12. La Universidad de Panamá desea repartir 150 personas entre 4 laboratorios de Informática, de tal manera, que al segundo laboratorio le corresponda $\frac{5}{6}$ de lo que le corresponderá al primero, al tercero los $\frac{3}{5}$ del segundo y al cuarto $\frac{1}{3}$ del tercero. Hallar cuántas computadoras tendrá cada laboratorio.

Sistemas de ecuaciones lineales

La resolución de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas ocupó durante los siglos XVI y XVII a una brillante escuela de algebristas, principalmente italianos. Sus ingeniosos métodos algebraicos aún siguen proponiéndose como alternativa a la teoría de matrices que fue desarrollada y refinada en los siglos posteriores.

En esta sección del capítulo se desarrollará una de las ideas con mayor uso práctico en matemática. Su importancia radica en la gran cantidad de aplicaciones que tiene en la vida cotidiana y profesional. Estos son los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. El cual veremos de forma inmediata su definición.

Definición 1: Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es una expresión formada por dos ecuaciones de primer grado, con dos incógnitas de la forma:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{y} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

En donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ son constantes y x e y, las variables o incógnitas. Para representar nuestro sistema en forma simplificada, usamos un el signo de llaves incluyendo las dos ecuaciones, como sigue:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Para corroborar la idea de su gran uso en las aplicaciones, analicemos el siguiente ejemplo:

> *En una actividad de matinée del Instituto América, se vendieron un total de 250 boletos y se recaudó $128. Si los boletos de los adultos tenían un precio de $0.60 y los estudiantes de $0.40. ¿Cuántos estudiantes y cuántos adultos participaron de la actividad?*

Para el planteamiento de este problema, tomamos a la variable $\boldsymbol{x}$ como la cantidad de adultos y la variable $\boldsymbol{y}$ como la cantidad de estudiantes. En efecto, simbólicamente esto sería:

$$x \to cantidad\ de\ adultos$$

$$y \to cantidad\ de\ estudiantes$$

Con esta suposición podemos escribir nuestra primera ecuación lineal en forma algebraica:

$$x + y = 250 \qquad (1)$$

Pues, el total de personas fue de 250, y la suma de adultos y estudiantes debe coincidir con esta cantidad.

Por otro lado, cada adulto pagó $0,60, y cada estudiante pagó $0.40, esto lo podemos representar algebraicamente como:

$$0{,}60x \to el\ costo\ de\ la\ cantidad\ de\ adultos$$

$$0{,}40y \to el\ costo\ de\ la\ cantidad\ de\ estudiantes$$

Luego con este resultado, escribimos la ecuación lineal que representa la suma que se recaudó por los adultos y los estudiantes:

$$0{,}60x + 0{,}40y = 128 \qquad (2)$$

Con las ecuaciones $(1)\ y\ (2)$, escribimos el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 250 & (1) \\ 0{,}60x + 0{,}40y = 128 & (2) \end{cases}$$

Transformando los decimales a fracciones en la ecuación (2)

$$\begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = 128 & (2) \end{cases}$$

Y finalmente multiplicamos por 5 la ecuación (2), obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 250 & (1) \\ 3x + 2y = 640 & (2) \end{cases} \quad (*)$$

Esto muestra que una situación de la vida real se puede transformar en una expresión algebraica, específicamente en un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, lo que resulta de gran utilidad resolver estos sistemas y dar respuestas a este tipo de interrogantes.

Para tal fin, desarrollaremos cuatro métodos para la resolución de estos sistemas de ecuaciones, usados para ejemplificar en todo los casos el sistema descrito en $(*)$.

Método de Reducción

Este método consiste en eliminar una de la dos incógnitas, multiplicando a una o ambas ecuaciones por números convenientes, de tal forma que coincida con el valor opuesto del coeficiente de la otra ecuación y luego sumar ambas ecuaciones.

Ejemplo 1.

Resolver el sistema: $\begin{cases} x + y = 250 & (1) \\ 3x + 2y = 640 & (2) \end{cases}$

En este sistema, eliminaremos la variable y , para esto basta multiplicar la ecuación (1) por -2 , lo que resulta:

$$\begin{cases} -2x - 2y = -500 & (1.1) \\ \\ 3x + 2y = 640 & (2) \end{cases}$$

y luego sumamos ambas ecuaciones

$$\begin{array}{rl} -2x - 2y = -500 & (1.1) \\ \\ 3x + 2y = 640 & (2) \\ \hline x + 0y = 140 & (3) \end{array}$$

En (3) obtenemos $x = 140$, luego para calcular la variable y, despejamos en una de las dos ecuaciones según la conveniencia. En nuestro caso, usamos la ecuación (1) .

$$x + y = 250 \Longrightarrow y = 250 - x \Longrightarrow y = 250 - 140 \Longrightarrow y = 110$$

Observación: en este procedimiento podemos iniciarlo con la eliminación de la variable x y obtendremos el mismo resultado.

En cuanto a nuestro problema inicial, podemos decir que en la actividad de la matinée del Instituto América, asistieron

$$x \to cantidad\ de\ adultos\ \ 140$$

$$y \to cantidad\ de\ estudiantes\ 110$$

Veamos otro ejemplo en el cual eliminemos la variable x.

Ejemplo 2.

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 8y = 23 & (4) \\ \\ 11x + 6y = -9 & (5) \end{cases}$$

Multiplicamos la ecuación (4) por -11 y la ecuación (5) por 3, y sumamos ambas ecuaciones

$$
\begin{array}{rl}
-33x - 88y = -253 & (4) \\
33x + 18y = -27 & (5) \\
\hline
0x - 70y = -280 & (6)
\end{array}
$$

En (6), obtenemos que $y = \frac{-280}{-70} \Longrightarrow y = 4$, luego calculamos la variable x despejando en la ecuación (5): $11x + 6y = -9$

$$\Longrightarrow 11x = -9 - 6y \Longrightarrow x = \frac{-9-6y}{11}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-9 - 6(4)}{11} \Longrightarrow x = \frac{-9 - 24}{11} \Longrightarrow x = \frac{-33}{11} \Longrightarrow x = -3$$

Método de Sustitución

Este método consiste en despejar una de las dos variables en alguna de las dos ecuaciones y luego sustituir la variable en la otra ecuación, con este proceso se obtiene una ecuación de primer grado con una incógnita, la cual resolvemos de manera usual.

Ejemplo 3.

Resolver el sistema: $\begin{cases} x + y = 250 & (1) \\ 3x + 2y = 640 & (2) \end{cases}$

En la ecuación (1) despejamos la variable y, obtenemos $y = 250 - x$. Esta expresión la remplazamos en la ecuación (2) y nos queda $3x + 2(250 - x) = 640$.

$$3x + 500 - 2x = 640$$
$$3x - 2x = 640 - 500$$
$$x = 140$$

Y finalmente remplazamos este valor de $x = 140$ para encontrar a la variable y, usamos la ecuación (1) *ó* (2),
En nuestro caso es más conveniente usar la ecuación (1), pero para mostrar que no depende de una sola ecuación usaremos la (2)

$$3x + 2y = 640 \Rightarrow 2y = 640 - 3x \Rightarrow y = \frac{640 - 3x}{2}$$
$$y = \frac{640 - 3(140)}{2} \Rightarrow y = \frac{640 - 420}{2}$$
$$y = \frac{220}{2} \Rightarrow y = 110$$

Método de igualación

El procedimiento para este método es muy similar al anterior, solo que despejamos en ambas ecuaciones una misma incógnita, para luego igualarlas y convertir esta en una ecuación de primer grado con una incógnita. Para luego sustituir este valor en una de esta igualdad.

Ejemplo 4. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 250 \quad (1) \\ 3x + 2y = 640 \quad (2) \end{cases}$$

En la ecuación (1) y (2) despejamos la variable y.

$$(1.1) \quad y = 250 - x$$

$$(2.1) \quad y = \frac{640 - 3x}{2}$$

Igualando ambos términos y resolviendo:

$$250 - x = \frac{640 - 3x}{2}$$
$$2(250 - x) = 640 - 3x$$
$$500 - 2x = 640 - 3x$$
$$x = 640 - 500 = 140$$

Luego para determinar la variable y usamos (1.1) o bien (2.1)

$$y = 250 - x = 250 - 140 = 110$$

Método de Determinantes o Regla de Cramer

Para este método consideremos el sistema de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (**)$$

Aplicaremos las siguientes fórmulas que se obtienen de la teoría de los determinantes que no trataremos en este libro.

Llamamos determinante del sistema (**) al número *D* definido por:

$$D = a_1b_2 - a_2b_1$$

Una nemotecnia para recordar esta fórmula es disponer los coeficientes del sistema en un arreglo rectangular como sigue:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Entonces D es el producto de los números de la diagonal principal, menos el producto de la diagonal secundaria.

Si el valor de *D* es no nulo $(D \neq 0)$, entonces la solución del sistema se obtienen a través de las siguientes fórmulas.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{D}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{D}$$

Ejemplo 5.
Resolver el sistema siguiente con el método de **Determinante**:

$$\begin{cases} x + y = 250 & (1) \\ 3x + 2y = 640 & (2) \end{cases}$$

Tenemos que

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 250 & 1 \\ 640 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{250 \cdot 2 - 1 \cdot 640}{-1} = \frac{-140}{-1} = 140$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 250 \\ 3 & 640 \end{vmatrix}}{D} = \frac{1 \cdot 640 - 250 \cdot 3}{-1} = \frac{-110}{-1} = 110$$

Como hemos observado los cuatro métodos (reducción, sustitución, igualación y determinante) nos permite resolver sistemas de ecuaciones lineales y obtener el mismo resultado, pero su importancia principal son sus múltiples aplicaciones. A continuación presentaremos algunos ejemplos de estas aplicaciones semejantes a la mostrada en la introducción del tema. Y usaremos los diferentes métodos mencionados hasta ahora, para determinar sus soluciones.

Ejemplo 6.
La suma de las edades de una señora y su hija es 44 años. Hace 7 años la edad de la señora era 5 veces la edad de su hija. ¿Cuál es la edad actual de cada una? (Use el método de reducción)

Sea x la edad actual de la señora y y la edad actual de la hija, entonces:

$$x + y = 144$$

Hace 7 años sus edades eran igual a las que tienen ahora menos 7, y en ese entonces la edad de la señora era 5 veces la de su hija, es decir: $x-5 = 5(y-7)$, o bien

$$x - 5y = -28.$$

Con estas ecuaciones formamos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 144 & (1) \\ x - 5y = -28 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos por -1 la ecuación (2) y el resultado lo sumamos a la ecuación (1).

$$\begin{array}{c} x + y = 44 \\ \underline{-x + 5y = 28} \\ 6y = 72 \end{array}$$

Por lo tanto $y = 12$ y $x + 12 = 44 \Longrightarrow x = 44 - 12 = 32.$

Entonces este resultado nos afirma que la señora tiene actualmente 32 años y su hija 12 años. Hace 7 años sus edades eran respectivamente 32 − 7 =25 años y 12 − 7 = 5 años, es decir, la edad de la señora era 5 veces la de su hija.

Ejemplo 7.

Una embarcación viaja 6 kilómetros a favor de la corriente de un rio en 30 minutos, y tarda en regresar 45 minutos contra la corriente. Encontrar la velocidad de la embarcación en agua tranquila y la de la corriente. (Use el método de sustitución)

Sea x la velocidad de la corriente y y la velocidad de la embarcación, en kilómetros por hora.

Los tiempos de ida y regreso, en horas son: 30 minutos = $\frac{1}{2}$ horas; 45 minutos = $\frac{3}{4}$ horas.

En el viaje de ida la velocidad de la embarcación aumenta con la velocidad de la corriente y recorre la distancia de 6 Km, esto es

$$\frac{1}{2}(x+y)$$

Rescribimos esta expresión: $x+y=12$ (1).

En el viaje de regreso la velocidad de la embarcación se reduce con la velocidad de la corriente y recorre la misma distancia de 6 Km , es decir:

$$\frac{3}{4}(y-x)=6$$

Lo cual es equivalente a $y-x=8$ (2).

Formamos nuestro sistema lineal:

$$\begin{cases} y+x=12 & (1) \\ y-x=8 & (2) \end{cases}$$

Para este ejemplo aplicaremos el método de sustitución,

En efecto despejamos en la ecuación (1) a la variable y, y la sustituimos en (2)

$$y = 12 - x$$
$$(12 - x) - x = 8$$
$$12 - 2x = 8$$
$$-2x = 8 - 12$$
$$-2x = -4$$
$$x = 2$$

Esta es la velocidad de la corriente, x = 2*Km/h* y la velocidad de la embarcación en aguas tranquilas es de $y = 12 - x \Rightarrow y = 12Km/h - 2Km/h$= 10*Km/h*.

Ejemplo 8.

Un comerciante compró dos tipos de mercancía por $12 000 y al venderla obtuvo una ganancia de $4 900. Si con un tipo de mercancía obtuvo una ganancia de 35% y de 45% con el otro, determine el valor de la compra para cada tipo de mercancía. Use el método de igualación.

Sea x la parte sobre la que ganó el 35% y y la parte sobre la que ganó el 45%, entonces:

$$x + y = 12\,000$$

y la expresión que representa la ganancia

$$0{,}35\,x + 0{,}45y = 4900$$

así obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 12\,000 & (1) \\ 0{,}35x + 0{,}45y = 4\,900 & (2) \end{cases}$$

En (1) y (2) despejamos la variable y.

$$y = 12\,000 - x$$

$$y = \frac{4\,900 - 0{,}35x}{0{,}45}$$

Igualando las expresiones

$$12\,000 - \; x = \frac{4\,900 - 0{,}35x}{0{,}45}$$

Resolviendo

$$0{,}45(12\,000 - x) = \; 4\,900 - 0{,}35x$$

$$5\,400 - 0{,}45x = 4\,900 - 0{,}35x$$

$$-0{,}45x + 0{,}35x = 4\,900 - 5\,400$$

$$-0{,}1x = -500$$

$$x = \frac{-500}{-0{,}1} = 5\,000$$

Luego para determinar el valor de y usamos la relación $y = 12\,000 - x$ y reemplazamos

x = 5 000 para obtener $y = 12\,000 - 5\,000 = 7000$. Respuesta: El valor de la compra de la mercancía que generó una ganancia de 35% fue de $5 000 y el valor de la compra de la mercancía con 45% de ganancia fue de $ 7 000.

Ejemplo 9.

Hallar las dimensiones de un terreno rectangular sabiendo que si el ancho se aumenta en 2 metros y el largo, en 5 metros, su área aumenta en 190 metros cuadrados, y si el ancho se disminuye en 3 metros y el largo, en 2 metros, su área disminuye en 154 metros cuadrados. (Use el método de determinante).

Sean x e y el ancho y el largo del terreno rectangular, medios en metros.
Entonces su área está dada por xy: , luego por la primera condición tenemos:

$$xy$$

$$(x + 2)(y + 5) = xy + 190$$

Desarrollamos el producto indicado y nos queda

$$xy + 5x + 2y + 10 = xy + 190$$

Simplificando

$$5x + 2y = 180$$

Para la segunda condición

$$(x-3)(y-2) = xy - 154$$

Desarrollamos el producto indicado y nos queda

$$xy - 2x - 3y + 6 = xy - 154$$

Simplificando

$$2x + 3y = 160$$

Formamos el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 160 & (1) \\ 5x + 2y = 180 & (2) \end{cases}$$

Usamos la fórmula para determinante y obtenemos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = -11$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 160 & 3 \\ 180 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{160 \cdot 2 - 3 \cdot 180}{-11} = \frac{-220}{-11} = 20$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 160 \\ 5 & 180 \end{vmatrix}}{D} = \frac{2 \cdot 180 - 160 \cdot 5}{-11} = \frac{-440}{-11} = 44$$

Finalmente tenemos que las dimensiones del terreno son 20 metros de ancho y 40 metros de largo, con un área de $(20m)(40m) = 80\ m^2$.

Método de Gráfico

Para nuestro siguiente propósito antes de aplicar este método, estudiaremos el trazado de una ecuación de primer grado con dos incógnitas de la forma $ax+by = c$ sobre un sistema cartesiano de coordenadas. Para una mejor ilustración, daremos un procedimiento que describiremos en los siguientes pasos:

1) Despejemos la variable y de la ecuación $ax + by = c$, con $b \neq 0$

$$y = \frac{c - ax}{b}$$

2) Hacemos una tabla con dos valores de x y sus correspondientes valores de y:

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

Asignando a la variable x valores convenientes x_0 y x_1 para encontrar los valores correspondientes de y, y_0 e y_1.

3) Finalmente marcamos los puntos $P_o(x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$ en plano cartesiano y trazamos la línea recta que pase por estos puntos.

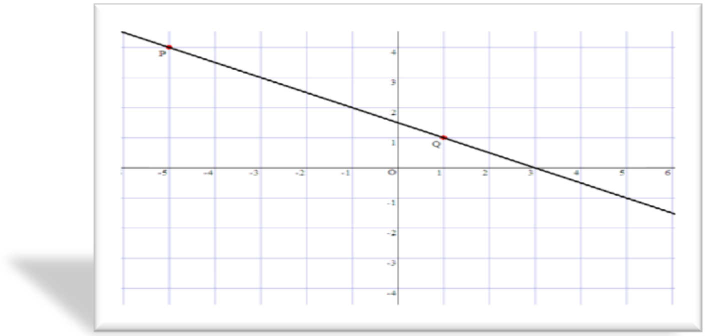
Ejemplo 10.

Trace la recta cuya ecuación es $x + 2y = 3$.

1) Despejamos la variable y, $y = \frac{3-x}{2}$
2) Asignamos valores $x_0 = -5$, $x_1 = 1$ y obtenemos $y_0 = 4$, $y_1 = 1$
3) Hacemos la tabla

x	-5	1
y	4	1

4) Trazamos la línea recta que pasa por los puntos $P(-5, 4)$ y $Q(1,1)$ en un sistema cartesiano.



Retomando el método gráfico observaremos que un sistema de ecuación simultáneo representa dos líneas rectas, las cuales geométricamente pueden interceptarse en un punto, ningún punto (líneas paralelas) o infinitos puntos (una línea sobre otra). En nuestro caso presentaremos un ejemplo de cada sistema para mejor ilustración de estas aseveraciones.

Primer Caso: Se cortan en un punto

$$\begin{cases} 2x - y = 3 & (1) \\ x + 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

Aplicamos el procedimiento anterior para el trazado de ambas rectas.

$$y = 2x - 3$$

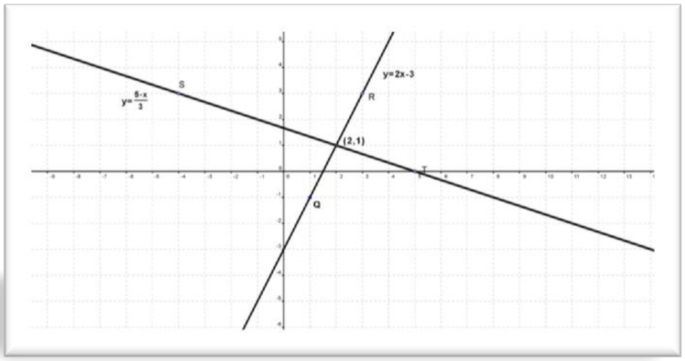
x	3	1
y	3	-1

Marcamos los puntos $Q(3,3)$ y $R(1,-1)$

$$y = \frac{5-x}{3}$$

x	-4	5
y	3	0

Marcamos los puntos $S(-4,3)$ y $T(5,0)$



El punto $P(2,1)$ es el punto de intersección de las dos rectas, esto lo podemos comprobar resolviendo el sistema anterior por cualquiera de los métodos explicados. Usemos el de igualación.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 & (1) \\ x + 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

$$2x - 3 = \frac{5 - x}{3}$$

$$6x - 9 = 5 - x$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

Para obtener el valor de *y*, remplazamos en (1), $y = 2(2) - 3 = 1.$

Segundo Caso: No se cortan en ningún punto (son paralelas)

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & (1) \\ 4x - 2y = 10 & (2) \end{cases}$$

De la misma forma despejamos la variable y en ambas ecuaciones e igualamos,

$$y = 2x - 4 \quad (1)$$

$$y = \frac{4x - 10}{2} \quad (2)$$

$$2x - 4 = \frac{4x - 10}{2}$$

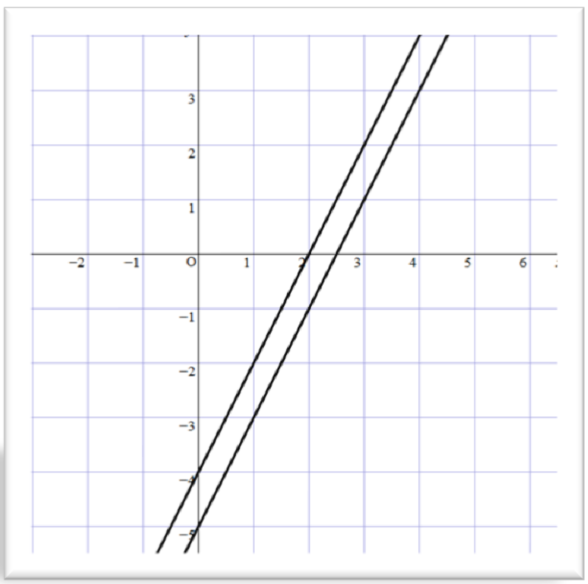
$$\Longrightarrow 2(2x - 4) = 4x - 10$$

$$\Longrightarrow \quad 4x - 8 = 4x - 10$$

$$0 = -2$$

Lo cual no es posible.

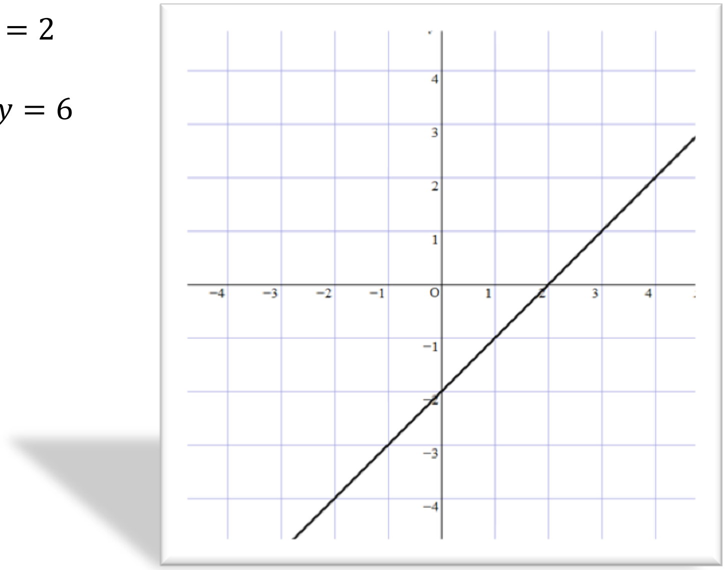
Y para el trazado usamos la tabla de valores, explicada anteriormente.



Tercer Caso: Se cortan en todos los puntos. (Rectas iguales)

Para este caso usamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases}$$



La segunda ecuación se obtiene de la primera al multiplicarla por 3, por lo tanto ambas ecuaciones representan a la misma recta.

Observación: El método gráfico no es apropiado para resolver los problemas de aplicaciones ya que este involucra un esfuerzo adicional para el trazado, pero esto ni implica que no funcionaría en la resolución de estos.

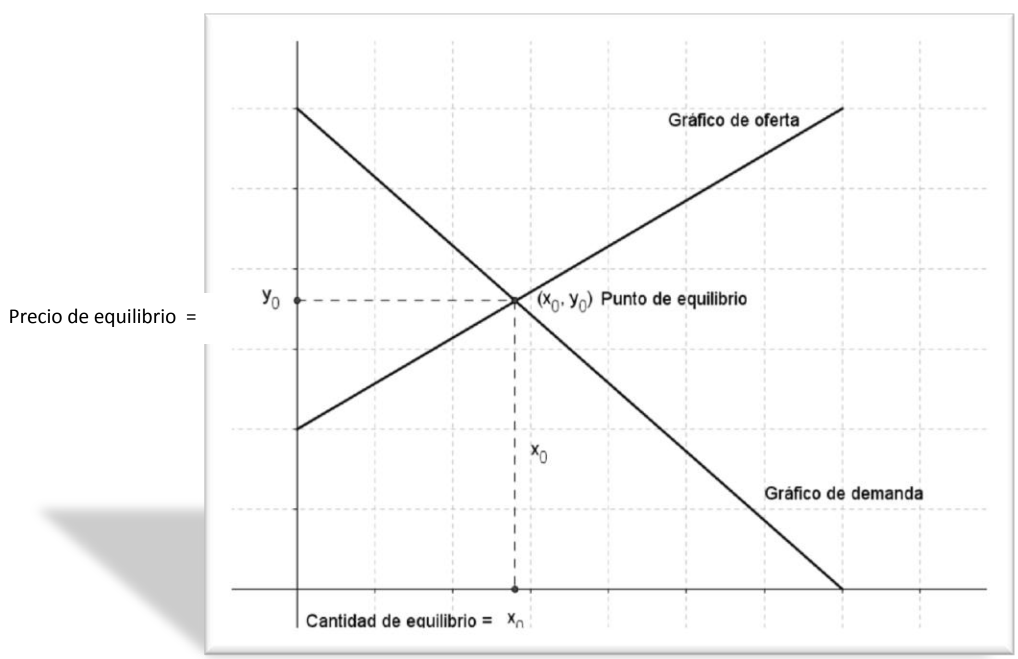
Resumen de las Características de un Sistema de Ecuaciones en dos Variables

Gráficas	Número de Soluciones	Clasificación
Rectas no paralelas	Una solución	Sistema consistente
Rectas idénticas	Número infinito de soluciones	Sistema dependiente
Rectas paralelas	Ninguna solución	Sistema Inconsistente

Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales. Cálculo del punto de equilibrio.

Existen ecuaciones que se relacionan entre sí, por ejemplo la que relaciona el precio unitario con la cantidad de demanda (u oferta) la cual se denomina ***ecuación de demanda*** (o ***ecuación de oferta***).

Las curvas de demanda y de oferta de un producto determinado se representan en el mismo plano cartesiano para un producto determinado, y el punto indicado por (q_0, p_0) en el que se intersecan estas dos rectas se denomina ***punto de equilibrio.*** Al precio p_0 y_0, se le llama ***precio de equilibrio***, y es el precio al cual los consumidores adquirirían la misma cantidad del producto que los fabricantes estarían dispuestos a vender a ese precio. En otras palabras, p_0 es el precio en el cual ocurre la estabilidad en relación entre fabricante y consumidores. A la cantidad q_0 x_0 se le denomina ***cantidad de equilibrio.***



Ejemplo 11.

Supóngase que la ecuación lineal de demanda semanal para un producto es:

$$p = -\frac{1}{180}q + 12 \qquad (1)$$

y la ecuación lineal de oferta semanal es:

$$p = \frac{1}{300}q + 8 \qquad (2)$$

Donde *p* es el precio por unidad del producto, en dólares, y *q* la cantidad de unidades producidas por semana.

Para determinar en forma precisa el punto de equilibrio, se resuelve el sistema ecuaciones lineales formado por las ecuaciones de oferta y de demanda.

Observe que en las dos ecuaciones aparece la misma variable precio *p* dada en términos de la variable cantidad *q*, por lo que es conveniente utilizar el método de igualación para calcular el punto de equilibrio.

$$\begin{cases} p = -\dfrac{1}{180}q + 12 \\ p = \dfrac{1}{300}q + 8 \end{cases}$$

Igualando ambas ecuaciones y resolviendo para la variable resultante tenemos:

$$-\frac{1}{180}q + 12 = \frac{1}{300}q + 8$$

$$\frac{1}{300}q + \frac{1}{180}q = 4$$

$$\frac{2}{225}q \; = 4$$

$$q = 450$$

La cantidad de equilibrio es $q = 450$. Para obtener el precio de equilibrio, reemplazamos el valor de $q = 450$ en una de las dos ecuaciones del sistema, en este ocasión reemplazamos en la primera y obtenemos

$$p = -\frac{1}{180}450 + 12 = 9{,}50$$

El precio de equilibrio es $ 9,50 y el punto de equilibrio es $(450,)$. Esto significa que al precio de B/9,50 por unidad, los fabricantes fabricarán exactamente 450 unidades del producto por semana de tal manera que los consumidores adquieran el producto a ese precio.

Ejemplo 12.

Suponga que la ecuación de oferta de cierto producto es $p = \frac{2}{25}q + 50$ y la ecuación de oferta es $p = -\frac{7}{100}q + 65$. Donde p es el precio por unidad en balboas y q la cantidad de unidades producidas.

Si se carga un impuesto de B/ 1,50 por unidad al fabricante, ¿cómo se verá afectado el precio original de equilibrio si la demanda permanece igual?

Primero, resolveremos el problema sin considerar el impuesto cargado. Tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} p = \dfrac{2}{25}q + 50 \\ \\ p = -\dfrac{7}{100}q + 65 \end{cases}$$

Al igualar las ecuaciones nos queda

$$\tfrac{2}{25}q + 50 = -\tfrac{7}{100}q + 65$$

Resolviendo la ecuación obtenemos $q = 100$ y reemplazando este valor en una de las ecuaciones del sistema resulta $p = 58$. Así el precio de equilibrio es de B/. 58,00 y 100 la cantidad de equilibrio

Al cargar un impuesto de B/. 1, 50 el fabricante vendería las mismas *q unidades* y la nueva ecuación de oferta sería de $p = \frac{2}{25}q + 50 + 1{,}50 = \ p = \frac{2}{25}q + 51{,}50$.

En este caso el sistema a considerar es

$$\begin{cases} p = \dfrac{2}{25}q + 51{,}50 \\ \\ p = -\dfrac{7}{100}q + 65 \end{cases}$$

La nueva cantidad de equilibrio satisface la ecuación

$$\frac{2}{25}q + 51{,}5 = -\frac{7}{100}q + 65$$

$$\frac{3}{20}q = 13{,}50$$

$$q = 90$$

Remplazando este valor en $p = \frac{2}{25}q + 51{,}50$ se tiene que:

$$p = \tfrac{2}{25}90 + 51{,}50 = 58{,}70$$

Se observa que al aumentar un impuesto de B/. 1,50 por unidad aumenta el precio de equilibrio en B/. 0,70 y a su vez, se presenta una disminución en la cantidad de equilibrio de 10 unidades.