4.1

Funciones polinomiales de grado mayor a 2

Si f es una función polinomial con coeficientes reales de grado n, entonces

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

con $a_n \neq 0$. Los casos especiales que se ven en la tabla siguiente ya se discutieron antes.

Grado de f	Forma de $f(x)$	Gráfica de f (con cruce a_0 en eje y)
0	$f(x) = a_0$	Una recta horizontal
1	$f(x) = a_1 x + a_0$	Una recta con pendiente a_1
2	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	Una parábola con un eje vertical

Figura 1

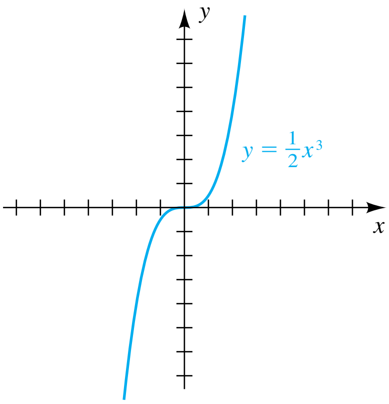
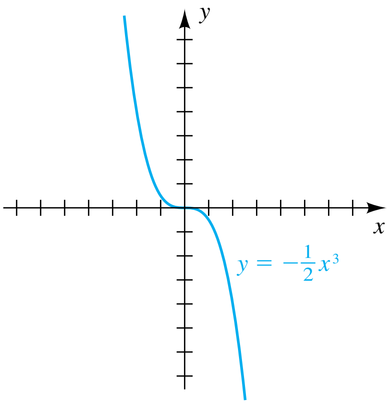


Figura 2



En esta sección estudiaremos gráficas de funciones polinomiales de grado mayor a 2. Todas las funciones con polinomios son **funciones continuas**, es decir, sus gráficas se pueden trazar sin ninguna interrupción.

Si f tiene grado n y *todos los coeficientes excepto a_n son cero,* entonces

$$f(x) = ax^n \quad \text{para alguna} \quad a = a_n \neq 0.$$

En este caso, si $n = 1$, la gráfica de f es una recta que pasa por el origen. Si $n = 2$, la gráfica es una parábola con vértice en el origen. Dos ilustraciones con $n = 3$ (**polinomios cúbicos**) se dan en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 **Trazar gráficas de $y = ax^3$**

Trace la gráfica de f si

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ **(b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$

SOLUCIÓN

(a) La tabla siguiente contiene varios puntos sobre la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{16} \approx 0.06$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{16} \approx 1.7$	4	$\frac{125}{16} \approx 7.8$

Como f es una función impar, la gráfica de f es simétrica con respecto al origen y puntos como $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$ y $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ están también sobre la gráfica. La gráfica se traza en la figura 1.

(b) Si $y = -\frac{1}{2}x^3$, la gráfica se puede obtener de la parte (a) al multiplicar todas las coordenadas y por -1 (esto es, reflejando la gráfica de la parte (a) a través del eje x). Esto nos da el dibujo de la figura 2.

Si $f(x) = ax^n$ y n es entero positivo *impar*, entonces f es una función impar y la gráfica de f es simétrica con respecto al origen, como se ilustra en las figuras 1 y 2. Para $a > 0$, la gráfica es semejante en forma a la de la figura 1, pero, cuando n o a aumentan, la gráfica sube más rápidamente para $x > 1$. Si $a < 0$, reflejamos la gráfica a través del eje x, como en la figura 2.

Si $f(x) = ax^n$ y n es un entero positivo *par*, entonces f es una función par y la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y, como se ilustra en la figura 3 para el caso $a = 1$ y $n = 4$. Nótese que cuando aumenta el exponente, la gráfica se hace más plana en el origen. También sube más rápidamente para $x > 1$. Si $a < 0$, reflejamos la gráfica a través del eje x. También nótese que la gráfica *corta* el eje x en el origen, pero no *cruza* el eje x (cambia signo).

Figura 3

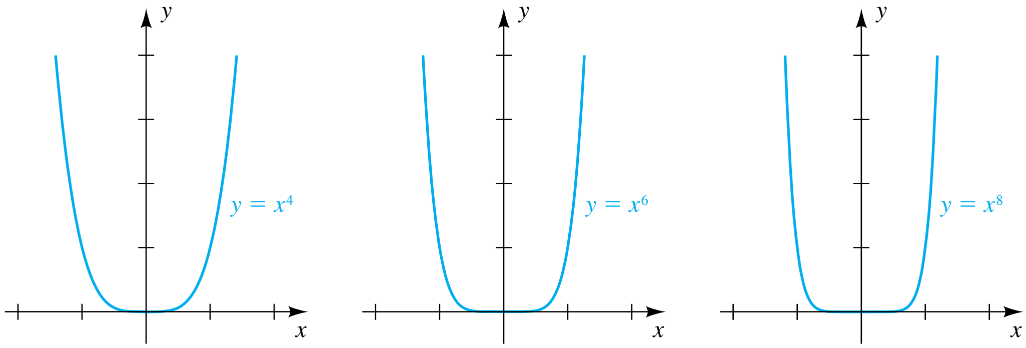
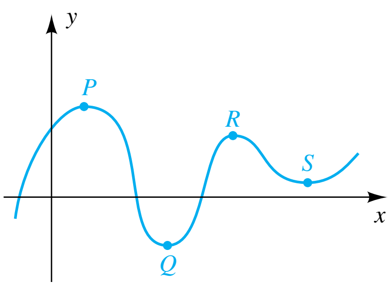


Figura 4



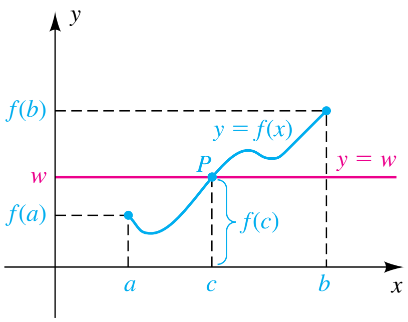
Un análisis completo de gráficas de funciones polinomiales de grado mayor a 2 requiere métodos que se usan en cálculo. A medida que aumenta el grado, las gráficas suelen hacerse más complicadas, aunque tienen un aspecto liso con varios puntos altos y puntos bajos, por ejemplo P, Q, R y S en la figura 4. Esos puntos a veces se denominan **puntos extremos** para la gráfica. Debe observarse que un polinomio de grado n tiene a lo más $n - 1$ puntos extremos. Cada valor de función (coordenada y) correspondiente a un punto alto o bajo se denomina **extremo** de una función f. En un extremo, f cambia de una función creciente a una función decreciente, o viceversa.

El teorema del valor intermedio especifica otra propiedad importante de funciones polinomiales.

Teorema del valor intermedio para funciones con polinomios	Si f es una función polinomial y $f(a) \neq f(b)$ para $a < b$, entonces f toma cada valor entre $f(a)$ y $f(b)$ del intervalo $[a, b]$.

El teorema del valor intermedio para funciones polinomiales expresa que si w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, hay al menos un número c entre a y b tal que $f(c) = w$. Si consideramos la gráfica de f como extendiéndose con-

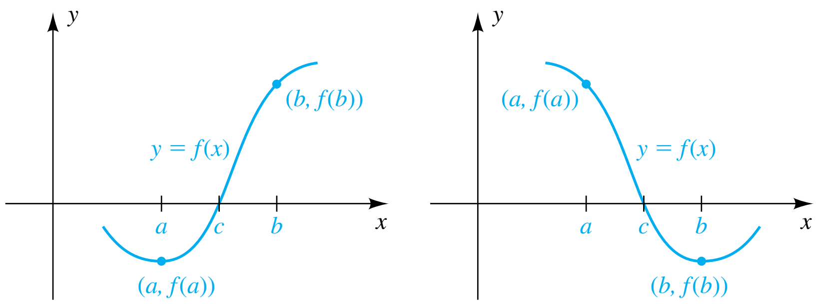
Figura 5



tinuamente del punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$, como se ilustra en la figura 5, entonces para cualquier número w entre $f(a)$ y $f(b)$, la recta horizontal $y = w$ corta la gráfica en al menos un punto P. La coordenada c de x de P es un número tal que $f(c) = w$.

Una consecuencia del teorema del valor intermedio es que si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios (uno positivo y uno negativo), hay al menos un número c entre a y b tal que $f(c) = 0$; esto es, *f tiene un* **cero** *en c*. Así, si el punto $(a, f(a))$ se encuentra abajo del eje x y el punto $(b, f(b))$ está arriba del eje x o viceversa, la gráfica cruza el eje x al menos una vez entre $x = a$ y $x = b$, como se ilustra en la figura 6.

Figura 6



EJEMPLO 2 **Uso del teorema del valor intermedio**

Demuestre que $f(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 3$ tiene un cero entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Sustituyendo 1 y 2 por x nos da los siguientes valores de función:

$$f(1) = 1 + 2 - 6 + 2 - 3 = -4$$
$$f(2) = 32 + 32 - 48 + 4 - 3 = 17$$

Como $f(1)$ y $f(2)$ tienen signos contrarios ($f(1) = -4 < 0$ y $f(2) = 17 > 0$), vemos que $f(c) = 0$ para al menos un número real c entre 1 y 2.

El ejemplo 2 ilustra un método para localizar ceros reales de polinomios. Con el uso de *aproximaciones sucesivas,* podemos aproximar cada cero a cualquier grado de precisión al localizarlo en intervalos cada vez menores.

Si c y d son *sucesivas* en ceros reales de $f(x)$, es decir, no hay otros ceros entre c y d, entonces $f(x)$ *no cambia signo en el intervalo* (c, d). Así, si escogemos cualquier número k tal que $c < k < d$ y si $f(k)$ es positiva, entonces $f(x)$ es positiva en todo (c, d). Del mismo modo, si $f(k)$ es negativa, entonces $f(x)$ es negativa en todo (c, d). Llamaremos $f(k)$ a un **valor de prueba** para $f(x)$ en el intervalo (c, d). También se pueden usar valores de prueba en intervalos infinitos de la forma $(-\infty, a)$ o (a, ∞), siempre que $f(x)$ no tenga ceros en estos intervalos. El uso de valores de prueba al graficar es semejante a la técnica empleada para desigualdades en la sección 2.7.

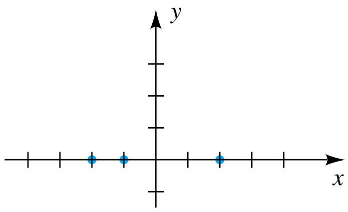
EJEMPLO 3 **Trazar la gráfica de una función polinomial de grado 3**

Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$. Encuentre todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y toda x tal que $f(x) < 0$ y luego trace la gráfica de f.

SOLUCIÓN Podemos factorizar $f(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - 4x - 4 && \text{enunciado} \\ &= (x^3 + x^2) + (-4x - 4) && \text{agrupar términos} \\ &= x^2(x + 1) - 4(x + 1) && \text{factorizar } x^2 \text{ y } -4 \\ &= (x^2 - 4)(x + 1) && \text{factorizar } (x + 1) \\ &= (x + 2)(x - 2)(x + 1) && \text{diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

Figura 7



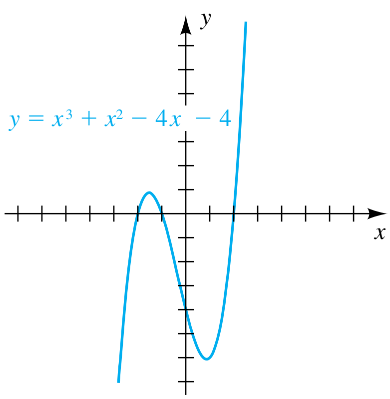
Vemos de la última ecuación que los ceros de $f(x)$ (los puntos de corte del eje x de la gráfica) son -2, -1 y 2. Los puntos correspondientes en la gráfica (vea figura 7) dividen el eje x en cuatro partes y consideramos los intervalos abiertos

$$(-\infty, -2), \quad (-2, -1), \quad (-1, 2), \quad (2, \infty).$$

Al igual que con nuestro trabajo con desigualdades en la sección 2.7, el signo de $f(x)$ en cada uno de estos intervalos se puede determinar usando una tabla de signos. La gráfica de f se encuentra arriba del eje x para valores de x tales que $f(x) > 0$ y abajo del eje x para toda x tal que $f(x) < 0$.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo de $x + 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Posición de gráfica	Abajo de eje x	Arriba de eje x	Abajo de eje x	Arriba de eje x

Figura 8



Por consulta del signo de $f(x)$ en la gráfica, concluimos que

$$f(x) > 0 \quad \text{si } x \text{ está en } (-2, -1) \cup (2, \infty)$$

y

$$f(x) < 0 \quad \text{si } x \text{ está en } (-\infty, -2) \cup (-1, 2).$$

El uso de esta información lleva al trazo de la figura 8. Para hallar los puntos extremos en la gráfica, sería necesario usar equipo de cómputo (como lo haremos en el ejemplo 6) o métodos desarrollados en cálculo.

La gráfica de toda función polinomial de grado 3 tiene un aspecto semejante al de la figura 8 o tiene una versión invertida de esa gráfica si el coeficiente de x^3 es negativo, pero a veces la gráfica puede tener sólo un punto de intersección con el eje x o la forma puede estar elongada, como en las figuras 1 y 2.

EJEMPLO 4 **Trazar la gráfica de una función polinomial de grado 4**

Sea $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$. Encuentre todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y toda x tal que $f(x) < 0$ y luego trace la figura de f.

SOLUCIÓN Empezamos por factorizar $f(x)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 4x^3 + 3x^2 && \text{enunciado} \\
&= x^2(x^2 - 4x + 3) && \text{factorizar } x^2 \\
&= x^2(x - 1)(x - 3) && \text{factorizar } x^2 - 4x + 3
\end{aligned}
$$

A continuación, construimos el diagrama de signos de la figura 9, donde las rectas verticales indican los ceros 0, 1 y 3 de los factores. Como el factor x^2 es siempre positivo si $x \neq 0$, no tiene efecto en el signo del producto y por tanto se puede omitir del diagrama.

Figura 9

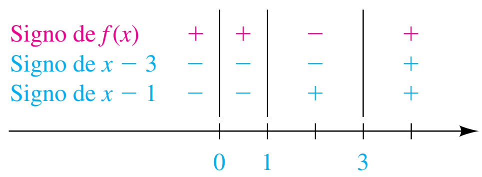
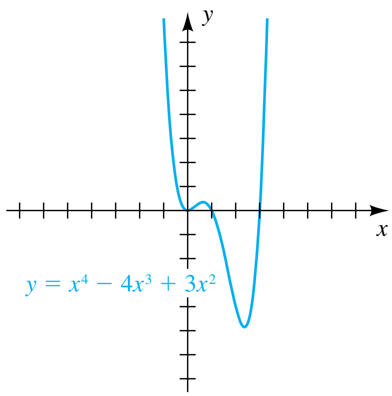


Figura 10



Por consulta del signo de $f(x)$ del diagrama, vemos que

$$f(x) > 0 \quad \text{si } x \text{ está en } (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$$

y

$$f(x) < 0 \quad \text{si } x \text{ está en } (1, 3).$$

Nótese que el signo de $f(x)$ no cambia en $x = 0$. El uso de estos datos lleva al trazo de la figura 10.

En el siguiente ejemplo construimos una gráfica de un polinomio conociendo sólo su signo.

EJEMPLO 5 **Trazar la gráfica de un polinomio conociendo su signo**

Dado el diagrama de signos de la figura 11, trace una posible gráfica del polinomio f.

Figura 11

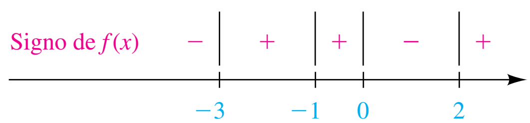
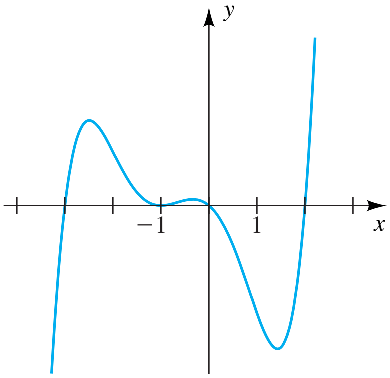


Figura 12



SOLUCIÓN Como el signo de $f(x)$ es *negativo* en el intervalo $(-\infty, -3)$, la gráfica de f debe estar *abajo* del eje x, como se ve en la figura 12. En el intervalo $(-3, -1)$, el signo de $f(x)$ es *positivo*, de modo que la gráfica de f está *arriba* del eje x.

El signo de $f(x)$ también es *positivo* en el siguiente intervalo, $(-1, 0)$. Por lo tanto, la gráfica de f debe tocar el eje x en el punto de intersección x -1 y luego permanecer *arriba* del eje x. (La gráfica de f es *tangente* al eje x en $x = -1$.)

En el intervalo $(0, 2)$, el signo de $f(x)$ es *negativo*, de modo que la gráfica de f está *abajo* del eje x. Por último, el signo de $f(x)$ es *positivo* en el intervalo $(2, \infty)$ y la gráfica de f está *arriba* del eje x.

En el último ejemplo usamos la función

$$f(x) = (x + 3)(x + 1)^2(x)(x - 2).$$

Nótese la forma en que la gráfica de f se relaciona con las soluciones de las siguientes desigualdades.

Desigualdad	Solución	Posición de la gráfica en relación al eje x
(1) $f(x) > 0$	$(-3, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, \infty)$	Arriba
(2) $f(x) \geq 0$	$[-3, 0] \cup [2, \infty)$	Abajo o sobre
(3) $f(x) < 0$	$(-\infty, -3) \cup (0, 2)$	Abajo
(4) $f(x) \leq 0$	$(-\infty, -3] \cup \{-1\} \cup [0, 2]$	Abajo o sobre

Nótese que todo número real debe estar en la solución ya sea de la desigualdad (1) o la desigualdad (4); lo mismo puede decirse para las desigualdades (2) y (3).

En el siguiente ejemplo usamos una calculadora graficadora para estimar coordenadas de puntos importantes en una gráfica.

EJEMPLO 6 **Estimar ceros y puntos extremos**

(a) Estime los ceros reales de $f(x) = x^3 - 4.6x^2 + 5.72x - 0.656$ a tres lugares decimales.

(b) Estime las coordenadas de los puntos extremos en la gráfica.

SOLUCIÓN

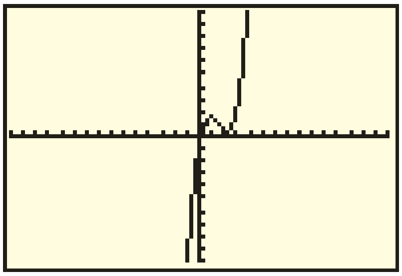
(a) Asignamos $f(x)$ a Y_1 y usamos una pantalla estándar para obtener un trazo semejante al de la figura 13(a). Como todas las raíces reales parecen estar entre 0 y 3, hagamos de nuevo la gráfica usando la pantalla $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$. Esto nos da una pantalla semejante a la de la figura 13(b), que muestra que hay sólo

(continúa)

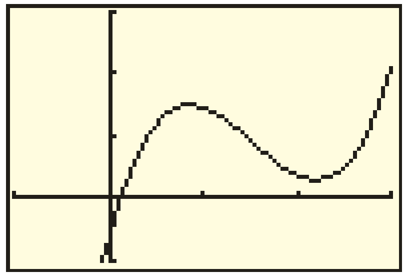
un punto de intersección con el eje x y por tanto una sola raíz. Usando un cero o función de raíz, estimamos el cero real como 0.127.

Figura 13

(a) $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$



(b) $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$



(b) Con el uso de la función "maximum", estimamos el punto alto y es (0.867, 1.497) y con la función "minimum", estimamos el punto bajo y es (2.200,0.312).

En la sección 2.7 resolvimos desigualdades semejantes a la del siguiente ejemplo, pero nos apoyamos en gran medida en el hecho de que podíamos de algún modo factorizar la expresión. Ahora usamos una calculadora graficadora para resolver una desigualdad que contiene una expresión (un polinomio cúbico) que no se factoriza fácilmente.

EJEMPLO 7 **Resolver gráficamente una desigualdad**

Estime las soluciones de la desigualdad

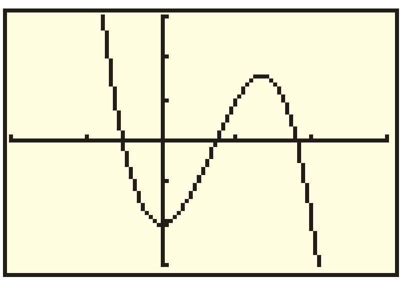
$$6x^2 - 3x^3 < 2.$$

SOLUCIÓN Restemos 2 de ambos lados y consideremos la desigualdad equivalente

$$6x^2 - 3x^3 - 2 < 0.$$

Figura 14

$[-2, 3]$ por $[-3, 3]$



Asignamos $6x^2 - 3x^3 - 2$ a Y_1 y usamos la pantalla $[-2, 3]$ por $[-3, 3]$ para obtener una imagen semejante a la figura 14. Vemos que hay tres puntos de intersección con el eje x. Si los denotamos por x_1, x_2 y x_3 (con $x_1 < x_2 < x_3$), entonces las soluciones a la desigualdad están dadas por

$$(x_1, x_2) \cup (x_3, \infty),$$

porque éstos son los intervalos donde Y_1 es menor a 0 (la gráfica está abajo del eje x). Usando una función cero o root para cada punto de cruce con el eje x, encontramos que

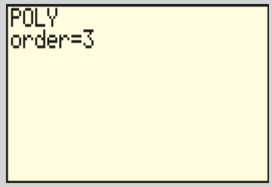
$$x_1 \approx -0.515, \qquad x_2 \approx 0.722, \qquad x_3 \approx 1.793.$$

Uso de la función TI-86 POLY

La TI-86 tiene una función especial POLY que calcula los ceros de un polinomio. Apliquemos esta función al polinomio $6x^2 - 3x^3 - 2$ del ejemplo 7, que se puede escribir como $-3x^3 + 6x^2 + 0x + -2$.

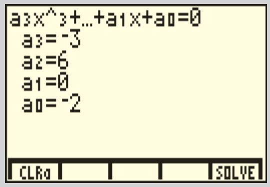
Introduzca el grado del polinomio.

2nd POLY 3 ENTER



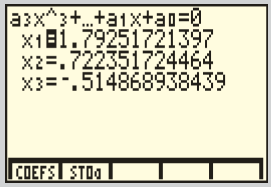
Introduzca los coeficientes del polinomio.

−3 ▽ 6 ▽ 0 ▽ −2



Calcule los ceros del polinomio.

SOLVE(F5)



4.1 *Ejercicios*

Ejer. 1-4: Trace la gráfica de *f* para el valor indicado de *c* o *a*.

1 $f(x) = 2x^3 + c$

(a) $c = 3$ (b) $c = -3$

2 $f(x) = -2x^3 + c$

(a) $c = -2$ (b) $c = 2$

3 $f(x) = ax^3 + 2$

(a) $a = 2$ (b) $a = -\frac{1}{3}$

4 $f(x) = ax^3 - 3$

(a) $a = -2$ (b) $a = \frac{1}{4}$

Ejer. 5-10: Use el teorema de valor intermedio para demostrar que *f* tiene un cero entre *a* y *b*.

5 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2;$ $a = 3,$ $b = 4$

6 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3;$ $a = -3,$ $b = -2$

7 $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x + 1;$ $a = 2,$ $b = 3$

8 $f(x) = 2x^4 + 3x - 2;$ $a = \frac{1}{2},$ $b = \frac{3}{4}$

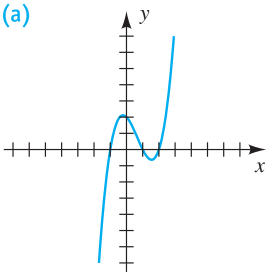
9 $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x + 1;$ $a = -\frac{1}{2},$ $b = -1$

10 $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 9x - 6;$ $a = 3,$ $b = 4$

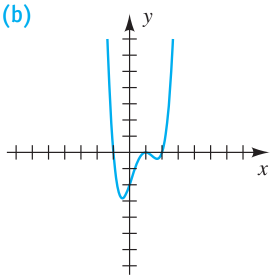
Ejer. 11-12: Relacione cada gráfica con una ecuación.

11

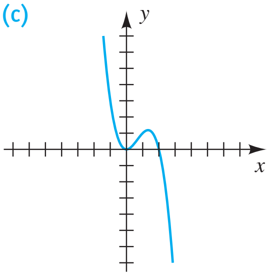
(a)



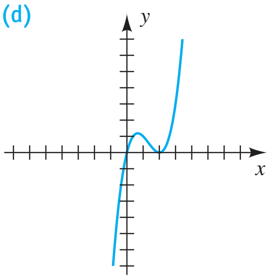
(b)



(c)



(d)



(A) $f(x) = x(x - 2)^2$

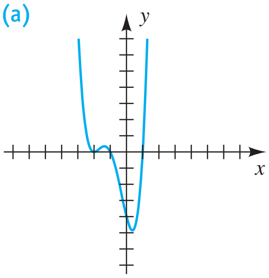
(B) $f(x) = -x^2(x - 2)$

(C) $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$

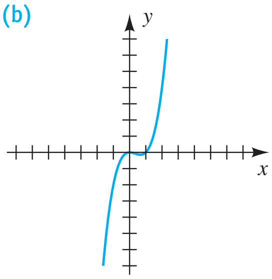
(D) $f(x) = (x + 1)(x - 1)^2(x - 2)$

12

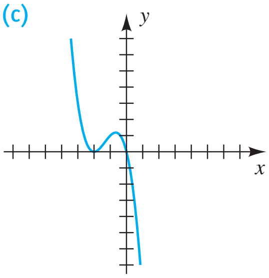
(a)



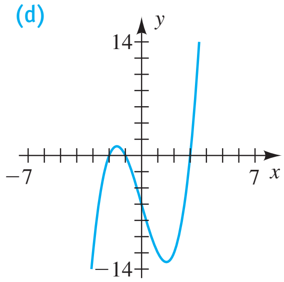
(b)



(c)



(d)



(A) $f(x) = x^2(x - 1)$

(B) $f(x) = -x(x + 2)^2$

(C) $f(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 3)$

(D) $f(x) = (x + 2)^2(x + 1)(x - 1)$

Ejer. 13-28: Encuentre todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y toda x tal que $f(x) < 0$, y trace la gráfica de f.

13 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2$

14 $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 - 3$

15 $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + 1$

16 $f(x) = x^5 + 1$

17 $f(x) = x^4 - 4x^2$

18 $f(x) = 9x - x^3$

19 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 10x$

20 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2$

21 $f(x) = \frac{1}{6}(x + 2)(x - 3)(x - 4)$

22 $f(x) = -\frac{1}{8}(x + 4)(x - 2)(x - 6)$

23 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

24 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$

25 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

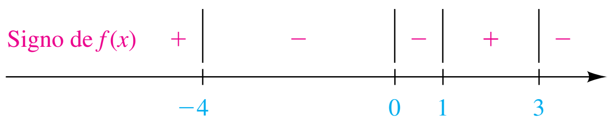
26 $f(x) = -x^4 + 12x^2 - 27$

27 $f(x) = x^2(x + 2)(x - 1)^2(x - 2)$

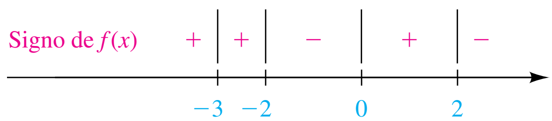
28 $f(x) = x^3(x + 1)^2(x - 2)(x - 4)$

Ejer. 29-30: Trace la gráfica de un polinomio dado el diagrama de signos.

29



30



31 (a) Trace una gráfica de

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c),$$

donde $a < 0 < b < c$.

(b) ¿Cuál es la intersección con el eje y?

nario está dada por $d = cs^2(3L - s)$ para $0 \leq s \leq L$, donde L es la longitud de la tabla y c es una constante positiva que depende del peso del clavadista y de las propiedades físicas de la tabla (vea la figura). Suponga que la tabla mide 10 pies de largo.

(a) Si la flexión en el extremo de la tabla es 1 pie, encuentre c.

(b) Demuestre que la flexión es $\frac{1}{2}$ pie entre $s = 6.5$ y $s = 6.6$.

45 **Población de venados** Un rebaño de 100 venados se introduce en una pequeña isla. Al principio el rebaño aumenta rápidamente, pero al final los recursos se consumen y la población disminuye. Suponga que el número $N(t)$ de venados después de t años está dado por $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$, donde $t > 0$.

(a) Determine los valores de t para los cuales $N(t) > 0$ y trace la gráfica de N.

(b) ¿La población se extingue? Si es así, ¿cuándo?

46 **Población de venados** Consulte el ejercicio 45. Se puede demostrar por medio de cálculo que la rapidez R (en venados por año) con la que cambia la población de venados, en el tiempo t, está dada por $R = -4t^3 + 42t$.

(a) ¿Cuándo deja de crecer la población?

(b) Determine los valores positivos de t para los cuales $R > 0$.

47 (a) Construya una tabla que contenga los valores de los polinomios de cuarto grado

$$f(x) = 2x^4,$$
$$g(x) = 2x^4 - 5x^2 + 1,$$
$$h(x) = 2x^4 + 5x^2 - 1,$$

y

$$k(x) = 2x^4 - x^3 + 2x,$$

cuando $x = \pm 20, \pm 40$, y ± 60.

(b) Cuando $|x|$ se hace grande, ¿cómo se comparan los valores para cada función?

(c) ¿Cuál término tiene la mayor influencia sobre el valor de cada función cuando $|x|$ es grande?

48 (a) Grafique los polinomios cúbicos

$$f(x) = -3x^3,$$
$$g(x) = -3x^3 - x^2 + 1,$$
$$h(x) = -3x^3 + x^2 - 1,$$

y

$$k(x) = -3x^3 - 2x^2 + 2x$$

en el mismo plano de coordenadas, usando cada una de las siguientes pantallas:

(1) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
(2) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(3) $[-50, 50, 10]$ por $[-5000, 5000, 1000]$
(4) $[-100, 100, 10]$ por $[-5 \times 10^5, 5 \times 10^5, 10^5]$

(b) Cuando la pantalla aumenta de tamaño, ¿cómo se comparan las gráficas de las cuatro funciones?

(c) ¿Cuál término tiene la mayor influencia sobre el valor de cada función cuando $|x|$ es grande?

49 (a) Grafique cada uno de los siguientes polinomios f cúbicos en la pantalla $[-9, 9]$ por $[-6, 6]$.

(1) $f(x) = x^3 - x + 1$
(2) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x - 1$
(3) $f(x) = 0.1x^3 - 1$
(4) $f(x) = -x^3 + 4x + 2$

(b) Analice la forma de la gráfica de f cuando $|x|$ se hace grande.

(c) Haga una generalización acerca del comportamiento final de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

50 (a) Grafique cada uno de los siguientes polinomios f de cuarto grado en la pantalla $[-9, 9]$ por $[-6, 6]$.

(1) $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 6x - 3$
(2) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$
(3) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - x + 1$
(4) $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{7}{2}x + 3$

(b) Analice la forma de la gráfica de f cuando $|x|$ se hace grande.

(c) Haga una generalización acerca del comportamiento final de la función $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Ejer. 51-54: Grafique f y estime sus ceros.

51 $f(x) = x^3 + 0.2x^2 - 2.6x + 1.1$

52 $f(x) = -x^4 + 0.1x^3 + 4x^2 - 0.5x - 3$

53 $f(x) = x^3 - 3x + 1$

54 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$