CAPÍTULO 4

LA DERIVADA

Reseña HISTÓRICA

En un periodo de menos de dos años, cuando Newton tenía menos de 25 años, comenzó con avances revolucionarios en matemática, óptica, física y astronomía.

Mientras Newton estaba en casa (debido a una peste que cerró la Universidad de Cambridge) estableció las bases del cálculo diferencial e integral. El método de las fluxiones, como él lo llamó, estaba basado en su crucial visión de que la integración de una función era el procedimiento inverso de su derivación.

Al considerar a la derivación como la operación básica, Newton produjo sencillos métodos analíticos que unificaban muchas técnicas diferentes desarrolladas previamente para resolver problemas, en apariencia no relacionados, como calcular áreas, tangentes, longitud de curvas y los máximos y mínimos de funciones. El *De Methodis Serierum et Fluxionum* de Newton fue escrito en 1671, pero Newton no pudo publicarlo y no apareció impreso hasta que John Colson produjo una traducción al inglés en 1736.

Sir Isaac Newton
(1643-1727)

Definición

Sea $f(x)$ una función, se define a su derivada $f'(x)$, como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Para toda x, siempre que el límite exista y se representa por:

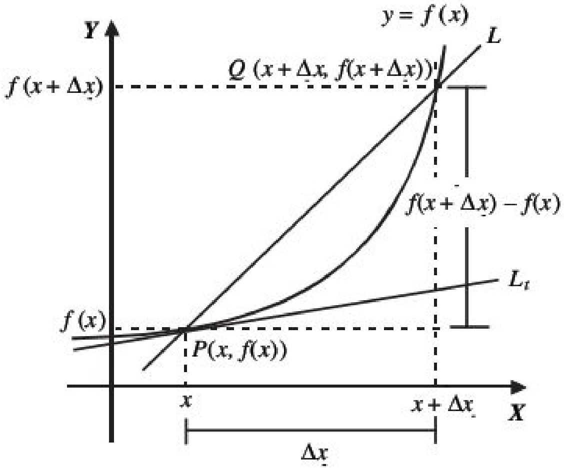
$$y', f'(x), \frac{dy}{dx} \text{ o } D_x y$$

Interpretación geométrica

El valor de la derivada en cualquier punto de la curva es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto. Donde:

Δx: incremento en x

Δy: incremento en y



En la gráfica se observa que la pendiente de la recta L es:

$$m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si Δx tiende a cero, la recta L coincide con L_t, entonces la pendiente de L_t será el límite de m_t.

$$\lim_{\Delta x \to 0} m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Por definición, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Regla de los cuatro pasos

Sea una función $y = f(x)$, entonces:

1. $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

2. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (razón de cambio)

4. $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (derivada de la función)

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la derivada de la función $f(x) = 5x - 6$

Solución

Se aplica la regla de los cuatro pasos y se obtiene:

1. $y + \Delta y = 5(x + \Delta x) - 6$

2. $\Delta y = (5x + 5\Delta x - 6) - (5x - 6)$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(5x + 5\Delta x - 6) - (5x - 6)}{\Delta x} = \dfrac{5x + 5\Delta x - 6 - 5x + 6}{\Delta x} = \dfrac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 5 = 5$ (derivada de la función)

Este resultado se obtiene también cuando se utiliza la definición, como sigue:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[5(x + \Delta x) - 6] - (5x - 6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x + 5\Delta x - 6 - 5x + 6}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (5) = 5$$

Por tanto, la derivada de la función $f(x) = 5x - 6$ es: $f'(x) = 5$

2 Aplica la definición y determina la derivada de $y = 7x^2 - 5x + 9$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[7(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 9] - (7x^2 - 5x + 9)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2) - 5x - 5\Delta x + 9 - 7x^2 + 5x - 9}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7x^2 + 14x\Delta x + 7\Delta x^2 - 5x - 5\Delta x + 9 - 7x^2 + 5x - 9}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{14x\Delta x + 7\Delta x^2 - 5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (14x + 7\Delta x - 5) = 14x - 5$$

Por consiguiente, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = 14x - 5$$

3 Encuentra la derivada de la función $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+5}$, aplica la definición.

Solución

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2(x+\Delta x)-1}{x+\Delta x+5}-\dfrac{2x-1}{x+5}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2x+2\Delta x-1}{x+\Delta x+5}-\dfrac{2x-1}{x+5}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{(x+5)(2x+2\Delta x-1)-(2x-1)(x+\Delta x+5)}{(x+\Delta x+5)(x+5)}}{\Delta x}$$ al simplificar,

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{11\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x+5)(x+5)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{11}{(x+\Delta x+5)(x+5)}$$ se resuelve el límite

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\frac{11}{(x+5)^2}$$

4 ¿Cuál es la derivada de la función $y=\sqrt{x+2}$?

Solución

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2}}{\Delta x}$$ se racionaliza la expresión

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x+2-x-2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$$

De tal manera que, al resolver el límite se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

EJERCICIO 28

Deriva las siguientes funciones, utiliza la definición.

1. $y = 3x + 2$
2. $y = 2a - bx$
3. $y = x^2$
4. $f(x) = 3x^2 - 5x$
5. $y = ax^2 + bx + c$
6. $y = x^3$
7. $y = x^3 - x^2$
8. $y = \dfrac{4x^2 - 16}{x - 2}$
9. $y = \dfrac{2x}{x - 1}$
10. $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
11. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$
12. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
13. $f(x) = \sqrt{x - 2}$
14. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
15. $y = \sqrt[3]{2x + 1}$
16. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
17. $y = \sqrt[3]{x}$
18. $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x - 1}}$
19. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 3}}$
20. $y = \sqrt[n]{x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fórmulas para determinar la derivada de una función algebraica

La forma directa de obtener la derivada de una función algebraica es la aplicación de las siguientes fórmulas:

1. $\dfrac{d}{dx} c = 0$
2. $\dfrac{d}{dx} x = 1$
3. $\dfrac{d}{dx} cv = c\dfrac{dv}{dx}$
4. $\dfrac{d(u + v - w)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx} - \dfrac{dw}{dx}$
5. $\dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$
6. $\dfrac{d}{dx} v^n = nv^{n-1}\dfrac{dv}{dx}$
7. $\dfrac{d}{dx}\sqrt[n]{v} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{v^{n-1}}}\dfrac{dv}{dx}$
8. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{v} = \dfrac{1}{2\sqrt{v}}\dfrac{dv}{dx}$
9. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
10. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$
11. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{v}\right) = -\dfrac{c}{v^2}\dfrac{dv}{dx}$
12. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{c}\right) = \dfrac{1}{c}\dfrac{dv}{dx}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la derivada de la función $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$?

Solución

Al aplicar las fórmulas respectivas se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 - 4x + 5) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(2x^2) - \frac{d}{dx}(4x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^3) + 2\frac{d}{dx}(x^2) - 4\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 3x^2 + 2(2x) - 4(1) = 3x^2 + 4x - 4$$

2 Deriva la función $y = \sqrt[3]{x^2}$

Solución

Aplicamos el hecho de que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ y posteriormente $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

3 Calcula la derivada de la función $s = \frac{1}{\sqrt[5]{t}}$

Solución

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{t}}\right) = \frac{d}{dt}\left(t^{-\frac{1}{5}}\right) = -\frac{1}{5}t^{-\frac{1}{5}-1} = -\frac{1}{5}t^{-\frac{6}{5}} = -\frac{1}{5t^{\frac{6}{5}}} = -\frac{1}{5\sqrt[5]{t^6}}$$

pero $\sqrt[5]{t^6} = \sqrt[5]{t^5 \cdot t} = t\sqrt[5]{t}$, por tanto $\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{5t\sqrt[5]{t}}$

4 Obtén la derivada de la función $y = \frac{4}{x}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{d}{dx}(4x^{-1}) = 4\frac{d}{dx}(x^{-1}) = 4(-1x^{-1-1}) = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$$

5 Determina la derivada de la función $y = 2\sqrt[3]{x} - \frac{7}{\sqrt{x}}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{3}} - 7x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{d}{dx}\left(7x^{-\frac{1}{2}}\right) = 2\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - 7\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\right) - 7\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{7}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{7}{2x\sqrt{x}}$$

6 ¿Cuál es la derivada de la función $y = (3x^2 - x)^7$?

Solución

Se aplica la fórmula $\dfrac{d(v^n)}{dx} = nv^{n-1}\dfrac{dv}{dx}$ y se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 7(3x^2 - x)^6 \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - x) = 7(3x^2 - x)^6 \cdot \left(\frac{d3x^2}{dx} - \frac{dx}{dx}\right) = 7(3x^2 - x)^6(6x - 1)$$

$$= (42x - 7)(3x^2 - x)^6$$

7 Encuentra la derivada de la función $s = \sqrt[3]{8 + 4t - t^3}$

Solución

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(8 + 4t - t^3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(8 + 4t - t^3)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \frac{d}{dt}(8 + 4t - t^3) = \frac{1}{3}(8 + 4t - t^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4 - 3t^2)$$

$$= \frac{4 - 3t^2}{3(8 + 4t - t^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{4 - 3t^2}{3\sqrt[3]{(8 + 4t - t^3)^2}}$$

8 Deriva la función $y = -\dfrac{5}{\left(\sqrt{x} - x\right)^3}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[-\frac{5}{\left(\sqrt{x} - x\right)^3}\right] = \frac{d}{dx}\left[-5\left(\sqrt{x} - x\right)^{-3}\right] = -5\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} - x\right)^{-3}$$

$$= -5\left[-3\left(\sqrt{x} - x\right)^{-4} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} - x\right)\right]$$

$$= 15\left(\sqrt{x} - x\right)^{-4} \cdot \left(\frac{d}{dx}\sqrt{x} - \frac{d}{dx}x\right)$$

$$= \frac{15}{\left(\sqrt{x} - x\right)^4}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right)$$

$$= \frac{15}{\left(\sqrt{x} - x\right)^4}\left(\frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{15\left(1 - 2\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - x\right)^4}$$

9 Calcula la derivada de la función $y = x\sqrt{x+1}$

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x+1}\right) = x\frac{d}{dx}\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}\,\frac{dx}{dx} = x\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) + \sqrt{x+1} = \frac{x}{2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}$$

$$= \frac{x+2(x+1)}{2\sqrt{x+1}} = \frac{x+2x+2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

Por consiguiente, $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

10 Obtén la derivada de la función $f(x) = \frac{x^2-5}{1-3x^2}$

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ y se obtiene:

$$f'(x) = \frac{(1-3x^2)(2x)-(x^2-5)(-6x)}{(1-3x^2)^2} = \frac{2x-6x^3+6x^3-30x}{(1-3x^2)^2} = -\frac{28x}{(1-3x^2)^2}$$

EJERCICIO **29**

Deriva las siguientes funciones:

1. $y = -10$
2. $y = 5$
3. $f(x) = a^2$
4. $s(t) = b^2$
5. $y = 6x$
6. $y = \frac{3}{4}x$
7. $f(x) = ax$
8. $s(t) = b^2 t$
9. $f(x) = 5x\sqrt{2}$
10. $y = ax\sqrt{b}$
11. $f(x) = x^5$
12. $f(x) = 4x^3$
13. $s(t) = \frac{1}{5}t^4$
14. $y = x^{\frac{9}{2}}$
15. $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$
16. $y = 6x^{\frac{3}{2}}$
17. $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$
18. $f(x) = 4x^{\frac{1}{4}}$
19. $f(x) = \sqrt{x}$
20. $s(t) = \sqrt[4]{t}$
21. $f(x) = 5\sqrt[5]{x}$
22. $f(x) = \frac{x^5}{7}$

23. $f(x) = \dfrac{x^4}{9}$

24. $s(t) = \dfrac{t^3}{a}$

25. $f(x) = \dfrac{5}{x^4}$

26. $f(x) = \dfrac{2}{x^6}$

27. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

28. $s(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t}}{5}$

29. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

30. $s(t) = \dfrac{5}{\sqrt[4]{t}}$

31. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

32. $f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 3x - 12$

33. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - x - 6$

34. $f(x) = 5x^2 + 4x + 4mn - 2$

35. $f(x) = 3ax^4 - 4ax^3 - 5bx^2 + 7cx$

36. $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^2}{5} - \dfrac{4x}{9} - \dfrac{1}{5}$

37. $s(t) = \dfrac{t^5}{6} - \dfrac{t^4}{5} + \dfrac{t^3}{4} - \dfrac{t^2}{7} + \dfrac{t}{9} - \dfrac{2}{3}$

38. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \dfrac{x}{a} + \dfrac{c}{b}$

39. $s(t) = \dfrac{4}{t^2} - \dfrac{5}{t} - \dfrac{9}{5}$

40. $f(x) = \dfrac{5}{x^4} - \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{7}{x^2} - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{5}$

41. $s(t) = \dfrac{t^3}{5} - \dfrac{2}{t^2} + \dfrac{6}{t} - \dfrac{3}{5}$

42. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{5} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$

43. $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 3x + 2}{x}$

44. $f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{5}{2}x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{4}{3}x^{-\frac{3}{2}}$

45. $f(x) = 8\sqrt{x} + 9\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[2]{x^3}$

46. $f(x) = ax^n + bx^{n-1}$

47. $f(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{5x}{7} - \dfrac{8}{5}$

48. $f(x) = a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[3]{x}$

49. $y = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{\sqrt[4]{x^5}}{3}$

50. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^5}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^{-1}}$

51. $f(x) = \dfrac{7}{x^{-2}} + \dfrac{5}{x^{-3}}$

52. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{5}{x} - 2x$

53. $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5x + 8}{\sqrt[3]{x}}$

54. $y = \sqrt{x^{-1}}\left(\sqrt{x} - \dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)$

55. $y = (3x - 4)^5$

56. $y = (2 - 4x)^3$

57. $y = (3x^6 - 2x^4)^4$

58. $y = \left(4x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)^3$

59. $y = \sqrt{5 - 3x^2}$

60. $y = \sqrt[3]{x^3 + 2}$

61. $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{-1}$

62. $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{2x^2 + 6x}$

63. $y = \left(\dfrac{x}{3} + 6\sqrt{x}\right)^3$

64. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 - 2}$

65. $f(x) = (x^2 + 5x - 3)^3$

66. $y = \sqrt[3]{(2x-3)^2}$

67. $y = \sqrt{\sqrt{4x+3}}$

68. $f(x) = \left(\frac{1}{3}x + 2\right)^3$

69. $y = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

70. $f(z) = \sqrt{z^2 - 4}$

71. $y = \sqrt[3]{x^6 + 3x}$

72. $y = \left(4x^2 - \frac{1}{2}x\right)(9x + 8)$

73. $y = (5x-3)\left(4x - \frac{3}{x}\right)$

74. $y = x^3(3x+1)$

75. $f(x) = x\sqrt{2x+1}$

76. $y = \frac{x}{3}(2x+1)^3$

77. $y = x^2\sqrt{x-1}$

78. $f(x) = (3x^2 - 5)^4(2x^2 + 1)^3$

79. $f(\theta) = (\theta^2 + 1)^3(\theta^3 - 2)^2$

80. $s = \frac{\sqrt{4-3t}}{t^{-1}}$

81. $s(t) = t^3\left(\frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}\right)^2$

82. $f(x) = \frac{6}{2-4x}$

83. $f(t) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}$

84. $f(r) = \frac{r^2 - 3}{\sqrt{r^2 - 4}}$

85. $f(t) = \frac{6t - 3}{5t + 8}$

86. $f(z) = \frac{6 - 3z}{5 - 6z}$

87. $f(x) = \frac{ax + b}{ax - b}$

88. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{3x}}{3}$

89. $f(t) = \sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}}$

90. $f(w) = \left(\frac{w-3}{w+2}\right)^2$

91. $f(\theta) = \frac{6(2-\theta^3)}{3-2\theta}$

92. $f(s) = \frac{s^2 - 2}{s^2 - 6s}$

93. $f(x) = \frac{5x^2}{2\sqrt{b^2 + x^2}}$

94. $f(t) = \frac{(9t-6)^3}{(27-3t)^2}$

95. $f(x) = \frac{4xb}{2a - 6x}$

96. $f(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$

97. $y = \frac{2}{\sqrt{x^4 - a^4}}$

98. $y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2 + 3}}$

99. $y = (2x+3)\sqrt{x^2 + 3x}$

100. $y = \frac{x\sqrt{x+1}}{x+1}$

101. $y = \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x-3}}$

102. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x^3-1}}$

103. $y = \dfrac{\sqrt{x^n+1}}{\sqrt{x^n-1}}$

104. $y = \dfrac{\sqrt[m]{x^n}}{\sqrt[m]{x^n}-1}$

105. $y = \dfrac{x\sqrt{2x+1}}{\sqrt{4-5x}}$

106. $y = 2x\sqrt[3]{\dfrac{2x^3+1}{2x^3-1}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Regla de la cadena

Sea $y = g(u)$, $u = f(x)$, entonces la derivada de $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, se define:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

EJEMPLOS

1. Encuentra $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = u^2 - 9$; $u = x^2 + 1$

Solución

Por definición $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$, entonces $\dfrac{dy}{du} = 2u$ y $\dfrac{du}{dx} = 2x$, por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = (2u)(2x) = 4ux = 4(x^2+1)x = 4x(x^2+1)$$

2. Obtén $\dfrac{d}{dx}(y \circ u \circ v)$, si $y = u^3$, $u = \dfrac{v-1}{v+1}$, $v = \sqrt{x^2-1}$

Solución

Cuando hay más de dos funciones, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Luego:

$$\frac{dy}{du} = 3u^2,\ \frac{du}{dv} = \frac{2}{(v+1)^2}\ \text{ y }\ \frac{dv}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Por consiguiente, el resultado es:

$$\frac{d}{dx}(y \circ u \circ v) = \left[3u^2\right]\left[\frac{2}{(v+1)^2}\right]\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right] = \frac{6u^2x}{(v+1)^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{6\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)^2 x}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^4\sqrt{x^2-1}}$$

3 Deriva la función $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2+8}$, utilizando la regla de la cadena.

Solución

Al tomar $u=x^3-2x^2+8$, entonces $y=\sqrt[3]{u}$, luego:

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}=3x^2-4x$$

Al utilizar la regla de la cadena, se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\right]\left[3x^2-4x\right]=\frac{3x^2-4x}{3\sqrt[3]{u^2}}=\frac{3x^2-4x}{3\sqrt[3]{(x^3-2x^2+8)^2}}$$

EJERCICIO 30

Determina $\frac{dy}{dx}$, para las siguientes funciones:

1. $y=u^2-u,\ u=\frac{1}{x}$
2. $y=\sqrt{\frac{u-1}{u+1}},\ u=\sqrt{x}$
3. $y=\sqrt{2u^3-3u},\ u=x^2-1$
4. $y=\frac{3}{u^3}-\frac{2}{u^2},\ u=x+1$
5. $y=\frac{u}{u^2-1},\ u=x^3-6x^2-8x$
6. $y=\sqrt{(2x-1)^5+(2x-1)^3}$
7. $y=\sqrt{\frac{x^3-1}{x^3+1}}$
8. $y=\frac{u+1}{u-1},\ u=\frac{v+2}{v-2},\ v=\sqrt{x^2-1}$
9. $y=\sqrt{u-1},\ u=\frac{v^2}{v^2-1},\ v=\sqrt{x}$
10. $y=\frac{1}{\sqrt{u}},\ u=\sqrt{\frac{v-1}{v+1}},\ v=(x^2+3)^2$
11. $y=u^2+1,\ u=\sqrt{v},\ v=\frac{x+1}{x-1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de funciones trascendentes

Se clasifican en funciones trigonométricas directas e inversas, logarítmicas y exponenciales, por ejemplo:

$y=\text{sen}\ 3\sqrt{x}$

$y=\ln\sqrt{2x-1}$

$y=e^{\cos x}$

$y=\tan(e^x-\ln x)$

$y=3^{x-x2}$

$y=\text{arc sen}(x-2)$

Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\text{sen}\ v=\cos v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cos v=-\text{sen}\ v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\tan v=\sec^2 v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cot v=-\csc^2 v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sec v=\sec v\tan v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\csc v=-\csc v\cot v\frac{dv}{dx}$$

Inversas trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} v=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\ cot} v=-\frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\ cos} v=-\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\ sec} v=\frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\ tan} v=\frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\ csc} v=-\frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Logarítmicas

$$\frac{d}{dx}\ln v=\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\log_b v=\frac{\log_b e}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Exponenciales

$$\frac{d}{dx}e^v=e^v\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}a^v=a^v\ln a\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}u^v=v\cdot u^{v-1}\frac{du}{dx}+\ln u\cdot u^v\frac{dv}{dx}$$

Derivadas de funciones trigonométricas

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la derivada de las siguientes funciones:

$$y = \operatorname{sen} 5x^2,\ y = \tan 6x,\ y = \csc 4x^3$$

Solución

Se aplican las fórmulas $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} v=\cos v\frac{dv}{dx}$, $\frac{d}{dx}\tan v=\sec^2 v\frac{dv}{dx}$, $\frac{d}{dx}\csc v=-\csc v\cot v\frac{dv}{dx}$ a cada una de las funciones:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 5x^2=\cos 5x^2\left(\frac{d}{dx}5x^2\right)=\cos 5x^2(10x)=10x\cos 5x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\tan 6x=\sec^2 6x\left(\frac{d}{dx}6x\right)\sec^2 6x(6)=6\sec^2 6x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\csc 4x^3=-\csc 4x^3\cot 4x^3\left(\frac{d}{dx}4x^3\right)=-\csc 4x^3\cot 4x^3(12x^2)=-12x^2\csc 4x^3\cot 4x^3$$

2 Deriva la función $y = 4\cos(x^2-1)$

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\cos v=-\operatorname{sen} v\frac{dv}{dx}$, con $v = x^2-1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}4\cos(x^2-1)=4\frac{d\cos(x^2-1)}{dx}=4\left[-\operatorname{sen}(x^2-1)\frac{d(x^2-1)}{dx}\right]=-4\operatorname{sen}(x^2-1)\cdot 2x$$

por tanto, $\frac{dy}{dx}=-8x\cdot\operatorname{sen}(x^2-1)$

3 Encuentra la derivada de la función $y = \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

Solución

Primero se aplica la fórmula del cociente de funciones:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)\dfrac{d(\operatorname{sen} x - \cos x)}{dx} - (\operatorname{sen} x - \cos x)\dfrac{d(\operatorname{sen} x + \cos x)}{dx}}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

Se derivan las funciones con las fórmulas para la función seno y coseno:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)\left[\dfrac{d \operatorname{sen} x}{dx} - \dfrac{d \cos x}{dx}\right] - (\operatorname{sen} x - \cos x)\left[\dfrac{d \operatorname{sen} x}{dx} + \dfrac{d \cos x}{dx}\right]}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)(\cos x + \operatorname{sen} x) - (\operatorname{sen} x - \cos x)(\cos x - \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x + \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} = \frac{2(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

Se aplica la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

4 Determina la derivada de la función $r = \tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)$

Solución

Se expresa $\tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) = \left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^3$ y se aplica la fórmula $\dfrac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\dfrac{dv}{dx}$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d\tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta} = \frac{d\left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^3}{d\theta} = 3\left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^2 \cdot \frac{d \tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta}$$

Se deriva la tangente con la fórmula $\dfrac{d}{dx}\tan v = \sec^2 v \dfrac{dv}{dx}$ y se simplifican los resultados:

$$\frac{dr}{d\theta} = 3 \tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \frac{d\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = 3\tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\theta}} - 1\right) = 3\tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\left(\frac{1 - 2\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\theta}}\right)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \left(\frac{3 - 6\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\theta}}\right) \cdot \tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)$$

5 Deriva la función $s = \cos 2t \cdot \operatorname{sen} 4t$

Solución

Se aplica la fórmula para derivar un producto $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(\cos 2t \operatorname{sen} 4t)}{dt} = \cos 2t \cdot \frac{d \operatorname{sen} 4t}{dt} + \operatorname{sen} 4t \cdot \frac{d \cos 2t}{dt}$$

Se deriva el seno y coseno con sus respectivas fórmulas y se obtiene el resultado:

$$\frac{ds}{dt} = \cos 2t \cdot \left[\cos 4t \frac{d(4t)}{dt}\right] + \operatorname{sen} 4t \cdot \left[-\operatorname{sen} 2t \frac{d(2t)}{dt}\right] = \cos 2t\,[4\cos 4t] + \operatorname{sen} 4t\,[-2 \operatorname{sen} 2t]$$

$$\frac{ds}{dt} = 4 \cos 2t \cos 4t - 2 \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} 4t$$

6 ¿Cuál es la derivada de la función $y = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$?

Solución

Se aplica la fórmula $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\dfrac{d(1)}{dx} - 1\dfrac{d\sqrt{\operatorname{sen} x}}{dx}}{\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)^2}$$

Se realizan las respectivas derivadas:

$$\frac{d(1)}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\sqrt{\operatorname{sen} x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}(\cos x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

Se sustituyen y se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\,(0) - 1\left(\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\right)}{\operatorname{sen} x} = \frac{\dfrac{-\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{1}} = -\frac{\cos x}{2 \operatorname{sen} x\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

EJERCICIO 31

Deriva las siguientes funciones trigonométricas:

1. $y = \operatorname{sen} 8x$
2. $f(x) = \cos 3x^2$
3. $f(x) = \tan x^3$
4. $s(t) = \sec 6t$
5. $f(x) = \cot 4x^3$
6. $f(x) = \csc 9x$
7. $f(x) = \cos ax$
8. $s(t) = \tan bt^2$

9. $f(x) = 6 \sec x^2$
10. $f(x) = \frac{1}{2} \csc \frac{x}{4}$
11. $f(x) = a \cos 3x$
12. $f(x) = \cot(3x - 5)$
13. $f(x) = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$
14. $f(x) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)$
15. $s(t) = \tan(at + \pi)$
16. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
17. $s(t) = \operatorname{sen} \sqrt{t}$
18. $f(x) = \cot \sqrt[3]{x}$
19. $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$
20. $s(t) = \cos \frac{1}{t^3}$
21. $f(x) = \sec \frac{1}{\sqrt{x}}$
22. $f(x) = \tan 3x - 3x$
23. $f(x) = ax + \cot ax$
24. $f(x) = \operatorname{sen}(x - 1)^2$
25. $s(t) = \cos(3t^2 + 2)^3$
26. $f(x) = 4 \cot \sqrt{x - 1}$
27. $f(x) = \tan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
28. $f(x) = \sec\left(\frac{ax+b}{ax-b}\right)$
29. $f(x) = \operatorname{sen}^2 5x$
30. $f(x) = \cos^3 bx$
31. $f(x) = \tan^4 3x^2$
32. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} 4x}$
33. $f(x) = \sqrt{\sec 5x^2}$
34. $f(x) = \sqrt[3]{3 \tan x^2}$
35. $f(x) = x \operatorname{sen} x$
36. $f(x) = x^2 \cos x^2$
37. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$
38. $f(t) = \frac{\cos 5t^2}{t^2}$
39. $y = \operatorname{sen}(ax^2)$
40. $y = a \cos (3x)$
41. $y = \tan \sqrt{x}$
42. $y = \frac{1}{6} \sec 3x^2$
43. $y = \frac{1}{2} \csc \frac{2x}{3}$
44. $y = x^2 + 3x - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$
45. $y = -3\cot (1 - x^2)$
46. $y = \frac{2}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
47. $y = \operatorname{sen}^2(2\, bx)$
48. $y = \tan^4(2x - 1)^3$
49. $y = \sqrt{\sec 2x}$
50. $y = \sqrt[3]{3 \tan x^2}$
51. $y = x \cdot \cos^3 4x$
52. $y = \frac{x^2}{\operatorname{sen} ax}$

53. $y = x\sqrt{\csc 2x}$

54. $y = \dfrac{\cos(mx)}{\operatorname{sen}(nx)}$

55. $y = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}$

56. $y = x\cos x - \operatorname{sen} x$

57. $y = \sqrt{\dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1}}$

58. $y = x^2 \operatorname{sen} 2x - 4x\cos 2x - \operatorname{sen} 2x$

59. $y = \cos(2x - 1)\cdot\tan(1 - 2x)$

60. $y = x^2\sec(\pi - x)$

61. $y = \left(\dfrac{3x\operatorname{sen} x}{3x+1}\right)^3$

62. $y = \cos\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

63. $y = \dfrac{1+\tan^2 x}{x\sec x}$

64. $y = \dfrac{x\,(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)}{\cos x}$

65. $y = 2\operatorname{sen} x\cos x$

66. $y = \dfrac{\csc x\cdot\tan x}{\cos x}$

67. $y = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

68. $y = \cos^2(3x+1) - \operatorname{sen}^2(3x+1)$

69. $y = \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}{x^2}$

70. $y = \dfrac{(1+\tan x)^2}{\sec x}$

71. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x + 1$

72. $y = 2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - x^2\cos x$

73. $y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \dfrac{1}{64}\operatorname{sen} 8x$

➡ **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Derivadas de funciones inversas trigonométricas

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Deriva la función $y = \operatorname{arc\,sen} x^2$

Solución

Se aplica la fórmula $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} v) = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\dfrac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot\frac{d\,(x^2)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}(2x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Por consiguiente, la derivada de la función es $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

2 ¿Cuál es la derivada de la función $y = \text{arc tan}\left(\sqrt{x}-1\right)$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(\text{arc tan}\, v) = \frac{1}{v^2+1}\cdot\frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\text{arc tan}\left(\sqrt{x}-1\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1}\cdot\frac{d\left(\sqrt{x}-1\right)}{dx} = \frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1\right]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left[x-2\sqrt{x}+2\right]}$$

3 Obtén la derivada de la función $r = \theta^2 \text{ arc sec } \theta$

Solución

$$\frac{dr}{d\theta} = \theta^2\frac{d}{d\theta}\text{arc sec }\theta + \text{arc sec }\theta\frac{d\theta^2}{d\theta} = \theta^2\left[\frac{1}{\theta\sqrt{\theta^2-1}}\frac{d\theta}{d\theta}\right] + \text{arc sec }\theta(2\theta)$$

$$= \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2-1}} + 2\theta\,\text{arc sec }\theta$$

4 Determina la derivada de la función $y = \frac{\text{arc sen } x}{x}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{d}{dx}(\text{arc sen } x) - (\text{arc sen } x)\frac{dx}{dx}}{x^2} = \frac{x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{dx}\right) - \text{arc sen } x}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \text{arc sen } x}{x^2} = \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}} - \frac{\text{arc sen } x}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\text{arc sen } x}{x^2}$$

EJERCICIO 32

Determina la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \text{arc sen } 5x$
2. $f(x) = \text{arc cos } 4x^2$
3. $f(x) = \text{arc tan } 3x$
4. $y = \text{arc cot } x^3$
5. $f(x) = \text{arc sec } x^2$
6. $f(x) = \text{arc csc } 3x^2$
7. $f(x) = \text{arc cos } \frac{x}{b}$
8. $f(x) = \text{arc sen } \frac{x}{4}$

9. $f(x) = \text{arc tan } \dfrac{x}{a}$

10. $f(x) = 2 \text{ arc sec } \sqrt{x}$

11. $y = \text{arc sen}(3 - x^2)$

12. $y = \text{arc cos}\sqrt{1-x^2}$

13. $y = x^2 \text{ arc tan } x$

14. $y = x \text{ arcsen } x + \sqrt{1-x^2}$

15. $y = 8 \text{ arccot}\left(\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x}\right) - \dfrac{x\sqrt{16-x^2}}{2}$

16. $y = x \text{ arccsc}(x^{-1}) + \text{arc tan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

17. $y = \left(\dfrac{x^2+1}{2}\right) \text{ arc tan } x - \dfrac{x}{2}$

18. $\varphi = \text{arc csc}\sqrt{\theta^2 - 1}$

19. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{1-4x^2} + \dfrac{1}{4}\text{arc sen } 2x$

20. $y = \dfrac{x^3}{3}\text{arc sen } x + \left(\dfrac{x^2+2}{9}\right)\sqrt{1-x^2}$

21. $f(r) = \sqrt{b^2 - r^2} + b \cdot \text{arc sen}\dfrac{r}{b}$

22. $y = x - \text{arc tan } x$

23. $y = \text{arc tan }(2x) + \text{arc sen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

24. $y = \text{arc sen } \sqrt{x}$

25. $y = x \text{ arc cos}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

26. $y = \text{arc sen}(4ax - 4x^2)$

27. $f(r) = \text{arc sen}(r - 2)$

28. $y = \dfrac{1}{4}\text{arc tan}\left(\dfrac{2x+1}{2}\right)$

29. $y = 4 \text{ arc sen}\left(\dfrac{x-2}{2}\right) - \sqrt{4x - x^2}$

30. $y = 6 \text{ arc csc}\left(\dfrac{2}{x-2}\right) - \dfrac{(x+6)\sqrt{4x-x^2}}{2}$

31. $y = \dfrac{x-1}{2}\sqrt{2x-x^2} + \dfrac{1}{2} \text{ arc sen }(x-1)$

32. $s(t) = 3\sqrt{9-t^2} + 2 \text{ arc sen } \dfrac{t}{3}$

33. $6y = 25 \text{ arc sen } \dfrac{3x}{5} + 3x\sqrt{25 - 9x^2}$

34. $w = 2\sqrt{\theta + 2} + \sqrt{2} \text{ arc tan}\sqrt{\dfrac{\theta+2}{2}}$

35. $y = \dfrac{2}{3}\text{arc tan}\left(\dfrac{1}{3}\tan\dfrac{x}{2}\right)$

36. $y = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{6}\text{arc tan}\left(2\tan\dfrac{x}{2}\right)$

37. $y = \text{arc sen}\left(\cos\dfrac{x}{3}\right)$

38. $y = x \text{ arc cot}(\tan x)$

39. $y = \dfrac{\text{arc sec }(2x)}{\sqrt{4x^2-1}}$

40. $y = \text{arc sec}\left(2\sec\dfrac{x}{2}\right)$

41. $y = 4 \text{ arc sen}\left(\dfrac{2x-4}{3x+2}\right)$

42. $s = t^2 \text{ arc cos}(1 - t) + 2t$

43. $y = \text{arc cos}(a + x)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales

A continuación se enlistan las propiedades de los logaritmos, las cuales, al aplicarlas, simplifican la función al momento de obtener su derivada.

1. $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$
2. $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$
3. $\log_a A^n = n \cdot \log_a A$
4. $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\log_a A$
5. $\log^n{}_a A = (\log_a A)^n$

Las propiedades anteriores también se aplican a los logaritmos naturales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la derivada de la función $y = \ln x^2$

Solución

Al aplicar la fórmula $\frac{d \ln v}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \ln x^2}{dx} = \frac{1}{x^2}\frac{dx^2}{dx} = \frac{1}{x^2}(2x) = \frac{2}{x}$$

Por consiguiente, la derivada de la función es $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$

2 ¿Cuál es la derivada de $y = \ln^2(x^2 - x)$?

Solución

Se expresa la función como: $\ln^2(x^2 - x) = [\ln(x^2 - x)]^2$ y se aplica $\frac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\left(\frac{d}{dx}v\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\ln(x^2 - x)]^2 = 2\ln(x^2 - x)\frac{d\ln(x^2 - x)}{dx} = 2\ln(x^2 - x)\cdot\frac{1}{x^2 - x}\frac{d(x^2 - x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\ln(x^2 - x)\frac{1}{x^2 - x}\cdot(2x - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\ln(x^2 - x)\frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(2x - 1)\cdot\ln(x^2 - x)}{x^2 - x} = \frac{4x - 2}{x^2 - x}\cdot\ln(x^2 - x)$$

3 Obtén la derivada de $y = x^2 \ln(mx)^2$

Solución

Se utiliza la fórmula del producto $\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 \ln(mx)^2) = x^2 \frac{d}{dx}\ln(mx)^2 + \ln(mx)^2 \frac{d}{dx}x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{(mx)^2}\frac{d}{dx}(mx)^2 + \ln(mx)^2 \cdot (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{(mx)^2} \cdot 2(mx)m + 2x\ \ln(mx)^2 = 2x + 2x\ln(mx)^2$$

Utilizando $\log_a A^n = n \log_a A$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2x(2\ln(mx)) = 2x + 4x\ln(mx) = 2x[1 + 2\ln(mx)]$$

4 Determina la derivada de la función $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

Solución

Se deriva la función y mediante identidades trigonométricas se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x$$

5 Deriva $y = \ln\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right)$

Solución

Al aplicar las propiedades de los logaritmos se obtiene: $y = \ln(1 + \operatorname{sen} x) - \ln(1 - \operatorname{sen} x)$
Se deriva la función:

$$y' = \frac{d}{dx}\ln(1+\operatorname{sen} x) - \frac{d}{dx}\ln(1-\operatorname{sen} x) = \left(\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\right)\frac{d}{dx}(1+\operatorname{sen} x) - \left(\frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\right)\frac{d}{dx}(1-\operatorname{sen} x)$$

$$y' = \left(\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\right)(\cos x) - \left(\frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\right)(-\cos x) = \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$$

$$y' = \frac{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x) + \cos x(1-\operatorname{sen} x)}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)} = \frac{\cos x + \cos x \operatorname{sen} x + \cos x - \cos x \operatorname{sen} x}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)}$$

$$y' = \frac{2\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x} = 2\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 2\sec x$$

6 ¿Cuál es la derivada de la función $y = e^{2x-1}$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}e^v = e^v\frac{dv}{dx}$ y se obtiene: $\frac{dy}{dx} = e^{2x-1}\cdot\frac{d}{dx}(2x-1) = e^{2x-1}\cdot 2 = 2e^{2x-1}$

pero $y = e^{2x-1}$ por tanto $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x-1} = 2y$

7 Determina la derivada de la función $y = 3\sqrt{e^{\cos x}}$

Solución

La función se puede expresar como $y = 3(e^{\cos x})^{\frac{1}{2}} = 3e^{\frac{1}{2}\cos x}$, se deriva:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3e^{\frac{1}{2}\cos x}\right) = 3e^{\frac{1}{2}\cos x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\cos x\right) = 3e^{\frac{1}{2}\cos x}\cdot\left(\frac{1}{2}(-\operatorname{sen} x)\right) = -\frac{3}{2}\operatorname{sen} x\cdot e^{\frac{1}{2}\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}\operatorname{sen} x\cdot\sqrt{e^{\cos x}}$$

8 Obtén la derivada de $y = x^3\cdot e^{\sqrt{x}}$

Solución

Se utiliza la fórmula del producto $\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3\cdot e^{\sqrt{x}}\right) = x^3\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}x^3 = x^3\cdot e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}\cdot(3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3x^2\cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}} + 3x^2\cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+6\right)$$

9 ¿Cuál es la derivada de $y = 5^{x^2+5x-7}$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}a^v = a^v\cdot\ln a\frac{dv}{dx}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5^{x^2+5x-7}) &= 5^{x^2+5x-7}\cdot\ln 5\cdot\frac{d}{dx}(x^2+5x-7)\\ &= 5^{x^2+5x-7}\cdot\ln 5\cdot(2x+5)\\ &= (2x+5)\cdot 5^{x^2+5x-7}\cdot\ln 5\end{aligned}$$

10 Encuentra la derivada de la función $y = (\operatorname{sen} x)^{e^x}$

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}u^v = v\cdot u^{v-1}\cdot\frac{du}{dx} + \ln u\cdot u^v\cdot\frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\operatorname{sen} x)^{e^x-1}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \ln(\operatorname{sen} x)\cdot(\operatorname{sen} x)^{e^x}\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\operatorname{sen} x)^{e^x}(\operatorname{sen} x)^{-1}(\cos x) + \ln(\operatorname{sen} x)\cdot(\operatorname{sen} x)^{e^x}(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\operatorname{sen} x)^{e^x}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) + \ln(\operatorname{sen} x)\cdot(\operatorname{sen} x)^{e^x}(e^x) = e^x(\operatorname{sen} x)^{ex}\cot x + e^x(\operatorname{sen} x)e^x\ln(\operatorname{sen} x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\operatorname{sen} x)^{e^x}[\cot x + \ln(\operatorname{sen} x)]$$

EJERCICIO 33

Obtén la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \ln x^3$
2. $f(x) = \ln 4x^2$
3. $f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 2)$
4. $f(x) = \ln\sqrt{x}$
5. $f(x) = \log x^6$
6. $f(x) = \log 5x^3$
7. $f(x) = \log_3 x$
8. $f(x) = \log_4 \sqrt[3]{x}$
9. $f(x) = \ln^4 x$
10. $f(x) = \ln^3 5x$
11. $y = x^2 \ln x$
12. $y = x \ln x^2$
13. $y = \dfrac{\ln x}{x}$
14. $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{x}$
15. $y = \ln\sqrt{b - ax}$
16. $f(x) = \ln x^2\sqrt{3x^2 - 1}$
17. $f(x) = \ln ax\sqrt{ax^2 - b}$
18. $y = \ln\left(\dfrac{3x-5}{2x+1}\right)$
19. $y = \ln\sqrt{\dfrac{cx-b}{cx+b}}$
20. $y = \ln \operatorname{sen} x$
21. $y = \ln \cos 5x$
22. $y = \ln(x^2 - 4)$
23. $y = \ln\sqrt{3x+4}$
24. $y = \ln\left(\dfrac{2x-3}{2x+3}\right)$
25. $y = \ln\sqrt[3]{x^3+8}$
26. $y = \ln^2(\sqrt{x})$
27. $y = \ln[(6x+4)(3x^2+2)]$
28. $y = \log_3\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$
29. $y = \log\,(5bx^3 - 3\sqrt{x})$
30. $y = x - \ln(e^x \cos x)$
31. $y = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$
32. $y = x \ln x$
33. $y = \ln(\sec^2 2x \cdot \cos^3 2x)$
34. $y = \sqrt{\ln x}$
35. $y = \ln(\sec x + \tan x)$
36. $y = \ln\sqrt{1 - \operatorname{sen} 2x}$
37. $y = \ln(x \operatorname{sen} x)$
38. $y = x^3 \ln x^2$
39. $y = \ln\left(\tan\sqrt{x}\right)^3$
40. $y = \log\sqrt{x}$
41. $y = 2^{x^2+5x}$
42. $f(x) = b^{\sqrt{x}}$
43. $y = 3^{\ln x}$
44. $y = 5^{x \operatorname{sen} x}$
45. $y = x \cdot 2^{\ln x}$
46. $y = x \cdot 5^x$
47. $y = e^{x^2}$
48. $y = e^{3x^2 - 2x + 1}$

49. $y = e^{\sqrt{3x^2-1}}$

50. $y = e^{x \tan x}$

51. $y = \dfrac{b}{2}\left(e^{\frac{2x}{b}} - e^{-\frac{2x}{b}}\right)$

52. $y = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$

53. $f(x) = e^{4x}$

54. $f(x) = e^{5x^2}$

55. $f(x) = e^{3x-1}$

56. $f(x) = e^{\frac{x}{5}}$

57. $f(t) = \sqrt[3]{e^t}$

58. $f(x) = \sqrt[4]{e^x}$

59. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$

60. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

61. $f(\theta) = e^{\operatorname{sen}^2\theta}$

62. $f(x) = e^{\cos 2x}$

63. $y = e^{x \operatorname{sen} x}$

64. $f(x) = 5^{3x}$

65. $f(x) = 7^{2x}$

66. $f(x) = 5^{x^2}$

67. $y = x^{2x}$

68. $y = x^{\cos x}$

69. $y = \sqrt[x]{x}$

70. $y = e^{\operatorname{arc}\tan x}$

71. $y = \ln\left(\sqrt{xe^{2x}}\right)$

72. $y = xe^{\ln x^2}$

73. $y = \dfrac{e^x}{x+1}$

74. $y = \dfrac{xe^x}{\ln x^2}$

75. $y = \sqrt{\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}}$

76. $y = \sqrt{\dfrac{e^{\operatorname{sen} x}+1}{e^{\operatorname{sen} x}-1}}$

77. $y = \ln(\ln \operatorname{sen}^2 ax)$

78. $y = e^{\ln\sqrt{e^x \operatorname{sen} x}}$

79. $y = x^2 e^{\operatorname{sen} x}$

80. $y = \dfrac{\ln \operatorname{sen}^x x}{x}$

81. $y = \ln\left(3ax^2\sqrt{x^2-4}\right)$

82. $y = \sqrt{x^2+9} + 3\ln\left(x + \sqrt{x^2+9}\right)$

83. $y = \dfrac{1}{4}\sec 2x \tan 2x + \dfrac{1}{4}\ln(\sec 2x + \tan 2x)$

84. $y = x \operatorname{arc}\tan x - \ln\sqrt{1+x^2}$

85. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left(x + \sqrt{x^2-4}\right)$

86. $y = x \operatorname{arc}\sec x - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

87. $y = \dfrac{1}{12}\ln\left(\dfrac{2x-3}{2x+3}\right)$

88. $y = x \operatorname{arc}\cot x + \ln\sqrt{1+x^2}$

89. $y = x \operatorname{arc}\csc\dfrac{x}{2} + 2\ln\left(x + \sqrt{x^2-4}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de funciones implícitas

Una función implícita es una relación que se expresa en términos de x y y, por ejemplo:

$$3x^3 - y + 5x = x^2; \qquad \operatorname{sen} x = \cos(x-y); \qquad e^{x+y} = x; \qquad \ln(x+y) = \sqrt{x-y}$$

En una función implícita se derivan término a término los elementos de la igualdad respecto a la variable que se indica y al final se despeja la derivada.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita $3x^2 - 6xy + y^2 = 2x - y$?

Solución

Se derivan ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 6xy + y^2) = \frac{d}{dx}(2x - y)$$

$$\frac{d3x^2}{dx} - \frac{d6xy}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = \frac{d2x}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dx^2}{dx} - 6\frac{dxy}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = 2\frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

$$3(2x) - 6\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 2(1) - \frac{dy}{dx}$$

$$6x - 6x\frac{dy}{dx} - 6y + 2y\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx}$$

Se agrupan los términos que contienen $\frac{dy}{dx}$, y se despeja:

$$-6x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 2 + 6y - 6x$$

$$\frac{dy}{dx}(-6x + 2y + 1) = 2 + 6y - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 6x + 6y}{1 - 6x + 2y}$$

Por lo regular, el resultado de la derivada de una función implícita se expresa en términos tanto de x como de y.

Es común que en algunos casos la expresión $\frac{dy}{dx}$ se represente como y'.

2 Determina la derivada y' de la función $\sqrt{x+y} = x - y$

Solución

Al derivar ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x+y} = \frac{d}{dx}(x-y) \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{d}{dx}(x+y)}{2\sqrt{x+y}} = \frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{dx}{dx}+\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{x+y}} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

Se despeja y' de la igualdad $\frac{1+y'}{2\sqrt{x+y}} = 1 - y'$, y el resultado es:

$$1 + y' = 2\sqrt{x+y} - 2y'\sqrt{x+y} \quad \rightarrow \quad y' + 2y'\sqrt{x+y} = 2\sqrt{x+y} - 1$$

$$y'\left(1 + 2\sqrt{x+y}\right) = 2\sqrt{x+y} - 1$$

$$y' = \frac{2\sqrt{x+y} - 1}{1 + 2\sqrt{x+y}}$$

3 Obtén la derivada y' de la función $y = e^{x+y}$

Solución

Se derivan ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{x+y} \quad \rightarrow \quad y' = e^{x+y}\cdot\frac{d}{dx}(x+y) \quad \rightarrow \quad y' = e^{x+y}(1+y')$$

Se despeja y' de la igualdad:

$$y' = e^{x+y} + y'e^{x+y} \quad \rightarrow \quad y' - y'e^{x+y} = e^{x+y} \quad \rightarrow \quad y'(1 - e^{x+y}) = e^{x+y}$$

Donde:

$$y' = \frac{e^{x+y}}{1 - e^{x+y}} \quad \text{o} \quad y' = \frac{y}{1-y}$$

4 Encuentra la derivada y' de la función implícita $\operatorname{sen}(x+y) = x$

Solución

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x+y) = \frac{dx}{dx} \quad \rightarrow \quad \cos(x+y)(1+y') = 1 \quad \rightarrow \quad \cos(x+y) + y'\cos(x+y) = 1$$

$$y'\cos(x+y) = 1 - \cos(x+y)$$

Donde, la derivada

$$y' = \frac{1 - \cos(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{1}{\cos(x+y)} - \frac{\cos(x+y)}{\cos(x+y)} = \sec(x+y) - 1$$

5 Obtén la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita $x - \ln y = \ln x$

Solución

$$\frac{d}{dx}(x-\ln y) = \frac{d}{dx}(\ln x) \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dx}-\frac{d\ln y}{dx} = \frac{d\ln x}{dx} \quad \rightarrow \quad 1-\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x}$$

Se despeja la derivada de la igualdad:

$$-\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x}-1 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1-x}{x} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{xy-y}{x}$$

6 Determina la derivada respecto a x de la función $\cos(x + y) = \operatorname{sen}(x - y)$

Solución

$$\frac{d}{dx}\cos(x+y) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x-y)$$

$$-\operatorname{sen}(x+y)\frac{d}{dx}(x+y) = \cos(x-y)\frac{d}{dx}(x-y)$$

$$-\operatorname{sen}(x+y)\cdot(1+y') = \cos(x-y)\cdot(1-y')$$

$$-\operatorname{sen}(x+y) - y'\operatorname{sen}(x+y) = \cos(x-y) - y'\cos(x-y)$$

Se despeja la derivada:

$$y'\cos(x-y) - y'\operatorname{sen}(x+y) = \cos(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)$$

$$y'[\cos(x-y) - \operatorname{sen}(x+y)] = \cos(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)$$

$$y' = \frac{\cos(x-y)+\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x-y)-\operatorname{sen}(x+y)}$$

7 Encuentra la derivada de la siguiente función implícita $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2a$

Solución

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\frac{d}{dx}(2a) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

EJERCICIO 34

Deriva las siguientes funciones implícitas respecto a x:

1. $x^2 + y^2 = 4$
2. $2xy = 1$
3. $y^2 - 8x = 0$
4. $x^2 + 2y^2 + 5x - 2y - 1 = 0$
5. $3x^2 + 2xy - 6y^2 = 1$
6. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$
7. $\frac{x+y}{x-y}=x$
8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

9. $\sqrt[3]{xy}=2$

10. $y^3-2xy^2=x^3y+5x^2y^2-y$

11. $3x^3-2x^2y+5xy=y-3x$

12. $y\sqrt{x+y}=x$

13. $\sqrt{x+y}=xy$

14. $x=\dfrac{2x-3y}{2x+3y}$

15. $\sqrt{x}-\sqrt{y}=2x$

16. $y=\ln\sqrt{x\,y}$

17. $x^2y^2=e^{\ln(xy)}$

18. $\ln(\text{sen}(e^y))=x$

19. $\dfrac{e^y}{e^x+1}=3$

20. $\ln\dfrac{y}{x^2+1}=1$

21. $x+y=\ln(x-y)$

22. $\dfrac{e^{x^2}+e^{y^2}}{x^2+y^2}=1$

23. $3^{x^2+2y}=1$

24. $x^y=2$

25. $y=\text{arc tan}\,\dfrac{x}{y}$

26. $y\ \ln\ x-x\ \ln\ y-2=0$

27. $y^2=\ln(\ln x)^y$

28. $\ln(1+e^y)=e^x$

29. $\ln x^{\ln y}-x=0$

30. $xe^y-y=0$

31. $e^{\ln y}-xy=2$

32. $\text{sen}(e^{x+y})-e^{x+y}=x$

33. $e^{x\cos y}=3x$

34. $\text{sen}(x+a)-\cos(y-b)=ab$

35. $y-\cos x=\text{sen}\ y$

36. $\text{sen}^2(4x)+\cos^2(4y)=8$

37. $e^{\cos x}-e^{\text{sen}\,y}=\text{sen}\ y$

38. $\text{sen}(xy)-2x=3$

39. $\text{sen}\ x-\cos y-3=0$

40. $e^{\cos y}=\cos x$

41. $\dfrac{1+\text{sen}\ x}{1+\text{sen}\ y}=x$

42. $x\ \text{arc tan}\ y-y=0$

43. $y=\ln[\text{sen}(x+y)]$

44. $2^y-x-3=0$

45. $e^{\text{sen}\,y}+xy-2y=0$

46. $x^y-y^x=0$

47. $2+\text{sen}(x+y)=y+\cos(x+y)$

48. $\dfrac{y}{\tan xy}-x=2$

49. $y\ \text{arc cot}\ x-x-2=0$

50. $y\ \text{arc cos}(e^x)=\cos y$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de orden superior

Las derivadas de orden superior se obtienen al derivar una función $y = f(x)$, tantas veces como lo indique el orden requerido.

La derivada de una función se llama primera derivada y se denota con $y' = \dfrac{dy}{dx}$

La derivada de la derivada se llama segunda derivada y se denota con $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$

El proceso de hallar derivadas, una tras otra, se llama derivadas sucesivas.

La enésima derivada de una función se denota con $y^{(n)} = \dfrac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la segunda derivada $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ de la función $y = \cos^3 x$

Solución

Se obtiene la primera derivada de la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos^3 x}{dx} = -3\cos^2 x \operatorname{sen} x$$

Finalmente, se deriva el resultado anterior para obtener la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-3\cos^2 x \operatorname{sen} x) = -3\cos^3 x + 6\operatorname{sen}^2 x \cos x$$

2 Determina $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ de la función $y = \ln x$

Solución

Se obtiene la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Se encuentran la segunda y tercera derivadas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}$$

Finalmente, el resultado es: $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{2}{x^3}$

3 Encuentra $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$

Solución

Se deriva sucesivamente la función, hasta llegar a la cuarta derivada:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x \qquad f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 \qquad f''(x) = 6x + 4$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^4(x) = 0$$

4 ¿Cuál es el resultado de $\frac{d^2y}{dx^2}$ de $x^2 - 3xy + y = 1$?

Solución

Se obtiene la primera derivada implícita: $\frac{d}{dx}(x^2 - 3xy + y) = \frac{d}{dx}(1) \quad \rightarrow \quad 2x - 3\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + \frac{dy}{dx} = 0$

$$2x - 3x\frac{dy}{dx} - 3y + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(1 - 3x) = 3y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{1 - 3x}$$

La segunda derivada es: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3y - 2x}{1 - 3x}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1-3x)\left(3\frac{dy}{dx} - 2\right) - (3y - 2x)(-3)}{(1-3x)^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1-3x)\left[3\left(\frac{3y-2x}{1-3x}\right) - 2\right] - (3y-2x)(-3)}{(1-3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(3y-2x) - 2(1-3x) - (3y-2x)(-3)}{(1-3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9y - 6x - 2 + 6x + 9y - 6x}{(1-3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{18y - 6x - 2}{(1-3x)^2}$$

5 Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$ de $x^2 - xy + y^2 = 2$

Solución

Se obtiene la primera derivada:

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}(2) \quad \rightarrow \quad 2x - \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow$$

$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(2y - x) = y - 2x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

Se obtiene la segunda derivada: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y-2x}{2y-x}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y-x)\left(\frac{dy}{dx} - 2\right) - (y-2x)\left(2\frac{dy}{dx} - 1\right)}{(2y-x)^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y-x)\left(\frac{-3y}{2y-x}\right) - (y-2x)\left(\frac{-3x}{2y-x}\right)}{(2y-x)^2}$$

al simplificar se obtiene: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(2y-x)^3}$

pero $x^2 - xy + y^2 = 2$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6(2)}{(2y-x)^3} = -\frac{12}{(2y-x)^3}$

EJERCICIO 35

Realiza lo que se te indica:

1. Determina $\frac{d^4y}{dx^4}$, si $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 5x + 2$
2. Obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$, si $y = 4x^2 - 6x + 2$
3. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \frac{4x-1}{5x+3}$
4. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \frac{ax+b}{ax-b}$
5. Obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$, si $y = (ax + b)^4$
6. Determina $\frac{d^4y}{dx^4}$, si $y = \operatorname{sen} x + \cos x$
7. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \ln(\operatorname{sen} x)$
8. Obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$, si $y = \frac{3}{(x-1)^2}$
9. Encuentra $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \tan e^x$
10. ¿Cuál es la $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x - 3xy + 2y = 0$?
11. Obtén $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \sqrt{9-x^2}$
12. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x^2 + y^2 = 16$
13. Obtén $\frac{d^4y}{dx^4}$, si $y = x \ln x$
14. Calcula la $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $\operatorname{sen} x + \cos y = 0$
15. Si $y = x^2 \operatorname{sen} x$, obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$
16. Si $y = \frac{x-1}{x+1}$, obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$; $\frac{d^ny}{dx^n}$
17. Encuentra y'' de $xy + y - 1 = 0$
18. Si $y = \ln(\cos x)$, determina $\frac{d^3y}{dx^3}$
19. Si $f(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}$, obtén $\frac{d^2y}{dx^2}$
20. Determina y'' y y''' de $x^2 + xy + y^2 = 2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de ecuaciones polares

Sea $\rho = f(\theta)$ una función en coordenadas polares. La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P(r, \theta)$ es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\rho' \operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

EJEMPLOS

1 Determina $\frac{dy}{dx}$, para la ecuación polar $\rho = 4\cos 3\theta$

Solución

Por el teorema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[\frac{d(4\cos 3\theta)}{d\theta}\right]\operatorname{sen}\theta + [4\cos 3\theta]\cos\theta}{\left[\frac{d(4\cos 3\theta)}{d\theta}\right]\cos\theta - [4\cos 3\theta]\operatorname{sen}\theta} = \frac{-12\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}\theta + 4\cos 3\theta\cos\theta}{-12\operatorname{sen}3\theta\cos\theta - 4\cos 3\theta\operatorname{sen}\theta} = \frac{3\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}\theta - \cos 3\theta\cos\theta}{3\operatorname{sen}3\theta\cos\theta + \cos 3\theta\operatorname{sen}\theta}$$

2 Encuentra la pendiente de la recta tangente a la curva $\rho = 1 + \operatorname{sen}\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$

Solución

Al utilizar el teorema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[\frac{d}{d\theta}(1+\operatorname{sen}\theta)\right]\operatorname{sen}\theta + (1+\operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\left[\frac{d}{d\theta}(1+\operatorname{sen}\theta)\right]\cos\theta - (1+\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}2\theta + \cos\theta}{\cos 2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

Se evalúa ρ' en $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$m = \frac{\operatorname{sen}2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{0 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2} - 1$$

EJERCICIO 36

Determina la derivada de las siguientes ecuaciones polares:

1. $\rho = 2 \operatorname{sen} \theta + 3 \cos \theta$
2. $\rho = 4 \csc \theta$
3. $\rho = a \operatorname{sen} 5\theta$
4. $\rho = \sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}$
5. $\rho = 1 + \cos \theta$
6. $\rho = \dfrac{a}{1-\cos \theta}$
7. $\rho = e^{a\theta}$
8. $\rho = 4 \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$
9. $\rho = 3 - 2 \cos \theta$
10. $\rho = 4\sqrt{\theta}$

En las siguientes ecuaciones polares, encuentra la pendiente en el punto indicado:

11. $\rho = 2 \cos \theta, \theta = \dfrac{\pi}{8}$
12. $\rho = \operatorname{sen} \theta - \cos \theta, \theta = \dfrac{\pi}{3}$
13. $\rho = \tan \theta, \theta = \dfrac{\pi}{4}$
14. $\rho = \dfrac{2}{a - \operatorname{sen} \theta}, \theta = \pi$
15. $\rho = 2\sqrt{\cos \frac{\theta}{2}}, \theta = -\dfrac{\pi}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivada de ecuaciones paramétricas

La curva $y = f(x)$ se define por las ecuaciones paramétricas $x = h(t)$ y $y = g(t)$; entonces, la pendiente de la recta tangente en un punto $P(x, y)$ es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}g(t)}{\frac{d}{dt}h(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{con } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Calcula $\dfrac{dy}{dx}$ para la función cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^2 + 3t, y = \dfrac{1}{t+1}$

Solución

Se determinan las derivadas respecto a t:

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 3; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{(t+1)^2}$$

Por el teorema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{(t+1)^2}}{2t+3} = -\frac{1}{(2t+3)(t+1)^2}$$

2 Determina la pendiente de la recta tangente en el punto (x, y) a la curva, si sus ecuaciones paramétricas son $x = t - 2$, $y = \frac{1}{8}t^2 + 1$ en el intervalo $-3 \leq t \leq 3$, para el punto correspondiente a $t = 2$

Solución

Para aplicar el teorema se obtienen las derivadas: $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{8}(t^2)+1\right] = \frac{1}{8}(2t) = \frac{2t}{8} = \frac{t}{4} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t-2) = 1$$

Al sustituir los resultados, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{t}{4}}{1} = \frac{t}{4}$$

Se evalúa la derivada en $t = 2$, para obtener el valor de la pendiente:

$$m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 37

Deriva las siguientes funciones paramétricas:

1. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t^2 - 4 \end{cases}, \qquad t \in R$

2. $\begin{cases} x = 3t^3 - 5 \\ y = \dfrac{t+2}{4} \end{cases}, \qquad 1 \leq t \leq 3$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - t} \\ y = t \end{cases}, \qquad t \in R$

4. $\begin{cases} x = b \sec\theta \\ y = a \tan\theta \end{cases}, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

5. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = t\sqrt{t-1} \end{cases}, \qquad t \in R$

6. $\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen}\theta - \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta - 4\cos\theta \end{cases}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$

7. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2 - 1} \\ y = \dfrac{t^2 + 1}{t + 1} \end{cases}, \qquad t \in R$

8. $\begin{cases} x = \cos\dfrac{\theta}{2}, \\ y = \operatorname{sen} 2\theta \end{cases}$ $\quad -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$

9. $\begin{cases} x = 5t^2 \\ y = \dfrac{4}{t^2} \end{cases},$ $\quad -3 < t < 3$

10. $\begin{cases} x = 3 + 2\tan\theta \\ y = 4 + \csc\theta \end{cases},$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

En las siguientes ecuaciones paramétricas obtén el valor de la pendiente en el punto indicado:

11. $\begin{cases} x = 1 + \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi,$ $\quad t = \dfrac{\pi}{3}$

12. $\begin{cases} x = mt^2 + b \\ y = nt + a \end{cases}$ $\quad m \leq t \leq n,$ $\quad t = 2mn$

13. $\begin{cases} x = b(2 - 3t) \\ y = at^2 \end{cases}$ $\quad 3a < t < 2b,$ $\quad t = \dfrac{b}{2a}$

14. $\begin{cases} x = 3t - \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ $\quad 0 \leq t \leq \pi,$ $\quad t = \pi$

15. $\begin{cases} x = 2\cot^2\theta \\ y = 4\cot\theta \end{cases}$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$ $\quad \theta = \dfrac{\pi}{4}$

16. $\begin{cases} x = 5t^2 \\ y = t - t^2 \end{cases}$ $\quad -3 < t < 3,$ $\quad t = 1$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente