

2. ECUACIONES LINEALES O DE PRIMER GRADO

El objetivo de esta unidad es repasar las ecuaciones lineales o de primer grado y resolver ecuaciones lineales por medio de propiedades vistas en la Unidad N° 1. También resolveremos problemas donde se plantean ecuaciones lineales con una incógnita. Para ello veremos ejemplos de ecuaciones, cómo resolverlas y cómo traducirlas al lenguaje simbólico. En próximas unidades analizaremos cómo resolver ecuaciones de mayor grado.

Comenzamos con la siguiente situación:

En un espectáculo el mago realiza el siguiente truco

- _ Piensa un número...*
- _ Súmale 15 al número pensado...*
- _ Multiplica por 3 el resultado...*
- _ Al resultado réstale 9 ...*
- _ Divide por 3...*
- _ Resta 8...*
- _ Dime cuál es el resultado obtenido y te diré que número pensaste. El espectador dice:*
- _ 32*

Instantáneamente el mago afirma con solvencia:

- _ El número que pensaste fue el 28.*

¿Cómo lo hizo?

Trataremos a lo largo de esta unidad de resolver situaciones problemáticas como la anterior por medio de ecuaciones lineales con una incógnita.

Analicemos las siguientes igualdades:

$$3 + 4 + 2 = 7 + 2$$

$$3 + 2 = 5$$

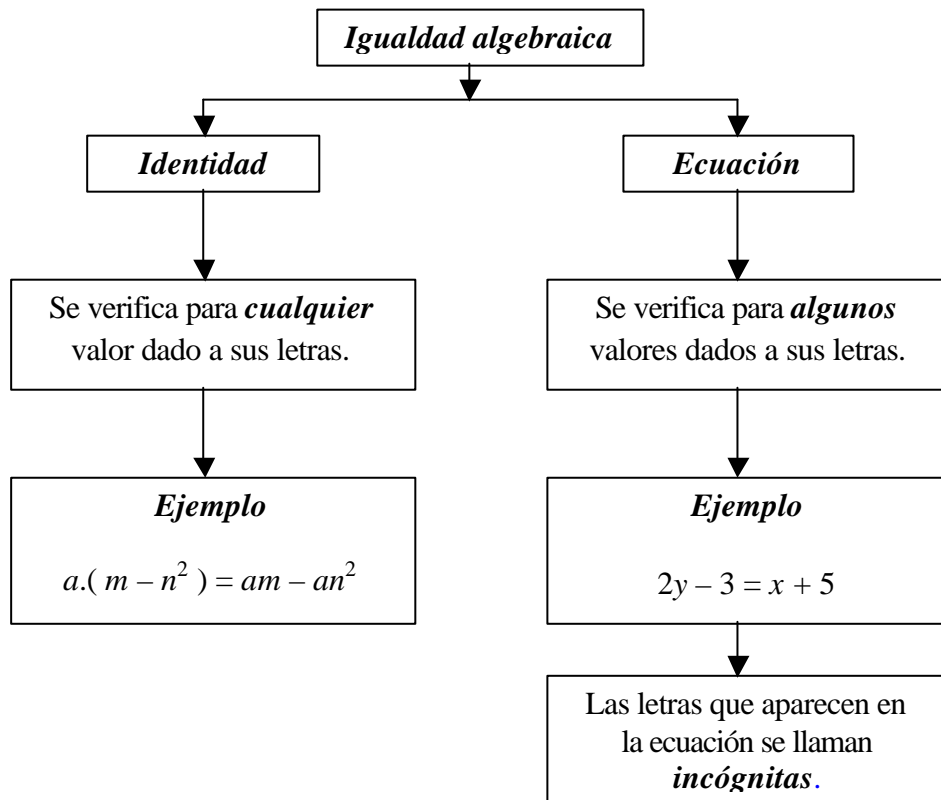
Estas son **igualdades numéricas**,

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$a^2 - 1 = 0$$

mientras que éstas son **igualdades algebraicas o literales**

En el siguiente cuadro podemos ver una clasificación de las igualdades algebraicas teniendo en cuenta si se verifica para algunos ó todos los números reales. A continuación nos dedicaremos a estudiar las ecuaciones lineales.



En el caso de las igualdades algebraicas, éstas se verifican siempre pues por ejemplo

$$a.(m - n^2) = am - an^2$$

es la propiedad distributiva. Cualquier valor de a , m y n es solución.

Por ejemplo para $a = 2$, $m = 3$, $n = -1$ tenemos

$$2(3 - (-1)^2) = 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)^2$$

$$4 = 4.$$

En el ejemplo $2y - 3 = x + 5$, los valores $y = 3$, $x = -2$ son soluciones, pues

$$2 \cdot 3 - 3 = -2 + 5$$

mientras que $y = 3$, $x = 4$ **no** es solución pues

$$2 \cdot 3 - 3 = 3 \neq 4 + 5 = 9.$$

Las *soluciones* de una ecuación son los valores que al sustituirlos en las incógnitas hacen cierta la igualdad.

Ecuación lineal

Se denominan *ecuaciones lineales o de primer grado* a las igualdades algebraicas con incógnitas de exponente 1.



Ejemplos.

Las primeras cuatro ecuaciones son ejemplos de ecuaciones lineales o de primer grado.

Las ecuaciones 1, 2 y 3 tienen una incógnita y la ecuación $x + y = 4$ tiene dos incógnitas.

1. $2x + 3 = 5$
2. $3x - x = 2x$
3. $x + 5 = 5$
4. $x + y = 24$



Para pensar...

Estas no son ecuaciones lineales.
¿Por qué?

1. $t^2 - 3t + 1 = 0$
2. $x \cdot y = 24$
3. $\cos x = 1$
4. $16 = 2^x$

**Ejemplos:**

Resolvamos las siguientes ecuaciones

a) $2x + 3 = 5$

Aplicando propiedades

$$2x + 3 + (-3) = 5$$

$$2x = 2$$

$$\frac{1}{2} 2x = \frac{1}{2} 2$$

$$x = 1$$

Verificación:

$$2x + 3 = 5$$

$$2 \cdot 1 + 3 = 5$$

$$2 + 3 = 5$$

$$5 = 5$$

Se puede resolver "despejando".

$$2x = 5 - 3$$

$$2x = 2$$

$$x = \frac{5-3}{2}$$

$$x = 1$$

Una vez resuelta la ecuación es conveniente verificar que el valor obtenido es la solución de la ecuación. Para ello, debemos sustituir el valor hallado en la ecuación.

La ecuación $2x + 3 = 5$ tiene ***solución única*** $x = 1$.

b) $x + y = 24$

$$1 + 23 = 24$$

$$-5 + 29 = 24$$

$$24 + 0 = 24$$

$$\frac{1}{2} + \frac{47}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

$$x = 1, y = 23$$

$$x = -5, y = 29$$

$$x = 24, y = 0$$

$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{47}{2}$$

Es una ecuación que tiene infinitas soluciones, pues se verifica para infinitas parejas de números. Por ejemplo:

c) $3x - x = 2x$

**Para pensar....**

En este ejemplo observamos que hemos obtenido

$$0 \cdot x = 0$$

¿Cuántas soluciones tiene esta igualdad?

$$3x - x = 2x$$

$$2x = 2x$$

$$2x - 2x = 0$$

$$0 \cdot x = 0$$

d) $x + 5 = x$



Para pensar.....

En este ejemplo obtenemos
 $5 = 0 \cdot x$
 ¿Cuál es el número de soluciones de esta igualdad?

$$\begin{aligned} x + 5 &= x \\ 5 &= x - x \\ 5 &= 0 \cdot x \\ 5 &= 0 \end{aligned}$$

e) $\frac{x+1}{5} = \frac{3x-9}{3}$

La solución es
 $x = 4$
 que pertenece al conjunto de los números reales;
 por lo tanto esta ecuación tiene solución en \mathbb{R} .



Atención
No olvides nunca verificar.

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{5} &= \frac{3x-9}{3} \\ 3(x+1) &= 5(3x-9) \\ 3x+3 &= 15x-45 \\ 3+45 &= 15x-3x \\ 48 &= 12x \\ x &= 4 \end{aligned}$$

f) $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{x}{18} = 578$

Recuerda que...

para sumar o restar fracciones de distinto denominador, primero debes hallar un múltiplo común entre los denominadores.
 Así, 36 es el mínimo común múltiplo entre 4, 6 y 18.

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{x}{18} &= 578 \\ \frac{9x+6x+2x}{36} &= 578 \\ 17x &= 20.808 \\ x &= 1.224 \end{aligned}$$

Ahora trataremos de resolver problemas utilizando ecuaciones lineales. Para ello podemos tener en cuenta los siguientes pasos:

Pasos a tener en cuenta

- *lectura comprensiva del enunciado;*
- *traducción al lenguaje simbólico;*
- *expresión de la ecuación correspondiente;*
- *resolución de la ecuación;*
- *verificación del resultado obtenido.*

Ahora veremos cómo resolver un problema paso a paso.

Volvemos al problema del mago del inicio de esta unidad.

En un espectáculo el mago realiza el siguiente truco.

- _ Piensa un número...
- _ Súmale 15 al número pensado...
- _ Multiplica por 3 el resultado...
- _ Al resultado réstale 9 ...
- _ Divide por 3...
- _ Resta 8...
- _ Dime cuál es el resultado obtenido y te diré que número pensaste. El espectador dice:
- _ 32

Instantáneamente el mago afirma con solvencia:

- _ El número que pensaste fue el 28.

¿Cómo lo hizo?

<ul style="list-style-type: none"> • traducción al lenguaje simbólico 	<p>Piensa un número $\rightarrow x$</p> <p>Súmale 15 $\textcircled{R} x + 15$</p> <p>Multiplica por 3 el resultado $\textcircled{R} 3(x + 15)$</p> <p>Al resultado réstale 9 $\textcircled{R} 3(x + 15) - 9$</p> <p>Divide por 3 $\textcircled{R} (3(x + 15) - 9):3$</p> <p>Resta 8 $\textcircled{R} (3(x + 15) - 9):3 - 9$</p> <p>El espectador dice $\textcircled{R} 32$</p>
<ul style="list-style-type: none"> • expresión de la ecuación correspondiente 	$(3x + 45 - 9):3 - 8 = 32$
<ul style="list-style-type: none"> • resolución de la ecuación 	$(3x + 45 - 9):3 - 8 = 32$ $x + 4 = 32$ $x = 28$
<ul style="list-style-type: none"> • verificación del resultado obtenido 	$(3 \cdot 28 + 45 - 9):3 - 8 = 32$



Ejemplo:

De un depósito lleno de líquido se saca la cuarta parte del contenido; después la mitad del resto y quedan aún 1500 litros. Calculemos la capacidad del depósito.

- traducción al lenguaje simbólico

capacidad del depósito	Ⓜ	x
un cuarto del contenido	Ⓜ	$\frac{1}{4}x$
mitad del resto	Ⓜ	$\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}x\right)$
quedan aún	Ⓜ	1500 litros

- expresión de la ecuación correspondiente

$$x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x\right) + 1500$$

- resolución de la ecuación

$$x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x + 1500$$

$$x - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}x = 1500$$

$$\frac{8x - 2x - 3x}{8} = 1500$$

$$\frac{3}{8}x = 1500$$

$$x = 1500 : \frac{3}{8}$$

$$x = 4000$$

- verificación del resultado obtenido

$$x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x + 1500$$

$$4000 = \frac{1}{4}4000 + \frac{3}{8}4000 + 1500$$

$$4000 = 4000$$

Veamos el siguiente cuadro que muestra algunos ejemplos clásicos de cómo pasar del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico que pueden aparecer en algunos problemas que involucren ecuaciones lineales.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
La suma de un número y su consecutivo	$x + (x + 1)$
Un número par	$2a$
El siguiente de un número par	$2x + 1$
La suma de tres números consecutivos	$x + (x + 1) + (x + 2)$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$
La tercera parte de la diferencia entre dos números	$\frac{a - b}{3}$
El perímetro de un rectángulo	$2l + 2b$

En resumen, podemos concluir que una ecuación lineal o de primer grado puede tener :

<p><i>La ecuación $2x + 8 = 9$ tiene solución única $x = \frac{1}{2}$</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • solución única
<p><i>La ecuación $x + 5 = 5$, no tiene solución, pues es imposible que sumando 5 a un número obtengamos ese mismo número.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • ninguna solución
<p><i>La ecuación $3x - x = 2x$ tiene infinitas soluciones, pues es válida la identidad para cualquier valor de x.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • infinitas soluciones



Actividades de Aprendizaje

1) Expresar simbólicamente la ecuación correspondiente:

- a) Un número más su quinta parte es 12.
- b) Un poste tiene bajo tierra $\frac{2}{7}$ de su longitud y la parte emergente mide 8 metros.
- c) El perímetro de un cuadrado es de 12 m.
- d) En una biblioteca hay 23 libros distribuidos en dos estantes, en el de abajo hay 7 libros menos que en el de arriba.

2) Resolver las siguientes ecuaciones lineales en \mathbb{R} :

a) $x + 9x = 90$

b) $-2x + 1 = 3$

c) $2(3x - 2) - (x - 3) = 8$

d) $x - 1 - \frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{3} = 0$

e) $21 - 7x = 41x - 123$

f) $\frac{1}{6}(a + 8) = \frac{3-2a}{4} + 2a - \frac{73}{12}$

g) $\frac{3m-11}{20} - \frac{5m-1}{14} = \frac{m-7}{10} - \frac{5m-6}{21}$

h) $\frac{2t}{15} - \frac{3t-5}{20} = \frac{t}{5} - 3$

i) $5(20 - x) = 4 \cdot (2x - 1)$

k) $\frac{z-1}{3} - \frac{z+3}{2} = 5z$

3) Un número más su quinta parte es 12. Calcular dicho número.

4) La suma de dos números consecutivos es 21. ¿Cuáles son dichos números?.

5) Un número es igual al doble de su consecutivo. ¿Cuál es dicho número?.

6) La suma de tres múltiplos de 3 consecutivos es 63. Calcular dichos números.

7) El perímetro de un rectángulo es 216m. Si el doble del ancho excede en 7 m a los tres cuartos del largo. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?.

8) El perímetro de un triángulo isósceles es 180 cm. Cada uno de los lados iguales es 30 cm mayor que la base. ¿Cuál es la longitud de cada lado?.

9) Un niño tiene el triple de la edad que tenía hace 8 años. ¿Qué edad tiene ahora?.

10) Un padre tiene 42 años y su hijo 10 años. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el triple de la edad del hijo?.

11) De una cierta clase de vino que contiene 12% de alcohol, se han obtenido por destilación 67,68 litros de alcohol. ¿Cuál fue la cantidad de vino empleado?.

12) El jueves, Leticia invirtió el 40% de sus ahorros en ropa. El viernes, gastó las dos terceras partes del dinero que le quedaba en un libro para su hermano, y aún tiene \$120.

b) ¿Cuánto dinero tenía ahorrado Leticia?.

c) ¿Es cierto que gastó lo mismo en ropa que en el libro para su hermano?.

13) Un hombre repartió su herencia del siguiente modo: a su hijo mayor le dejó la mitad, al segundo la tercera parte del resto, al tercero la sexta parte del resto y al cuarto \$1.000.000. ¿Cuál era el valor de la herencia?.

14) Un comerciante hace un testamento de la siguiente forma: dos tercios a su único hijo; un quinto, a una familia muy amiga, y los 49000 restantes, a una institución de beneficencia. ¿A cuánto asciende el total de la herencia?

15) En una reunión hay el doble número de mujeres que de hombres y el triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Hallar el número de hombres, mujeres y niños que hay en la reunión si el total es de 156 personas.

16) Durante su primera hora de trabajo, el dueño de un puesto de revistas vendió la cuarta parte de los diarios que tenía y, durante la segunda hora, vendió la sexta parte de los que le quedaban. Contó los ejemplares y notó que aún había 25. ¿Cuántos diarios tenía al principio?

17) Ana, Vivi y Carla comparten un departamento y las tres aportaron su último sueldo a un fondo común, que fue de \$3600. Ana gana las dos terceras partes del sueldo de Vivi, y Carla gana la mitad del sueldo de Ana. ¿Cuál fue el último sueldo de cada una?. ¿Es cierto que Vivi cobró tanto como Ana y Carla juntas?

18) Una compañía de aviación divide a los pasajeros en tres categorías. En uno de sus aviones, la cantidad de asientos de primera clase es la octava parte del total; la categoría ejecutiva tiene una vez y media la cantidad de asientos que primera clase, y hay 165 asientos de clase turista. ¿ Cuántos asientos tiene ese avión ?