CAPÍTULO 5

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Reseña HISTÓRICA

L'Hôpital escribió el primer libro de cálculo en 1696, en el cual eran obvias las influencias de sus profesores Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli y Leibniz.

L'Hôpital sirvió como oficial de caballería, pero tuvo que retirarse a causa de ser corto de vista. Desde ese tiempo dirigió su atención hacia las matemáticas. L'Hôpital aprendió cálculo de su maestro Johann Bernoulli en 1691.

L'Hôpital era un excelente matemático, en 1692 su fama está basada en su libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*.

En este libro publicó la regla que ahora se conoce como regla de L'Hôpital, para encontrar el límite de una función racional cuyo numerador y denominador tienden a cero.

Guillaume François Antoine marqués de L`Hôpital
(1661-1704)

Rectas tangente y normal a una curva

Analicemos primero algunas definiciones:

Tangente

Recta que toca a una curva en un punto.

Normal

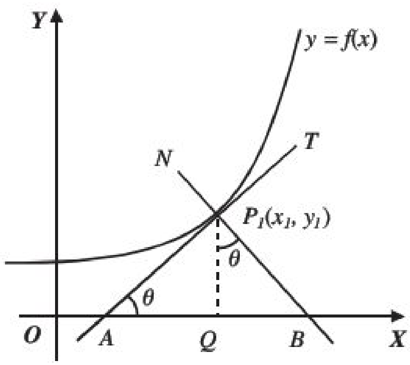
Recta perpendicular a la recta tangente en el punto de tangencia.
T: recta tangente
N: recta normal

$\overline{AP_1}$: longitud de la tangente

$\overline{P_1B}$: longitud de la normal

$\overline{AQ}$: longitud de la subtangente

$\overline{QB}$: longitud de la subnormal



- ***Longitud de la subtangente***. En el triángulo AQP_1 la $\tan\theta = \dfrac{\overline{P_1Q}}{\overline{AQ}}$, pero $\overline{P_1Q} = y_1$ y $\tan\theta = m = \dfrac{dy}{dx}$, al despejar $\overline{AQ}$ se obtiene, $\overline{AQ} = \dfrac{\overline{P_1Q}}{\tan\theta}$, por consiguiente:

$$\overline{AQ} = \frac{y_1}{\frac{dy}{dx}}$$

- ***Longitud de la subnormal***. En el triángulo BQP_1 la $\tan\theta = \dfrac{\overline{QB}}{\overline{QP_1}}$, pero $\overline{QP_1} = y_1$ y $\tan\theta = m = \dfrac{dy}{dx}$, por tanto, al despejar $\overline{QB}$ se obtiene, $\overline{QB} = \overline{QP_1} \cdot \tan\theta$, por consiguiente:

$$\overline{QB} = y_1 \frac{dy}{dx}$$

- ***Longitud de la tangente***. Es la distancia que existe entre el punto de tangencia y la intersección de la recta tangente con el eje X.
  En el triángulo AQP_1 por el teorema de Pitágoras:

$$(\overline{AP_1})^2 = (\overline{AQ})^2 + (\overline{QP_1})^2$$

Pero, $\overline{AQ} = \dfrac{y_1}{\frac{dy}{dx}}$ y $\overline{QP_1} = y_1$, por consiguiente:

$$\overline{AP_1}^2 = \left(\frac{y_1}{\frac{dy}{dx}}\right)^2 + (y_1)^2 = \frac{(y_1)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + (y_1)^2 = \frac{(y_1)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

Al despejar $\overline{AP_1}$ se obtiene, $\overline{AP_1} = \dfrac{y_1}{\frac{dy}{dx}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, por tanto,

$$\overline{AP_1} = \frac{y_1}{y'}\sqrt{1+y'^2}$$

- ***Longitud de la normal.*** Es la distancia que existe entre el punto de tangencia y la intersección de la recta normal con el eje X.
  En el triángulo BQP_1 por el teorema de Pitágoras:

$$(\overline{BP_1})^2 = (\overline{BQ})^2 + (\overline{QP_1})^2$$

Pero $\overline{BQ} = y_1 \cdot \dfrac{dy}{dx}$ y $\overline{QP_1} = y_1$

$$(\overline{BP_1})^2 = \left(y_1 \cdot \frac{dy}{dx}\right)^2 + (y_1)^2 = (y_1)^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

Al despejar $\overline{BP_1}$, se obtiene, $\overline{BP_1} = y_1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, por consiguiente:

$$\overline{BP_1} = y_1\sqrt{1+y'^2}$$

Ecuación de la recta tangente

La ecuación de la recta tangente a una curva en el punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente $m = \dfrac{dy}{dx}$ está dada por:

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$$

Ecuación de la recta normal

La ecuación de la recta normal a una curva en el punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente $m = -\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ está determinada por:

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2 + xy + y = x - 4$ en el punto $(1, -2)$?

Solución

Se derivan ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{d(x^2+xy+y)}{dx}=\frac{d(x-4)}{dx} \quad \rightarrow \quad 2x+\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+\frac{dy}{dx}=1 \quad \rightarrow \quad 2x+x\frac{dy}{dx}+y+\frac{dy}{dx}=1$$

Se despeja $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x-y}{1+x}\text{, por definición } m_T=\frac{1-2x-y}{1+x}$$

Al sustituir las coordenadas del punto de tangencia en la pendiente, se obtiene:

$$m=\frac{1-2(1)-(-2)}{1+1}=\frac{1}{2}$$

2 Determina la pendiente de la recta tangente a la curva $\delta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, en el punto $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$

Solución

Al derivar la ecuación de la curva:

$$\frac{d\delta}{d\theta}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{d\theta}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(-1)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

se obtiene que: $m_T=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

Se sustituye el punto en la pendiente:

$$m=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3 Encuentra la longitud de la subtangente, la subnormal, la tangente y la normal a la curva $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ en el punto $P(1, 1)$.

Solución

Se deriva la función y se evalúa en el punto para encontrar la pendiente de la recta tangente en ese punto.

$$f'(x) = -2x + 6$$

Si $x = 1$, entonces,

$$f'(1) = -2(1) + 6 = -2 + 6 = 4$$

Por tanto,

$$\text{subtangente: } \frac{y_1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{4} \qquad \text{subnormal: } y_1\frac{dy}{dx} = (1)(4) = 4$$

$$\text{tangente: } \frac{y_1}{\frac{dy}{dx}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{17} \qquad \text{normal: } y_1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{17}$$

4 Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva $xy + y - 1 = 0$ en el punto $\left(3, \frac{1}{4}\right)$

Solución

Al derivar la función se obtiene $y' = -\frac{y}{x+1}$, por definición $m_T = -\frac{y}{x+1}$

Se evalúa en el punto $\left(3, \frac{1}{4}\right)$, $m_T = -\frac{\frac{1}{4}}{3+1} = -\frac{1}{16}$

Ecuación de la tangente:

Se obtiene con $P\left(3, \frac{1}{4}\right)$ y $m_T = -\frac{1}{16}$, se sustituye en $y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{16}(x-3) \;\rightarrow\; 16y - 4 = -x + 3 \;\rightarrow\; x + 16y - 7 = 0$$

Ecuación de la normal:

Se obtiene con $P\left(3, \frac{1}{4}\right)$ y $m_N = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = 16$, se sustituye en $y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{4} = 16(x-3) \;\rightarrow\; 4y - 1 = 64x - 192 \;\rightarrow\; 64x - 4y - 191 = 0$$

Las ecuaciones de las rectas tangente y normal son: $x + 16y - 7 = 0$ y $64x - 4y - 191 = 0$

EJERCICIO 38

Calcula la longitud de la subtangente, la subnormal, la tangente y la normal de las curvas dadas en el punto indicado.

1. $f(x) = -x + 2$ en $x = 3$
2. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ en $x = -2$
3. $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto $(-1, 12)$
4. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ en el punto $(2, 7)$
5. $y = \frac{x+1}{x-1}$ en el punto $(2, 3)$
6. $f(x) = \sqrt{-x}$ en el punto $(-9, 3)$
7. $f(x) = \sqrt{x+3}$ en el punto $(1, 2)$
8. $y = \frac{1}{x}$ en $x = 2$

9. $f(x) = x^2 - 4x$ en $x = 3$

10. $x^2y - y - 2 = 0$ en el punto $\left(2, \frac{2}{3}\right)$

Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva en el punto indicado:

11. $y = x^2 + 5$ en el punto $(-2, 9)$

12. $y = x^2 - x + 1$ en el punto $(0, 1)$

13. $y = 4x^2 - 4x + 1$ en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

14. $y = x^3 - x^2$ en el punto $(2, 4)$

15. $y = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x - 9$ en el punto $(-1, -4)$

16. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ en el punto $\left(\sqrt{5}, 2\right)$

17. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ en el punto $(3, 2)$

18. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ en el punto $(0, 2)$

19. $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

20. $y = \cos x$ en el punto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$

21. $y = \tan x + 2$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$

22. $x^2 - y^2 - 12 = 0$ en el punto $(4, 2)$

23. $xy = 1$ en el punto $(1, 1)$

24. $x^3 + 2xy - 4 = 0$ en el punto de abscisa $x = 1$

25. $x^2y^2 - 4y + 1 = 0$ en el punto de abscisa $x = 2$

26. $\sqrt{x + y} = x + 1$ en el punto de abscisa $x = 3$

27. $f(x) = \ln x$ en el punto de abscisa $x = e$

28. $xy + x - 2 = 0$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$

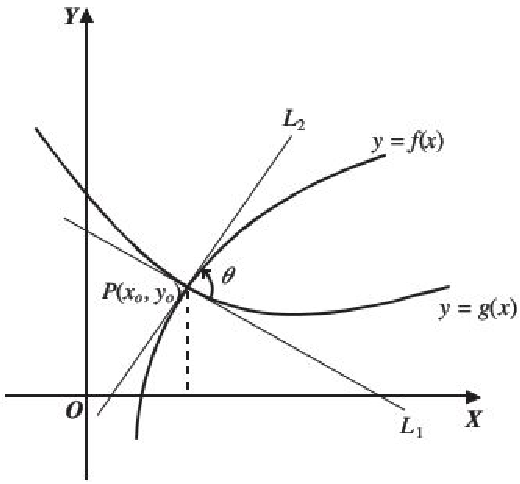
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ángulo entre dos curvas

Sea $P(x_o, y_o)$ el punto de intersección entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$, entonces el ángulo θ entre las curvas se obtiene con:

$$\tan\theta = \frac{f'(x_o) - g'(x_o)}{1 + f'(x_o)\cdot g'(x_o)}$$

Donde $f'(x_o)$ es la pendiente de la recta L_2 y $g'(x_o)$ es la pendiente de la recta L_1



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el ángulo agudo formado por las curvas $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x^2$ en el punto de intersección, cuya abscisa es $x = \sqrt{2}$

Solución

Se obtienen las derivadas de las funciones:

$$f(x) = 4 - x^2 \qquad g(x) = x^2$$
$$f'(x) = -2x \qquad g'(x) = 2x$$

Se evalúa la abscisa $x = \sqrt{2}$ en las pendientes (derivadas)

$$f'(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \qquad g'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

Se aplica la fórmula, entonces;

$$\tan\theta = \frac{f'\left(\sqrt{2}\right) - g'\left(\sqrt{2}\right)}{1 + f'\left(\sqrt{2}\right)g'\left(\sqrt{2}\right)} = \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{1 + \left(-2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}\right)} = -\frac{4\sqrt{2}}{1-8} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Al despejar θ

$$\theta = \arctan\left(\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$$

Por tanto:

$$\theta = 38°\,56'\,32''$$

2 ¿Cuál es la medida de los ángulos formados por las curvas $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 - y^2 + 6x + 8 = 0$ en los puntos $\left(-1, \sqrt{3}\right)$, $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$?

Solución

Paso I:
Se obtienen las pendientes de las curvas al derivar las ecuaciones y evaluar los puntos dados:

De la curva $x^2 + y^2 = 4$, $y' = -\dfrac{x}{y}$ y de la curva $x^2 - y^2 + 6x + 8 = 0$, $y' = \dfrac{x+3}{y}$

En el punto $\left(-1, \sqrt{3}\right)$, las pendientes son: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ respectivamente.

En el punto $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$, las pendientes son: $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ respectivamente.

Paso II:
Se obtiene el ángulo al sustituir el valor de las pendientes en la fórmula.

Para el punto $\left(-1, \sqrt{3}\right)$:

$$\tan\theta = \frac{\dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \dfrac{2}{3}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\dfrac{5}{3}} = \frac{3}{5\sqrt{3}}$$

Por consiguiente: $\theta = 19° \, 6'$

Para el punto $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$

$$\tan\theta = \frac{-\dfrac{2}{\sqrt{3}} - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \dfrac{2}{3}} = \frac{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\dfrac{5}{3}} = -\frac{3}{5\sqrt{3}}$$

Finalmente: $\theta = 160° \, 54'$

3 Encuentra la medida del ángulo agudo formado por las curvas $x^2 + y^2 - 8 = 0$ y $y^2 - 2x = 0$

Solución

Se obtienen las intersecciones de las curvas mediante un sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 8 = 0;\ y^2 = 2x \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(x + 4)(x - 2) = 0$$
$$x = -4,\ x = 2$$

Luego, si $x = 2$ entonces $y = \pm 2$ que resultan en los puntos $(2, 2)$ y $(2, -2)$
Se obtienen las derivadas de cada una de las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 8 = 0 \qquad\qquad y^2 - 2x = 0$$
$$2x + 2yy' = 0 \qquad\qquad 2yy' - 2 = 0$$
$$y' = -\frac{x}{y} \qquad\qquad y' = \frac{1}{y}$$

Se realiza la evaluación en los puntos (2, 2) y (2, −2)

Para el punto (2, 2) $\rightarrow$ $y_1' = -\frac{2}{2} = -1; y_2' = \frac{1}{2}$

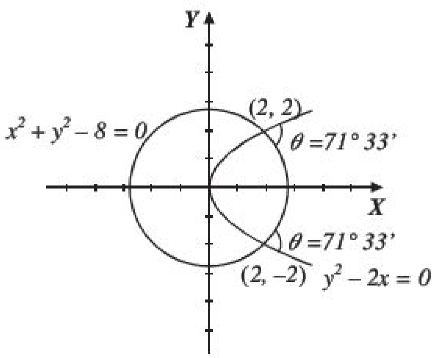
Luego:

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}-(-1)}{1+\frac{1}{2}(-1)} = \frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3; \text{ donde } \theta = \text{arc tan}(3) = 71°\,33'$$

Para el punto (2, −2) $\rightarrow$ $y_2' = -\frac{2}{-2} = 1; y_1' = -\frac{1}{2}$

Luego,

$$\tan\theta = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+(1)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3; \text{ donde } \theta = \text{arc tan}(3) = 71°\,33'$$



EJERCICIO 39

Determina la medida del ángulo agudo y obtuso que forman las curvas dadas en el punto indicado:

1. $y = x^2 + 1$; $y = \sqrt{x+1}$ en el punto $(0, 1)$
2. $y = \frac{4}{9}x^2$; $y = \sqrt{25 - x^2}$ en el punto $(3, 4)$
3. $y = \sqrt{13 - x^2}$; $y = \sqrt{18 - (x+5)^2}$ en el punto $(-2, 3)$
4. $x^2 - y^2 - 2 = 0$; $y^2 - x = 0$ en el punto $\left(2, \sqrt{2}\right)$
5. $3x^2 + 5y = 0$; $2x + 5y + 1 = 0$ en el punto $\left(1, -\frac{3}{5}\right)$
6. $xy = 1$; $y = \frac{x-1}{x}$ en el punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$
7. $x^2 + y^2 - 5 = 0$; $y^2 - 4x = 0$ en el punto de abscisa 1
8. Determina la medida del ángulo obtuso que forma $x^2 + 3y^2 - 13 = 0$ y $y^2 - 4x = 0$

Calcula la medida del ángulo agudo que forman las curvas dadas:

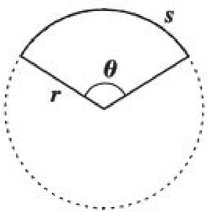
9. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$; $4y^2 - 9x = 0$
10. $xy - x - 2 = 0$; $xy - 1 = 0$
11. $x = \sqrt{2y}$; $y = 2(x+2)^2$
12. $y = x^2 + x$; $y = -x^2 + 5x$
13. $y^2 = x + 1$; $y^2 + 2x - 4 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Curvatura

Radio de curvatura

En geometría plana la longitud de un segmento circular está dada por la fórmula: $s = r \cdot \theta \quad \rightarrow \quad r = \dfrac{s}{\theta}$



En la figura se observa que s cambia cuando θ cambia.

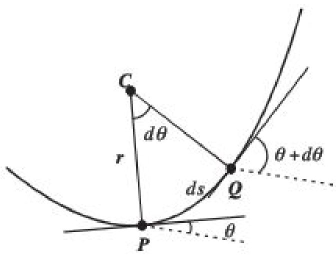
En una curva cualquiera, al tomar un segmento muy pequeño formado por dos puntos de la curva y al relacionar la fórmula anterior se tiene que:

De la fórmula anterior se define Δr como:

$$\Delta r = \frac{\Delta s}{\Delta \theta}$$

Luego, si la longitud Δs es cada vez más pequeña, es decir, tiende a cero, el *radio de curvatura* se define como el siguiente límite:

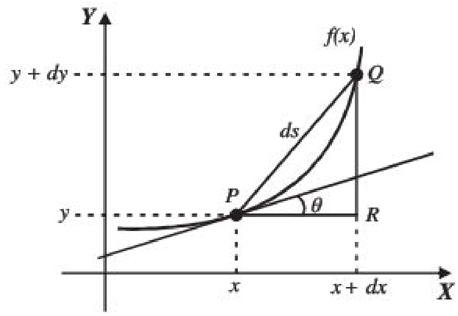
$$r = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta \theta} = \frac{ds}{d\theta} \quad \rightarrow \quad r = \frac{ds}{d\theta}$$



En la figura se tienen dos puntos, P y Q, de la curva, muy próximos entre sí, en cada punto se traza una recta tangente y su normal. Al punto de intersección entre las normales se le llama *centro de curvatura* y a la distancia del centro a cualquiera de los puntos P y Q se le llama *radio de curvatura*.

La expresión $\frac{1}{r}=\frac{d\theta}{ds}$ recibe el nombre de *curvatura*.

Para determinar la fórmula que permita calcular el radio de curvatura se tiene la siguiente figura.



En la función $f(x)$ se tienen los puntos P y Q infinitamente muy próximos, de manera que la longitud del segmento circular ds sea igual a la longitud del segmento PQ; entonces, de la representación geométrica de la derivada se tiene que:

$$\frac{dy}{dx}=\tan\theta \;\rightarrow\; \theta=\text{arc }\tan\frac{dy}{dx}$$

Del triángulo PQR y el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{\left[1+\frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right](dx)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx$$

Luego,

$$ds=r\cdot d\theta \;\rightarrow\; r=\frac{ds}{d\theta}$$

$$r=\frac{ds}{d\theta}\;\rightarrow\; r=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx}{d\text{ arc }\tan\frac{dy}{dx}}\;\rightarrow\; r=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx}{\dfrac{\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\;\rightarrow\; r=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

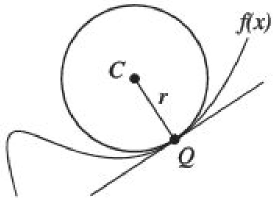
Finalmente, la fórmula para determinar el radio de curvatura es:

$$r=\frac{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}\quad\text{o}\quad r=\frac{\sqrt{\left[1+(y')^2\right]^3}}{|y''|}$$

La longitud del radio de curvatura es una cantidad positiva.

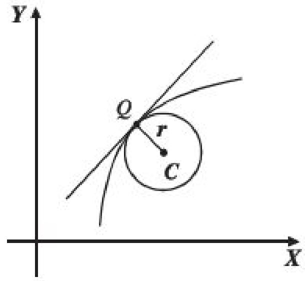
Círculo de curvatura

Es una curva dada en un punto de tangencia a la circunferencia, que tiene de centro el centro de curvatura y de radio el radio de curvatura y que pasa por un punto de tangencia, también se le conoce como circunferencia osculatriz o círculo osculador.



Centro de curvatura

Para determinar la fórmula que permita calcular el centro de curvatura se tiene la siguiente figura.



Donde:

$C(\alpha, \beta)$: centro de curvatura

$Q(x, y)$: punto de la curva

r: radio de curvatura

Se obtiene la ecuación de la recta normal de la recta tangente en el punto Q.

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x)$$

Se obtiene la ecuación de la circunferencia de centro el punto $C(\alpha, \beta)$, radio r y que pasa por el punto $Q(x, y)$.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se obtienen las coordenadas del centro de curvatura.

$$\alpha = x - \left(\frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right), \quad \beta = y + \left(\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right)$$

$$\alpha = x - \left(\frac{y'\left[1 + (y')^2\right]}{y''} \right), \quad \beta = y + \left(\frac{1 + (y')^2}{y''} \right)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el radio de curvatura y la curvatura de la curva $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3, 4)

Solución

Se obtienen la primera y la segunda derivadas de la función dada.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3}$$

El punto se evalúa en cada derivada.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{3}{4};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{3^2+4^2}{4^3} = -\frac{25}{64}$$

Los valores que se obtienen se sustituyen en la fórmula de radio de curvatura.

$$r = \frac{\sqrt{\left[1+(y')^2\right]^3}}{|y''|} \rightarrow r = \frac{\sqrt{\left[1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]^3}}{\left|-\frac{25}{64}\right|} \rightarrow r = \frac{\frac{125}{64}}{\frac{25}{64}} \rightarrow r = 5$$

Por tanto, el radio de curvatura es:

$$r = 5$$

Luego, el valor de la curvatura se obtiene con la expresión:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$$

Finalmente, el valor de la curvatura es:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{5}$$

2 Determina el radio y el centro de curvatura de curva $y^2 = -8x$, en el punto $(-2, 4)$

Solución

Se obtienen la primera y la segunda derivadas de la curva y se evalúa el punto.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{y} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{16}{y^3} = -\frac{16}{(4)^3} = -\frac{1}{4}$$

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula del radio de curvatura.

$$r = \frac{\sqrt{\left[1+(-1)^2\right]^3}}{\left|-\frac{1}{4}\right|} \rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{4}} \rightarrow r = 8\sqrt{2}$$

Por tanto, el radio de curvatura es:

$$r = 8\sqrt{2}$$

Luego, el punto $(-2, 4)$ y los valores de las derivadas, se sustituyen en las fórmulas que determinan las coordenadas del centro de curvatura.

$$\alpha = x - \left(\frac{y'\left[1+(y')^2\right]}{y''}\right) \rightarrow \alpha = -2 - \left(\frac{-1\left[1+(-1)^2\right]}{-\frac{1}{4}}\right) \rightarrow \alpha = -2-8 = -10$$

$$\beta = y + \left(\frac{1+(y')^2}{y''}\right) \rightarrow \beta = 4 + \left(\frac{1+(-1)^2}{-\frac{1}{4}}\right) \rightarrow \beta = 4-8 = -4$$

Por tanto, las coordenadas del centro de curvatura son el punto $(-10, -4)$

Radio de curvatura en coordenadas paramétricas

Dadas las ecuaciones de una curva en coordenadas paramétricas.

$$x = f(t),\ y = g(t)$$

Entonces, al derivar y sustituir en la fórmula del radio de curvatura en coordenadas rectangulares, se obtiene:

$$r = \frac{\left[\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\right]^3}{\left|\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right|} \rightarrow r = \frac{\left[\sqrt{(x')^2+(y')^2}\right]^3}{\left|x'\cdot y'' - y'\cdot x''\right|}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

3 Determina el radio de curvatura de la elipse $x = 2\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\, t$ en el punto correspondiente a $t = \frac{\pi}{2}$

Solución

Se obtienen la primera y la segunda derivadas de cada ecuación y se evalúa $t = \frac{\pi}{2}$ en cada una de ellas.

$$x = 2\cos t \;\rightarrow\; x' = -2\,\text{sen}\, t \;\rightarrow\; x' = -2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(1) = 2$$

$$x'' = -2\cos t \;\rightarrow\; x'' = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(0) = 0$$

$$y = 3\,\text{sen}\, t \;\rightarrow\; y' = 3\cos t \;\rightarrow\; y' = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3(0) = 0$$

$$y'' = -3\,\text{sen}\, t \;\rightarrow\; y'' = -3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3(1) = -3$$

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula del radio de curvatura:

$$r = \frac{\left[\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right]^3}{|x'\cdot y'' - y'\cdot x''|} \;\rightarrow\; r = \frac{\left[\sqrt{(2)^2 + (0)^2}\right]^3}{|(2)(-3) - (0)(0)|} \;\rightarrow\; r = \frac{8}{|-6|} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Por consiguiente, el radio de curvatura de la elipse en el punto correspondiente a $t = \frac{\pi}{2}$ es:

$$r = \frac{4}{3}$$

Radio de curvatura en coordenadas polares

Dada la curva con ecuación de la forma:

$$\rho = f(\theta)$$

Se tiene que:

$$x = \rho\cos\theta\,,\;\; y = \rho\,\text{sen}\,\theta$$

Si se sustituye $\rho = f(\theta)$ en estas últimas ecuaciones, se obtiene:

$$x = f(\theta)\cos\theta\,,\;\; y = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$$

Entonces, al derivar y sustituir en la fórmula del radio de curvatura en coordenadas rectangulares, se obtiene:

$$r = \frac{\left[\sqrt{\rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\right]^3}{\left|\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho\cdot\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right|} \;\rightarrow\; r = \frac{\left[\sqrt{\rho + (\rho')^2}\right]^3}{|\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''|}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

4 Determina el radio de curvatura de la curva $\rho = \cos 2\theta$, en el punto correspondiente a $\theta = \pi$

Solución

Se determinan la primera y la segunda derivadas de la función dada y se evalúa $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\rho = \cos 2\theta \;\rightarrow\; \rho = \cos 2(\pi) \;\rightarrow\; \rho = 1$$

$$\rho' = -2\,\text{sen}\,2\theta \;\rightarrow\; \rho' = -2\,\text{sen}\,2(\pi) \;\rightarrow\; \rho' = 0$$

$$\rho'' = -4\cos 2\pi \;\rightarrow\; \rho'' = -4\cos 2(\pi) \;\rightarrow\; \rho'' = -4$$

Los valores se sustituyen en la fórmula y se simplifican las operaciones.

$$r = \frac{\left[\sqrt{1+(0)^2}\right]^3}{\left|(1)^2 + 2(0)^2 - (1)(-4)\right|} = \frac{\left[\sqrt{1}\right]^3}{|1+0+4|} = \frac{1}{|5|} = \frac{1}{5}$$

Por tanto, el valor del radio de curvatura es:

$$r = \frac{1}{5}$$

EJERCICIO 40

Determina el radio de curvatura y la curvatura de las curvas en el punto dado:

1. $x^2 - y^2 = -3$ $\quad (1, 2)$
2. $xy + y + 4 = 0$ $\quad (3, -1)$
3. $x^2 + 4y = 0$ $\quad (2, -1)$
4. $y = x^3$ $\quad (1, 1)$
5. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen}\, t \end{cases}$ $\quad t = \pi$
6. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t^2 \end{cases}$ $\quad t = 2$
7. $\rho = \cos\theta$ $\quad \theta = \frac{\pi}{2}$
8. $\rho = \text{sen}\,\frac{\theta}{2}$ $\quad \theta = \frac{\pi}{3}$

Determina el centro de curvatura de las curvas en el punto dado:

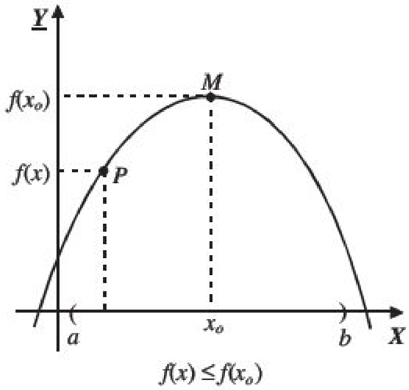
9. $x^2 - 4y = 0$ $\quad (2, 1)$
10. $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$ $\quad (-2, 1)$
11. $y = \text{sen}\, x$ $\quad \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
12. $y - e^x = 0$ $\quad (0, 1)$
13. $y = \sqrt{x+1}$ $\quad (3, 2)$

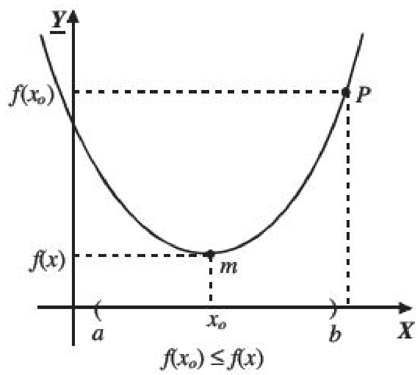
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Máximos y mínimos de una función

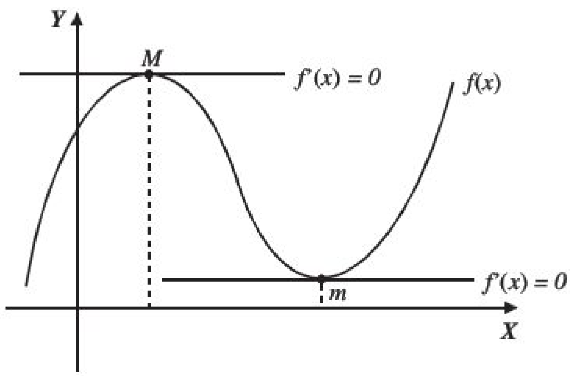
Definición

1. Se dice que una función $f(x)$ tiene un máximo local M en $x = x_o$, si $f(x_o) \geq f(x)$ para toda x en un intervalo (a, b) tal que x_o, pertenezca a dicho intervalo.
2. Se dice que una función $f(x)$ tiene un mínimo local m en $x = x_o$, si $f(x_o) \leq f(x)$ para toda x en un intervalo (a, b) tal que x_o, pertenezca a dicho intervalo.





Si $f(x)$ tiene un máximo o mínimo local en x_o, entonces la pendiente de la recta tangente (derivada) en dicho punto es igual a cero.



Donde:

M = punto máximo

m = punto mínimo

Criterio de la primera derivada para encontrar puntos máximos y mínimos

a) Si $f'(x) > 0$, para toda $x \in (a, x_o)$ y $f'(x) < 0$, para toda $x \in (x_o, b)$ (es decir, la derivada cambia de valores positivos a negativos), entonces en $f(x_o)$ existe un valor máximo local.

b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, x_o)$ y $f'(x) > 0$, para toda $x \in (x_o, b)$ (es decir, la derivada cambia de valores negativos a positivos), entonces en $f(x_o)$ existe un valor mínimo local.

c) Si para toda $x \in (a, b)$ y $f'(x)$ tiene el mismo signo, entonces $f(x)$ no tiene valor máximo ni mínimo local.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los puntos máximos y mínimos para la función $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$, utiliza el criterio de la primera derivada.

Solución

Paso I

Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = 6x - 12$$

Paso II

La derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación:

$$f'(x) = 6x - 12; \qquad 6x - 12 = 0 \qquad \text{donde} \qquad x = 2$$

Este resultado recibe el nombre de valor o punto crítico.

Paso III

Se da un valor menor y uno mayor próximo al valor crítico y se evalúan en la derivada.
Para $x = 2$ se toman los valores 1 y 3

$$f'(1) = 6(1) - 12 = -6 < 0 \qquad \text{y} \qquad f'(3) = 6(3) - 12 = 6 > 0$$

El cambio de signo es de negativo a positivo, entonces la función tiene un valor mínimo en $x = 2$.

Paso IV

El valor crítico se evalúa en la función:

$$f(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 15$$
$$f(2) = 3$$

Por consiguiente, el punto mínimo es (2, 3)

2 Obtén los puntos máximos y mínimos para la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$

Solución

Paso I

Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

Paso II

La derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned} f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \quad \rightarrow \quad 6x^2 - 6x - 12 &= 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x-2)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Los valores críticos son:

$$x_1 = 2, x_2 = -1$$

Paso III

Se dan valores menores y mayores próximos a los valores críticos y se evalúan en la derivada.

Para $x = -1$, se toman los valores $x = -\frac{3}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$

$$f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{-3}{2}\right) - 12 = \frac{21}{2} > 0 \quad \text{y} \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{-1}{2}\right) - 12 = -\frac{15}{2} < 0$$

La derivada cambia de signo positivo a negativo, entonces la función tiene un valor máximo en $x = -1$

Para $x = 2$ se toman los valores $x = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{5}{2}$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{2}\right) - 12 = -\frac{15}{2} < 0 \quad \text{y} \quad f'\left(\frac{5}{2}\right) = 6\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{5}{2}\right) - 12 = \frac{21}{2} > 0$$

La derivada cambia de signo negativo a positivo, entonces la función tiene un valor mínimo en $x = 2$

Paso IV

Los valores críticos se evalúan en la función:

Para $x = -1$, $f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 15 = 22$

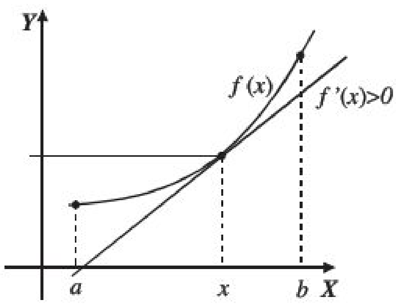
Para $x = 2$, $f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 15 = -5$

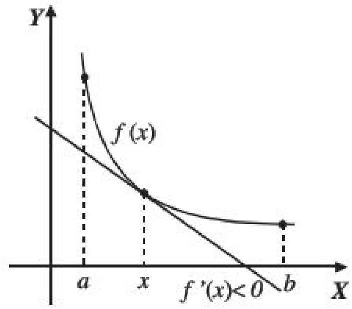
Por tanto, el punto máximo es $(-1, 22)$ y el punto mínimo es $(2, -5)$

Intervalos donde crece o decrece una función

Definición

1. Una función es creciente en el intervalo (a, b), si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$
2. Una función es decreciente en el intervalo (a, b), si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$





Observación 1. Existen funciones siempre crecientes, pero su derivada se anula para algún valor de x.

Ejemplo

La función $f(x) = 1 + (x - 2)^3$ es siempre creciente, pero su derivada es cero para $x = 2$

$$f'(x) = 3(x - 2)^2 \quad \rightarrow \quad f(2) = 3(2 - 2)^2 = 3(0) = 0$$

Observación 2. Existen funciones siempre decrecientes, pero su derivada se anula para algún valor de x.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La función $f(x) = 1 - (x - 2)^3$ es siempre decreciente, pero su derivada es cero para $x = 2$

$$f'(x) = -3(x - 2)^2 \quad \rightarrow \quad f(2) = -3(2 - 2)^2 = -3(0) = 0$$

2 Indica los intervalos donde la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$ es creciente y decreciente.

Solución

a) Intervalo donde $f(x)$ es creciente.

Paso I
Se obtiene la derivada de la función: $f'(x) = x^2 - x - 6$

Paso II
Por definición $f'(x) > 0$

$$x^2 - x - 6 > 0$$

Al resolver la desigualdad se obtienen los intervalos:

$$(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

Donde la función es creciente.

b) Intervalo donde $f(x)$ es decreciente.

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = x^2 - x - 6$$

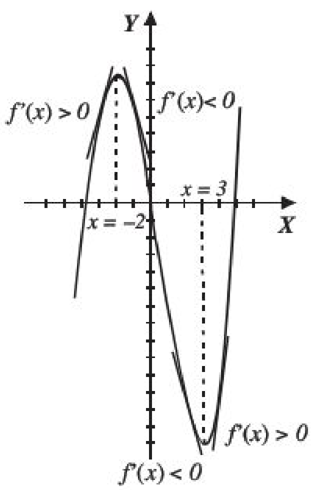
Paso II
Por definición $f'(x) < 0$

$$x^2 - x - 6 < 0$$

Al resolver la desigualdad se obtiene el intervalo:

$$(-2, 3)$$

Donde la función es decreciente.
Gráfica:



EJERCICIO 41

Encuentra los máximos, los mínimos y los intervalos para los que la función es creciente o decreciente.

1. $f(x)=x^2-6x+5$
2. $f(x)=-3x^2+5x-4$
3. $f(x)=x^3-3x$
4. $f(x)=x^3-6x^2$
5. $f(x)=4x^3+3x^2-6x$
6. $f(x)=4x^3-x^2-4x+3$
7. $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-5$
8. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+1$
9. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+4$
10. $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2+1$
11. $y=\dfrac{3}{x^2-2x}$
12. $f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$
13. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}$
14. $y=\dfrac{x^2-1}{4-x^2}$
15. $f(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Criterio de la segunda derivada para encontrar puntos máximos y mínimos

a) Dada $y = f(x)$ con $f'(x_o) = 0$, si $f''(x_o) > 0$, entonces el punto $(x_o, f(x_o))$ representa un punto mínimo.
b) Dada $y = f(x)$ con $f'(x_o) = 0$, si $f''(x_o) < 0$, entonces el punto $(x_o, f(x_o))$ representa un punto máximo.

Ejemplo

Determina con el criterio de la segunda derivada los puntos máximos y mínimos de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 10$$

Solución

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$$

Paso II
Se iguala la derivada a cero y se resuelve la ecuación:

$$3x^2 - 6x - 24 = 0$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

Los valores críticos son:

$$x = 4 \quad \text{y} \quad x = -2$$

Paso III

Se obtiene la segunda derivada y se evalúa con los valores críticos:

$$f''(x) = 6x - 6$$

Para $x = -2$

$$f''(-2) = 6(-2) - 6 = -18 < 0$$

Por tanto, la función tiene un valor máximo en $x = -2$

Para $x = 4$

$$f''(4) = 6(4) - 6 = 18 > 0$$

Por tanto, la función tiene un valor mínimo en $x = 4$

Paso IV

Los valores críticos se evalúan en la función:

Para $x = -2$

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 24(-2) - 10 = 18$$

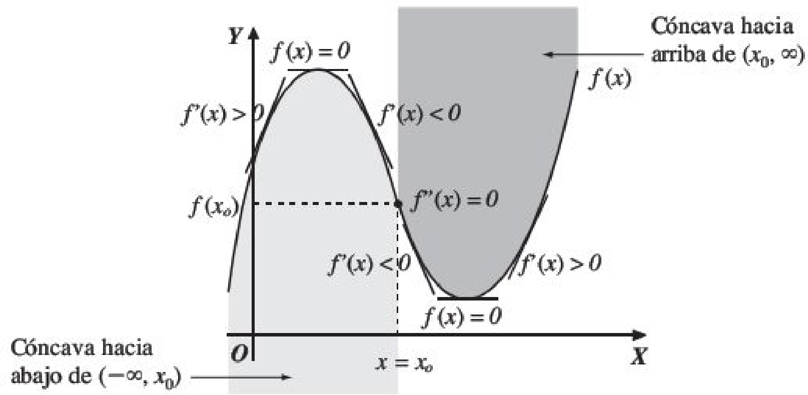
Para $x = 4$

$$f(4) = (4)^3 - 3(4)^2 - 24(4) - 10 = -90$$

Entonces, la función tiene un punto máximo en $(-2, 18)$ y un punto mínimo en $(4, -90)$

Concavidad y punto de inflexión de una función

La función $f(x)$ es cóncava hacia arriba cuando las rectas tangentes a dicha función están por debajo de la curva.
La función $f(x)$ es cóncava hacia abajo cuando las rectas tangentes a dicha función están por arriba de la curva.



Donde $(x_o, f(x_o))$ es el punto de inflexión.

Prueba de concavidad:

1. Una función es cóncava hacia arriba en un intervalo (a, b) si para todo $x \in (a, b)$, $f''(x) > 0$
2. Una función es cóncava hacia abajo en un intervalo (a, b) si para todo $x \in (a, b)$, $f''(x) < 0$
3. Una función tiene un punto de inflexión en $(x_o, f(x_o))$ si $f''(x_o) = 0$

Ejemplo

Determina las coordenadas del punto de inflexión y los intervalos de concavidad para la función:

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 60x$$

Solución

Punto de inflexión

Paso I
Se obtiene la segunda derivada:

$$f'(x) = -6x^2 + 18x + 60 \quad \rightarrow \quad f''(x) = -12x + 18$$

Paso II
La segunda derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación:

$$-12x + 18 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

Paso III
Se evalúa la función con $x = \frac{3}{2}$:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 60\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{207}{2}$$

Por consiguiente, las coordenadas del punto de inflexión son $\left(\frac{3}{2}, \frac{207}{2}\right)$

Intervalos de concavidad

Intervalo donde la función es cóncava hacia arriba.

Por definición $f''(x) > 0$, entonces:

$$-12x + 18 > 0$$

Al resolver la desigualdad se obtiene que $x < \frac{3}{2}$, por tanto, el intervalo donde la función es cóncava hacia arriba es: $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

Intervalo donde la función es cóncava hacia abajo.

Por definición $f''(x) < 0$

$$-12x + 18 < 0$$

Al resolver la desigualdad se obtiene que $x > \frac{3}{2}$, entonces, el intervalo donde la función es cóncava hacia abajo es: $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

EJERCICIO 42

Dadas las siguientes funciones, determina:

a) Puntos máximos y mínimos.
b) Intervalos donde la función crece y decrece.
c) Intervalos de concavidad.
d) Puntos de inflexión.
e) Gráfica.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 10$
2. $f(x) = -x^2 + 4x + 6$
3. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 24$
5. $f(x) = x^4 - 4x^3$
6. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$
7. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$
8. $f(x) = (x^2 - 1)^2$
9. $f(x) = \sqrt{x^2 + 36}$
10. $f(x) = x^3(x + 2)$
11. $f(x) = \text{sen}(2x)$ en $[0, \pi]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Optimización

Los métodos para obtener puntos máximos y mínimos de una función son una herramienta que se emplea para solucionar problemas prácticos donde se va a optimizar una variable.

Hay una gran variedad de problemas, por lo que resulta difícil dar reglas específicas para resolverlos. No obstante se dan algunas sugerencias:

- Leer cuidadosamente el problema y pensar en los hechos que se presentan y las variables desconocidas.
- Hacer un diagrama o dibujo geométrico que incluya los datos.
- Relacionar los datos con las variables desconocidas, hallando la función a maximizar o minimizar.
- Encontrar los valores críticos y determinar cuál corresponde a un máximo o a un mínimo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 20 y el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro, sea un valor máximo.

Solución

Sean x y y los números buscados, entonces:

La suma de los números es 20: $x + y = 20$

El producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro, es máximo: $P = x^2y^3$

Se despeja y de la primera igualdad y se sustituye en el producto:

$$x + y = 20 \quad \rightarrow \quad y = 20 - x$$

Por tanto: $P = x^2y^3 = x^2(20 - x)^3$ será la función a maximizar.

Se obtiene la derivada: $P'(x) = x(20 - x)^2(40 - 5x)$

La derivada se iguala con cero: $P'(x) = 0$, $x(20 - x)^2(40 - 5x) = 0$

Al resolver esta última ecuación se obtienen los valores críticos: $x = 0$, $x = 20$, $x = 8$

Se obtiene la segunda derivada: $P''(x) = -20x^3 + 720x^2 - 7\,200x + 16\,000$

Se analizan los valores críticos:

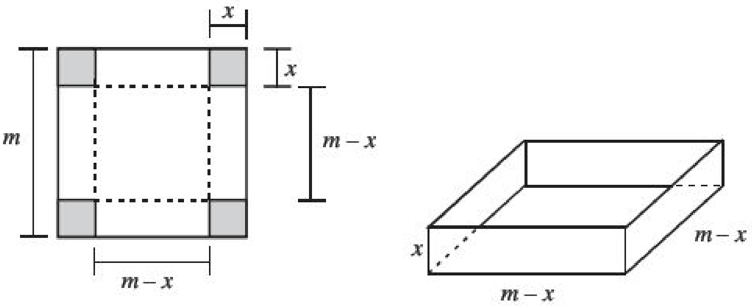
Para $x = 0$, $P''(0) = 16\,000 > 0$, entonces en $x = 0$ existe un valor mínimo
Para $x = 20$, $P''(20) = 0$, entonces en $x = 20$ no existe valor máximo ni mínimo
Para $x = 8$, $P''(8) = -5\,760 < 0$, entonces en $x = 8$ existe un valor máximo

Por tanto, uno de los valores es $x = 8$ y al sustituir en $y = 20 - x$, se obtiene $y = 12$, entonces los números que se buscan son:

$$x = 8,\ y = 12$$

2 De las cuatro esquinas de una lámina cuadrada de lado m, se suprimen cuadrados iguales de lado x. Se doblan los bordes de la lámina recortada para formar una caja sin tapa. Determina la longitud de x, para que el volumen de la caja sea máximo.

Solución



El volumen de la caja en términos de la variable x está dado por la función:

$$V(x) = (m - 2x)(m - 2x)(x) \qquad V(x) = (m - 2x)^2(x)$$

$$V(x) = (x)(m - 2x)^2$$

$$V(x) = (x)(m^2 - 4mx + 4x^2)$$

$$V(x) = m^2x - 4mx^2 + 4x^3 \text{ función a maximizar.}$$

Se encuentra la derivada respecto a la variable x de la función:

$$V'(x) = m^2 - 8mx + 12x^2$$

Se iguala a cero la derivada:

$$V'(x) = 0; \quad m^2 - 8mx + 12x^2 = 0$$

Al resolver se obtienen los valores críticos:

$$x = \frac{m}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{m}{6}$$

Se obtiene la segunda derivada y se evalúan los valores de x:

$$V''\left(\frac{m}{2}\right) = -8m + 24\left(\frac{m}{2}\right) = -8m + 12m = 4m > 0 \text{ mínimo}$$

$$V''\left(\frac{m}{6}\right) = -8m + 24\left(\frac{m}{6}\right) = -8m + 4m = -4m < 0 \text{ máximo}$$

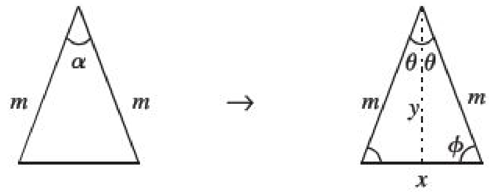
Por consiguiente, el valor de x para que la caja tenga un volumen máximo es:

$$x = \frac{m}{6}$$

3 Determina el ángulo que deben formar los lados iguales de un triángulo isósceles para que su área sea máxima.

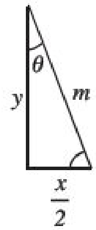
Solución

Se construye una figura con los datos:



Sea x la base y y la altura, entonces su área es $A = \frac{1}{2}xy$

Se toma la mitad del triángulo:



Se aplican identidades trigonométricas en el triángulo para el ángulo θ

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\frac{x}{2}}{m} = \frac{x}{2m} \quad \text{donde,} \quad x = 2m\,\text{sen}\,\theta \qquad\qquad \cos\theta = \frac{y}{m} \quad \text{donde,} \quad y = m\cos\theta$$

Al sustituir los valores de x y y se obtiene:

$$A(\theta) = \frac{1}{2}(2m\,\text{sen}\,\theta)(m\cos\theta) \quad \rightarrow \quad A(\theta) = \frac{1}{2}m^2\left[2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\right]$$

Pero $2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \text{sen}\,2\theta$, entonces $A = \frac{1}{2}m^2\,\text{sen}\,2\theta$, ésta es la función a maximizar.

Se obtiene la derivada y se iguala a cero:

$$A'(\theta) = m^2\cos 2\theta \quad \rightarrow \quad A'(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad m^2\cos 2\theta = 0$$

$m \neq 0$; entonces $\cos 2\theta = \frac{0}{m^2} = 0$, despejando el ángulo:

$$\cos 2\theta = 0 \qquad 2\theta = \cos^{-1}(0)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}(0)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Se obtiene la segunda derivada y se evalúa en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$A''(\theta) = -2m^2 \operatorname{sen} 2\theta \quad \rightarrow \quad A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2 \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2 (1)$$

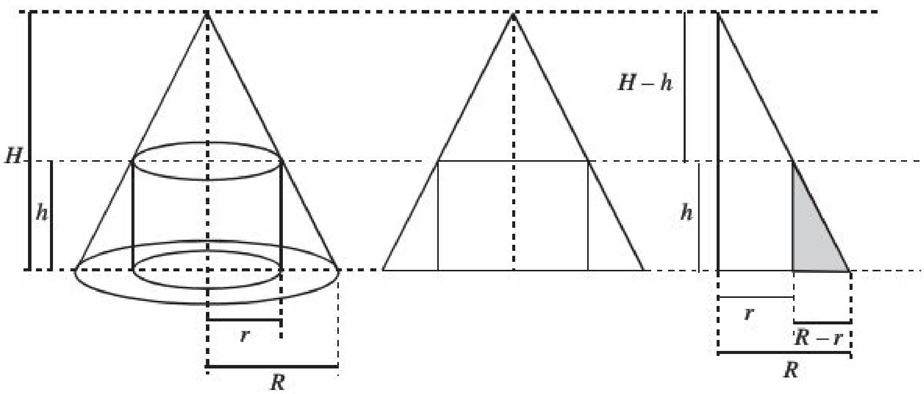
$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2 < 0$$

El área es máxima para $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ y el ángulo que deben formar los lados iguales es de 90°

4 Calcula el volumen máximo del cilindro circular recto que se puede inscribir en un cono de H cm de altura y R cm de radio en su base, de manera que los ejes del cilindro y el cono coincidan.

Solución

Observa la figura.



De acuerdo con ella se hace un corte transversal y se obtiene el triángulo que se muestra; por construcción se tienen triángulos semejantes que cumplen con la siguiente proporción:

$$\frac{R}{R-r} = \frac{H}{h}$$

El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

Despejando h de la proporción y sustituyéndola en la fórmula del volumen se obtiene:

$$h = \frac{HR - Hr}{R} = H - \frac{H}{R}r \quad \rightarrow \quad V = \pi r^2 h = \pi r^2\left(H - \frac{H}{R}r\right) = \pi H r^2 - \frac{\pi H r^3}{R}$$

La cual es la función a maximizar.

Se deriva la función:

$$V'(r) = 2\pi Hr - \frac{3\pi Hr^2}{R}$$

La derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación para r:

$$V'(r) = 0, \qquad 2\pi Hr - \frac{3\pi Hr^2}{R} = 0$$

Si $R \neq 0$, entonces $2\pi HRr - 3\pi Hr^2 = 0 \rightarrow \pi Hr(2R - 3r) = 0 \rightarrow r(2R - 3r) = 0$
Valores críticos:

$$r = 0, r = \frac{2}{3}R$$

Se analizan los valores críticos en la segunda derivada:

$$V''(r) = 2\pi H - \frac{6\pi H}{R}r$$

Para $r = 0$; $V''(0) = 2\pi H - \frac{6\pi H}{R}(0) = 2\pi H > 0$, entonces, el volumen es mínimo.

Para $r = \frac{2}{3}R$; $V''\left(\frac{2}{3}R\right) = 2\pi H - \frac{6\pi H}{R}\left(\frac{2}{3}R\right) = -2\pi H < 0$, entonces, el volumen es máximo.

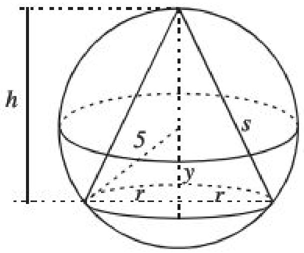
Entonces, las dimensiones del cilindro de volumen máximo inscrito en el cono son:

$$r = \frac{2}{3}R \text{ y } h = H - \frac{H}{R}r = H - \frac{H}{R}\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{1}{3}H$$

5 Determina las dimensiones del cono circular recto de área máxima, que puede inscribirse en una esfera de radio $R = 5$u

Solución

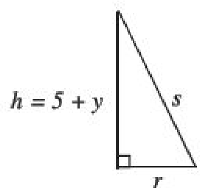
Figura



El área del cono de radio r, altura h y generatriz s, está dada por:

$$A = \pi rs$$

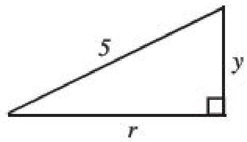
De la figura se toma el triángulo rectángulo



Mediante el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$s^2 = (5 + y)^2 + r^2 \qquad s = \sqrt{(5+y)^2 + r^2}$$

De la figura se toma el triángulo rectángulo,



Por el teorema de Pitágoras:

$$5^2 = r^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad r^2 = 25 - y^2$$

Este resultado se sustituye en: $s = \sqrt{(5+y)^2 + r^2}$

$$s = \sqrt{(5+y)^2 + (25 - y^2)}$$

y a su vez en $A = \pi r s$

$$A = \pi\ r\ \sqrt{(5+y)^2 + 25 - y^2}$$

Maximizar A equivale a maximizar A^2, y el problema se reduce a términos simples, es decir:

$$A^2 = \pi^2 r^2 \left[(5+y)^2 + 25 - y^2\right], \text{ pero } r^2 = 25 - y^2, \text{ entonces:}$$

$$A^2 = \pi^2(25 - y^2)\left[(5+y)^2 + 25 - y^2\right] \quad \rightarrow \quad A^2 = \pi^2(25 - y^2)\left[25 + 10y + y^2 + 25 - y^2\right]$$

$$A^2 = \pi^2(25 - y^2)(50 + 10y)$$

$$A^2 = \pi^2(25 - y^2)(10)(5 + y)$$

$$A^2 = 10\,\pi^2(125 + 25y - 5y^2 - y^3)$$

Si $A^2 = f(y)$, entonces, $f(y) = 10\,\pi^2(125 + 25y - 5y^2 - y^3)$ es la función a maximizar.

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(y) = 10\pi^2(25 - 10y - 3y^2)$$

Paso II
La derivada se iguala a cero y se determinan los valores críticos:

$$f'(y) = 0 \quad \rightarrow \quad 10\pi^2(25 - 10y - 3y^2) = 0 \quad \rightarrow \quad y = -5,\ y = \frac{5}{3}$$

Paso III
Se evalúan los valores críticos en la segunda derivada para determinar los máximos o mínimos de la función:

$$f''(y) = 10\pi^2(-10 - 6y)$$

Para $y = -5$

$$f''(-5) = 10\pi^2(-10 - 6(-5)) = 200\pi^2 > 0, \text{ mínimo.}$$

Para $y = \frac{5}{3}$,

$$f''\left(\frac{5}{3}\right) = 10\pi^2\left(-10 - 6\left(\frac{5}{3}\right)\right) = -200\pi^2 < 0, \text{ máximo.}$$

Entonces, para $y = \frac{5}{3}$ el área del cono es máxima, sustituyendo en las fórmulas: $r^2 = 25 - y^2$ y $h = 5 + y$, se obtienen las dimensiones del radio y la altura del cono inscrito en la esfera:

$$r^2 = 25 - y^2 \qquad h = 5 + y$$

$$r = \sqrt{25 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} \qquad h = 5 + \frac{5}{3}$$

$$r = \sqrt{25 - \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{200}{9}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}\,\text{u} \qquad h = \frac{20}{3}\,\text{u}$$

Finalmente, el radio y la altura miden respectivamente:

$$r = \frac{10}{3}\sqrt{2}\,\text{u} \qquad h = \frac{20}{3}\,\text{u}$$

EJERCICIO 43

Resuelve los siguientes problemas:

1. Encuentra dos números cuya suma sea 40 y su producto sea máximo.
2. Encuentra dos números cuya diferencia sea 50 y su producto mínimo.
3. Con una lámina cuadrada de aluminio de 12 pulgadas por lado, se quiere construir una caja sin tapa, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando los bordes. ¿Cuánto deben medir por lado los cuadrados recortados para obtener un volumen máximo?, ¿Cuánto mide dicho volumen?
4. Calcula el volumen máximo de un cilindro circular recto que se puede inscribir en un cono de 72 cm de altura y 24 cm de radio en su base, de manera que los ejes del cilindro y el cono coincidan?
5. En la construcción de un recipiente cilíndrico de hojalata se emplean 100 pulg^2, esta cantidad incluye las tapas. ¿Cuál es el mayor volumen que podría tener la lata?
6. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener un cono de volumen máximo cuya área lateral es de 10 πu^2?
7. Un cartel tiene una superficie de 150 cm^2 con márgenes de 3 cm en las partes superior e inferior y 2 cm a los lados. Calcula el área máxima impresa en el cartel.
8. Considera un triángulo rectángulo con sus catetos sobre los ejes de coordenadas y la hipotenusa pasa por el punto (4, 3). Determina el área mínima que puede encerrar tal triángulo.
9. ¿Qué número positivo minimiza la suma entre él y su recíproco?
10. Determina las dimensiones del triángulo isósceles de superficie máxima que podría inscribirse en un círculo de radio r.
11. ¿Cuáles son los dos puntos sobre la curva $y = x^3$ cuyas abscisas difieren en dos unidades, de tal forma que la recta que los une tiene una pendiente mínima?
12. ¿Cuál es el área máxima posible de un rectángulo, cuya base coincide con el eje X y sus vértices superiores están en la curva $y = 4 - x^2$?
13. Encuentra las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un semicírculo de radio igual a 2 unidades.
14. La resistencia de una viga rectangular varía según sus dimensiones. Si la resistencia es proporcional al cuadrado del ancho de la viga por la altura, ¿cuáles son las dimensiones de la viga más resistente que podrá cortarse de un tronco cilíndrico con radio de 3 pies?

15. ¿Cuál es la distancia mínima que existe entre el punto $(5, 1)$ y la parábola $y = -x^2$?
16. La suma de dos números es 16. Encuentra los números si la suma de sus cubos es un valor mínimo.
17. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor perímetro que se puede inscribir en un semicírculo con radio de 5 unidades?
18. Se inscribe un rectángulo en un triángulo isósceles, cuyos lados tienen longitudes 5, 5 y 6. Uno de los lados del rectángulo está sobre la base del triángulo (lado desigual), ¿cuál es el área mayor que puede abarcar el rectángulo?
19. Se desea inscribir un cono dentro de otro. El cono exterior tiene una altura de 6 cm y un radio de 4 cm. El cono interior se inscribe de modo que su cúspide reposa sobre la base del cono exterior. La base del cono interior es paralela a la base del cono exterior. Los ejes de los conos son colineales. ¿Cuál deberá ser la altura del cono interior, a fin de que contenga el mayor volumen posible?
20. Calcula las dimensiones de un triángulo isósceles con un perímetro de 6 unidades que tenga área máxima.
21. Determina dos números reales positivos, cuya suma sea 40 y su producto sea máximo.
22. Encuentra las dimensiones del cono recto circular de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio 6 unidades.
23. Obtén las coordenadas del punto de la recta $3x + y - 5 = 0$ más cercano al origen.
24. ¿Cuál es el área del rectángulo mayor que se puede inscribir en un triángulo rectángulo de lados 5, 12 y 13 cm?
25. Calcula el área del rectángulo mayor que se puede inscribir en la elipse, cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
26. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 4)$ y forma con el primer cuadrante un triángulo de área mínima.
27. ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro circular recto de máxima área lateral que puede inscribirse en una esfera de radio de ocho pulgadas?
28. Para la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, considera el punto $(0, k)$ sobre su eje conjugado y determina el punto más cercano a éste.
29. Determina dos números positivos cuyo producto es 16 y tienen suma mínima.
30. En la construcción de una casa se van a emplear ventanas en forma de rectángulos curvados por semicírculos. Si el perímetro total de cada ventana es P, ¿cuáles son las dimensiones más convenientes para que las ventanas proporcionen máxima iluminación?
31. Una persona tiene una pared de piedra en el costado de un terreno. Dispone de 1 600 m de material para cercar y desea hacer un corral rectangular utilizando el muro como uno de sus lados, ¿qué dimensiones debe tener el corral para tener la mayor área posible?
32. Un alambre de 100 cm de largo se va a partir en dos trozos, una de las partes se va a doblar para formar una circunferencia, y la otra un triángulo equilátero. ¿Cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas del círculo y del triángulo sea máxima?
33. Se desea construir un cono con una generatriz de 10 cm. ¿Cuál es el mayor volumen posible para dicho cono?
34. Encuentra las dimensiones del rectángulo inscrito en un círculo con radio de 25 cm que proporcione el área máxima.
35. Para construir un recipiente cilíndrico de hojalata se emplearán 150 pulg^2, esta cantidad incluye las tapas. ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro para que contenga el volumen máximo?
36. Un anuncio de 20 metros de altura está colocado sobre una base que se encuentra 5 metros sobre el nivel de los ojos de una persona, ¿qué tan alejada debe estar la persona para que su ángulo de visión sea máximo?
37. Un silo consta de un cilindro con una parte superior semiesférica. Determina la longitud del radio del silo con un volumen V, que tiene la menor área de superficie, incluye la tapa inferior.
38. ¿Cuáles son los puntos sobre la curva $y = x^2 - 4$, que están más cerca del punto $(-2, 1)$?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Movimiento rectilíneo uniforme

Si un punto se mueve sobre una recta una distancia s, en un tiempo t con velocidad uniforme v, entonces:

$$v = \frac{s}{t}\text{, de aquí } s = v \cdot t$$

Sean (s_1, t_1) y (s_2, t_2) dos pares de valores de s y t, tal que:

$$s_1 = vt_1 \text{ y } s_2 = vt_2$$

Entonces:

$$s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1)$$

Donde:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \text{velocidad uniforme}$$

El concepto de velocidad media es más general que el de velocidad uniforme para cualquier tipo de movimiento rectilíneo.

La distancia dirigida s, de un punto P, desde un origen en un tiempo t, está dada por:

$$s = s(t)$$

Entonces, a la función $s = \{(t, s) \mid s = s(t)\}$ se le denomina "función de posición" del punto P y la velocidad media de P durante el intervalo $[t_1, t_2]$ se define como:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Si $t_2 - t_1 = h$, entonces $t_2 = t_1 + h$ con $h \neq 0$, luego $s(t_2) = s(t_1 + h)$ y la velocidad media de P durante el intervalo $[t_1, t_2] = [t_1, t_1 + h]$ es:

$$\frac{s(t_1 + h) - s(t_1)}{h}$$

Se obtiene el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(t_1 + h) - s(t_1)}{h}$$

Este límite se llama *velocidad instantánea*, rapidez o simplemente velocidad de P en el tiempo t. Un físico interpretaría esto como el valor límite de las velocidades medias, medidas sobre las porciones de tiempo cada vez menores alrededor de t.

Al generalizar:

Si la función de posición de un punto P es:

$$s = \{(t, s) \mid s = s(t)\}$$

La velocidad de P en el tiempo t será:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

La cual se denomina función velocidad del punto P.

Puesto que $s = s(t)$, $v = v(t)$ y $v(t) = \dfrac{ds(t)}{dt}$, entonces $v = \dfrac{ds(t)}{dt}$

Aceleración media

$v = \{(t, v) \mid v = v(t)\}$ la razón $\dfrac{v(t_1+h)-v(t_1)}{h}$, se llama velocidad media de P, durante el intervalo $[t_1, t_2] = [t_1, t_1+h]$

Si existe $\lim_{h\to 0}\dfrac{v(t_1+h)-v(t_1)}{h}$, entonces se le denomina aceleración de P en el tiempo t_1 y se denota mediante $a(t_1)$, entonces:

$$a(t_1) = \left.\frac{dv(t_1)}{dt}\right|_{t_1} = v'(t_1) = s''(t_1)$$

Por tanto:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Ejemplo

Una partícula se mueve conforme a la expresión $s(t) = 2t^2 - 3t + 3$, donde s se expresa en metros y t en segundos.

Determina:

a) Su posición inicial.
b) Su velocidad al inicio de su movimiento.
c) La velocidad que alcanza al transcurrir 3 segundos.
d) La velocidad final a los 5 segundos.
e) Su aceleración.

Solución

a) Su posición inicial se determina cuando $t = 0$, entonces,

$$s(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 3 = 3 \text{ m}$$

b) La velocidad al inicio de su movimiento se obtiene mediante la primera derivada evaluada en $t = 0$

$$s(t) = 2t^2 - 3t + 3 \quad \rightarrow \quad v(t) = 4t - 3$$

$$v(0) = 4(0) - 3 = -3\ \frac{m}{s}$$

c) La velocidad cuando $t = 3$ segundos

$$v(t) = 4t - 3 \quad \rightarrow \quad v(3) = 4(3) - 3 = 9\ \frac{m}{s}$$

d) La velocidad cuando $t = 5$ segundos

$$v(t) = 4t - 3 \quad \rightarrow \quad v(5) = 4(5) - 3 = 17\ \frac{m}{s}$$

e) Su aceleración se obtiene mediante la segunda derivada:

$$s(t) = 2t^2 - 3t + 3 \quad \rightarrow \quad s'(t) = 4t - 3 \quad \rightarrow \quad a = s''(t) = 4\ \frac{m}{s^2}$$

EJERCICIO 44

Resuelve los siguientes problemas:

1. La posición de una partícula se expresa mediante la función $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 10t$, con s en metros y t en segundos. ¿Cuál es su rapidez para $t = 1, \frac{3}{2}, 0$ segundos?
2. La distancia recorrida por un automóvil sobre una carretera en el instante t está dada por $s(t) = 9t^4 - 120t^3 + 432t^2$, ¿en qué intervalos su velocidad media es positiva?
3. La trayectoria de una partícula en movimiento rectilíneo está dada por la función:
$$s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 2$$
Encuentra:
a) s y a cuando $v = 0$
b) s y v cuando $a = 0$
c) Cuando s aumenta
d) Cuando v aumenta
4. Un proyectil es lanzado con una trayectoria que obedece a la función $s(t) = -3t^2 + 54t$. *a*) Calcula en qué tiempo hace contacto con su objetivo que se encuentra sobre la superficie terrestre y la velocidad que lleva en ese instante. *b*) En qué instante logra su altura máxima y cuál es el valor de esta.
5. Un proyectil es lanzado en dirección a una torre de 36 m de altura. El proyectil sigue la trayectoria de acuerdo con la función $s = -t^2 + 12t$, después de siete segundos. Indica la velocidad y la altura en la que hace contacto el proyectil con la torre.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Razón de cambio

Si una cantidad x está en función del tiempo t, la razón de cambio de x con respecto a t está dada por $\frac{dx}{dt}$. Si dos o más cantidades se relacionan con una ecuación, la razón de cambio de cada cantidad se obtiene derivando la ecuación.

Pasos para resolver problemas de razón de cambio:

- Se traza un dibujo que contemple todas las variables y constantes que intervengan en el problema.
- Se elabora un modelo matemático que relacione las variables.
- Se deriva el modelo matemático respecto al tiempo, se despeja la incógnita a conocer y se sustituyen los datos dados.

EJEMPLOS

Ejemplos

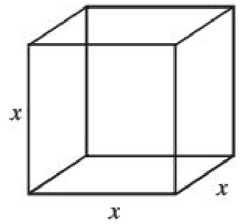
1 Un cubo de hielo de 10 cm³ de volumen, comienza a derretirse a razón de $6\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$, ¿cuál es la razón de cambio de la superficie del cubo en ese instante?

Solución

Se construye un cubo de arista x cuyo volumen es $V = 10\ \text{cm}^3$ y la razón con la que se derrite es

$$\frac{dV}{dt} = -6\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

(El signo indica que el volumen del cubo está decreciendo.)



Se deriva el volumen $V = x^3$ respecto al tiempo: $\frac{dV}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$

$$-6 = 3x^2\frac{dx}{dt} \text{ se despeja } \frac{dx}{dt}$$

$$-\frac{6}{3x^2} = \frac{dx}{dt}$$

La razón con que disminuye la arista es: $\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{x^2}$

El área total del cubo es $A = 6x^2$ y la razón con que cambia el área es:

$$\frac{dA}{dt} = 12x\frac{dx}{dt}$$

Pero $\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{x^2}$, entonces:

$$\frac{dA}{dt} = 12x\frac{dx}{dt} = 12x\left(-\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{24}{x}$$

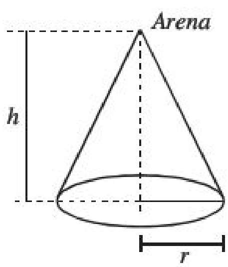
Si el volumen es de $10\ \text{cm}^3 = x^3$, entonces $x = \sqrt[3]{10}$, por tanto:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{24}{\sqrt[3]{10}}\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

El área disminuye a razón de $\frac{24}{\sqrt[3]{10}}\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$

2 Se está vaciando arena sobre un montón de forma cónica a razón de $30\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$, la altura del cono es siempre igual al radio de su base. ¿Con qué rapidez aumenta su altura cuando el montón tiene tres metros de altura?

Solución



El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, pero $r = h$, entonces $V = \frac{1}{3}\pi h^3$ y $\frac{dV}{dt} = 30\frac{m^3}{min}$

Al derivar el volumen respecto del tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2\frac{dh}{dt} \quad \text{donde} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Al sustituir $\frac{dV}{dt} = 30\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ y $h = 3\text{m}$

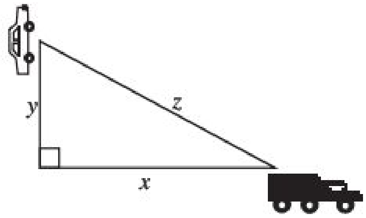
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi(3)^2}(30) = \frac{30}{9\pi} = \frac{10}{3\pi}$$

Por consiguiente, la altura aumenta a razón de $\frac{10}{3\pi}\frac{\text{m}}{\text{min}}$

3 Un automóvil se dirige al norte de una ciudad a razón de $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, al mismo tiempo un camión se dirige al este de la ciudad a razón de $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$. ¿Cuál es la razón con la que varía la distancia entre los vehículos cuando el automóvil y el camión se encuentran a 30 y 40 km, respectivamente, de su punto de partida?

Solución

Se realiza el dibujo con las características establecidas:



Donde,

$$x = 40 \text{ km},\ y = 30 \text{ km};\ \frac{dy}{dt} = 60\frac{\text{km}}{\text{h}};\ \frac{dx}{dt} = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Se debe encontrar con qué rapidez se separan los vehículos $\left(\frac{dz}{dt}\right)$

La figura representa un triángulo rectángulo, por tanto, se aplica el teorema de Pitágoras para obtener la relación:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Se deriva la expresión respecto al tiempo:

$$\frac{dz^2}{dt} = \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} \quad \rightarrow \quad 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \text{(simplificando)}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{y}{z}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Luego, en el momento en que $x = 40$ km; $y = 30$ km

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50 \text{ km}$$

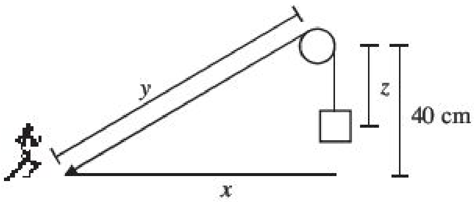
Entonces,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{40 \text{ km}}{50 \text{ km}}\left(80\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) + \frac{30 \text{ km}}{50 \text{ km}}\left(60\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(40)(80) + (30)(60)}{50} = \frac{3200 + 1800}{50} = \frac{5000}{50} = 100\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

4 Una persona sostiene un extremo de una cuerda de 150 cm de largo y en el otro extremo cuelga un bloque. La cuerda pasa por una polea que está a 40 cm de altura directamente sobre la mano de la persona, si ésta se aleja de la polea a razón de 10 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez se eleva el bloque cuando está a 6 cm de la polea?

Solución



La persona se aleja de la polea a $10\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ entonces, $\frac{dx}{dt} = 10\frac{\text{cm}}{\text{s}}$

En la figura, por el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$y^2 = x^2 + (40)^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = x^2 + 1\,600$$

Luego, la medida de la cuerda está dada por:

$$y + z = 150 \qquad \text{donde,} \qquad y = 150 - z$$

Este resultado se sustituye en $y^2 = x^2 + 1\,600$

$$y^2 = x^2 + 1\,600 \quad \rightarrow \quad (150 - z)^2 = x^2 + 1\,600$$

Se deriva respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}(150 - z)^2 = \frac{d}{dt}(x^2 + 1600) \quad \rightarrow \quad 2(z - 150)\left(\frac{dz}{dt}\right) = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x}{2(z-150)}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z-150}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $z = 6$ cm

$$x^2 + 1\,600 = (150 - z)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + 1\,600 = (150 - 6)^2$$

$$x^2 + 1\,600 = (144)^2$$

$$x^2 = 20\,736 - 1\,600$$

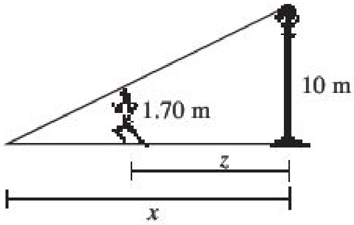
$$x^2 = 19\,136;\ x = \sqrt{19\,136}$$

Por tanto, la razón con la que se eleva el bloque es de:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{(z-150)}\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{19\,136}}{6-150}(10) = -\frac{\sqrt{19\,136}}{144}(10) = -\frac{5(8)\sqrt{299}}{72} = -\frac{5\sqrt{299}}{9}\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

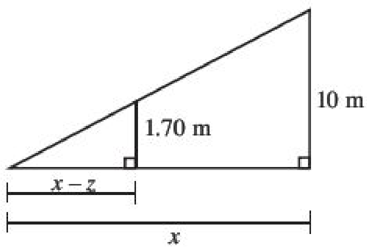
5 Un hombre de 1.70 m de altura se aleja de un poste de alumbrado a razón de 3 m/s, la lámpara del poste está a 10 m de altura. Determina la razón de cambio a la cual se mueve el extremo de la sombra del hombre.

Solución



De acuerdo con la figura $\frac{dz}{dt} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y la incógnita es $\frac{dx}{dt}$

Por triángulos semejantes:



Se obtiene:

$$\frac{10}{1.70} = \frac{x}{x-z} \quad \rightarrow \quad 10(x-z) = 1.70x$$

$$10x - 10z = 1.70x$$

$$10x - 1.70x = 10z$$

$$8.30x = 10z$$

Se deriva la expresión, resultando:

$$8.30\frac{dx}{dt} = 10\frac{dz}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{10}{8.30}\frac{dz}{dt}$$

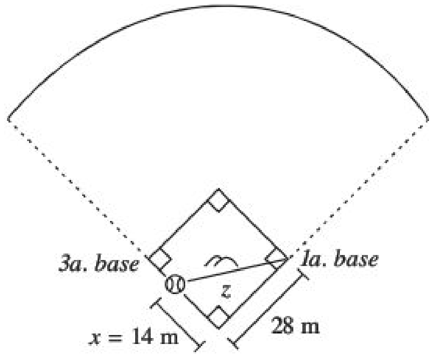
Luego, $\frac{dz}{dt} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$, entonces,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{8.30}(3) = \frac{30}{8.30} = 3.61\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Finalmente, la razón con que se mueve el extremo de la sombra es de 3.61 m/s.

6 La distancia que existe entre las bases de un campo de béisbol es de 28 m. Si la pelota se batea por la línea en dirección a la tercera base con una velocidad de $32\frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre la pelota y la primera base cuando se encuentra a la mitad del camino hacia la tercera base?

Solución



En la figura se observa que:

$$z^2 = x^2 + (28)^2$$

En la cual, al derivar se obtiene:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{2x}{2z}\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt}$$

Luego, cuando x se encuentra a la mitad del recorrido, la distancia de z es:

$$z^2 = (14)^2 + (28)^2 = 196 + 784 \quad \rightarrow \quad z = \sqrt{980} = 14\sqrt{5} \text{ m}$$

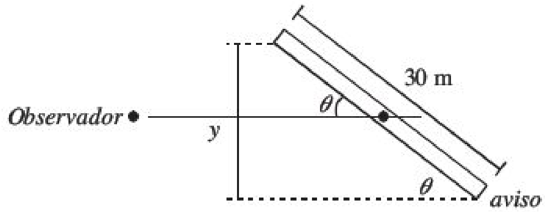
Al sustituir $z = 14\sqrt{5}$, $x = 14$ y $\frac{dx}{dt} = 32\frac{\text{m}}{\text{s}}$ en $\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt}$, se obtiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt} = \left(\frac{14}{14\sqrt{5}}\right)(32) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(32) = \frac{\sqrt{5}}{5}(32)$$

Por consiguiente, la pelota se aleja de la primera base a razón de $\frac{32}{5}\sqrt{5}\frac{\text{m}}{\text{s}}$

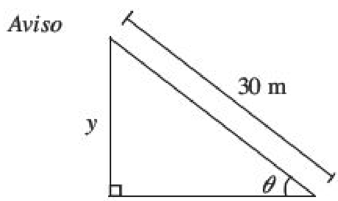
7 Un aviso rectangular que mide 30 m de ancho da vueltas sobre un eje vertical que pasa por el centro del rectángulo a razón de 10 rpm. Una persona que observa a distancia el aviso lo ve como un rectángulo de ancho variable. ¿Con qué rapidez cambia el ancho aparente del aviso cuando éste tiene 12 m de ancho, según lo ve el observador, y su ancho está aumentando?

Solución



Sea y el ancho aparente del aviso, también se sabe que gira a 10 rpm, que es lo mismo que 20π rad/min, entonces se tiene que encontrar la relación que existe entre y y θ.

De la figura:



Se obtiene:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{30} \quad \rightarrow \quad y = 30 \operatorname{sen}\theta$$

Derivando la expresión anterior:

$$\frac{dy}{dt} = 30\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Luego, cuando $y = 12$ m, entonces:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

Como el ancho del aviso está aumentando, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por tanto:

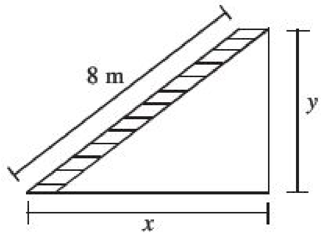
$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 23.5°$$

$$\frac{dy}{dt} = 30\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = 30\cos(23.5°)(20\pi) = 30(0.9170)(20\pi) = 550.2\pi\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

8 Una escalera de 8 m de longitud está apoyada sobre un piso horizontal y contra una pared. Si el extremo inferior de la escalera se aleja del muro a razón de $\frac{3}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez desciende el extremo superior en el instante en que su altura sobre el suelo es de 3 m?

Solución

Sea y la altura generada por la escalera sobre la pared, x la distancia generada por el extremo inferior y la pared, entonces,



Por el teorema de Pitágoras:

$$(8)^2 = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad 64 = x^2 + y^2$$

Se deriva la expresión:

$$\frac{d64}{dt} = \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} \quad \rightarrow \quad 0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

Se despeja $\frac{dy}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2x}{2y}\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $y = 3$, el valor de x está determinado por:

$$(8)^2 = x^2 + (3)^2 \qquad 64 = x^2 + 9$$

$$64 - 9 = x^2$$

$$x = \sqrt{55}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y}\frac{dx}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{-\sqrt{55}}{3}\left(\frac{3}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{55}}{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El signo menos indica que la altura sobre la pared está decreciendo.

EJERCICIO 45

1. Si la altura de un determinado árbol es de $10\sqrt{2}\,r^{\frac{3}{2}}$ cm, donde r es el radio de la parte transversal del tronco del árbol. Si el radio aumenta a razón de $\frac{1}{6}\frac{\text{cm}}{\text{año}}$, ¿con qué rapidez cambia la altura cuando su radio es de 5 cm?
2. Un náufrago es remolcado hacia un barco con un cable. La proa de donde se jala el cable se encuentra a 7 m del nivel del mar y el cable es jalado a razón de $12\frac{\text{m}}{\text{min}}$. ¿Con qué rapidez se está moviendo el náufrago hacia el barco cuando se encuentra a 20 m de la base del barco?
3. Un automóvil que viaja a $80\frac{\text{m}}{\text{s}}$ cruza un puente sobre un río, 20 segundos antes de que un bote que viaja a $40\frac{\text{m}}{\text{s}}$ pase por debajo del puente. Vistos desde arriba, el río y el puente forman un ángulo recto. ¿Con qué rapidez se están separando el automóvil y el bote 20 segundos después de que el bote pasa por debajo del puente?
4. Un globo de forma esférica, se infla a razón de $0.16\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ¿Cuál es el volumen del globo cuando su radio está aumentando a razón de $0.20\frac{\text{m}}{\text{min}}$?
5. Una escalera de 13 m de largo está apoyada sobre una pared. Encuentra la rapidez con que baja el extremo superior de la escalera, cuando su extremo inferior dista 5 m del muro y se separa a razón de $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$
6. Al caer una piedra a un estanque de aguas tranquilas forma una onda circular, cuyo radio aumenta a razón de $1\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez aumenta el área encerrada por la onda cuando el radio es de 5 cm?
7. Un tanque cilíndrico de 7 m de radio y 10 m de altura se llena de agua. Se hace un agujero en el fondo del tanque, en ese momento el agua sale a razón de $3\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ¿A qué rapidez está cambiando la altura del líquido en el tanque?
8. Un satélite se mueve en una órbita elíptica alrededor de un planeta. La ecuación de su órbita plana es de $9x^2 + 16y^2 = 144$. Si la rapidez del satélite en una dirección x es de $15\frac{\text{km}}{\text{h}}$, cuando la coordenada x es de $\frac{36}{\sqrt{137}}$ km. ¿Cuál es la rapidez en la dirección y en ese instante?
9. Los automóviles A y B salen del mismo punto. El automóvil A viaja hacia el este a razón de $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y el automóvil B viaja hacia el norte a $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A qué razón está cambiando la distancia entre los dos a las 14:00 horas, si:
   a) *A* y *B* salen a las 12:00 a.m.
   b) *A* sale a las 12 del día y *B* sale a la 13:00 horas.
10. Se está vaciando un depósito cónico de 1.5 m de radio y 5 m de altura, a razón de $0.16\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ¿Cómo está bajando el nivel cuando la profundidad del agua es de 2 m?
11. En un crucero un camión sale a las 10:00 horas y viaja hacia el oeste a 60 km/h. Un automóvil sale a las 13:00 horas del mismo lugar y viaja hacia el norte a 80 km/h. ¿A qué razón se están separando a las 15:00 horas?
12. Un globo asciende sobre un punto a razón de $6\frac{\text{m}}{\text{s}}$; un observador está situado a 300 m del punto de despegue del globo. Cuando el globo está a 400 m de altura, ¿con qué rapidez está cambiando la distancia entre el globo y el observador?
13. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de $7\frac{\text{pies}^3}{\text{min}}$. Si la presión se mantiene constante. ¿Con qué rapidez cambia el radio cuando éste es de 1 pie?

14. El área de un triángulo equilátero disminuye a razón de $6\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$. Calcula la rapidez de cambio de la longitud de sus lados en el momento en que el área del triángulo es de 100 cm^2.
15. Un punto se mueve sobre la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ de tal manera que su ordenada aumenta siete unidades por segundo. Cuando $y = 1$, ¿con qué rapidez cambia su abscisa?
16. Una persona está de pie en un muelle y jala una lancha por medio de una cuerda. Sus manos están a 2 m por encima del amarre de la lancha. Si la persona jala la cuerda a razón de $70\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez se aproxima la lancha al muelle cuando se encuentra a 5 m de él?
17. Un hombre de 1.80 m de estatura camina en línea recta a $1.5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ alejándose de un faro que se encuentra a 8 metros de altura sobre el suelo. ¿Con qué rapidez se mueve el extremo de su sombra?, ¿Cuál es la rapidez con la que cambia la longitud de su sombra?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Aplicaciones a la economía

Sea x el número total de unidades producidas por una empresa y m el precio de venta por unidad, el ingreso se obtiene con la función:

$$I(x) = mx$$

Si el precio de venta depende linealmente del número de unidades producidas, $m = ax + b$, la función de ingreso se expresa como:

$$I(x) = mx \quad \rightarrow \quad I(x) = (ax + b)x \quad \rightarrow \quad I(x) = ax^2 + bx$$

Sea $C(x)$ el costo de producir x unidades, la utilidad de la empresa se expresa:

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

Y el costo medio por unidad está dado por la expresión:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Otra forma de expresar la función de costo puede ser:

$$C = \text{costos variables} + \text{costos fijos}$$

Por ejemplo, si se tiene la función $C(x) = 4x^2 + 6x + 850$, los costos fijos son el término independiente de la función, es decir, 850, al ser x el número de unidades, entonces $x \geq 0$ por consiguiente, el costo fijo de producción es $C(0) = 850$.

Ejemplo

Las funciones de ingreso y costo son $I(x) = -2x^2 + 340x$ y $C(x) = 3x^2 + 600$. Determina la utilidad máxima y el costo mínimo en pesos.

Solución

La utilidad $U(x) = I(x) - C(x),\ x \geq 0$

$$U(x)=(-2x^2+340x)-(3x^2+600)$$

$$U(x)=-2x^2+340x-3x^2-600$$

$$U(x)=-5x^2+340x-600$$

Se obtiene la derivada de la función de la utilidad:

$$U'(x)=-10x+340$$

Se obtiene el valor crítico haciendo $U'(x)=0$

$$-10x+340=0$$

$$-10x=-340$$

$$x=\frac{-340}{-10}=34$$

Se evalúa $x=34$ en la segunda derivada para verificar si existe un valor máximo.

$$U''(x)=-10$$

$$U''(34)=-10<0$$

Entonces para $x=34$ existe un valor máximo.
Por consiguiente, se necesita producir 34 unidades para obtener una utilidad máxima, la cual es de:

$$U(34)=-5(34)^2+340(34)-600=5180$$

Por tanto, la utilidad máxima es de \$5 180.00
Por otro lado el costo medio está dado por:

$$Q(x)=\frac{C(x)}{x}$$

$$Q(x)=\frac{3x^2+600}{x}$$

$$Q(x)=3x+\frac{600}{x}$$

Se obtiene la derivada de la función de costo medio

$$Q'(x)=3-\frac{600}{x^2}$$

Se obtiene el valor crítico haciendo $Q'(x)=0$

$$3-\frac{600}{x^2}=0$$

$$3x^2-600=0$$

$$x=\pm\sqrt{200}$$

$$x=\pm 10\sqrt{2}$$

Se verifica que sea el valor mínimo, esto se obtiene evaluando el valor crítico en la segunda derivada

$$Q''(x) = \frac{1200}{x^3}$$

$$Q''\left(10\sqrt{2}\right) = \frac{1200}{\left(10\sqrt{2}\right)^3} = \frac{1200}{(200)\left(10\sqrt{2}\right)} = \frac{3}{5\sqrt{2}} > 0$$

Entonces, para $x = 10\sqrt{2} \approx 14$, hay un valor mínimo.

Para determinar el costo medio mínimo de forma aproximada se sustituye el valor crítico en la función de costo medio:

$$Q(x) = 3(14) + \frac{600}{14}$$

$$Q(x) = 42 + 42.86$$

$$Q(x) = 84.86$$

Por tanto, el costo mínimo aproximado es de \$84.86

Costo marginal

Si $C(x)$ es la función de costo total que tiene una empresa por producir x unidades de algún artículo y la empresa incrementa el número de unidades de x_0 a x_1 ($x_0 < x_1$), el costo se incrementa $C(x_1) - C(x_0)$, la razón de cambio del costo es:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_1) - C(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{C(x_0 + \Delta x) - C(x_0)}{\Delta x}$$

En economía, la expresión $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{C(x_0 + \Delta x) - C(x_0)}{\Delta x}$ es la derivada de la función de costo total y recibe el nombre de costo marginal $C'(x)$ y representa el incremento del costo al incrementar la producción.

Para $\Delta x = 1$ y x_0 suficientemente grande (tan grande que Δx sea pequeño respecto a x_0) se tiene que:

$$C'(x_0) \approx C(x_0 + 1) - C(x_0)$$

Luego, el costo de producir $x_0 + 1$ unidades es aproximadamente el mismo de producir x_0 unidades.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una empresa estima que el costo (en pesos) por producir x artículos es de:

$$C(x) = 0.02x^2 + 3x + 12\,000$$

Determina el costo marginal en un nivel de producción de 600 artículos y el costo real de producir el 601ésimo artículo.

Solución

Se obtiene la función del costo marginal:

$$C'(x) = 0.04x + 3$$

El costo marginal aproximado para 600 artículos es:

$$C'(600) = 0.04(600) + 3 = 27$$

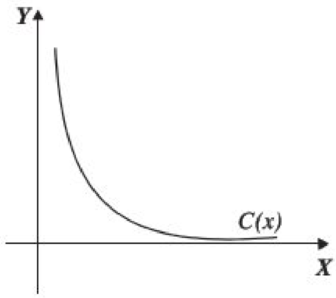
Por tanto, el costo marginal aproximado por artículo es de \$27.00

El costo real de producción del 601ésimo artículo es:

$$C(601) - C(600) = [0.02(601)^2 + 3(601) + 12\,000] - [0.02(600)^2 + 3(600) + 12\,000]$$
$$C(601) - C(600) = 21\,027.02 - 21\,000$$
$$C(601) - C(600) = 27.02$$

Se observa que $27 \approx 27.02$, es decir $C'(600) \approx C(600 + 1) - C(600)$, lo cual se había indicado antes.

El costo por unidad está dado por la función de costo promedio $Q(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Si se toma una función característica de costo promedio ésta podría ser:



Dicha función tiene un punto crítico, si se localiza este punto se tendrá el costo mínimo.

Al derivar $Q(x)$ se obtiene:

$$Q'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$$

Se iguala con cero $Q'(x)$, para obtener el valor $C'(x)$

$$\frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} = 0$$
$$xC'(x) - C(x) = 0$$
$$xC'(x) = C(x)$$
$$C'(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Pero $Q(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, entonces, $C'(x) = Q(x)$

Es decir, cuando el costo promedio es mínimo se tiene que es igual al costo marginal. Lo anterior conlleva al hecho de que si el costo marginal es menor que el costo promedio, entonces se debe producir más para disminuir el costo promedio y viceversa, si el costo marginal es mayor que el costo promedio se tendrá que producir menos para que el costo promedio baje.

2 El costo (en pesos) estimado para producir x artículos está dado por la función:

$$C(x) = 0.002x^2 + 2x + 3\,000$$

Determina el costo promedio y el costo marginal de producir 1 200 artículos y calcula el nivel de producción para el cual el costo promedio es el más bajo y cuál es dicho costo.

Solución

El costo promedio está dado por la fórmula $Q(x)=\dfrac{C(x)}{x}$, entonces:

$$Q(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{0.002x^2+2x+3000}{x} \quad\rightarrow\quad Q(x)=0.002x+2+\frac{3000}{x}$$

Se evalúa $x = 1\,200$

$$Q(1\,200)=0.002(1\,200)+2+\frac{3000}{1\,200}$$

Por tanto, el costo promedio de producir 1 200 artículos es de \$6.90

Para obtener el costo marginal se determina $C'(x)$ y se evalúa $x = 1\,200$

$$C'(x) = 0.004x + 2$$

$$C'(1\,200) = 0.004(1\,200) + 2 = 6.8$$

Por tanto, el costo marginal de producir 1 200 artículos es de \$6.80

El costo promedio se minimiza cuando es igual al costo marginal.

$$C'(x)=Q(x) \quad\rightarrow\quad 0.004x+2=0.002x+2+\frac{3000}{x} \quad\rightarrow\quad 0.004x=0.002x+\frac{3000}{x}$$

$$\rightarrow\quad 0.002x=\frac{3000}{x} \quad\rightarrow\quad 0.002x^2=300$$

$$x^2=\frac{3000}{0.002}$$

$$x=\sqrt{\frac{3000}{0.002}}\approx 1\,225$$

Para mostrar que $x = 1\,225$, se obtiene un mínimo, se determina $Q''(x)$ y se evalúa:

$$Q(x)=0.002x+2+\frac{3000}{x} \quad\rightarrow\quad Q'(x)=0.002-\frac{3000}{x^2}$$

$$Q''(x)=\frac{6\,000}{x^3}$$

$$Q''(1225)=\frac{3000}{(1225)^3}>0$$

Por tanto, para $x = 1\,225$ hay un mínimo.

El costo promedio se obtiene evaluando $x = 1\,225$ en $Q(x)$.

$$Q(x)=0.002x+2+\frac{3000}{x} \qquad Q(1225)=0.002(1\,225)+2+\frac{3000}{1225}=6.89$$

Finalmente, el costo promedio mínimo por artículo es de \$6.89 ≈ \$7.00

De la misma forma existen funciones marginales para el ingreso y la utilidad, en los dos casos es la derivada de cada función.

$$\text{Ingreso marginal} = I'(x)$$
$$\text{Utilidad marginal} = U'(x)$$

Ejemplo

Una empresa estima su ingreso y costo (en pesos) con las funciones $I(x) = -2x^2 + 340x$ y $C(x) = 3x^2 + 6\,000$, respectivamente. Determina el ingreso obtenido al producir la vigésima primera unidad y aproxima dicho valor con el ingreso marginal.

Solución

Se evalúan $x = 20$ y $x = 21$ en la función de ingresos:

$$I(20) = -2(20)^2 + 340(20) = 6\,000$$
$$I(21) = -2(21)^2 + 340(21) = 6\,258$$

El valor de la vigésima primera unidad es:

$$I(21) - I(20) = 6\,258 - 6\,000 = 258$$

Si se obtiene con el concepto ingreso marginal, se deriva $I(x)$ y se evalúa $x = 20$

$$I'(x) = -4x + 340$$
$$I'(20) = -4(20) + 340 = 260$$

En el comparativo se observa que el ingreso marginal da un valor muy aproximado a 258 que es el ingreso real de la vigésima unidad.

EJERCICIO 46

1. Dadas las funciones de ingreso y costo, $I(x)$ y $C(x)$ respectivamente, determina el ingreso máximo, la utilidad máxima y el costo medio mínimo:
   a) $I(x) = -x^2 + 300x$ y $C(x) = x^2 + 40x + 80$
   b) $I(x) = x(400 - 4x)$ y $C(x) = x^2 + 20x + 12$

Resuelve los siguientes problemas:

2. El costo estimado para producir x artículos está dado por la función:
   $$C(x) = 0.004x^2 + 5x + 6\,000$$
   Determina el costo promedio y el costo marginal de producir 2 000 artículos y calcula el nivel de producción para el cual el costo promedio es el más bajo y cuál es dicho costo.
3. Una empresa estima su ingreso y costo con las funciones $I(x) = -4x^2 + 400x$ y $C(x) = 2x^2 + 300$ respectivamente. Determina el ingreso obtenido al producir la trigésima primera unidad y aproxima dicho valor con el ingreso marginal.
4. Una empresa de telas estima que el costo para producir x metros de tela es $C(x) = 0.001x^3 - 0.2x^2 + 24x + 2\,400$ y que al vender x metros cobraría $p(x) = 58 - 0.00042x$ por metro. Determina el nivel de producción para obtener una utilidad máxima.
   Ingreso sugerido: $I(x) = p(x) \cdot x$
5. Un estadio de futbol tiene una capacidad para 60 000 espectadores. El promedio de asistencia fue de 32 000 espectadores, teniendo los boletos un costo de \$60.00 por persona, la gerencia decide bajar el precio por boleto a \$40.00, teniendo un promedio de 48 000 espectadores. Determina la función lineal de demanda $p(x)$ y calcula el precio por boleto para minimizar el ingreso.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables con $g'(x) \neq 0$ cerca de a (incluso en a)

Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

o

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

y para $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, tenemos una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$

Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

A esto le llamamos regla de L'Hôpital, la cual nos dice que el límite de un cociente de dos funciones es igual al límite del cociente de las derivadas de dichas funciones.

Esta regla es válida para los límites laterales ($x \to a^+$ o $x \to a^-$) y los límites al infinito ($x \to \infty$ o $x \to -\infty$)

Indeterminación $\dfrac{0}{0}$

Ejemplo

Obtén $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

Solución

Al evaluar se obtiene la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ y utilizando la regla se obtiene:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{d}{dx}(x^2-9)}{\frac{d}{dx}(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x}{1} = \frac{2(3)}{1} = 6$$

Indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$

Ejemplo

¿Cuál es el valor de $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x}{e^{x-1}}$?

Solución

Al evaluar se obtiene $\dfrac{\infty}{\infty}$, se aplica la regla y se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{e^{x-1}} = \frac{3}{\infty} = 0$$

Indeterminación $0 \cdot \infty$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, para $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x)$ tenemos una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. Entonces podemos utilizar la regla de L'Hôpital transformando el producto de la siguiente forma

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{o} \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Ejemplo

Determina $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

Solución

Al evaluar se obtiene

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} x^2 \cdot \lim_{x\to 0^+} \ln x = 0\cdot(-\infty)$$

Para resolver el límite, se escribe

$$x^2 \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$$

de tal forma que:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \ ; \ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^3}{2x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

Ejemplo

Obtén la solución de $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\tan x$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\tan x = \left(\frac{1}{0}\right)(\tan(0)) = \infty\cdot 0$$

Al aplicar la regla:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\tan x = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1} = \frac{\sec^2 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Indeterminación: $\infty - \infty$

Cuando se obtienen diferencias indeterminadas del tipo $\infty - \infty$ para $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x))$, siendo $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, se utiliza la regla de L'Hôpital transformando (si es posible) la diferencia a un cociente.

Ejemplo

Calcula el resultado del $\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \infty - \infty$$

Se aplica la regla y se calcula el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\,\operatorname{sen} x + \cos x - \cos x}{x\cos x + \operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\,\operatorname{sen} x}{x\cos x + \operatorname{sen} x}\right) = \frac{-0\,\operatorname{sen} 0}{0\cos 0 + \operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0}$$

Se observa que el resultado es $\frac{0}{0}$, por consiguiente, se utiliza de nuevo la regla:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\cos x-\operatorname{sen} x}{2\cos x-x\operatorname{sen} x}\right)$$

Al evaluar nuevamente se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\cos x-\operatorname{sen} x}{2\cos x-x\operatorname{sen} x}\right)=\frac{-0\cos 0-\operatorname{sen} 0}{2\cos 0-0\operatorname{sen} 0}=\frac{0}{2}=0\text{, entonces, }\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right]=0$$

- **Indeterminaciones del tipo 0^0, ∞^0 y 1^∞**

Para $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ se pueden obtener las siguientes formas indeterminadas:

- Si $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$ entonces se obtiene una indeterminación del tipo 0^0
- Si $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$ entonces se obtiene una indeterminación del tipo ∞^0
- Si $\lim_{x\to a} f(x)=1$ y $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ se obtiene una indeterminación del tipo 1^∞

Para estos casos se puede aplicar el logaritmo natural en $y=[f(x)]^{g(x)}$ y aplicar la propiedad $\ln b^n = n\ln b$, es decir:

Sea $\quad y=[f(x)]^{g(x)}$ entonces:

$$\ln y=\ln[f(x)]^{g(x)}$$

$$\ln y=g(x)\ln f(x)$$

De tal forma que esta transformación nos lleva a un producto indeterminado $g(x)\ln f(x)$ el cual es del tipo $0\cdot\infty$

Por otro lado también se puede utilizar la transformación: $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$

Ejemplo

Obtén el resultado de $\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x$

Solución

Al resolver directamente

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x=0^0$$

se obtiene la indeterminación 0^0 sea $y=(\cot x)^x$, aplicando el logaritmo natural en ambos lados se obtiene

$$\ln y=\ln(\cot x)^x$$

Aplicamos la propiedad $\ln b^n = n\ln b$ y se tiene:

$$\ln y = x\ln\cot x$$

Calculamos el límite para $\ln y$ y se transforma el producto

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+} x\ln\cot x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\frac{1}{x}}$$

Se aplica la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{\cot x}\right)(-\csc^2 x)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\tan x)\left(-\frac{1}{\text{sen}^2 x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right)\left(-\frac{1}{\text{sen}^2 x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\text{sen } x\cos x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\text{sen } x\cos x}=\frac{0}{0}$$

Se obtiene la indeterminación $\frac{0}{0}$, entonces se utiliza la identidad $\frac{1}{2}\text{sen } 2x=\text{sen } x\cos x$ y se aplica L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\text{sen } x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\frac{1}{2}\text{sen } 2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2}{\text{sen } 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x}{2\cos 2x}=\frac{4(0)}{2\cos 2(0)}=\frac{0}{2\cos 0}=\frac{0}{2}=0$$

por tanto $\lim_{x\to 0^+}\ln y=0$

Pero queremos el límite de y, entonces partiendo de la propiedad $e^{\ln b}=b$ se escribe $y=e^{\ln y}$
Entonces

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x=\lim_{x\to 0^+}y=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln y}=e^0=1$$

Por tanto $\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x=1$

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de $\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{\tan x}$?

Solución

Sea $y=(1-\cos x)^{\tan x}$, aplicando logaritmo natural en ambos lados se obtiene:

$$\ln y=\ln(1-\cos x)^{\tan x}$$

$$\ln y=(\tan x)\ln(1-\cos x)$$

$$\ln y=\frac{1}{\cot x}\ln(1-\cos x)$$

$$\ln y=\frac{\ln(1-\cos x)}{\cot x}$$

Aplicando el límite y luego la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\cos x)}{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\dfrac{1}{1-\cos x}\right)(\operatorname{sen} x)}{-\csc^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}}{-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{(1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}[-(1+\cos x)\operatorname{sen} x] = -(1+\cos(0))\operatorname{sen}(0)$$

$$= -(1+1)(0) = -(2)(0) = 0$$

Por tanto $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = 0$ pero se quiere el límite de y, entonces sea $y = e^{\ln y}$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1$$

por tanto $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{\tan x} = 1$

Ejemplo

Determina $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

Solución

Al sustituir directamente se obtiene:

$$\lim_{x\to 0^+}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$$

sea $y = (1-2x)^{\frac{1}{x}}$, al aplicar logaritmo natural

$$\ln y = \ln(1-2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln(1-2x)$$

$$\ln y = \frac{\ln(1-2x)}{x}$$

Se obtiene el límite de ln y y se aplica L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-2x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\dfrac{2}{1-2x}}{1} = \lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{2}{1-2x}\right] = -\frac{2}{1-2(0)} = -\frac{2}{1} = -2$$

Por tanto $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = -2$

Para calcular el límite de y hacemos $y = e^{\ln y}$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0^+}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e^2}$$

EJERCICIO 47

Obtén los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-125}{x^2-25}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(3-x)}{x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{3x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\tan x)^x$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{2x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}(\sec x)^{\frac{1}{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}(x\csc 3x)$
9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos x+\operatorname{sen} x)^{\tan x}$
10. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln(2x+1)-\ln(x+2)}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x+\ln x}{2x-\ln x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\operatorname{sen} 2x-1}{\ln(1+2x)}$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$
14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}\right)$
15. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-x}{x^3}\right)$
17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$
18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(\frac{3x+2}{x+2}\right)$
19. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$
20. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\sec x-\tan x)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teorema de Rolle

Definición
Sea $f(x)$ una función que satisface las siguientes condiciones:

1. Es continua en el intervalo $[a, b]$.
2. Es derivable en el intervalo (a, b).
3. $f(a) = f(b) = 0$
4. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica el teorema de Rolle para la función $f(x) = x^2 - x - 6$ en el intervalo $[-2, 3]$ y determina el valor de c en dicho intervalo.

Solución

1. $f(x)$ es una función polinomial, por tanto, es continua en todos los números reales, en particular en el intervalo $[-2, 3]$
2. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 2x - 1$; $f'(x)$ es definida en los números reales, en particular está definida en el intervalo $(-2, 3)$ y es continua.
3. $f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$; $f(3) = (3)^2 - (3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$
4. Por tanto, $f(x)$ satisface el teorema de Rolle.

Para obtener el valor de c se emplea:

$$f'(c) = 0 \quad \rightarrow \quad 2c - 1 = 0$$

Se resuelve la última ecuación y se obtiene:

$$c = \frac{1}{2} \text{ y } \frac{1}{2} \in (-2, 3)$$

2 Verifica si la función $f(x)=x^3-5x^2+2x+8$ satisface el teorema de Rolle en los intervalos $[-1, 2]$, $[2, 5]$ y encuentra los respectivos valores de c en estos intervalos.

Solución

1. $f(x)$ es una función polinomial, por tanto, es continua en toda la recta real y en consecuencia es continua en los intervalos propuestos.
2. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$; esta función es continua en los intervalos $(-1, 2)$ y $(2, 5)$ por ser una función polinomial.
3. Para el intervalo $[-1, 2]$

$$f(-1) = (-1)^3 - 5(-1)^2 + 2(-1) + 8 = -1 - 5 - 2 + 8 = 0$$

$$f(2) = (2)^3 - 5(2)^2 + 2(2) + 8 = 8 - 20 + 4 + 8 = 0$$

$$f(-1) = f(2)$$

El teorema de Rolle se cumple para este intervalo.
Para el intervalo $[2, 5]$

$$f(2) = 0$$

$$f(5) = (5)^3 - 5(5)^2 + 2(5) + 8 = 125 - 125 + 10 + 8 = 18$$

$$f(2) \neq f(5)$$

En este intervalo no se satisface el teorema de Rolle.

4. Se buscan los valores posibles de c en el intervalo $[-1, 2]$:

$$f'(c) = 0 \quad \rightarrow \quad 3c^2 - 10c + 2 = 0$$

Se resuelve la ecuación cuadrática para obtener los valores de c,

$$c = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100-24}}{6}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{76}}{6}$$

$$= \frac{10 \pm 8.717}{6}$$

$$c = 3.119$$

$$c = 0.213$$

EJERCICIO 48

Verifica el teorema de Rolle en los intervalos indicados y halla los posibles valores de c para las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2 - 4$; $[-2, 2]$
2. $f(x) = 2x^2 - 3x$; $\left[0, \frac{3}{2}\right]$
3. $f(x) = x^2 - 5x + 6$; $[2, 3]$

4. $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$; $\left[-3, -\frac{1}{2}\right]$ y $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

5. $f(x) = x^3 - 9x$; $[-3,0]$ y $[0,2]$

6. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$; $[-2, 2]$

7. $f(x) = x^3 - 13x + 12$; $[-4,1]$ y $[1,3]$

8. $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$; $[-5,0]$, $[-5,5]$ y $[0,5]$

9. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^4 + 1}$; $[-2,0]$, $[-2,2]$ y $[0,2]$

10. $f(x) = \cos x$; $[-\pi,\pi]$ y $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

11. $g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 \\ 8 - 5x \end{cases}$; si $\begin{matrix} x < 1 \\ x > 1 \end{matrix}$; $\left[-2, \frac{8}{3}\right]$

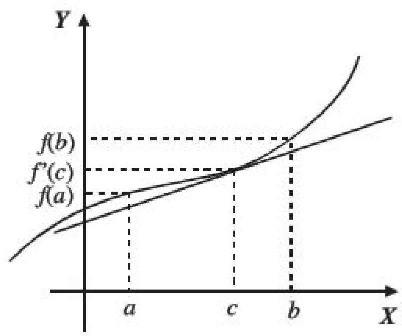
12. $h(x) = x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}}$; $[0,16]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teorema del valor medio

Dada una función $f(x)$ tal que:

1. $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$
2. $f(x)$ es diferenciable en el intervalo (a, b)
3. Entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica que la función $f(x) = x^2 - 4$ satisfaga el teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 3]$ y encuentra el valor de c.

Solución

1. $f(x)$ es continua en $[-1, 3]$, ya que está definida en todos los puntos de este intervalo.
2. Como $f(x)$ es una función polinomial, entonces es continua y diferenciable en el intervalo $(-1, 3)$, $f'(x) = 2x$
3. Para buscar a c se sustituye en la fórmula:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)}$$

$$2c = \frac{5 - (-3)}{4}$$

$$c = \frac{8}{8} = 1$$

Por tanto, el valor de c es igual a 1.

2 Verifica si la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ satisface el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y calcula el valor de c.

Solución

1. $f(x)$ es una función polinomial, entonces $f(x)$ es continua en todos los puntos del intervalo $[0, 2]$
2. Al ser $f(x)$ continua en el intervalo $[0, 2]$ entonces es derivable en el intervalo $(0, 2)$ y $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$, aplicando el teorema del valor medio se obtiene el valor de c.

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \quad \rightarrow \quad 3c^2 + 2c - 2 = \frac{8 - 0}{2}$$

$$3c^2 + 2c - 2 = 4$$

$$3c^2 + 2c - 6 = 0$$

Al resolver la ecuación para c:

$$c = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(3)(-6)}}{2(3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} = \begin{cases} c = 1.12 \\ c = -1.78 \end{cases}$$

El valor de c que pertenece al intervalo $(0, 2)$ es $c = 1.12$

3 Verifica si la función $f(x) = x^2 + 5x + 4$, satisface el teorema del valor medio en el intervalo [1, 3] y determina el valor de c.

Solución

1. La función es continua en el intervalo [1, 3], ya que está definida en todos los puntos del intervalo.
2. La función es polinomial y continua en el intervalo [1, 3] entonces, es diferenciable en ese intervalo $f'(x) = 2x + 5$
3. Para encontrar c se aplica la fórmula: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$2c + 5 = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}; \qquad 2c + 5 = \frac{28 - 10}{3 - 1}$$

$$2c + 5 = 9$$

$$2c = 4$$

$$c = 2$$

EJERCICIO 49

Verifica el teorema del valor medio para las siguientes funciones en los intervalos indicados y determina el valor adecuado de c.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$; [0, 3]
2. $f(x) = 4 + x^2$; [−1, 2]
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; [1, 3]
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$; [−2, 1]
5. $f(x) = \sqrt{x+1}$; [0, 8]
6. $f(x) = x^3 + 5x$; [−2, 1]
7. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$; $[-\pi, \pi]$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$; [0, 7]
9. $f(x) = e^x$; [0, 1]
10. $f(x) = \ln(2x + 1)$; [0, 4]

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Diferenciales

Se define la diferencial de una función f en un punto x, como el producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente y se denota por las expresiones $df(x)$ o dy, es decir:

$$df(x) = f'(x)dx \text{ o } dy = \frac{dy}{dx}dx \text{ ; para toda } dx \neq 0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la diferencial de la función $y = x^2 - 5x + 6$

Solución

Se obtiene la derivada y se multiplica por dx:

$$dy = \frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 6) \cdot dx$$

$$dy = (2x - 5)dx$$

Por tanto, la diferencial es: $dy = (2x - 5)dx$

2 Determina la diferencial de la función $y = \sqrt{x^2 - 5}$

Solución

Se deriva la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{x^2 - 5}}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - 5)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d(x^2 - 5)}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - 5)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$$

Por consiguiente,

$$dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}\,dx$$

3 Obtén la diferencial de la función $f(\theta) = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$

Solución

Se deriva la función:

$$\begin{aligned}\frac{df(\theta)}{d\theta} &= \frac{d2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{d\theta} = 2\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d\cos\theta}{d\theta} + \cos\theta\frac{d \operatorname{sen}\theta}{d\theta}\right]\\ &= 2[\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\theta) + \cos\theta(\cos\theta)]\\ &= 2[\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta]\end{aligned}$$

Pero $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$, entonces:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = 2\cos 2\theta$$

Entonces

$$df(\theta) = 2\cos 2\theta\, d\theta$$

4 Obtén la diferencial de la función $y = \text{arc sen}(1 - x^2)$

Solución

Se deriva la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\text{ arc sen}(1-x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}\frac{d}{dx}(1-x^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x^2+x^4)}}(-2x)$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$$

$$= \frac{-2x}{x\sqrt{2-x^2}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$$

Por consiguiente, $dy = -\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

EJERCICIO 50

Determina la diferencial de las siguientes funciones:

1. $y = ax$
2. $y = ax^2 + bx + c$
3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$
4. $s = \sqrt{t} - \sqrt[3]{t}$
5. $h(t) = (5 - 3t^2)^6$
6. $y = (x^2 - 2)^{-3}$
7. $y = \left(2+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$
8. $y = x\sqrt{x^2+2}$
9. $f(x) = (x-1)^3(x+3)^4$
10. $h(s) = \dfrac{2s-1}{2s+3}$
11. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$
12. $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}}$
13. $y = \sqrt{\dfrac{ax^2+b}{ax^2-b}}$
14. $f(x) = x - \cos 2x$
15. $f(t) = \tan^3 2t$
16. $y = (1 - \sec x)^2$
17. $g(x) = \dfrac{1-\text{sen } x}{1+\text{sen } x}$
18. $s(t) = \dfrac{\sqrt{\cos t}}{t}$
19. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}}$
20. $y = \log(x^2 + 5)$

21. $y = \ln\sqrt{x^2 - 3}$

22. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

23. $y = e^{\sqrt{x^3}}$

24. $y = 2^{x^3+5}$

25. $h(t) = \dfrac{e^t}{e^t - e^{-t}}$

26. $f(x) = x^2 \ln x$

27. $f(x) = \text{arc cos } 2x$

28. $y = \text{arc tan}\dfrac{2}{x}$

29. $y = \text{arc sec}\sqrt{x}$

30. $y = \text{arc csc}(3x^3)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Aplicaciones de la diferencial

Sea $y = f(x)$ una función, si se da a x un incremento Δx, la variable y recibe un incremento Δy, que se considera un valor muy próximo a dy, entonces el valor aproximado de $f(x + \Delta x)$ es:

$$f(x + \Delta x) \approx y + \Delta y \approx y + f'(x)dx \approx y + dy$$

A esta expresión se le llama aproximación lineal y sirve para aproximar valores de funciones.

Aproximación lineal

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el valor aproximado de $\sqrt{25.020}$

Solución

Se asocia a la operación la siguiente función:

$$y = \sqrt{x}$$

Se busca un valor x próximo a 25.020, cuya raíz cuadrada sea exacta, en este caso $x = 25$, $y = \sqrt{25} = 5$; las veinte milésimas restantes se toman como la diferencial de la variable x.

$$dx = 0.020 = \frac{1}{50}$$

Se obtiene su diferencial:

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{25}}\left(\frac{1}{50}\right) = \frac{1}{500}$$

$$dy = \frac{1}{500}$$

Los valores se evalúan en la fórmula:

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$\sqrt{25.020} = \sqrt{25 + 0.02} \approx 5 + \frac{1}{500} \cong \frac{2501}{500} = 5.002$$

Por consiguiente, $\sqrt{25.020} \approx 5.002$

2 Determina el valor aproximado de $\sqrt[3]{70}$

Solución

Se asocia a la operación la siguiente función:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

Se busca un valor x próximo a 70, cuya raíz cúbica sea exacta, en este caso $x = 64$, y las seis unidades restantes son tomadas como la diferencial de la variable x, es decir, $dx = 6$

Se obtiene la diferencial:

$$dy = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$$

$$dy = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{64}\right)^2}(6) = \frac{1}{8}$$

Los valores se evalúan en la fórmula:

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$\sqrt[3]{70} = \sqrt[3]{(64+6)} \approx 4 + \frac{1}{8} = \frac{33}{8}$$

Por tanto, $\sqrt[3]{64} \approx \frac{33}{8} = 4.125$

3 Obtén el valor aproximado de cos 40°

Solución

La función asociada a la operación es:

$$y = \cos x$$

Se busca un valor x próximo a 40°, en este caso $x = 30° = \frac{\pi}{6}$, $y = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y los $10° = \frac{\pi}{18}$ restantes es el valor de la diferencial de x.

$$dx = \frac{\pi}{18}$$

Se obtiene su diferencial:

$$dy = -\text{sen}\, x\, dx$$

$$dy = (-\text{sen}\, 30°)\left(\frac{\pi}{18}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{18}\right)$$

$$dy = -\frac{\pi}{36}$$

Los valores se evalúan en la fórmula:

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$\cos 40° \approx \cos(30° + 10°) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{36} = \frac{18\sqrt{3} - \pi}{36} = 0.778758941$$

Finalmente, $\cos 40° \approx \frac{18\sqrt{3} - \pi}{36}$

Aproximación del aumento o disminución de funciones

Ejemplo

Al enfriar una placa cuadrada metálica de 8 cm de longitud, su lado disminuye un 0.03%. ¿Cuánto disminuirá porcentualmente su área?

Solución

Se determina cuánto disminuyó el lado de la placa, para ello se obtiene el 0.03% de 8.

$$(8)(0.0003) = 0.0024$$

Si x = lado de la placa, entonces $dx = -0.0024$ cm, el signo menos indica que decrece el lado.
Luego:
El área de la placa es:

$$A = x^2$$

La disminución en el área es:

$$dA = 2x\,dx$$

$$dA = 2(8\text{ cm})(-0.0024\text{ cm}) = -0.0384\text{ cm}^2$$

Por último, se determina qué porcentaje representa 0.0384 del área total de la placa, es decir:

$$A = x^2 = (8\text{ cm})^2 = 64\text{ cm}^2$$

$$\text{Porcentaje de la disminución de su área} = \frac{(0.0384\text{ cm}^2)(100\%)}{64\text{ cm}^2} = 0.06\%$$

Por lo tanto, el área disminuye 0.06%

Estimación de errores de magnitudes

Ejemplo

Se calculó la longitud del lado de un cuadrado y éste mide 2.5 cm, con un error de 0.02 cm. Determina el máximo error que se comete al medir el área del cuadrado.

Solución

El área se determina con la fórmula $A = x^2$, se obtiene la diferencial $dA = 2x\,dx$, al sustituir se obtiene $dA = 2(2.5\text{ cm})(0.02\text{ cm}) = 0.1\text{ cm}^2$; dA representa el máximo error cometido en la medición del área.

- **Error relativo y error porcentual.**

$$\text{error relativo} = \frac{dv}{v}\text{ ; error porcentual} = 100\frac{dv}{v}$$

Ejemplo

Se calculó el radio de una esfera y éste mide 4.5 cm con un error máximo de 0.035 cm. Calcula el error relativo y porcentual que se obtiene al medir el volumen.

Solución

Del problema se obtiene:

$$r = 4.5\text{ cm} \quad \rightarrow \quad dr = 0.035\text{ cm}$$

La fórmula del volumen es $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ y su diferencial es $dv = 4\pi r^2 dr$

Entonces, el error máximo cometido al medir el volumen es:

$$dv = 4\pi r^2 dr = 4\pi(4.5\text{ cm})^2(0.035\text{ cm})$$

$$dv = 2.835\pi\text{ cm}^3$$

Luego, el volumen de la esfera con radio 4.5 cm es:

$$v = \frac{4}{3}\pi(4.5\text{ cm})^3 = 121.5\pi\text{ cm}^3$$

Por tanto, el error relativo es:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2.835\pi\text{ cm}^3}{121.5\pi\text{ cm}^3} \rightarrow \frac{dv}{v} = 0.02\overline{3}$$

Y el error porcentual:

$$100\frac{dv}{v} = 100(0.02\overline{3}) \rightarrow 100\frac{dv}{v} = 2.\overline{3}\%$$

EJERCICIO 51

Calcula el valor más aproximado de las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{86}$
2. $\sqrt[3]{35}$
3. $\sqrt[4]{20}$
4. sen 38°
5. $\sqrt{6} + \cos 50°$
6. $\sqrt[3]{130} + 2\tan 63°$
7. $(123.5)^{\frac{3}{2}}$
8. sen 53° − cos 44°
9. $\text{sen}^4\, 29°$
10. cot 75°
11. Una placa circular de radio 3.8 cm, se introduce en un horno, aumentando su radio en 0.012 cm. ¿Cuál es el aumento en la superficie de la placa?
12. La longitud de las aristas de un cubo es de 5.9 cm cada una, se midieron con un error máximo de 0.032 cm. Determina el máximo error que se cometió al medir su superficie y volumen.
13. Se calculó el diámetro de la base de un cilindro circular y éste midió 7.2 cm, con un error máximo de 0.05 cm. Calcula el error máximo que se cometió al medir el volumen si la altura es constante e igual a 10 cm.
14. Se midió un lado de un cuadrado y se cometió un error máximo de 0.012 cm. Calcula la longitud de uno de sus lados si el error máximo que se cometió al medir su área es de 0.192 cm^2.
15. Calcula el error relativo y porcentual que se comete al medir el volumen y la superficie de una esfera, si su radio mide 12 cm y el error máximo que se cometió al medirlo es de 0.015 cm.
16. El error relativo que se comete al medir el área de un cuadrado es de 0.18, si el error que se comete al medir la longitud de uno de sus lados es de 0.01 cm. Encuentra la longitud de cada uno de los lados del cuadrado.
17. El error relativo al medir el volumen de una esfera es de 0.02. Calcula el error máximo cometido al medir su diámetro, si éste mide 3 cm.
18. Calcula el error relativo y porcentual que se comete al medir el área lateral de un cilindro de base circular, si al medir el diámetro de la base se obtiene 4.5 cm con un error máximo de 0.004 cm y la altura es de 5.6 cm.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente