(a) Si x y y denotan los sueldos por hora del plomero y el electricista, respectivamente, demuestre que

$$6x + 5y = 10x \quad \text{y} \quad 4x + 6y = 11y.$$

Describa las soluciones a este sistema.

(b) Si el plomero normalmente gana \$35 por hora, ¿cuánto debe cobrar el electricista?

38 Encuentre ecuaciones para las altitudes de los triángulos con vértices $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$ y $C(3, -8)$ y encuentre el punto en el que las altitudes se intersecan.

39 **Tendencia al calentamiento en París** Como resultado de la urbanización, las temperaturas en París han aumentado. En 1891 el promedio de temperaturas mínimas y máximas diarias era de 5.8°C y 15.1°C, respectivamente. Entre 1891 y 1968, estas temperaturas se elevaron 0.019°C/año y 0.011°C/año, respectivamente. Suponiendo que los aumentos fueron lineales, encuentre el año cuando la diferencia entre la temperatura mínima y la máxima era de 9°C y determine la correspondiente temperatura máxima en promedio.

40 **Tarifas telefónicas de larga distancia** Una compañía telefónica cobra a sus abonados una cierta cantidad por el primer minuto de una llamada de larga distancia y otra cantidad por cada minuto adicional. Un abonado hace dos llamadas a la misma ciudad, una llamada de 36 minutos por \$2.93 y una llamada de 13 minutos por \$1.09.

(a) Determine el costo por el primer minuto y el costo por cada minuto adicional.

(b) Si hay una tasa de impuesto federal de 3.2% y una tasa de impuesto estatal de 7.2% en todas las llamadas de larga distancia, encuentre, al minuto más cercano, la llamada más larga a la misma ciudad cuyo costo no exceda de \$5.00.

41 **Grabación en casete** Una ávida aficionada a ver el tenis desea grabar 6 horas de un importante torneo en una sola cinta. Su cinta puede contener 5 horas y 20 minutos a una velocidad LP de larga duración, y 8 horas a la velocidad SLP que es más lenta. La velocidad LP produce una mejor calidad de imagen, de modo que ella desea maximizar el tiempo grabado a la velocidad LP. Encuentre el tiempo a ser grabado a cada velocidad.

42 **Precio y demanda** Suponga que unos consumidores comprarán 1,000,000 de "playeras" si el precio de venta es \$15, pero por cada \$1 de aumento en el precio comprarán 100,000 playeras menos. Además, suponga que los vendedores solicitarán 2,000,000 de playeras si el precio de venta es \$20 y que por cada \$1 de aumento en el precio solicitarán otras 150,000.

(a) Exprese el número Q de playeras que los consumidores comprarán si el precio de venta es de p dólares.

(b) Exprese el número K de playeras que los vendedores solicitarán si el precio de venta es p dólares.

(c) Determine el precio de mercado, es decir, el precio cuando $Q = K$.

Ejer. 43-46: Despeje *a* y *b* del sistema. (*Sugerencia:* Trate términos como e^{3x}, cos *x* y sen *x* como "coeficientes de constantes.")

43 $$\begin{cases} ae^{3x} + be^{-3x} = 0 \\ a(3e^{3x}) + b(-3e^{-3x}) = e^{3x} \end{cases}$$

44 $$\begin{cases} ae^{-x} + be^{4x} = 0 \\ -ae^{-x} + b(4e^{4x}) = 2 \end{cases}$$

45 $$\begin{cases} a\cos x + b \operatorname{sen} x = 0 \\ -a \operatorname{sen} x + b\cos x = \tan x \end{cases}$$

46 $$\begin{cases} a\cos x + b \operatorname{sen} x = 0 \\ -a \operatorname{sen} x + b\cos x = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

9.3 *Sistema de desigualdades*

En el capítulo 2 restringimos nuestra exposición acerca de desigualdades a desigualdades con una variable. Ahora consideramos desigualdades con dos variables x y y, como las que se muestran en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN **Desigualdades en *x* y *y***

- $y^2 < x + 4$
- $3x - 4y > 12$
- $x^2 + y^2 \leq 16$

Una **solución** de una desigualdad en x y y es un par ordenado (a, b) que produce un enunciado verdadero si a y b se sustituyen por x y y, respectivamente. **Resolver** una desigualdad en x y y significa hallar todas las soluciones. La **gráfica** de tal desigualdad es el conjunto de todos los puntos (a, b) de un plano xy que corresponda a las soluciones. Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

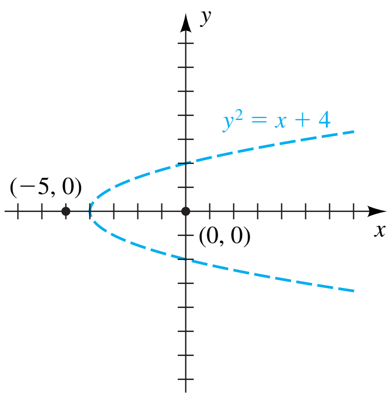
Dada una desigualdad en x y y, si cambiamos el símbolo de desigualdad con un signo de igual, obtenemos una ecuación cuya gráfica por lo general separa el plano xy en dos regiones. Consideraremos sólo ecuaciones que tengan la propiedad de que si R es una de esas regiones y si un **punto de prueba** (p, q) en R da una solución de la desigualdad, entonces *todo* punto en R da una solución. Las siguientes directrices se pueden usar entonces para trazar la gráfica de la desigualdad.

Directrices para trazar la gráfica de una desigualdad en *x* y *y*

1 Cambiar el símbolo de desigualdad con un signo de igual y graficar la ecuación resultante. Use líneas interrumpidas si el símbolo de desigualdad es $<$ o $>$ para indicar que ningún punto en la gráfica da una solución. Use una línea o curva continua para $\leq$ o $\geq$ para indicar que las soluciones de la ecuación también son soluciones de la desigualdad.

2 Si R es una región del plano xy determinada por la gráfica de la directriz 1 y si un punto de prueba (p, q) en R da una solución de la desigualdad, entonces todo punto en R da una solución. Haga sombreado en R para indicar este hecho. Si (p, q) no es una solución, entonces *ningún* punto en R da una solución y R se deja sin sombrear.

Figura 1



El uso de estas directrices se demuestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 **Trazar la gráfica de una desigualdad**

Encuentre las soluciones y trace la gráfica de la desigualdad $y^2 < x + 4$.

SOLUCIÓN

Directriz 1 Cambiamos $<$ con $=$, obteniendo $y^2 = x + 4$. La gráfica de esta ecuación es una parábola, simétrica con respecto al eje x y que tiene punto de intersección -4 con el eje x y puntos de intersección ± 2 con el eje y. Como el símbolo de desigualdad es $<$, trazamos la parábola usando línea interrumpida, como en la figura 1.

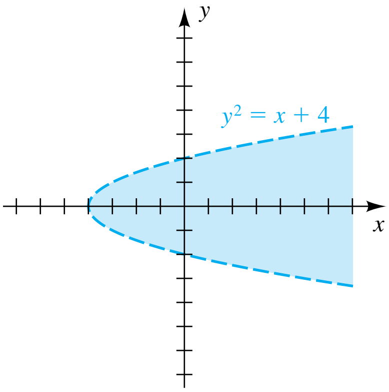
Directriz 2 La gráfica de la directriz 1 separa el plano xy en dos regiones, una a la *izquierda* de la parábola y la otra a la *derecha*. Escojamos puntos de prueba $(-5, 0)$ y $(0, 0)$ en las regiones (vea la figura 1) y sustituya por x y y en $y^2 < x + 4$ como sigue:

Punto de prueba $(-5, 0)$ LI: $0^2 = 0$
LD: $-5 + 4 = -1$

Como $0 < -1$ es un enunciado *falso*, $(-5, 0)$ *no* es una solución de la desigualdad. Por tanto, *ningún* punto a la izquierda de la parábola es solución y dejamos sin sombrear la región.

(continúa)

Figura 2



Punto de prueba $(0, 0)$ LI: $0^2 = 0$
LD: $0 + 4 = 4$

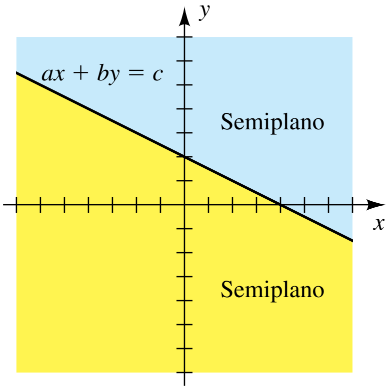
Como $0 < 4$ es un enunciado *verdadero*, $(0, 0)$ *es* una solución de la desigualdad. Por tanto, *todos* los puntos a la derecha de la parábola son soluciones, de modo que sombreamos esta región como se ve en la figura 2.

Una **desigualdad lineal** es aquella que se puede escribir en una de las formas siguientes, donde a, b y c son números reales:

$$ax + by < c, \quad ax + by > c, \quad ax + by \leq c, \quad ax + by \geq c$$

La recta $ax + by = c$ separa el plano xy en dos **semiplanos,** como se ilustra en la figura 3. Las soluciones de la desigualdad están formadas por todos los puntos en *uno* de estos semiplanos, donde la recta está incluida para $\leq$ o $\geq$ y no está incluida para $<$ o $>$. *Para una desigualdad lineal, sólo un punto de prueba* (p, q) *se requiere,* porque si (p, q) es una solución, entonces el semiplano con (p, q) contiene todas las soluciones, mientras que si (p, q) *no* es una solución, entonces *el otro* semiplano contiene las soluciones.

Figura 3



EJEMPLO 2 **Trazar la gráfica de una desigualdad lineal**

Trace la gráfica de la desigualdad $3x - 4y > 12$.

SOLUCIÓN El cambio de $>$ con $=$ nos da la recta $3x - 4y = 12$, trazada con una línea interrumpida en la figura 4. Esta recta separa el plano xy en dos semiplanos, uno *arriba* de la recta y el otro *debajo* de la recta. Es conveniente escoger el punto de prueba $(0, 0)$ arriba de la recta y sustituir en $2x - 4y > 12$, como sigue:

Punto de prueba $(0, 0)$ LI: $3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$
LD: 12

Como $0 > 12$ es un enunciado falso, $(0, 0)$ no es una solución. Entonces, ningún punto arriba de la recta es solución y las soluciones de $3x - 4y > 12$ están dadas por los puntos del semiplano *debajo* de la recta. La gráfica está trazada en la figura 5.

Figura 4

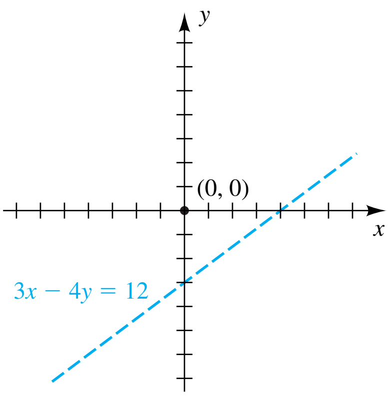
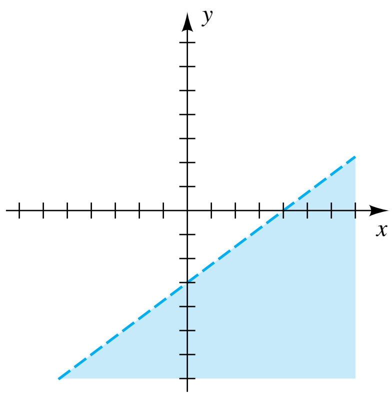
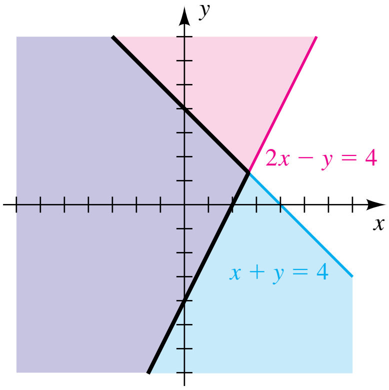


Figura 5



Como lo hicimos con ecuaciones, a veces trabajamos simultáneamente con varias desigualdades con dos variables, es decir, con un **sistema de desigualdades.** Las **soluciones** de un sistema de desigualdades son las soluciones comunes a todas las desigualdades del sistema. La **gráfica** de un sistema de desigualdades está formada por los puntos correspondientes a las soluciones. Los siguientes ejemplos ilustran un método para resolver sistemas de desigualdades.

Figura 6



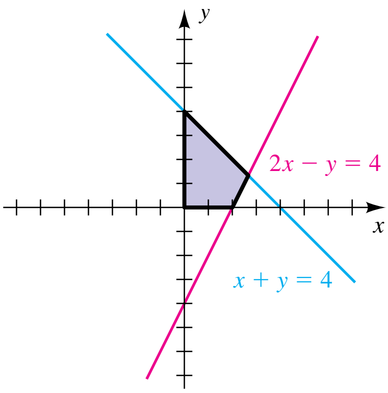
EJEMPLO 3 **Resolver un sistema de desigualdades lineales**

Trace la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Cambiamos $\leq$ con $=$ y luego trazamos las rectas resultantes, como se ve en la figura 6. Usando el punto de prueba (0, 0), vemos que las soluciones del sistema corresponden a los puntos *abajo* (y sobre) la recta $x + y = 4$ y *arriba* (y sobre) la recta $2x - y = 4$. Si sombreamos estos semiplanos con colores diferentes, como en la figura 6, tenemos como la gráfica del sistema los puntos que están en *ambas* regiones, indicadas por la parte violeta de la figura.

Figura 7



EJEMPLO 4 **Resolver un sistema de desigualdades lineales**

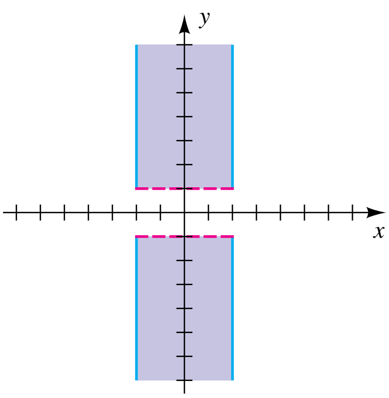
Trace la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Las primeras dos desigualdades son las mismas que consideramos en el ejemplo 3 y, por tanto, los puntos en la gráfica del sistema deben estar dentro de la región violeta mostrada en la figura 6. Además, la tercera y cuarta desigualdades del sistema nos dicen que los puntos deben estar en el primer cuadrante o sobre sus fronteras. Esto nos da la región que se ve en la figura 7.

EJEMPLO 5 **Resolver un sistema de desigualdades que contengan valores absolutos**

Figura 8



Trace la gráfica del sistema

$$\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| > 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Usando propiedades de valores absolutos (citados en la página 118), vemos que (x, y) es una solución del sistema si y sólo si *las dos* condiciones siguientes son verdaderas:

$$\textbf{(1)}\quad -2 \leq x \leq 2$$

$$\textbf{(2)}\quad y < -1 \qquad \text{o} \qquad y > 1$$

Así, un punto (x, y) sobre la gráfica del sistema debe estar entre (o sobre) las rectas verticales $x = \pm 2$ y también ya sea debajo de la recta horizontal $y = -1$ o arriba de la recta $y = 1$. La gráfica está trazada en la figura 8.

Figura 9

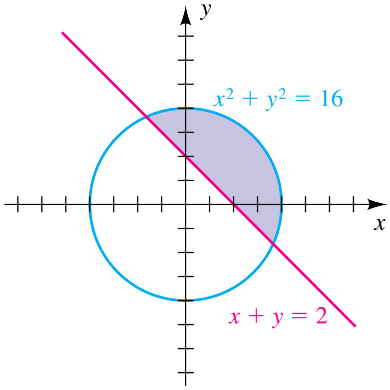
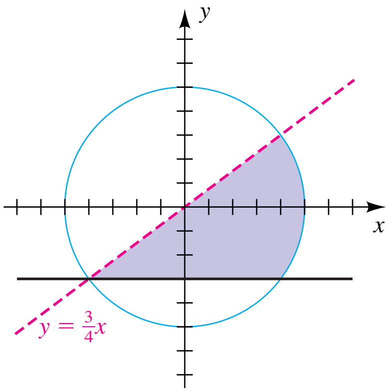


Figura 10



EJEMPLO 6 **Resolver un sistema de desigualdades**

Trace la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Las gráficas de $x^2 + y^2 = 16$ y $x + y = 2$ son la circunferencia y la recta, respectivamente, mostrados en la figura 9. Usando el punto de prueba (0, 0), vemos que los puntos que dan soluciones del sistema deben estar dentro (o sobre) del círculo y también arriba (o sobre) la recta. Esto nos da la región trazada en la figura 9.

EJEMPLO 7 **Hallar un sistema de desigualdades a partir de una gráfica**

Encuentre un sistema de desigualdades para la región sombreada que se ve en la figura 10.

SOLUCIÓN Una ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 5^2$. Como el *interior* del círculo lleno está sombreado, la región sombreada (incluyendo el círculo) pueden ser descritos por $x^2 + y^2 \leq 25$. El *exterior* del círculo podría ser descrito por $x^2 + y^2 > 25$.

Como la región sombreada está *debajo* de la recta interrumpida con ecuación $y = \frac{3}{4}x$, está descrita por la desigualdad $y < \frac{3}{4}x$. Por último, como la región sombreada está *arriba* de la recta horizontal llena $y = -3$, usamos $y \geq -3$. Por tanto, un sistema es

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ y < \frac{3}{4}x \\ y \geq -3 \end{cases}$$

EJEMPLO 8 **Una aplicación de un sistema de desigualdades**

El *manager* de un equipo de beisbol desea comprar *bates* y pelotas que cuestan \$20 y \$5 cada una, respectivamente. Se necesitan al menos cinco bates y diez pelotas y el costo total no debe exceder de \$300. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y trace la gráfica.

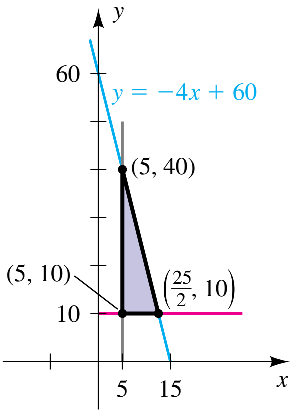
SOLUCIÓN Empezamos por denotar con x el número de bates y y el número de pelotas. Como el costo de un bate es \$20 y el costo de una pelota es \$5, vemos que

$$20x = \text{costo de } x \text{ bates}$$
$$5y = \text{costo de } y \text{ pelotas.}$$

Como el costo total no debe exceder de \$300, debemos tener

$$20x + 5y \leq 300$$

Figura 11



o bien, lo que es equivalente,

$$y \leq -4x + 60.$$

Como se necesitan al menos cinco bates y diez pelotas, también tenemos

$$x \geq 5 \quad \text{y} \quad y \geq 10.$$

La gráfica de $y \leq -4x + 60$ es el semiplano que se encuentra *abajo* (o sobre) la recta $y = -4x + 60$ mostrada en la figura 11.

La gráfica de $x \geq 5$ es la región a la derecha (o sobre) de la recta vertical $x = 5$ y la gráfica de $y \geq 10$ es la región arriba (o sobre) la recta horizontal $y = 10$.

La gráfica del sistema, es decir, los puntos comunes a los tres semiplanos, es la región triangular trazada en la figura 11.

EJEMPLO 9 **Graficar una desigualdad**

Grafique la desigualdad $27y^3 \leq 8 + x^3$.

SOLUCIÓN Primero debemos despejar y de la *igualdad* asociada:

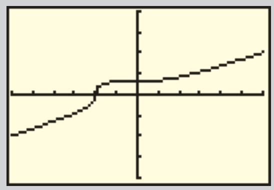
$$27y^3 = 8 + x^3 \qquad \text{igualdad}$$

$$y^3 = \tfrac{1}{27}(8 + x^3) \qquad \text{divida entre 27}$$

$$y = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{8 + x^3} \qquad \text{toma la raíz cúbica de ambos lados}$$

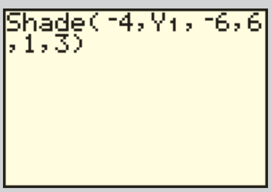
Asignamos $\frac{1}{3}\sqrt[3]{8 + x^3}$ a Y_1 y graficamos Y_1 en la pantalla $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$, como se ve en la figura 12. El punto de prueba $(0, 0)$ está en la región de solución (porque $0 \leq 8$ es verdadero), de modo que deseamos sombrear la región debajo de la gráfica de Y_1. Se muestran los comandos para la TI-83/4 Plus y la TI-86.

Figura 12



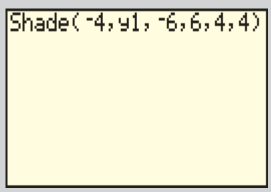
TI-83/4 Plus

2nd DRAW 7 −4 , VARS
▷ 1 1 , −6 , 6 ,
1 , 3)



TI-86

GRAPH MORE DRAW(F2)
Shade(F1) −4 , 2nd alpha
Y 1 , −6 , 6 , 4 , 4)

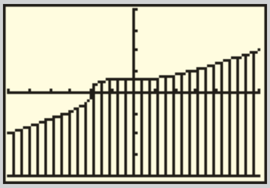


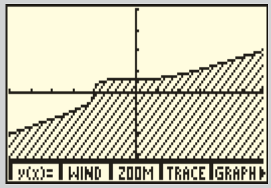
(continúa)

Los parámetros para el comando Shade (sombrear) son como sigue:

-4 es la función inferior para la región sombreada; en este caso, simplemente usamos el valor de Ymín.
Y_1 es la función superior para la región sombreada.
-6 y 6 son Xmín y Xmáx.
1 (o 4) es el patrón de sombra; hay cuatro de ellos.
3 (o 4) sombrea cada tercer (o cuarto) pixel; se puede especificar un entero de 1 a 8.

Presionar ENTER da las gráficas siguientes.

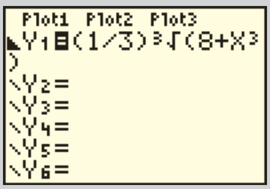




Método alternativo: Hay un método alternativo para sombrear en cada calculadora. Se puede ejecutar al seleccionar un estilo de graficación de la pantalla Y= o y(x)=(F1).

Usando las teclas del cursor, mueva el cursor a la izquierda de "Y_1." Sucesivamente presione ENTER para pasar por los siete estilos de graficación. Seleccione el estilo "sombrear abajo" como se ve en la figura. Presionar GRAPH produce una figura sombreada como antes.

Con el cursor en la misma recta que "y1," presione MORE. Sucesivamente presione STYLE(F3) para pasar por los siete estilos de graficación. Seleccione el estilo "sombrear abajo" que se ve en la figura. Presionar 2nd GRAPH(M5) produce una figura sombreada.



9.3 *Ejercicios*

Ejer. 1-10: Trace la gráfica de la desigualdad.

1 $3x - 2y < 6$

2 $4x + 3y < 12$

3 $2x + 3y \geq 2y + 1$

4 $2x - y > 3$

5 $y + 2 < x^2$

6 $y^2 - x \leq 0$

7 $x^2 + 1 \leq y$

8 $y - x^3 < 1$

9 $yx^2 \geq 1$

10 $x^2 + 4 \geq y$

Ejer. 11-26: Trace la gráfica del sistema de desigualdades.

11 $\begin{cases} 3x + y < 3 \\ 4 - y < 2x \end{cases}$

12 $\begin{cases} y + 2 < 2x \\ y - x > 4 \end{cases}$

13 $\begin{cases} y - x < 0 \\ 2x + 5y < 10 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2y - x \leq 4 \\ 3y + 2x < 6 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ y - 2x \geq 1 \\ \quad x \geq -2 \\ \quad y \leq 4 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 3x - 4y \geq 12 \\ x - 2y \leq 2 \\ \quad x \geq 9 \\ \quad y \leq 5 \end{cases}$

17 $\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$

19 $\begin{cases} |x| \geq 2 \\ |y| < 3 \end{cases}$

20 $\begin{cases} |x| \geq 4 \\ |y| \geq 3 \end{cases}$

21 $\begin{cases} |x + 2| \leq 1 \\ |y - 3| < 5 \end{cases}$

22 $\begin{cases} |x - 2| \leq 5 \\ |y - 4| > 2 \end{cases}$

23 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$

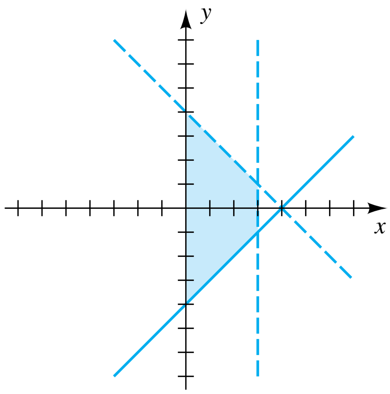
24 $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$

25 $\begin{cases} x^2 \leq 1 - y \\ x \geq 1 + y \end{cases}$

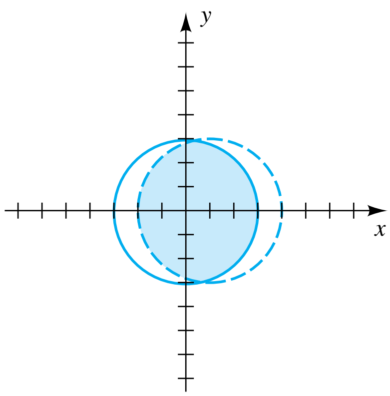
26 $\begin{cases} x - y^2 < 0 \\ x + y^2 > 0 \end{cases}$

Ejer. 27-34: Encuentre un sistema de desigualdades cuya gráfica se muestra.

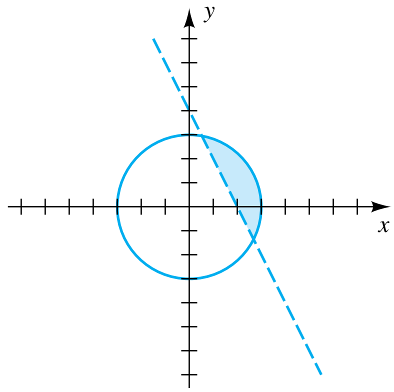
27



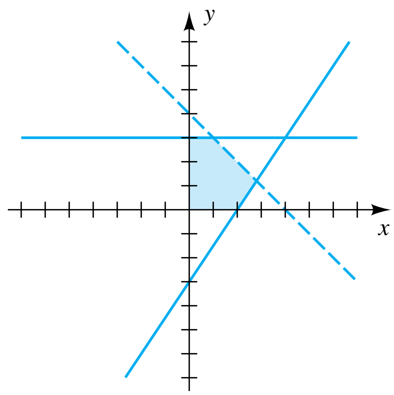
28



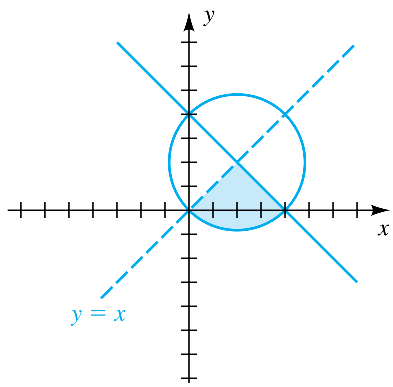
29



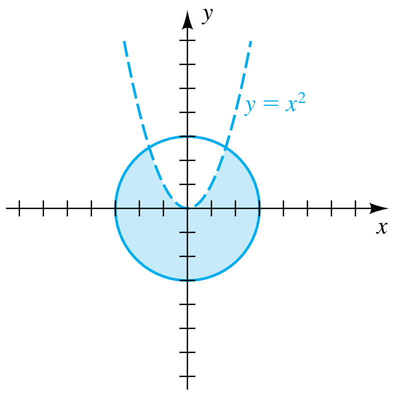
30



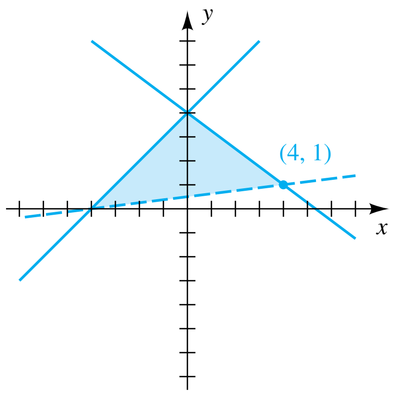
31



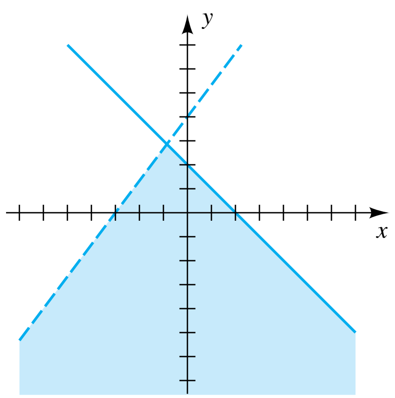
32



33



34



35 **Niveles de inventario** Una tienda vende dos marcas de televisores. La demanda de compradores indica que es necesario tener en existencia al menos el doble de aparatos de la marca A que de la marca B. También es necesario tener a la mano al menos 10 aparatos de la marca B. Hay espacio para no más de 100 aparatos en la tienda. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para almacenar las dos marcas.

36 **Precios de boletos** Un auditorio contiene 600 asientos. Para un próximo evento, los boletos tendrán un precio de \$8 para algunos asientos y \$5 para otros. Al menos 225 boletos van a tener el precio de \$5 y se desean ventas totales de \$3000. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para fijar el precio a los dos tipos de boletos.

37 **Estrategia de inversión** Una mujer con \$15,000 para invertir decide poner al menos \$2000 en una inversión de alto rendimiento pero de alto riesgo y al menos el triple de esa cantidad en una inversión de bajo rendimiento pero de bajo riesgo. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para poner el dinero en las dos inversiones.

38 **Niveles de inventario** El gerente de una librería universitaria tiene en existencia dos tipos de cuadernos, el primero de los cuales se vende al mayoreo en 55¢ y el segundo en 85¢. La cantidad máxima a gastar es \$600 y se desea un inventario de al menos 300 de la variedad de 85¢ y 400 de la variedad de 55¢. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para almacenar los dos tipos de cuadernos.

39 **Dimensiones de una lata** Una lata de aerosol se va a construir en forma de cilindro circular con un pequeño cono en la parte superior. La altura total de la lata incluida la parte cónica no debe ser más de 9 pulgadas y el cilindro debe contener al menos 75% del volumen total. Además, la altura de la parte cónica debe medir al menos 1 pulgada. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para la relación entre la altura y del cilindro y la altura x del cono.

40 **Dimensiones de una ventana** Una ventana de vidrios de color se va a construir en forma de rectángulo rematado por un semicírculo (vea la figura). La altura total h de la ventana no puede ser de más de 6 pies y el área de la parte rectangular debe ser al menos el doble del área del semicírculo. Además, el diámetro d del semicírculo debe ser al menos de 2 pies. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para la base y altura de la parte rectangular.