Ejer. 55-58: Grafique f y estime todos los valores de x tales que $f(x) > k$.

55 $f(x) = x^3 + 5x - 2; \quad k = 1$

56 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8x + 5; \quad k = 3$

57 $f(x) = x^5 - 2x^2 + 2; \quad k = -2$

58 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 10x - 26; \quad k = -1$

Ejer. 59-60: Grafique f y g sobre el mismo plano de coordenadas y estime los puntos de intersección.

59 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1.5x + 2.8;$
$g(x) = -x^3 - 1.7x^2 + 2x + 2.5$

60 $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4;$
$g(x) = x^4 - 3x^3 - 0.25x^2 + 3.75x$

61 **Beneficiarios de servicio médico** La función f dada por

$$f(x) = -0.000\,015z^3 - 0.005z^2 + 0.75z + 23.5,$$

donde $z = x - 1973$, aproxima el número total de beneficiarios de servicio médico en millones, de $x = 1973$ a $x = 2005$. Hubo 23,545,363 beneficiarios en 1973 y 42,394,926 en 2005.

(a) Grafique f y discuta la forma en que el número de beneficiarios de servicio médico ha cambiado en este periodo.

(b) Invente un modelo lineal semejante a f que aproxime el número de beneficiarios. ¿Cuál modelo es más realista?

62 **Participantes programa Con Ventaja** La función f dada por

$$f(x) = -0.11x^4 - 46x^3 + 4000x^2 - 76{,}000x + 760{,}000$$

aproxima el número total de niños en edad preescolar que participan en el programa gubernamental Head Start entre 1966 y 2005, donde $x = 0$ corresponde al año 1966.

(a) Grafique f en el intervalo $[0, 40]$. Analice cómo ha cambiado el número de participantes entre 1966 y 2005.

(b) Aproxime el número de niños inscritos en 1986.

(c) Estime gráficamente los años en los que hubo 500,000 niños inscritos en el programa Head Start.

4.2 Propiedades de la división

En esta sección empleamos $f(x)$, $g(x)$, etcétera, para denotar polinomios en x. Si $g(x)$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(x)$ es **divisible** entre $g(x)$. Por ejemplo, $x^4 - 16$ es divisible entre $x^2 - 4$, entre $x^2 + 4$, entre $x + 2$ y entre $x - 2$.

El polinomio $x^4 - 16$ no es divisible entre $x^2 + 3x + 1$, pero podemos usar el proceso llamado **división larga** para hallar un *cociente* y un *residuo*, como en la siguiente ilustración, donde hemos insertado términos con coeficientes cero.

ILUSTRACIÓN **División larga de polinomios**

$$
\begin{array}{rll}
 & \overbrace{x^2 - 3x + 8}^{\text{cociente}} & \\
x^2 + 3x + 1 & \overline{)\,x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 16} & \\
 & \underline{x^4 + 3x^3 + x^2} & x^2(x^2 + 3x + 1) \\
 & -3x^3 - x^2 & \text{reste} \\
 & \underline{-3x^3 - 9x^2 - 3x} & -3x(x^2 + 3x + 1) \\
 & 8x^2 + 3x - 16 & \text{reste} \\
 & \underline{8x^2 + 24x + 8} & 8(x^2 + 3x + 1) \\
 & \underbrace{-21x - 24}_{\text{residuo}} & \text{reste}
\end{array}
$$

El proceso de división larga termina cuando llegamos a un polinomio (el residuo) que es 0 o tiene un menor grado que el divisor. El resultado de la división larga de la ilustración precedente se puede escribir

$$\frac{x^4 - 16}{x^2 + 3x + 1} = (x^2 - 3x + 8) + \left(\frac{-21x - 24}{x^2 + 3x + 1}\right).$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por $x^2 + 3x + 1$, obtenemos

$$x^4 - 16 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 8) + (-21x - 24).$$

Este ejemplo ilustra el siguiente teorema.

Algoritmo de división para polinomios

Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios y si $p(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x),$$

donde ya sea $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $p(x)$. El polinomio $q(x)$ es el **cociente** y $r(x)$ es el **residuo** en la división de $f(x)$ entre $p(x)$.

Un útil caso especial del algoritmo de división para polinomios se presenta si $f(x)$ se divide entre $x - c$, donde c es el número real. Si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces

$$f(x) = (x - c)q(x)$$

para algún cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ es 0. Si $x - c$ no es un factor de $f(x)$, entonces el grado del residuo $r(x)$ es menor al grado de $x - c$ y por tanto $r(x)$ debe tener grado 0. Esto significa que el residuo es un número diferente de cero. En consecuencia, para toda $x - c$ tenemos

$$f(x) = (x - c)q(x) + d,$$

donde el residuo d es un número real (posiblemente $d = 0$). Si sustituimos c por x, obtenemos

$$\begin{aligned} f(c) &= (c - c)q(c) + d \\ &= 0 \cdot q(c) + d \\ &= 0 + d = d. \end{aligned}$$

Esto demuestra el siguiente teorema.

Teorema del residuo

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

EJEMPLO 1 **Uso del teorema del residuo**

Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$, use el teorema del residuo para hallar $f(2)$.

SOLUCIÓN Según el teorema del residuo, $f(2)$ es el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 2$. Por división larga,

$$
\begin{array}{rrl}
 & x^2 - x - 1 & \\
x - 2 \,\big) & x^3 - 3x^2 + x + 5 & \\
 & \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+x + 5} & x^2(x-2) \\
 & -x^2 + x & \text{reste} \\
 & \underline{-x^2 + 2x} & -x(x-2) \\
 & -x + 5 & \text{reste} \\
 & \underline{-x + 2} & (-1)(x-2) \\
 & 3 & \text{reste}
\end{array}
$$

En consecuencia, $f(2) = 3$. Podemos comprobar este hecho por sustitución directa:

$$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 + 5 = 3$$

Usaremos el teorema del residuo para demostrar el siguiente e importante resultado.

Teorema del factor	Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

PRUEBA Por el teorema del residuo,

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$$

para algún cociente $q(x)$.

Si $f(c) = 0$, entonces $f(x) = (x - c)q(x)$; esto es, $x - c$ es un factor de $f(x)$. Recíprocamente, si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces el residuo de la división de $f(x)$ entre $x - c$ debe ser 0 y, por tanto, por el teorema del residuo, $f(c) = 0$.

El teorema del factor es útil para hallar factores de polinomios, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 **Uso del teorema del factor**

Demuestre que $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.

SOLUCIÓN Como $f(2) = 8 - 16 + 6 + 2 = 0$, vemos del teorema del factor que $x - 2$ es un factor de $f(x)$. Otro método de solución sería dividir $f(x)$ entre $x - 2$ y demostrar que el residuo es 0. El cociente de la división sería otro factor de $f(x)$.

EJEMPLO 3 **Hallar un polinomio con ceros prescritos**

Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 3 que tenga ceros 2, -1 y 3.

SOLUCIÓN Por el teorema del factor, $f(x)$ tiene factores $x - 2$, $x + 1$, y $x - 3$. Por tanto,

$$f(x) = a(x - 2)(x + 1)(x - 3),$$

donde cualquier valor diferente de cero puede ser asignado a a. Si hacemos $a = 1$ y multiplicamos, obtenemos

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Para aplicar el teorema del residuo es necesario dividir un polinomio $f(x)$ entre $x - c$. El método de **división sintética** se puede usar para simplificar este trabajo. Las directrices siguientes expresan cómo hacerlo. El método puede justificarse por una cuidadosa (y prolongada) comparación con el método de división larga.

Directrices para división sintética de $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ entre $x - c$

1 Empiece con lo siguiente, escribiendo ceros para cualesquier coeficientes faltantes del polinomio dado

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ & & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

2 Multiplique a_n por c y ponga el producto ca_n bajo a_{n-1}, como se indica por la flecha en lo que sigue. (Esta flecha, y otras, se usa sólo para aclarar estas directrices y no aparecerá en divisiones sintéticas *específicas.*) A continuación, encuentre la suma $b_1 = a_{n-1} + ca_n$ y póngala bajo la línea como se indica.

$$\begin{array}{c|ccccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & & a_1 & a_0 \\ & & ca_n & cb_1 & cb_2 & \ldots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline & a_n & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} & r \end{array}$$

3 Multiplique b_1 por c y ponga el producto cb_1 bajo a_{n-2}, como lo indica la segunda flecha. Continuando, en seguida halle la suma $b_2 = a_{n-2} + cb_1$ y póngala bajo la línea como se indica.

4 Continúe este proceso, como lo indican las flechas, hasta obtener la suma final $r = a_0 + cb_{n-1}$. Los números

$$a_n, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_{n-2}, \quad b_{n-1}$$

son los coeficientes del cociente $q(x)$; esto es,

$$q(x) = a_nx^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1},$$

y r es el residuo.

La división sintética no sustituye a una división larga; simplemente es un método más rápido y es aplicable sólo cuando el divisor es de la forma $x - c$.

Los ejemplos siguientes ilustran la división sintética para algunos casos especiales.

EJEMPLO 4 **Uso de división sintética para hallar un cociente y residuo**

Use división sintética para hallar el cociente $q(x)$ y residuo r si el polinomio $2x^4 + 5x^3 - 2x - 8$ se divide entre $x + 3$.

SOLUCIÓN Como el divisor es $x + 3 = x - (-3)$, el valor de c en la expresión $x - c$ es -3. En consecuencia, la división sintética toma esta forma:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 2 & 5 & 0 & -2 & -8 \\ & & -6 & 3 & -9 & 33 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & -11 & 25 \\ & \multicolumn{4}{c}{\text{coeficiente del cociente}} & \text{residuo} \end{array}$$

Como hemos indicado, los primeros cuatro números de la tercera fila son los coeficientes del cociente $q(x)$ y el último número es el residuo r. Así,

$$q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 11 \qquad \text{y} \qquad r = 25.$$

Se puede usar división sintética para hallar valores de funciones polinomiales, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 **Uso de división sintética para hallar valores de un polinomio**

Si $f(x) = 3x^5 - 38x^3 + 5x^2 - 1$, use división sintética para hallar $f(4)$.

SOLUCIÓN Por el teorema del residuo, $f(4)$ es el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 4$. Dividiendo sintéticamente, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 4 & 3 & 0 & -38 & 5 & 0 & -1 \\ & & 12 & 48 & 40 & 180 & 720 \\ \hline & 3 & 12 & 10 & 45 & 180 & 719 \\ & \multicolumn{5}{c}{\text{coeficientes del cociente}} & \text{residuo} \end{array}$$

En consecuencia, $f(4) = 719$.

Se puede usar división sintética para ayudar a encontrar ceros de polinomios. Por el método ilustrado en el ejemplo anterior, $f(c) = 0$ si y sólo si el residuo en la división sintética entre $x - c$ es 0.

EJEMPLO 6 **Uso de división sintética para hallar ceros de un polinomio**

Demuestre que -11 es un cero del polinomio

$$f(x) = x^3 + 8x^2 - 29x + 44.$$

SOLUCIÓN Dividiendo sintéticamente entre $x - (-11) = x + 11$ da

$$\begin{array}{r|rrrr} -11 & 1 & 8 & -29 & 44 \\ & & -11 & 33 & -44 \\ \hline & \underbrace{1 \quad -3 \quad 4}_{\text{coeficientes del cociente}} & & & \underbrace{0}_{\text{residuo}} \end{array}$$

Por lo tanto, $f(-11) = 0$ y -11 es un cero de f.

El ejemplo 6 muestra que el número -11 es una solución de la ecuación $x^3 + 8x^2 - 29x + 44 = 0$. En la sección 4.4 usaremos división sintética para hallar soluciones racionales de ecuaciones.

En esta etapa el lector debe reconocer que los siguientes tres enunciados son equivalentes para una función polinomial f cuya gráfica es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

enunciados equivalentes para $f(a) = b$

(1) El punto (a, b) está en la gráfica de f.
(2) El valor de f en $x = a$ es igual a b; esto es, $f(a) = b$.
(3) Si $f(x)$ se divide entre $x - a$, entonces el residuo es b.

Además, si b es igual a 0, entonces los siguientes cuatro enunciados también son equivalentes.

enunciados equivalentes adicionales para $f(a) = 0$

(1) El número a es un cero de la función f.
(2) El punto $(a, 0)$ está en la gráfica de f; esto es, a es un punto de intersección con el eje x.
(3) El número a es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.
(4) El binomio $x - a$ es un factor del polinomio $f(x)$.

El estudiante debe familiarizarse con estos enunciados hasta el punto en que si sabe que uno de ellos es verdadero, puede fácilmente recordar y aplicar cualquier enunciado equivalente apropiado.

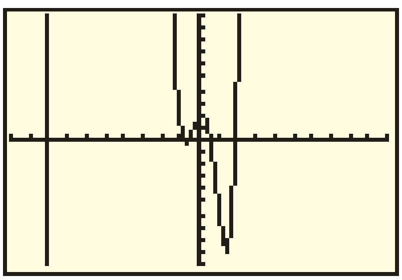
EJEMPLO 7 **Relacionar una gráfica a la división**

Use la gráfica de

$$f(x) = 0.5x^5 + 3.5x^4 - 5.5x^3 - 7.5x^2 + 2x + 2$$

para aproximar (a dos lugares decimales) el residuo si $f(x)$ se divide entre $x + 1.37$.

Figura 1
$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$



SOLUCIÓN Asignamos $f(x)$ a Y_1 y graficamos f con una pantalla estándar, como se ve en la figura 1. Del análisis anterior, sabemos que para hallar un residuo b al utilizar una gráfica, debemos hallar el punto (a, b) que corresponde a dividir $f(x)$ entre $x - a$. En este caso $a = -1.37$ y el punto sobre la gráfica -1.37 con coordenada x es aproximadamente $(-1.37, 9.24)$. En consecuencia, el residuo b es aproximadamente 9.24.

La forma más fácil de encontrar el residuo usando una calculadora graficadora es simplemente hallar el valor de función Y_1 cuando $x = -1.37$, pero el propósito de este ejemplo era señalar la relación gráfica con el proceso de división.

4.2 *Ejercicios*

Ejer. 1-8: Encuentre el cociente y residuo si $f(x)$ se divide entre $p(x)$.

1 $f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 12$; $p(x) = x^2 - 3$

2 $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$; $p(x) = x^2 + 1$

3 $f(x) = 3x^3 + 2x - 4$; $p(x) = 2x^2 + 1$

4 $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4x - 8$; $p(x) = 2x^2 + x$

5 $f(x) = 7x + 2$; $p(x) = 2x^2 - x - 4$

6 $f(x) = -5x^2 + 3$; $p(x) = x^3 - 3x + 9$

7 $f(x) = 9x + 4$; $p(x) = 2x - 5$

8 $f(x) = 7x^2 + 3x - 10$; $p(x) = x^2 - x + 10$

Ejer. 9-12: Use el teorema del residuo para hallar $f(c)$.

9 $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 4$; $c = 2$

10 $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$; $c = 3$

11 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x - 8$; $c = -3$

12 $f(x) = x^4 + 3x^2 - 12$; $c = -2$

Ejer. 13-16: Use el teorema del factor para demostrar que $x - c$ es un factor de $f(x)$.

13 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 12$; $c = -3$

14 $f(x) = x^3 + x^2 - 11x + 10$; $c = 2$

15 $f(x) = x^{12} - 4096$; $c = -2$

16 $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 6$; $c = 2$

Ejer. 17-20: Encuentre un polinomio $f(x)$ con coeficiente principal 1 y que tenga el grado y ceros dados.

17 grado 3; ceros $-2, 0, 5$

18 grado 3; ceros $\pm 2, 3$

19 grado 4; ceros $-2, \pm 1, 4$

20 grado 4; ceros $-3, 0, 1, 5$

Ejer. 21-28: Use división sintética para hallar el cociente y residuo si el primer polinomio se divide entre el segundo.

21 $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$; $x - 2$

22 $3x^3 - 4x^2 - x + 8$; $x + 4$

23 $x^3 - 8x - 5$; $x + 3$

24 $5x^3 - 6x^2 + 15$; $x - 4$

25 $3x^5 + 6x^2 + 7$; $x + 2$

26 $-2x^4 + 10x - 3$; $x - 3$

27 $4x^4 - 5x^2 + 1$; $x - \frac{1}{2}$

28 $9x^3 - 6x^2 + 3x - 4$; $x - \frac{1}{3}$

Ejer. 29-34: Use división sintética para hallar $f(c)$.

29 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 4$; $c = 3$

30 $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x$; $c = -2$

31 $f(x) = 0.3x^3 + 0.04x - 0.034$; $c = -0.2$

32 $f(x) = 8x^5 - 3x^2 + 7$; $c = \frac{1}{2}$

33 $f(x) = x^2 + 3x - 5$; $c = 2 + \sqrt{3}$

34 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8$; $c = 1 + \sqrt{2}$

Ejer. 35-38: Use división sintética para demostrar que c es un cero de $f(x)$.

35 $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 10x + 4$; $c = -2$

36 $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 8x - 3$; $c = 3$