CAPÍTULO 3

CONTINUIDAD

Reseña HISTÓRICA

En el siglo XIX la matemática se apoyaba en la geometría y el álgebra para buscar sustento a sus afirmaciones.

En el cálculo infinitesimal se siguieron las líneas que le eran posibles con el sustento conceptual, como la existencia de funciones continuas.

Es cuando Weierstrass publica en 1872, gracias a su discípulo Paul Du Bois Reymond, su teorema sobre la existencia de funciones continuas que en algunos puntos no tenían derivada; las consecuencias de este teorema fueron de gran interés, en su época se decía que una función era continua si su gráfica se podía trazar sin despegar el lápiz del papel, aún en nuestra época esto da una idea informal de la continuidad de una función.

Pero el resultado de Weierstrass mostró que se podía hablar de la continuidad en un lenguaje totalmente analítico, sin necesidad de recurrir a imágenes geométricas. Este lenguaje proporcionó la advertencia sobre lo peligroso que resultaba confiar demasiado en las conclusiones extraídas de un dibujo.

Karl Weierstrass
(1815-1897)

Continuidad puntual

Una función $f(x)$ es continua en el punto $x_o \in R$ si cumple con las siguientes condiciones:

1. $f(x_o)$ está definida.
2. $\lim_{x \to x_o} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica si $f(x) = x^2 - 1$ es continua en $x_o = 2$

Solución

Se deben verificar las tres condiciones:

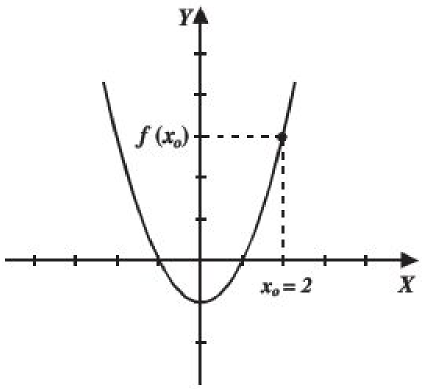
1. $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$, por tanto $f(x)$ está definida para $x_o = 2$
2. Se calcula el valor de cada límite lateral:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = (2)^2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 1) = (2)^2 - 1 = 3$$

Entonces, $\lim_{x \to 2} f(x)$ sí existe y $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

3. Como $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ y $f(2) = 3$, entonces $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$, por consiguiente, $f(x)$ es continua en $x_o = 2$



2 Determina si la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ -x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es continua en $x_o = 1$

Solución

Se verifican las condiciones:

1. $f(1) = -(1)$

   $f(1) = -1$, la función está definida en $x_o = 1$

2. Se determinan los límites laterales:

   $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x - 3) = 2(1) - 3 = -1$

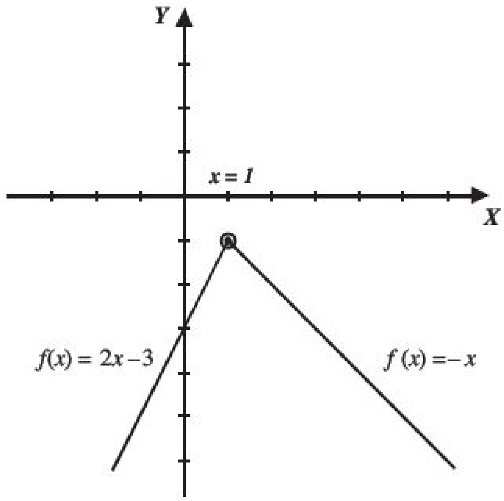
   $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-x) = -(1) = -1$

   Por tanto, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$

3. Probar que el $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

   $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = -1$

   Finalmente, es continua en $x_o = 1$



3 Determina si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 3 & \text{si } 3 < x \end{cases}$ es continua en $x = 1$ y $x = 3$

Solución

Se verifican las condiciones para los puntos $x = 1$ y $x = 3$:

1. $f(1) = (1)^2 = 1$, la función está definida en $x_o = 1$

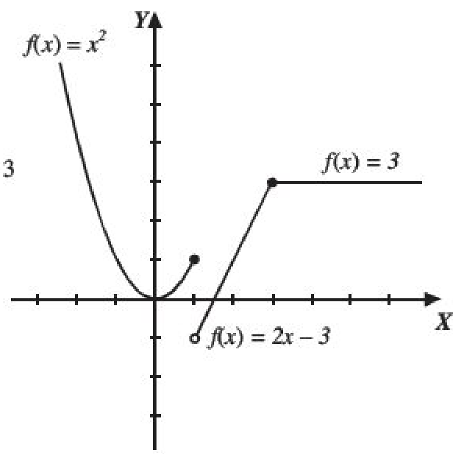
2. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x - 3) = 2(1) - 3 = -1$;

   $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1$

   Debido a que el $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.

   Por tanto, $f(x)$ no es continua en $x_o = 1$

   Se verifica la continuidad en $x_o = 3$



1. $f(3) = 2(3) - 3 = 3$, la función está definida en $x_o = 3$

2. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} 3 = 3$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (2x - 3) = 2(3) - 3 = 3$

   Se concluye que,

   $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

   Entonces, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3$

3. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 3$ y $f(x) = 3$ entonces, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$

   Por consiguiente, $f(x)$ es continua en $x_o = 3$

4 Es continua $g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ en $x_o = \frac{\pi}{2}$

Solución

Si se verifican los pasos se obtiene:

1. $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ no está definida, por tanto, la función no es continua en $x_o = \frac{\pi}{2}$

Discontinuidad evitable o removible

Sea $f(x)$ una función racional no continua en $x = x_0$, si mediante una simplificación algebraica, $f(x)$ se vuelve continua en $x = x_o$, entonces recibe el nombre de discontinuidad evitable o removible.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica si es continua la función $f(x) = \dfrac{6x^2 - 7x + 2}{2x - 1}$ en $x = \dfrac{1}{2}$

Solución

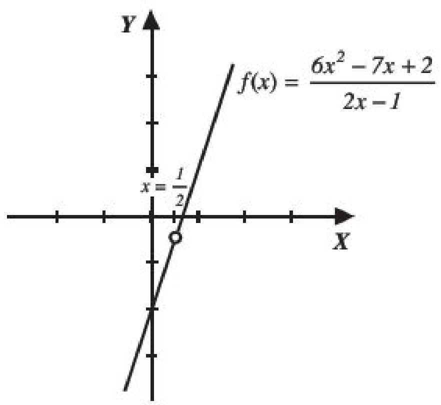
1. Se evalúa la función en $x = \dfrac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 2}{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{6\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{7}{2} + 2}{1 - 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{7}{2} + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

La función se indetermina o no está definida para el valor de $x = \dfrac{1}{2}$, lo cual implica que es discontinua en este punto; sin embargo, se elimina la indeterminación mediante una simplificación algebraica.

$$f(x) = \frac{6x^2 - 7x + 2}{2x - 1} = \frac{(3x - 2)(2x - 1)}{2x - 1} = 3x - 2;\ \text{si } x \neq \frac{1}{2}$$

Esta simplificación indica que la gráfica es una línea recta con discontinuidad evitable o removible en $x = \dfrac{1}{2}$



2 Determina si la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$ es continua en $x=3$ y traza su gráfica.

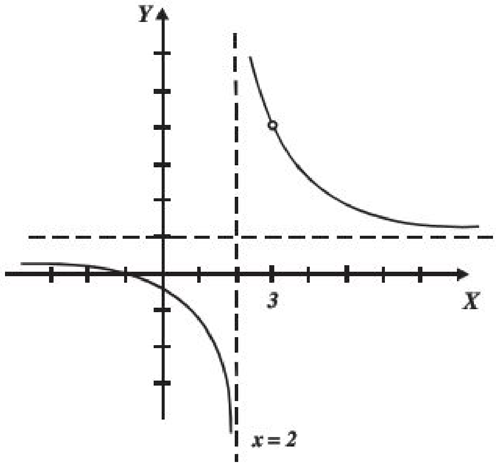
1. Se evalúa la función en $x = 3$,

$$f(3)=\frac{(3)^2-2(3)-3}{(3)^2-5(3)+6}=\frac{9-6-3}{9-15+6}=\frac{0}{0}$$

La función no está definida en $x = 3$, sin embargo, mediante una simplificación se puede eliminar la discontinuidad,

$$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x+1}{x-2}\text{ , si } x\neq 3$$

La gráfica de esta función es una hipérbola con discontinuidad evitable o removible en $x = 3$



3 Determina el valor de k para que la función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases}3x-k, & x<1\\ 2kx-3, & x\geq 1\end{cases}$$

Solución

Se obtienen los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x-k)=3(1)-k=3-k$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2kx-3)=2k(1)-3=2k-3$$

Para que el límite exista:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

entonces:

$$\begin{aligned}3-k&=2k-3\\ -k-2k&=-3-3\\ -3k&=-6\\ k&=\frac{-6}{-3}\\ k&=2\end{aligned}$$

por tanto, para que la función sea continua $k = 2$, es decir la función se debe escribir:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x<1 \\ 4x-3, & x\geq 1 \end{cases}$$

Comprobación

Probemos que la función es continua en $x = 1$

i) $f(1) = 4(1) - 3 = 4 - 3 = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (3x - 2) = 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (4x - 3) = 4(1) - 3 = 4 - 3 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^{-1}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

por tanto $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

iii) $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x = 1$.

4 Determina los valores de a y b para que la función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} ax-3 & x\leq -2 \\ x^2-1 & -2<x<3 \\ bx+1 & x\geq 3 \end{cases}$$

Solución

Se obtienen los límites laterales en $x = -2$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (ax - 3) = a(-2) - 3 = -2a - 3$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Para que el límite exista se debe cumplir:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} -2a - 3 &= 3 \\ -2a &= 3 + 3 \\ -2a &= 6 \\ a &= \frac{6}{-2} \\ a &= -3 \end{aligned}$$

Por tanto $a = -3$

Se obtienen los límites laterales en $x = 3$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (bx + 1) = b(3) + 1 = 3b + 1$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2 - 1) = (3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

entonces

$$\begin{aligned} 3b + 1 &= 8 \\ 3b &= 8 - 1 \\ 3b &= 7 \\ b &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto $b = \frac{7}{3}$

EJERCICIO 25

Verifica si las funciones propuestas son continuas en los puntos indicados:

1. $f(x) = 2x^2 - x$, en $x = 0$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, en $x = 2$
3. $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+3}$, en $x = -\dfrac{3}{2}$
4. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x+1}}$, en $x = 3$
5. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, en $x = 2$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, en $x = 2\pi$
7. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, en $x = 2$
8. $g(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, en $x = 1$
9. $h(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, en $x = 0$
10. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 2 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 3x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, en $x = -2$ y $x = 2$
11. $q(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } x < 1 \\ -3x + 5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \sqrt{2x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, en $x = 1$ y $x = 2$
12. $h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{si } x \leq \pi \\ \cos x & \text{si } \pi < x \leq \dfrac{3}{2}\pi \\ \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{si } x > \dfrac{3}{2}\pi \end{cases}$, en $x = \pi$ y $x = \dfrac{3}{2}\pi$

13. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 2 & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ \log(x+7)^7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, en $x = -3$ y $x = 3$

14. $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$, en $x = 3$

15. $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$, en $x = 1$

16. $g(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$, en $x = -2$

17. $f(x) = \dfrac{x - 8}{x^2 + x - 72}$, en $x = 8$

18. $w(x) = \dfrac{6x^2 - x - 1}{4x^2 - 4x + 1}$, en $x = \dfrac{1}{2}$

Determina el valor de *k* para que las siguientes funciones sean continuas:

19. $f(x) = \begin{cases} 2x + k & \text{si } x < 2 \\ 3kx - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} k^2 - x & \text{si } x \leq 0 \\ 2k + 3x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

21. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x + k} & \text{si } x < 3 \\ kx - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Obtén el valor de las constantes para que las siguientes funciones sean continuas:

22. $f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{si } x \leq -4 \\ x^2 - 4 & \text{si } -4 < x < 1 \\ bx + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ 3xb - 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 2a - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a + bx & \text{si } 1 < x < 4 \\ ax - 2b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Continuidad de una función en un intervalo

Continuidad por la derecha

Una función $f(x)$ es continua a la derecha de x_o si y solo si para $x \in R$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f(x_o)$ existe
2. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ existe
3. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Continuidad por la izquierda

Una función $f(x)$ es continua a la izquierda de x_o si y solo si para $x \in R$:

1. $f(x_o)$ existe
2. $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x)$ existe
3. $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = f(x_o)$

Continuidad de una función en un intervalo abierto

Se dice que $f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a, b) si y solo si es continua en todos los puntos del intervalo.

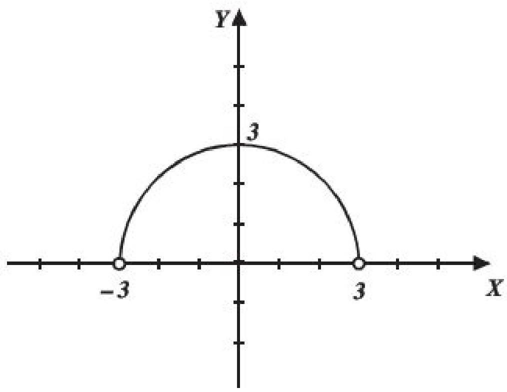
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ es continua en el intervalo $(-3, 3)$

Solución

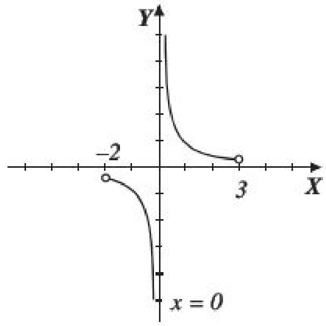
La función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ está definida en todos los puntos del intervalo $(-3, 3)$, como se ilustra en la gráfica, por consiguiente, $f(x)$ es continua en dicho intervalo.



2 ¿$f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en el intervalo $(-2, 3)$?

Solución

$f(x)$ no está definida en $x = 0$; entonces no es continua en este punto, por tanto, no es continua en el intervalo $(-2, 3)$



Continuidad en un intervalo cerrado

Una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si es continua en el intervalo abierto (a, b) y además

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

EJEMPLOS

1 Demuestra que $f(x) = x^2 - 2x$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 2]$

Demostración

La función $f(x)$ es polinomial, lo cual implica que está definida en el intervalo abierto $(-1, 2)$, por tanto, es continua en el intervalo, ahora se prueba la continuidad en los extremos del intervalo.

Para $x = -1$

a) $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) = 3$

b) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2 - 2x) = 3$

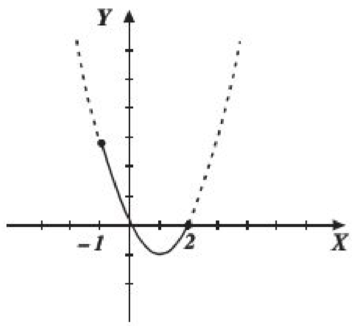
c) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

Para $x = 2$

a) $f(2) = (2)^2 - 2(2) = 0$

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 2x) = 0$

c) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

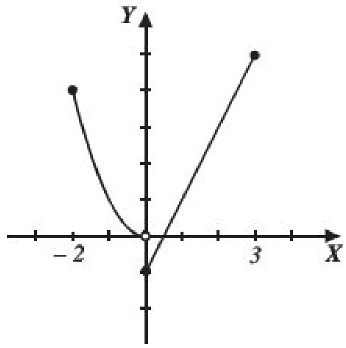


$f(x)$ es continua en el intervalo abierto $(-1, 2)$ y es continua a la derecha de -1 y a la izquierda de 2, entonces $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 2]$

2 ¿La función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua en el intervalo $[-2, 3]$?

Solución

Del intervalo $(-2, 3)$ la función $f(x)$ no es continua en $x = 0$, ya que:



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0, \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

Por tanto, $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

Si $f(x)$ no es continua en el intervalo abierto

$$(-2, 3)$$

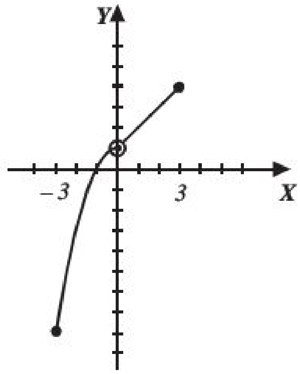
Entonces, no es continua en el intervalo cerrado

$$[-2, 3]$$

3 ¿La función $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua en el intervalo $[-3, 3]$?

Solución

Se prueba la continuidad de la función en $x = 0$



1. $f(0) = 1 - (0)^2 = 1$
2. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 + (0) = 1$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 - (0)^2 = 1$
3. $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

La función es continua en el intervalo $(-3, 3)$

Ahora se prueba la continuidad en los extremos:

Para $x = -3$

1. $f(-3) = 1 - (-3)^2 = 1 - 9 = -8$
2. $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 1 - (3)^2 = 1 - 9 = -8$
3. $f(-3) = \lim_{x \to -3^+} f(x)$

Para $x = 3$

1. $f(3) = 1 + 3 = 1 + 3 = 4$
2. $\lim_{x \to -3^-} f(x) = 1 + 3 = 1 + 3 = 4$
3. $f(3) = \lim_{x \to -3^-} f(x)$

La función es continua en $(-3, 3)$ y además es continua a la derecha de -3 y a la izquierda de 3, por tanto, es continua en el intervalo $[-3, 3]$

Continuidad en un intervalo semiabierto

Para intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ se tiene que:

1. Una función $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto $(a, b]$ si es continua en el intervalo abierto (a, b), y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$
2. Una función $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto $[a, b)$ si es continua en el intervalo abierto (a, b), y $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ es continua en el intervalo semiabierto $(3, 6]$

Demostración

El dominio de la función se define $D_f = \{x \in R \mid x \neq 3\}$, por tanto $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $(3, 6)$

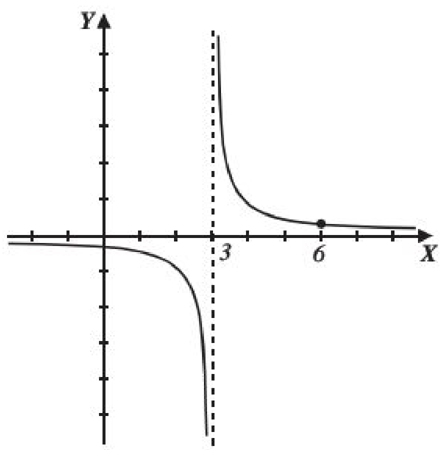
Se verifica la continuidad por la izquierda en 6

a) $f(6) = \dfrac{2}{6-3} = \dfrac{2}{3}$

b) $\lim_{x \to 6^-} f(x) = \lim_{x \to 6^-} \left(\dfrac{2}{x-3}\right) = \dfrac{2}{3}$

c) $\lim_{x \to 6^-} f(x) = f(6)$

Entonces, $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto $(3, 6]$



2 ¿La función $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$ es continua en el intervalo semiabierto $(-1, 3]$?

Solución

Se verifica la continuidad en $x = 2$

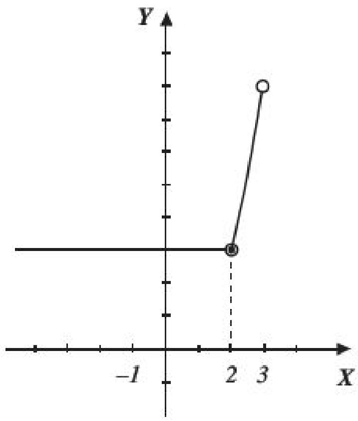
1. $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$
2. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$,

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

3. $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$, la función es continua en $(-1, 3)$

Se prueba la continuidad por la izquierda en $x = 3$

1. $f(3)$ no está definida, por tanto, la función no es continua en el intervalo $(-1, 3]$



3 Verifica la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ -x^2 + 4x & \text{si } 0 < x < 4 \end{cases}$ en $[-2, 4)$

Solución

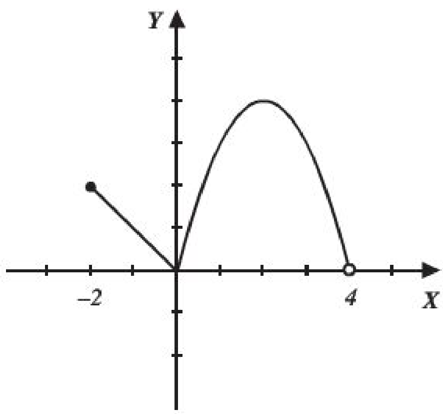
Se verifica la continuidad en $x = 0$

1. $f(0) = -(0) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} (-x^2 + 4x) = 0$
3. Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

La función es continua en el intervalo $(-2, 4)$

Se prueba la continuidad por la derecha para $x = -2$

1. $f(-2) = -(-2) = 2$
2. $\lim\limits_{x\to -2^+} (-x) = -(-2) = 2$
3. $f(-2) = \lim\limits_{x\to -2^+} (-x)$



Por tanto, la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[-2, 4)$

EJERCICIO 26

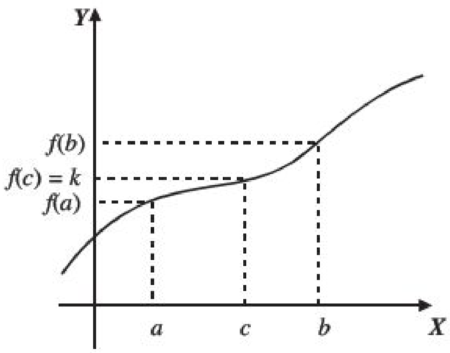
Verifica si son continuas las siguientes funciones en los intervalos indicados:

1. $f(x) = 3x + 2$ en $[0, 3)$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ en $(-1, 3)$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ en $[-3, 3]$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} - 3$ en $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$
5. $f(x) = x^2 - x^3$ en $[-2, 0]$
6. $f(x) = \sqrt{x+3}$ en $[-3, 1]$
7. $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x < 1 \\ 4x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $[-2, 4]$
8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 2x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en $[-3, 4]$
9. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 2 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $(0, 3)$
10. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ -2x+3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ -3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ en $(-2, 5)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teorema del valor intermedio

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, y k un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.



EJEMPLOS

1 Si $f(x) = 3x - 2$ es una función definida en el intervalo $[-2, 3]$, obtén el valor de c que cumpla con el teorema del valor intermedio cuando $k = 1$

Solución

Al aplicar el teorema se obtiene:

$$f(c) = k \rightarrow 3c - 2 = 1 \rightarrow 3c = 3 \rightarrow c = 1$$

Por consiguiente, $c = 1$ cuando $k = 1$

2 Dada la función $g(x) = x^2 - 3x - 2$, definida en el intervalo $[1, 4]$, determina el valor de k que cumpla con el teorema del valor intermedio cuando $c = 3$

Solución

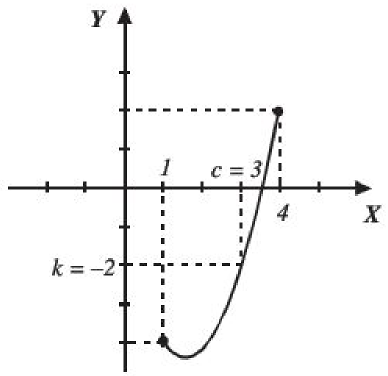
Se aplica el teorema:

$$f(c) = k \rightarrow c^2 - 3c - 2 = \mathrm{k}$$

Pero, $c = 3$ y al sustituir se obtiene el valor de k

$$(3)^2 - 3(3) - 2 = k \rightarrow k = -2$$

entonces, $k = -2$



EJERCICIO 27

Aplica el teorema del valor intermedio y encuentra el valor de c en los siguientes ejercicios:

1. $f(x) = 3x - 5$; $[-2, 4]$ con $k = 1$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$; $[-3, 3]$ con $k = 2$
3. $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 1}$; $[0, 5]$ con $k = 2$
4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$; $[-2, 4]$ con $k = 0$
5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5 - x} & \text{si } x \leq 5 \\ x^2 - 25 & \text{si } x > 5 \end{cases}$; $[0, 8]$ con $k = 0$

Aplica el teorema del valor intermedio y determina el valor de k en los siguientes ejercicios:

6. $f(x) = 3x^3 - 2x^2$; $[-2, 0]$, $c = -1$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$; $[-6, 0]$, $c = -4$
8. $f(x) = \dfrac{x}{2x + 1}$; $[1, 5]$, $c = 2$
9. $f(x) = \cos x$; $[0, 2\pi]$, $c = \dfrac{\pi}{4}$
10. $f(x) = \log(3 + x)$; $[1, 12]$, $c = 7$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente