. $\int \frac{1}{(x - 1)^2(x + 4)^2}\,dx$

32. $\int \frac{x^3 - 8x^2 - 1}{(x + 3)(x^2 - 4x + 5)}\,dx$

33. $\int \frac{(\operatorname{sen}^3 t - 8\operatorname{sen}^2 t - 1)\cos t}{(\operatorname{sen} t + 3)(\operatorname{sen}^2 t - 4\operatorname{sen} t + 5)}\,dt$

34. $\int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^4 t - 16}\,dt$

35. $\int \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

36. $\int \frac{(\operatorname{sen} t)(4\cos^2 t - 1)}{(\cos t)(1 + 2\cos^2 t + \cos^4 t)}\,dt$

37. $\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 16x}{x^5 + 8x^3 + 16x}\,dx$

38. $\int_4^6 \frac{x - 17}{x^2 + x - 12}\,dx$

39. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\theta}{(1 - \operatorname{sen}^2\theta)(\operatorname{sen}^2\theta + 1)^2}\,d\theta$

40. $\int_1^5 \frac{3x + 13}{x^2 + 4x + 3}\,dx$