70 Volumen de una caja De una pieza rectangular metálica, que tiene dimensiones de 24×36 pulgadas, se ha de hacer una caja abierta al cortar un cuadrado idéntico de área x^2 de cada esquina y doblar los lados hacia arriba.

(a) Determine una ecuación para hallar el volumen V de la caja en términos de x.

(b) Use una tabla de valores para aproximar el valor de x con tolerancia ± 0.1 pulg que producirá un volumen máximo.

71 Construcción de una caja Una caja de cartón sin tapa y fondo cuadrado ha de tener un volumen de 25 pies^3. Use una tabla de valores para determinar las dimensiones de la caja al 0.1 pie más cercano que minimizará la cantidad de cartón empleado para construir la caja.

2.6 *Desigualdades*

Una **desigualdad** es un enunciado de que dos cantidades o expresiones no son iguales. Puede ser el caso que una cantidad sea menor que ($<$), menor que o igual a ($\leq$), mayor que ($>$) o mayor que o igual a ($\geq$) otra cantidad. Considere la desigualdad

$$2x + 3 > 11,$$

donde x es una variable. Como se ilustra en la tabla siguiente, ciertos números dan enunciados verdaderos cuando se sustituyen por x y otros dan enunciados falsos.

x	$2x + 3 > 11$	Conclusión
3	$9 > 11$	Enunciado falso
4	$11 > 11$	Enunciado falso
5	$13 > 11$	Enunciado verdadero
6	$15 > 11$	Enunciado verdadero

Si se obtiene un enunciado verdadero cuando un número b es sustituido por x, entonces b es una **solución** de la desigualdad. Así, $x = 5$ es una solución de $2x + 3 > 11$ porque $13 > 11$ es verdadero, pero $x = 3$ no es una solución porque $9 > 11$ es falso. **Resolver** una desigualdad significa hallar *todas* las soluciones. Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

Casi todas las desigualdades tienen un número infinito de soluciones. Para ilustrar esto, las soluciones de la desigualdad

$$2 < x < 5$$

están formadas por *todo* número real x entre 2 y 5. A este conjunto de números se le denomina **intervalo abierto** y se denota por (2, 5). La **gráfica** del in-

Figura 1

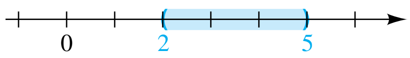
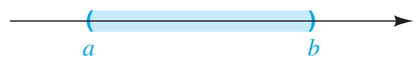
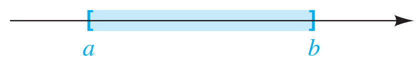
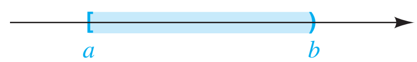
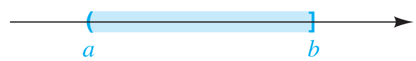
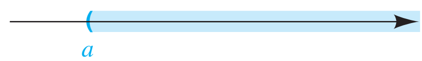
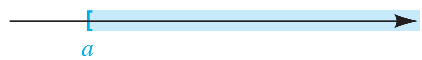
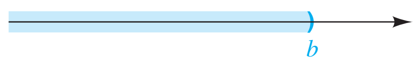
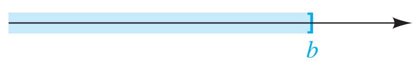


Figura 2

tervalo abierto (2, 5) es el conjunto de todos los puntos de una recta de coordenadas que se encuentre, pero no incluye, los puntos correspondientes a $x = 2$ y $x = 5$. La gráfica está representada al sombrear una parte apropiada del eje, como se ve en la figura 1. A este proceso lo conocemos como **trazar la gráfica** del intervalo. Los números 2 y 5 se denominan **puntos extremos** del intervalo (2, 5). Los paréntesis en la notación (2, 5) y en la figura 1 se usan para indicar que los puntos extremos del intervalo no están incluidos.

Si se desea incluir un punto extremo, se usa un corchete en lugar de paréntesis; por ejemplo, las soluciones de la desigualdad $2 \leq x \leq 5$ se denotan por [2, 5] y éste se conoce como **intervalo cerrado**. La gráfica [2, 5] está trazada en la figura 2, donde los corchetes indican que los puntos extremos están incluidos. También consideramos **intervalos semiabiertos** $[a, b)$ y $(a, b]$ así como **intervalos infinitos**, como se describe en la tabla siguiente. El símbolo ∞ (léase *infinito*) que se usa para intervalos infinitos es sólo una notación y *no* representa un número real.

Intervalos

Notación	Desigualdad	Gráfica
(1) (a, b)	$a < x < b$	
(2) $[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
(3) $[a, b)$	$a \leq x < b$	
(4) $(a, b]$	$a < x \leq b$	
(5) (a, ∞)	$x > a$	
(6) $[a, \infty)$	$x \geq a$	
(7) $(-\infty, b)$	$x < b$	
(8) $(-\infty, b]$	$x \leq b$	
(9) $(-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$	

Los métodos para resolver desigualdades en x son semejantes a los que se emplean para resolver ecuaciones. En particular, con frecuencia usamos propiedades de desigualdades para sustituir una desigualdad dada con una lista de desigualdades equivalentes, terminando con una desigualdad de la que fácilmente se obtienen soluciones. Las propiedades de la tabla siguiente se pueden demostrar para números reales a, b, c y d.

Propiedades de desigualdades

Propiedad	Ejemplos
(1) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.	$2 < 5$ y $5 < 9$, así $2 < 9$.
(2) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.	$2 < 7$, así $2 + 3 < 7 + 3$ y $2 - 3 < 7 - 3$.
(3) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ y $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$.	$2 < 5$ y $3 > 0$, así $2 \cdot 3 < 5 \cdot 3$ y $\dfrac{2}{3} < \dfrac{5}{3}$.
(4) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$ y $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$.	$2 < 5$ y $-3 < 0$, así $2(-3) > 5(-3)$ y $\dfrac{2}{-3} > \dfrac{5}{-3}$.

Invierta la desigualdad cuando multiplique o divida por un número negativo.

Es importante recordar que al multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por un número real negativo el signo de desigualdad se invierte (vea la propiedad 4). Las propiedades semejantes a las citadas líneas antes son verdaderas para otras desigualdades y para $\leq$ y $\geq$. Por tanto, si $a > b$, entonces $a + c > b + c$; si $a \geq b$ y $c < 0$, entonces $ac \leq bc$; y así sucesivamente.

Si x representa un número real, entonces, por la propiedad 2, sumar o restar la misma expresión que contenga x en ambos lados de una desigualdad dará una desigualdad equivalente. Por la propiedad 3, podemos multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por una expresión que contenga x si estamos seguros que la expresión es positiva para todos los valores de x bajo consideración. Como ilustración, la multiplicación o división por $x^4 + 3x^2 + 5$ sería permisible puesto que esta expresión es siempre positiva. Si multiplicamos o dividimos ambos lados de una desigualdad por una expresión que siempre sea negativa, como $-7 - x^2$, entonces, por la propiedad 4, la desigualdad se invierte.

En ejemplos describiremos soluciones de desigualdades por medio de intervalos y también los representaremos gráficamente.

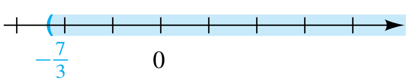
EJEMPLO 1 **Resolver una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $-3x + 4 < 11$.

SOLUCIÓN

$$-3x + 4 < 11 \qquad \text{enunciado}$$
$$(-3x + 4) - 4 < 11 - 4 \qquad \text{reste 4}$$
$$-3x < 7 \qquad \text{simplifique}$$
$$\frac{-3x}{-3} > \frac{7}{-3} \qquad \text{divida por } -3\text{; invierta el signo de desigualdad}$$
$$x > -\tfrac{7}{3} \qquad \text{simplifique}$$

Figura 3



Entonces, las soluciones de $-3x + 4 < 11$ están formadas por todos los números reales x tales que $x > -\frac{7}{3}$. Éste es el intervalo $\left(-\frac{7}{3}, \infty\right)$ trazado en la figura 3.

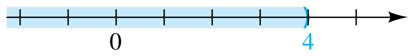
EJEMPLO 2 **Resolución de una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $4x - 3 < 2x + 5$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 4x - 3 &< 2x + 5 && \text{enunciado} \\ (4x - 3) + 3 &< (2x + 5) + 3 && \text{sume 3} \\ 4x &< 2x + 8 && \text{simplifique} \\ 4x - 2x &< (2x + 8) - 2x && \text{reste } 2x \\ 2x &< 8 && \text{simplifique} \\ \frac{2x}{2} &< \frac{8}{2} && \text{divida entre 2} \\ x &< 4 && \text{simplifique} \end{aligned}$$

Figura 4



Por lo tanto, las soluciones de la desigualdad dada están formadas por todos los números reales x tales que $x < 4$. Éste es el intervalo $(-\infty, 4)$ que se ve en la figura 4.

EJEMPLO 3 **Resolución de una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $-6 < 2x - 4 < 2$.

SOLUCIÓN Un número real x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si es una solución de *las dos* desigualdades

$$-6 < 2x - 4 \qquad \text{y} \qquad 2x - 4 < 2.$$

Esta primera desigualdad se resuelve como sigue:

$$\begin{aligned} -6 &< 2x - 4 && \text{enunciado} \\ -6 + 4 &< (2x - 4) + 4 && \text{sumar 4} \\ -2 &< 2x && \text{simplificar} \\ \frac{-2}{2} &< \frac{2x}{2} && \text{dividir entre 2} \\ -1 &< x && \text{simplificar} \\ x &> -1 && \text{desigualdad equivalente} \end{aligned}$$

La segunda desigualdad se resuelve entonces:

$$\begin{aligned} 2x - 4 &< 2 && \text{enunciado} \\ 2x &< 6 && \text{sumar 4} \\ x &< 3 && \text{dividir entre 2} \end{aligned}$$

Así, x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si *ambas*

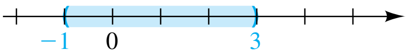
$$x > -1 \qquad \text{y} \qquad x < 3;$$

es decir,

$$-1 < x < 3.$$

(continúa)

Figura 5



En consecuencia, las soluciones son todos los números del intervalo abierto $(-1, 3)$ trazados en la figura 5.

Un método alternativo (y más corto) es resolver ambas desigualdades simultáneamente, es decir, resolver la desigualdad continua:

$$\begin{aligned} -6 &< 2x - 4 < 2 && \text{enunciado} \\ -6 + 4 &< 2x \quad < 2 + 4 && \text{sume 4} \\ -2 &< 2x \quad < 6 && \text{simplifique} \\ -1 &< x \quad < 3 && \text{divida entre 2} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 **Resolución de una desigualdad continua**

Resuelva la desigualdad continua $-5 \le \dfrac{4 - 3x}{2} < 1$.

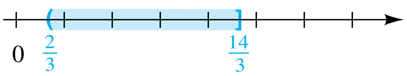
SOLUCIÓN Un número x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si

$$-5 \le \frac{4 - 3x}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{4 - 3x}{2} < 1.$$

Podemos trabajar con cada desigualdad por separado o resolver ambas desigualdades simultáneamente, como sigue (recuerde que nuestra meta es aislar x):

$$\begin{aligned} -5 \le \frac{4 - 3x}{2} &< 1 && \text{enunciado} \\ -10 \le 4 - 3x &< 2 && \text{multiplique por 2} \\ -10 - 4 \le -3x &< 2 - 4 && \text{reste 4} \\ -14 \le -3x &< -2 && \text{simplifique} \\ \frac{-14}{-3} \ge \frac{-3x}{-3} &> \frac{-2}{-3} && \text{divida entre } -3\text{; invierta los signos de desigualdad} \\ \tfrac{14}{3} \ge x &> \tfrac{2}{3} && \text{simplifique} \\ \tfrac{2}{3} < x &\le \tfrac{14}{3} && \text{desigualdad equivalente} \end{aligned}$$

Figura 6

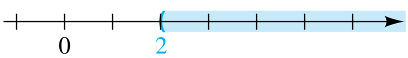


Así, las soluciones de la desigualdad son todos los números del intervalo semiabierto $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right]$ que se ve en la figura 6.

EJEMPLO 5 **Resolución de una desigualdad racional**

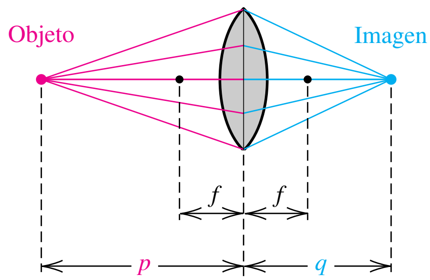
Resuelva la desigualdad $\dfrac{1}{x - 2} > 0$.

Figura 7



SOLUCIÓN Como el numerador es positivo, la fracción es positiva si y sólo si el denominador, $x - 2$, es también positivo. Así, $x - 2 > 0$ o, lo que es equivalente, $x > 2$ y las soluciones son todos los números del intervalo infinito $(2, \infty)$ que se ve en la figura 7.

Figura 8



EJEMPLO 6 **Uso de la fórmula de una lente**

Como se ilustra en la figura 8, si una lente convexa tiene longitud focal de f centímetros y si un objeto se coloca a una distancia de p centímetros de la lente con $p > f$, entonces la distancia q desde la lente a la imagen está relacionada a p y f mediante la fórmula

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

Si $f = 5$ cm, ¿qué tan cerca debe estar el objeto desde la lente para que la imagen esté a más de 12 centímetros de la lente?

SOLUCIÓN Como $f = 5$, la fórmula dada puede escribirse como

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{5}.$$

Deseamos determinar los valores de q tales que $q > 12$. Primero despejamos q de la ecuación:

$$\begin{aligned} 5q + 5p &= pq && \text{multiplique por el mcd, } 5pq \\ q(5 - p) &= -5p && \text{reúna los términos } q \text{ en un lado y factorice} \\ q &= -\frac{5p}{5 - p} = \frac{5p}{p - 5} && \text{divida entre } 5 - p \end{aligned}$$

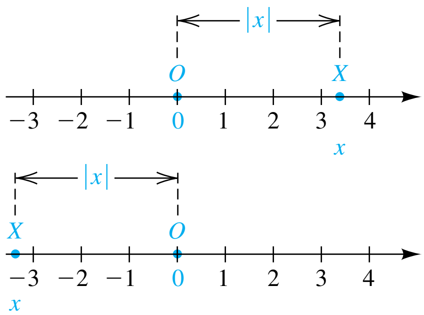
Para resolver la desigualdad $q > 12$, proseguimos como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{5p}{p - 5} &> 12 && q = \frac{5p}{p - 5} \\ 5p &> 12(p - 5) && \text{permisible, porque } p > f \text{ implica que } p - 5 > 0 \\ -7p &> -60 && \text{multiplique factores y reúna términos } p \text{ en un lado} \\ p &< \tfrac{60}{7} && \text{divida entre } -7\text{; invierta la desigualdad} \end{aligned}$$

Combinando la última desigualdad con el hecho de que p es mayor que 5, llegamos a la solución

$$5 < p < \tfrac{60}{7}.$$

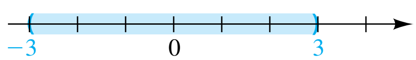
Figura 9



Si un punto X en una recta de coordenadas tiene coordenada x, como se ve en la figura 9, entonces X está a la derecha del origen O si $x > 0$ y a la izquierda de O si $x < 0$. De la sección 1.1, la distancia $d(O, X)$ entre O y X es el número real *no negativo* dado por

$$d(O, X) = |x - 0| = |x|.$$

Figura 10



Se deduce que las soluciones de una desigualdad tal como $|x| < 3$ están formadas por las coordenadas de todos los puntos cuya distancia desde O es menor a 3. Éste es el intervalo abierto $(-3, 3)$ que se ve en la figura 10. Así,

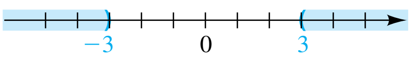
$$|x| < 3 \quad \text{es equivalente a} \quad -3 < x < 3.$$

Del mismo modo, para $|x| > 3$, la distancia entre O y un punto con coordenada x es mayor a 3; esto es,

$$|x| > 3 \quad \text{es equivalente a} \quad x < -3 \text{ o } x > 3.$$

La gráfica de las soluciones a $|x| > 3$ está en la figura 11. Con frecuencia usamos el **símbolo de unión** $\cup$ y escribimos

Figura 11



$$(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

para denotar todos los números reales que están ya sea en $(-\infty, -3)$ o $(3, \infty)$.

La notación

$$(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

representa el conjunto de todos los números reales excepto 2.

El **símbolo de intersección** $\cap$ se usa para denotar los elementos que son *comunes* a dos conjuntos. Por ejemplo,

$$(-\infty, 3) \cap (-3, \infty) = (-3, 3),$$

porque la intersección de $(-\infty, 3)$ y $(-3, \infty)$ está formada por todos los números reales x tales que $x < 3$ *y además* $x > -3$.

La exposición precedente puede generalizarse para obtener las siguientes propiedades de valores absolutos.

Propiedades de valores absolutos ($b > 0$)	
	(1) $\lvert a\rvert < b$ es equivalente a $-b < a < b$.
	(2) $\lvert a\rvert > b$ es equivalente a $a < -b$ o $a > b$.

En el siguiente ejemplo usamos la propiedad 1 con $a = x - 3$ y $b = 0.5$.

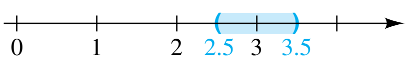
EJEMPLO 7 **Resolución de una desigualdad que contiene un valor absoluto**

Resuelva la desigualdad $|x - 3| < 0.5$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
|x - 3| &< 0.5 && \text{enunciado}\\
-0.5 < x - 3 &< 0.5 && \text{propiedad 1}\\
-0.5 + 3 < (x - 3) + 3 &< 0.5 + 3 && \text{aísle } x \text{ al sumar 3}\\
2.5 < x &< 3.5 && \text{simplifique}
\end{aligned}
$$

Figura 12



De este modo, las soluciones son los números reales del intervalo abierto $(2.5, 3.5)$. La gráfica se traza en la figura 12.

En el siguiente ejemplo usamos la propiedad 2 con $a = 2x + 3$ y $b = 9$.

EJEMPLO 8 **Resolución de una desigualdad que contiene un valor absoluto**

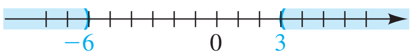
Resuelva la desigualdad $|2x + 3| > 9$.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{rcrl} & |2x + 3| > 9 & & \text{enunciado} \\ 2x + 3 < -9 & \text{o} & 2x + 3 > 9 & \text{propiedad 2} \\ 2x < -12 & \text{o} & 2x > 6 & \text{reste 3} \\ x < -6 & \text{o} & x > 3 & \text{divida entre 2} \end{array}$$

En consecuencia, las soluciones de la desigualdad $|2x + 3| > 9$ están formadas por los números en $(-\infty, -6) \cup (3, \infty)$. La gráfica se traza en la figura 13.

Figura 13



La ley de tricotomía de la sección 1.1 indica que para cualesquier números reales a y b exactamente uno de lo siguiente es verdadero:

$$a > b, \qquad a < b, \qquad \text{o} \qquad a = b$$

Así, después de resolver $|2x + 3| > 9$ en el ejemplo 8, fácilmente obtenemos las soluciones para $|2x + 3| < 9$ y $|2x + 3| = 9$, es decir, $(-6, 3)$ y $\{-6, 3\}$, respectivamente. Nótese que la unión de estos tres conjuntos de soluciones es necesariamente el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

Cuando usemos la notación $a < x < b$, debemos tener $a < b$. De este modo, *es incorrecto escribir las soluciones* $x < -6$ *o* $x > 3$ (en el ejemplo 8) *como* $3 < x < -6$. Otro error de notación de desigualdad es escribir $a < x > b$, porque cuando se usan varios símbolos de desigualdad en una expresión, *deben apuntar en la misma dirección.*

2.6 *Ejercicios*

1 Dados $-7 < -3$, determine la desigualdad obtenida si

(a) se suma 5 a ambos lados

(b) se resta 4 de ambos lados

(c) ambos lados se multiplican por $\frac{1}{3}$

(d) ambos lados se multiplican por $-\frac{1}{3}$

2 Dados $4 > -5$, determine la desigualdad obtenida si

(a) se suma 7 a ambos lados

(b) se resta -5 de ambos lados

(c) ambos lados se dividen entre 6

(d) ambos lados se dividen entre -6

Ejer. 3-12: Exprese la desigualdad como intervalo y trace su gráfica.

3 $x < -2$

4 $x \leq 5$

5 $x \geq 4$

6 $x > -3$

7 $-2 < x \leq 4$

8 $-3 \leq x < 5$

9 $3 \leq x \leq 7$

10 $-3 < x < -1$

11 $5 > x \geq -2$

12 $-3 \geq x > -5$

Ejer. 13-20: Exprese el intervalo como desigualdad en la variable x.

13 $(-5, 8]$

14 $[0, 4)$

15 $[-4, -1]$

16 $(3, 7)$

17 $[4, \infty)$

18 $(-3, \infty)$

19 $(-\infty, -5)$

20 $(-\infty, 2]$

Ejer. 21-70: Resuelva la desigualdad y exprese las soluciones en términos de intervalos siempre que sea posible.

21 $3x - 2 > 14$

22 $2x + 5 \leq 7$

23 $-2 - 3x \geq 2$

24 $3 - 5x < 11$

25 $2x + 5 < 3x - 7$

26 $x - 8 > 5x + 3$

27 $9 + \frac{1}{3}x \geq 4 - \frac{1}{2}x$

28 $\frac{1}{4}x + 7 \leq \frac{1}{3}x - 2$

29 $-3 < 2x - 5 < 7$

30 $4 \geq 3x + 5 > -1$

31 $3 \leq \dfrac{2x - 3}{5} < 7$

32 $-2 < \dfrac{4x + 1}{3} \leq 0$

33 $4 > \dfrac{2 - 3x}{7} \geq -2$

34 $5 \geq \dfrac{6 - 5x}{3} > 2$

35 $0 \leq 4 - \frac{1}{3}x < 2$

36 $-2 < 3 + \frac{1}{4}x \leq 5$

37 $(2x - 3)(4x + 5) \leq (8x + 1)(x - 7)$

38 $(x - 3)(x + 3) \geq (x + 5)^2$

39 $(x - 4)^2 > x(x + 12)$

40 $2x(6x + 5) < (3x - 2)(4x + 1)$

41 $\dfrac{4}{3x + 2} \geq 0$

42 $\dfrac{3}{2x + 5} \leq 0$

43 $\dfrac{-2}{4 - 3x} > 0$

44 $\dfrac{-3}{2 - x} < 0$

45 $\dfrac{2}{(1 - x)^2} > 0$

46 $\dfrac{4}{x^2 + 4} < 0$

47 $|x| < 3$

48 $|x| \leq 7$

49 $|x| \geq 5$

50 $|-x| > 2$

51 $|x + 3| < 0.01$

52 $|x - 4| \leq 0.03$

53 $|x + 2| + 0.1 \geq 0.2$

54 $|x - 3| - 0.3 > 0.1$

55 $|2x + 5| < 4$

56 $|3x - 7| \geq 5$

57 $-\frac{1}{3}|6 - 5x| + 2 \geq 1$

58 $2|-11 - 7x| - 2 > 10$

59 $|7x + 2| > -2$

60 $|6x - 5| \leq -2$

61 $|3x - 9| > 0$

62 $|5x + 2| \leq 0$

63 $\left|\dfrac{2 - 3x}{5}\right| \geq 2$

64 $\left|\dfrac{2x + 5}{3}\right| < 1$

65 $\dfrac{3}{|5 - 2x|} < 2$

66 $\dfrac{2}{|2x + 3|} \geq 5$

67 $-2 < |x| < 4$

68 $1 < |x| < 5$

69 $1 < |x - 2| < 4$

70 $2 < |2x - 1| < 3$

Ejer. 71-72: Resuelva la parte (a) y use esa respuesta para determinar las respuestas a las partes (b) y (c).

71 (a) $|x + 5| = 3$ (b) $|x + 5| < 3$
(c) $|x + 5| > 3$

72 (a) $|x - 3| < 2$ (b) $|x - 3| = 2$
(c) $|x - 3| > 2$

Ejer. 73-76: Exprese el enunciado en términos de una desigualdad que contiene un valor absoluto.

73 El peso w de un luchador debe ser no más de 2 libras más de 148 libras.

74 El radio r de un cojinete debe ser no más de 0.01 centímetros más de 1 centímetro.

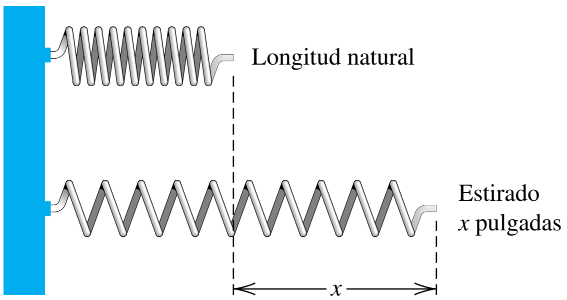
75 La diferencia de dos temperaturas T_1 y T_2 en una mezcla química debe estar entre 5°C y 10°C.

76 El tiempo de llegada t del tren B debe ser al menos 5 minutos diferente de las 4:00 p.m., tiempo de llegada del tren A.

77 Escalas de temperatura Las lecturas de temperatura en las escalas Fahrenheit y Celsius están relacionadas por la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. ¿Qué valores de F corresponden a los valores de C tales que $30 \leq C \leq 40$?

78 Ley de Hooke De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza F (en libras) necesaria para estirar un cierto resorte x pulgadas más de su longitud natural está dada por $F = (4.5)x$ (vea la figura). Si $10 \leq F \leq 18$, ¿cuáles son los valores correspondientes para x?

Ejercicio 78



79 Ley de Ohm La ley de Ohm en teoría eléctrica expresa que si R denota la resistencia de un objeto (en ohms), V la diferencia de potencial entre las terminales del objeto (en volts) e I es la corriente que circula por él (en amperes), entonces $R = V/I$. Si el voltaje es 110, ¿qué valores de la resistencia resultarán en una corriente que no pase de 10 amperes?

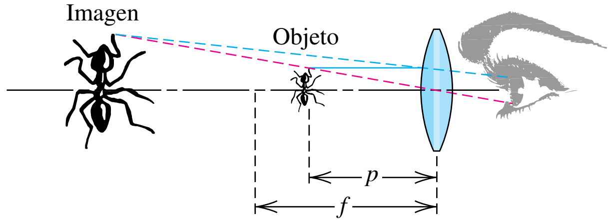
80 Resistencia eléctrica Si dos resistores R_1 y R_2 se conectan en paralelo en un circuito eléctrico, la resistencia neta R está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Si $R_1 = 10$ ohms, ¿qué valores de R_2 resultarán en una resistencia neta de menos de 5 ohms?

81 Amplificación lineal En la figura se muestra una lente de aumento simple formada por una lente convexa. El objeto a amplificarse está colocado de modo que la distancia p desde la lente es menor que la longitud focal f. La amplificación lineal M es la razón entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto. Se demuestra en física que $M = f/(f - p)$. Si $f = 6$ cm, ¿a qué distancia debe colocarse el objeto desde la lente para que su imagen aparezca al menos tres veces mayor? (Compare con el ejemplo 6.).

Ejercicio 81



82 Concentración de medicamento Para tratar la arritmia (pulsación irregular del corazón), por una vena se introduce un medicamento en el torrente sanguíneo. Suponga que la concentración c del medicamento después de t horas está dada por $c = 3.5t/(t + 1)$ mg/L. Si el nivel terapéutico mínimo es 1.5 mg/L, determine cuándo se rebasa este nivel.

83 Gastos en un negocio Una empresa constructora está tratando de decidir cuál de dos modelos de grúa comprar. El modelo A cuesta \$100,000 y requiere \$8000 por año en su mantenimiento. El modelo B tiene un costo inicial de \$80,000 y su mantenimiento cuesta \$11,000 por año. ¿Durante cuántos años debe usarse el modelo A antes que sea más económico que el B?

84 Compra de un auto Un consumidor está tratando de decidir si comprar el auto A o el B. El auto A cuesta \$20,000 y tiene un rendimiento de combustible de 30 millas por galón, y el seguro cuesta \$1000 por año. El auto B cuesta \$24,000 y tiene un rendimiento de 50 millas por galón y el seguro cuesta \$1200 por año. Suponga que el consumidor recorre 15,000 millas por año y que el precio del combustible permanece constante en \$3 por galón. Con base sólo en estos datos, determine cuánto tiempo transcurrirá para que el costo total del auto B sea menor que el del auto A.

85 Estatura decreciente La estatura de una persona típicamente disminuirá en 0.024 pulgadas por año después de los 30 años.

(a) Si una mujer medía 5 pies 9 pulgadas cuando tenía 30 años, prediga su estatura a la edad de 70 años.

(b) Un hombre de 50 años mide 5 pies 6 pulgadas. Determine una desigualdad para el rango de sus estaturas (en pulgadas) que este hombre tendrá entre las edades de 30 y 70.

2.7 Más sobre desigualdades

Para resolver una desigualdad que contenga polinomios de grado mayor a 1, expresaremos cada polinomio como un producto de factores lineales $ax + b$ y/o factores cuadráticos irreducibles $ax^2 + bx + c$. Si cualquiera de estos factores no es cero en un intervalo, entonces es positivo en todo el intervalo o negativo en todo el intervalo. En consecuencia, si escogemos cualquier k del intervalo y si el factor es positivo (o negativo) para $x = k$, entonces es positivo (o negativo) en todo el intervalo. El valor del factor en $x = k$ se denomina **valor de prueba** del factor en el número de prueba k. Este concepto se exhibe en el ejemplo siguiente.

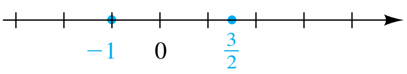
EJEMPLO 1 **Resolución de una desigualdad cuadrática**

Resuelva la desigualdad $2x^2 - x < 3$.

SOLUCIÓN Para usar valores de prueba, *es esencial tener* 0 *en un lado del signo de desigualdad.* Así, procedemos como sigue:

$$2x^2 - x < 3 \quad \text{enunciado}$$
$$2x^2 - x - 3 < 0 \quad \text{iguale a 0 un lado}$$
$$(x + 1)(2x - 3) < 0 \quad \text{factorice}$$

Figura 1



Los factores $x + 1$ y $2x - 3$ son cero en -1 y $\frac{3}{2}$, respectivamente. Los puntos correspondientes en una recta de coordenadas (vea la figura 1) determinan los intervalos que no se cruzan.

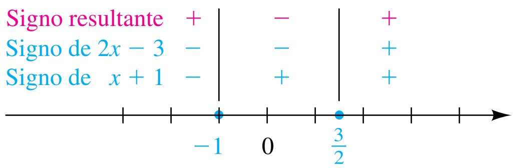
$$(-\infty, -1), \quad \left(-1, \tfrac{3}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(\tfrac{3}{2}, \infty\right).$$

Podemos hallar los signos de $x + 1$ y $2x - 3$ en cada intervalo si usamos un valor de prueba tomado de cada intervalo. Para ilustrar, si escogemos $k = -10$ en $(-\infty, -1)$, los valores de $x + 1$ y $2x - 3$ son negativos y por lo tanto son negativos en todo $(-\infty, -1)$. Un procedimiento similar para los restantes dos intervalos nos da la siguiente *tabla de signos*, donde el término *signo resultante* de la última fila se refiere al signo obtenido al aplicar leyes de signos al producto de los factores. Nótese que el signo resultante es positivo o negativo según si el número de signos negativos de factores es par o impar, respectivamente.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
Signo de $x + 1$	$-$	$+$	$+$
Signo de $2x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo resultante	$+$	$-$	$+$

En ocasiones es conveniente representar los signos de $x + 1$ y $2x - 3$ al usar una recta de coordenadas y un *diagrama de signos,* del tipo que se ilustra en la figura 2. Las líneas verticales indican dónde son cero los factores y los signos de factores se muestran arriba de la recta de coordenadas. Los signos resultantes se indican en rojo.

Figura 2



Las soluciones de $(x + 1)(2x - 3) < 0$ son los valores de x para los cuales el producto de los factores es *negativo*, es decir, donde el signo resultante es negativo. Esto corresponde al intervalo abierto $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

En la página 81 estudiamos el teorema del factor cero, que hablaba de *igualdades*. Es un error común extender este teorema a *desigualdades*. La siguiente advertencia muestra esta extensión incorrecta aplicada a la desigualdad del ejemplo 1.

¡Advertencia!

$(x + 1)(2x - 3) < 0$ ***no*** es equivalente a $x + 1 < 0$ o $2x - 3 < 0$

En futuros ejemplos usaremos ya sea una tabla de signos o un diagrama de signos, pero no ambos. Cuando trabaje con ejercicios, el lector debe escoger el método de solución con el que se sienta más cómodo.

EJEMPLO 2 **Resolución de una desigualdad cuadrática**

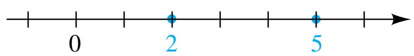
Resuelva la desigualdad $-3x^2 < -21x + 30$.

SOLUCIÓN

$-3x^2 < -21x + 30$	enunciado
$-3x^2 + 21x - 30 < 0$	iguale a 0 un lado
$x^2 - 7x + 10 > 0$	divida entre el factor común -3; invierta la desigualdad
$(x - 2)(x - 5) > 0$	factorice

Los factores son cero en 2 y 5. Los puntos correspondientes en una recta de coordenadas (vea la figura 3) determinan los intervalos que no se cruzan.

Figura 3



$$(-\infty, 2), \quad (2, 5) \quad \text{y} \quad (5, \infty).$$

Al igual que en el ejemplo 1, podemos usar valores de prueba de cada intervalo para obtener la siguiente tabla de signos.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
Signo de $x - 2$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 5$	$-$	$-$	$+$
Signo resultante	$+$	$-$	$+$

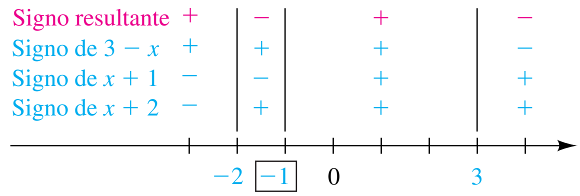
Las soluciones de $(x - 2)(x - 5) > 0$ son los valores de x para los cuales el signo resultante es *positivo*. Así, la solución de la desigualdad dada es la unión $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$.

EJEMPLO 3 **Uso de un diagrama de signos para resolver una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $\dfrac{(x + 2)(3 - x)}{(x + 1)(x^2 + 1)} \leq 0$.

SOLUCIÓN Como 0 ya está en el lado derecho de la desigualdad y el lado izquierdo está factorizado, podemos ir directamente al diagrama de signos de la figura 4, donde las líneas verticales indican los ceros ($-2, -1$, y 3) de los factores

Figura 4



El cuadro alrededor de -1 indica que -1 hace que un factor del denominador de la desigualdad original sea igual a 0. Como el factor cuadrático $x^2 + 1$ es siempre positivo, no tiene efecto en el signo del cociente y por tanto puede omitirse del diagrama.

Los diversos signos de los factores se pueden hallar usando valores de prueba. Alternativamente, sólo necesitamos recordar que cuando x aumenta, el signo de un factor lineal $ax + b$ cambia de negativo a positivo si el coeficiente a de x es positivo y el signo cambia de positivo a negativo si a es negativo.

Para determinar dónde es que el cociente es menor o igual a 0, primero vemos del diagrama de signos que es *negativo* para números en $(-2, -1) \cup (3, \infty)$. Como el cociente es 0 en $x = -2$ y $x = 3$, los números -2 y 3 también son soluciones y deben estar *incluidos* en nuestra solución. Por último, el cociente es *indefinido* en $x = -1$, de modo que -1 debe ser *excluido* de nuestra solución. Así, las soluciones de la desigualdad dada están dadas por

$$[-2, -1) \cup [3, \infty).$$

EJEMPLO 4 **Uso de un diagrama de signos para resolver una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $\dfrac{(2x + 1)^2(x - 1)}{x(x^2 - 1)} \geq 0.$

SOLUCIÓN Si reescribimos la desigualdad como

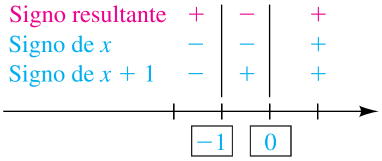
$$\frac{(2x + 1)^2(x - 1)}{x(x + 1)(x - 1)} \geq 0,$$

vemos que $x - 1$ es un factor del numerador y del denominador. Así, *suponiendo que* $x - 1 \neq 0$ (esto es, $x \neq 1$), podemos cancelar este factor y reducir nuestra búsqueda de soluciones al caso de

$$\frac{(2x + 1)^2}{x(x + 1)} \geq 0 \qquad \text{y} \qquad x \neq 1.$$

A continuación vemos que este cociente es 0 si $2x + 1 = 0$ (esto es, si $x = -\frac{1}{2}$). Por lo tanto, $-\frac{1}{2}$ es una solución. Para hallar las soluciones restantes, construimos el diagrama de signos de la figura 5. No incluimos $(2x + 1)^2$

Figura 5



en el diagrama de signos, porque esta expresión siempre es positiva si $x \neq -\frac{1}{2}$ y entonces no tiene efecto en el signo del cociente. Consultando el signo resultante y recordando que $-\frac{1}{2}$ es una solución pero 1 *no* es una solución, vemos que las soluciones de la desigualdad dada están dadas por

$$(-\infty, -1) \cup \left\{-\tfrac{1}{2}\right\} \cup (0, 1) \cup (1, \infty).$$

EJEMPLO 5 **Uso de un diagrama de signos para resolver una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $\dfrac{x + 1}{x + 3} \leq 2$.

SOLUCIÓN Un error común al resolver este tipo de desigualdades es multiplicar primero ambos lados por $x + 3$. Si lo hacemos así, tendríamos que considerar dos casos, porque $x + 3$ puede ser positivo o negativo (suponiendo $x + 3 \neq 0$) y podríamos invertir la desigualdad. Un método más sencillo es obtener primero una desigualdad equivalente que tenga 0 en el lado derecho y continuar desde ahí:

$$\frac{x+1}{x+3} \leq 2 \qquad \text{enunciado}$$

$$\frac{x+1}{x+3} - 2 \leq 0 \qquad \text{iguale a 0 un lado}$$

$$\frac{x + 1 - 2(x+3)}{x+3} \leq 0 \qquad \text{combine en una fracción}$$

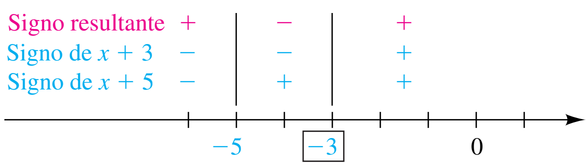
$$\frac{-x - 5}{x+3} \leq 0 \qquad \text{simplifique}$$

$$\frac{x+5}{x+3} \geq 0 \qquad \text{multiplique por } -1$$

Nótese que la dirección de la desigualdad se cambia en el último paso, porque multiplicamos por un número negativo. Esta multiplicación fue realizada por comodidad, para que todos los factores tengan coeficientes positivos de x.

Los factores $x + 5$ y $x + 3$ son 0 en $x = -5$ y $x = -3$, respectivamente. Esto lleva al diagrama de signos de la Figura 6, donde los signos están determinados como en ejemplos previos. Vemos del diagrama que el signo resultante y por tanto el signo del cociente, es positivo en $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$. El cociente es 0 en $x = -5$ (incluye -5) y no definido en $x = -3$ (excluye -3). En consecuencia, la solución de $(x + 5)/(x + 3) \geq 0$ es $(-\infty, -5] \cup (-3, \infty)$.

Figura 6



(continúa)

Un método alternativo de solución es empezar por multiplicar ambos lados de la desigualdad dada por $(x + 3)^2$, *suponiendo que* $x \neq -3$. En este caso, $(x + 3)^2 > 0$ y la multiplicación es permisible; no obstante, después de resolver la desigualdad resultante, el valor de $x = -3$ debe excluirse.

EJEMPLO 6 **Determinación de niveles terapéuticos mínimos**

Para que un medicamento tenga un efecto benéfico, su concentración en el torrente sanguíneo debe exceder de cierto valor, que se denomina *nivel terapéutico mínimo*. Suponga que la concentración c (en mg/L) de un medicamento particular t horas después de tomarlo oralmente está dada por

$$c = \frac{20t}{t^2 + 4}.$$

Si el nivel terapéutico mínimo es 4 mg/L, determine cuándo este nivel se rebasa.

SOLUCIÓN El nivel terapéutico mínimo, 4 mg/L, se rebasa si $c > 4$. Así, debemos resolver la desigualdad

$$\frac{20t}{t^2 + 4} > 4.$$

Como $t^2 + 4 > 0$ para toda t, podemos multiplicar ambos lados por $t^2 + 4$ y continuar como sigue:

$$20t > 4t^2 + 16 \quad \text{permisible, porque } t^2 + 4 > 0$$

$$-4t^2 + 20t - 16 > 0 \quad \text{iguale a 0 un lado}$$

$$t^2 - 5t + 4 < 0 \quad \text{divida entre el factor común } -4$$

$$(t - 1)(t - 4) < 0 \quad \text{factorice}$$

Los factores de la última desigualdad son 0 cuando $t = 1$ y $t = 4$. Éstos son los tiempos en los que c es *igual a* 4. Al igual que en ejemplos previos, podemos usar una tabla de signos o diagrama de signos (con $t \geq 0$) para demostrar que $(t - 1)(t - 4) < 0$ para toda t en el intervalo $(1, 4)$. Por lo tanto, el nivel terapéutico mínimo se rebasa si $1 < t < 4$.

Debido a que las gráficas en un plano de coordenadas se introducen en el siguiente capítulo, sería prematuro demostrar aquí el uso de una calculadora graficadora o software para resolver desigualdades en x. Estos métodos se van a considerar en el texto más adelante.

Algunas propiedades básicas de desigualdades se expusieron al principio de la última sección. Las siguientes propiedades adicionales son útiles para resolver ciertas desigualdades. Las pruebas de las propiedades se dan después de la gráfica.

Propiedades adicionales de desigualdades

Propiedades	Ejemplos
(1) Si $0 < a < b$, entonces $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.	Si $0 < \dfrac{1}{x} < 4$, entonces $\dfrac{1}{1/x} > \dfrac{1}{4}$, o $x > \dfrac{1}{4}$.
(2) Si $0 < a < b$, entonces $0 < a^2 < b^2$.	Si $0 < \sqrt{x} < 4$, entonces $0 < (\sqrt{x})^2 < 4^2$, o $0 < x < 16$.
(3) Si $0 < a < b$, entonces $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$.	Si $0 < x^2 < 4$, entonces $0 < \sqrt{x^2} < \sqrt{4}$, o $0 < \lvert x \rvert < 2$.

PRUEBAS

(1) Si $0 < a < b$, entonces multiplicar por $1/(ab)$ da

$$a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab}, \quad \text{o} \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a}; \quad \text{esto es,} \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

(2) Si $0 < a < b$, entonces multiplicar por a da $a \cdot a < a \cdot b$ y multiplicar por b da $b \cdot a < b \cdot b$, de modo que $a^2 < ab < b^2$ y por lo tanto $a^2 < b^2$.

(3) Si $0 < a < b$, entonces $b - a > 0$, o bien, lo que es equivalente,

$$\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) > 0.$$

Dividir ambos lados de la última desigualdad entre $\sqrt{b} + \sqrt{a}$, para obtener $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$; es decir, $\sqrt{b} > \sqrt{a}$.

2.7 Ejercicios

Ejer. 1-40: Resuelva la desigualdad, y exprese las soluciones en términos de intervalos siempre que sea posible.

1 $(3x + 1)(5 - 10x) > 0$

2 $(2 - 3x)(4x - 7) \geq 0$

3 $(x + 2)(x - 1)(4 - x) \leq 0$

4 $(x - 5)(x + 3)(-2 - x) < 0$

5 $x^2 - x - 6 < 0$

6 $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

7 $x^2 - 2x - 5 > 3$

8 $x^2 - 4x - 17 \leq 4$

9 $x(2x + 3) \geq 5$

10 $x(3x - 1) \leq 4$

11 $6x - 8 > x^2$

12 $x + 12 \leq x^2$

13 $x^2 < 16$

14 $x^2 > 9$

15 $25x^2 - 9 < 0$

16 $25x^2 - 9x < 0$

17 $16x^2 \geq 9x$

18 $16x^2 > 9$

19 $x^4 + 5x^2 \geq 36$

20 $x^4 + 15x^2 < 16$

21 $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$

22 $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 \leq 0$

23 $\dfrac{x^2(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)} \leq 0$

24 $\dfrac{(x^2 + 1)(x - 3)}{x^2 - 9} \geq 0$

25 $\dfrac{x^2 - x}{x^2 + 2x} \leq 0$

26 $\dfrac{(x + 3)^2(2 - x)}{(x + 4)(x^2 - 4)} \leq 0$

27 $\dfrac{x - 2}{x^2 - 3x - 10} \geq 0$

28 $\dfrac{x + 5}{x^2 - 7x + 12} \leq 0$

29 $\dfrac{-3x}{x^2 - 9} > 0$

30 $\dfrac{2x}{16 - x^2} < 0$

31 $\dfrac{x + 1}{2x - 3} > 2$

32 $\dfrac{x - 2}{3x + 5} \leq 4$

33 $\dfrac{1}{x - 2} \geq \dfrac{3}{x + 1}$

34 $\dfrac{2}{2x + 3} \leq \dfrac{2}{x - 5}$

35 $\dfrac{4}{3x - 2} \leq \dfrac{2}{x + 1}$

36 $\dfrac{3}{5x + 1} \geq \dfrac{1}{x - 3}$

37 $\dfrac{x}{3x - 5} \leq \dfrac{2}{x - 1}$

38 $\dfrac{x}{2x - 1} \geq \dfrac{3}{x + 2}$

39 $x^3 > x$

40 $x^4 \geq x^2$

Ejer. 41-42: Cuando una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria recta, su velocidad v (en cm/s) en el tiempo t (en segundos), está dada por la ecuación. ¿Para qué subintervalos del intervalo dado $[a, b]$ su velocidad será al menos k cm/s?

41 $v = t^3 - 3t^2 - 4t + 20$; $[0, 5]$; $k = 8$

42 $v = t^4 - 4t^2 + 10$; $[1, 6]$; $k = 10$

43 **Récord de salto vertical** El *Libro Guiness de Records Mundiales* informa que los perros pastores alemanes pueden dar saltos verticales de más de 10 pies cuando escalan paredes. Si la distancia s (en pies) desde el suelo después de t segundos está dada por la ecuación $s = -16t^2 + 24t + 1$, ¿durante cuántos segundos está el perro a más de 9 pies del suelo?

44 **Altura de un objeto lanzado** Si un objeto se proyecta verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 320 ft/s, entonces su distancia s sobre el suelo después de t segundos está dada por $s = -16t^2 + 320t$. ¿Para qué valores de t estará el objeto a más de 1536 pies sobre el suelo?

45 **Distancia de frenado** La distancia d de frenado (en pies) de cierto automóvil que corre a v mi/h está dada por la ecuación $d = v + (v^2/20)$. Determine las velocidades que resulten en distancias de frenado de menos de 75 pies.

46 **Rendimiento de combustible** El número de millas M, que cierto auto compacto puede viajar con 1 galón de gasolina, está relacionado con su velocidad v (en mi/h) por

$$M = -\tfrac{1}{30}v^2 + \tfrac{5}{2}v \quad \text{para} \quad 0 < v < 70.$$

¿Para qué velocidades será M al menos de 45?

47 **Propagación de salmón** Para una población particular de salmón, la relación entre el número S de peces hembra y el número R de descendientes, que sobreviven hasta la edad adulta, está dada por la fórmula $R = 4500S/(S + 500)$. ¿Bajo qué condiciones es $R > S$?

48 **Densidad de población** La densidad D de población (en habitantes/mi^2) en una gran ciudad está relacionada con la distancia x desde el centro de la ciudad por $D = 5000x/(x^2 + 36)$. ¿En qué partes de la ciudad es que la densidad de población rebasa las 400 personas/mi^2?

49 **Peso en el espacio** Después de que un astronauta es lanzado al espacio, su peso disminuye hasta alcanzar un estado de ingravidez. El peso de una astronauta de 125 libras a una altitud de x kilómetros sobre el nivel del mar está dado por

$$W = 125\left(\frac{6400}{6400 + x}\right)^2.$$

¿A qué altitudes el peso de la astronauta es menor a 5 libras?

50 **Fórmula de contracción de Lorentz** La fórmula de contracción de Lorentz, en teoría de la relatividad, relaciona la longitud L de un objeto que se mueve a una velocidad de v mi/s con respecto a un observador y su longitud L_0 en reposo. Si c es la velocidad de la luz, entonces

$$L^2 = L_0^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

¿Para qué velocidades L será menor a $\frac{1}{2}L_0$? Exprese la respuesta en términos de c.

51 **Velocidad de aterrizaje de aviones** En el diseño de cierto avión pequeño de turbohélice, la velocidad V de aterrizaje (en ft/s) está determinada por la fórmula $W = 0.00334V^2S$, donde W es el peso bruto (en libras) de la nave y S es el área superficial (en ft^2) de las alas. Si el peso bruto de la nave es entre 7500 y 10,000 libras y $S = 210$ ft^2, determine el rango de las velocidades de aterrizaje en millas por hora.

Ejer. 52-53: Use una tabla de valores para ayudar en la solución de la desigualdad en el intervalo dado.

52 $\dfrac{(2 - x)(3x - 9)}{(1 - x)(x + 1)} > 0$, $[-2, 3.5]$

53 $x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48 < 0$, $[-3.5, 5]$