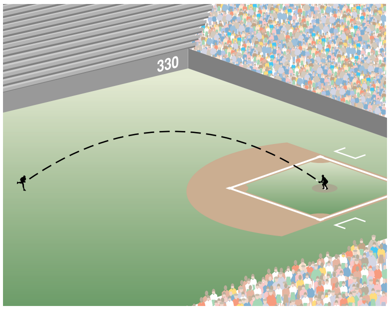
3.6

Funciones cuadráticas

Figura 1



Si $a \neq 0$, entonces la gráfica de $y = ax^2$ es una parábola con vértice en el origen $(0, 0)$, un eje vertical, que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$ (vea, por ejemplo, las figuras 4 y 5 de la Sección 3.5). En esta sección demostramos que la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

se puede obtener por desplazamientos vertical y/u horizontal de la gráfica de $y = ax^2$ y por tanto también es una parábola. Una aplicación importante de estas ecuaciones es describir la trayectoria o recorrido, de un objeto cerca de la superficie de la Tierra cuando la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitacional. Para ilustrar, si un "jardinero" de un equipo de beisbol lanza una pelota hacia el cuadro, como se ilustra en la figura 1 y si la resistencia del aire y otras fuerzas externas son insignificantes, entonces la trayectoria de la pelota es una parábola. Si se introducen ejes de coordenadas apropiados, entonces la trayectoria coincide con la gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ para alguna a, b y c. A la función determinada por esta ecuación se le denomina *función cuadrática.*

Definición de función cuadrática	Una función f es **función cuadrática** si $$f(x) = ax^2 + bx + c,$$ donde a, b, y c son números reales con $a \neq 0$.

Figura 2

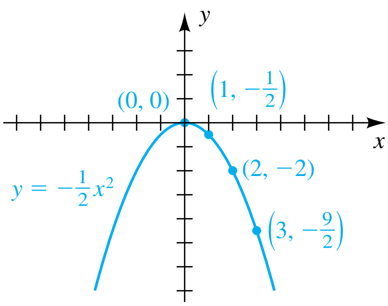
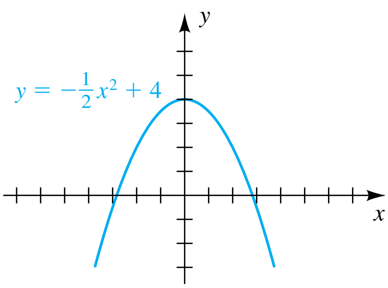


Figura 3



Si $b = c = 0$ en la definición precedente, entonces $f(x) = ax^2$, y la gráfica es una parábola con vértice en el origen. Si $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces

$$f(x) = ax^2 + c,$$

y, de nuestra discusión de desplazamientos verticales de la sección 3.5, la gráfica es una parábola con vértice en el punto $(0, c)$ sobre el eje y. El siguiente ejemplo contiene ilustraciones específicas.

EJEMPLO 1 **Trazar la gráfica de una función cuadrática**

Trace la gráfica de f si

(a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ **(b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

SOLUCIÓN

(a) Como f es par, la gráfica de f $\left(\text{es decir, de } y = -\frac{1}{2}x^2\right)$ es simétrica con respecto al eje y. Es semejante en forma pero más ancha que la parábola $y = -x^2$, trazada en la figura 5 de la sección 3.5. Varios puntos sobre la gráfica son $(0, 0)$, $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, $(2, -2)$ y $\left(3, -\frac{9}{2}\right)$. Localizando los puntos y usando simetría, obtenemos el trazo de la figura 2.

(b) Para hallar la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$, desplazamos la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ hacia arriba una distancia 4, obteniendo el trazo de la figura 3.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $b \neq 0$, entonces, al completar el cuadrado, podemos cambiar la forma a

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

para algunos números reales h y k. Esta técnica se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 **Expresar una función cuadrática como $f(x) = a(x - h)^2 + k$**

Si $f(x) = 3x^2 + 24x + 50$, exprese $f(x)$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

SOLUCIÓN 1 Antes de completar el cuadrado, *es esencial que factoricemos el coeficiente de x^2 de los dos primeros términos de $f(x)$*, como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 && \text{enunciado} \\ &= 3(x^2 + 8x + \quad) + 50 && \text{factorizar 3 de } 3x^2 + 24x \end{aligned}$$

Ahora completamos el cuadrado para la expresión $x^2 + 8x$ dentro de los paréntesis al sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir, $\left(\frac{8}{2}\right)^2$ o sea 16. No obstante, si sumamos 16 a la expresión dentro de los paréntesis, entonces, debido al factor 3, estamos en realidad sumando 48 a $f(x)$. Por lo tanto, debemos compensar al restar 48:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 8x + \quad) + 50 && \text{enunciado} \\ &= 3(x^2 + 8x + 16) + (50 - 48) && \text{complete el cuadrado para } x^2 + 8x \\ &= 3(x + 4)^2 + 2 && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

La última expresión tiene la forma $a(x - h)^2 + k$ con $a = 3$, $h = -4$, y $k = 2$

SOLUCIÓN 2 Empezamos por dividir ambos lados entre el coeficiente de x^2.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 && \text{enunciado} \\ \frac{f(x)}{3} &= x^2 + 8x + \frac{50}{3} && \text{divida entre 3} \\ &= x^2 + 8x \underline{+\ 16} + \frac{50}{3} \underline{-16} && \text{sume y reste 16, el número que completa el cuadrado para } x^2 + 8x \\ &= (x + 4)^2 + \frac{2}{3} && \text{ecuación equivalente} \\ f(x) &= 3(x + 4)^2 + 2 && \text{multiplique por 3} \end{aligned}$$

$\left[\frac{1}{2}(8)\right]^2 = 16 \rightarrow$

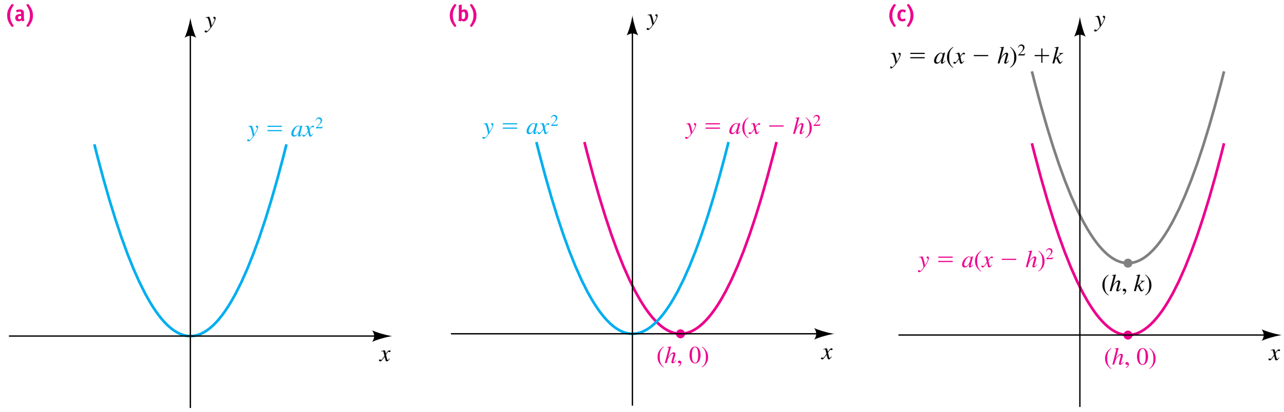
Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces, al completar el cuadrado como en el ejemplo 2, vemos que la gráfica de f es la misma que la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = a(x - h)^2 + k.$$

La gráfica de esta ecuación se puede obtener de la gráfica de $y = ax^2$ que se ve en la figura 4(a) por medio de un desplazamiento horizontal y uno vertical, como sigue. Primero, como en la figura 4(b), obtenemos la gráfica de $y = a(x - h)^2$

al desplazar la gráfica de $y = ax^2$ ya sea a la izquierda o a la derecha, dependiendo del signo de h (la figura ilustra el caso con $h > 0$). A continuación, como en la figura 4(c), desplazamos la gráfica en (b) verticalmente una distancia $|k|$ (la figura ilustra el caso con $k > 0$). Se deduce que *la gráfica de una función cuadrática es una parábola con un eje vertical.*

Figura 4



El trazo en la figura 4(c) ilustra una posible gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Si $a > 0$, el punto (h, k) es el punto más bajo en la parábola y la función f tiene un **valor mínimo** $f(h) = k$. Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y el punto (h, k) es el punto más alto en la parábola. En este caso, la función f tiene un **valor máximo** $f(h) = k$.

Hemos obtenido el resultado siguiente.

Ecuación estándar de una parábola con eje vertical

La gráfica de la ecuación

$$y = a(x - h)^2 + k$$

para $a \neq 0$ es una parábola que tiene vértice $V(h, k)$ y un eje vertical. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

Por comodidad, con frecuencia nos referimos a la *parábola* $y = ax^2 + bx + c$ cuando consideramos la gráfica de esta ecuación.

EJEMPLO 3 Hallar una ecuación estándar de una parábola

Exprese $y = 2x^2 - 6x + 4$ como ecuación estándar de una parábola con eje vertical. Encuentre el vértice y trace la gráfica.

Figura 5

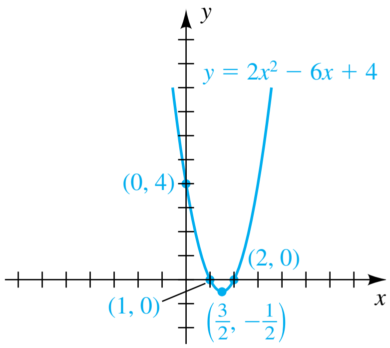


Figura 6

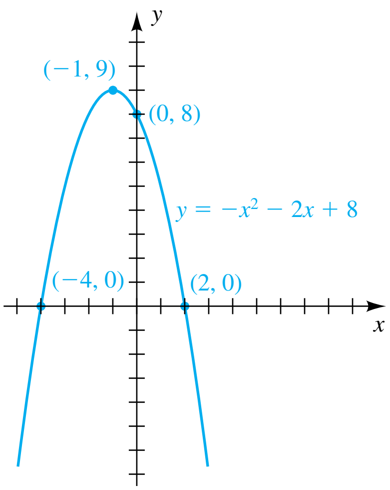
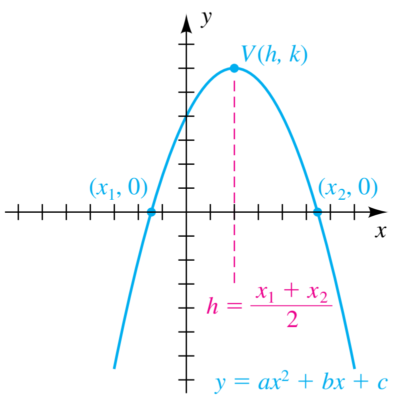


Figura 7



SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 6x + 4 && \text{enunciado} \\ &= 2(x^2 - 3x + \quad) + 4 && \text{factorice 2 de } 2x^2 - 6x \\ &= 2\left(x^2 - 3x + \tfrac{9}{4}\right) + \left(4 - \tfrac{9}{2}\right) && \text{complete el cuadrado para } x^2 - 3x \\ &= 2\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2} && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

La última ecuación tiene la forma de la ecuación estándar de una parábola con $a = 2$, $h = \frac{3}{2}$, y $k = -\frac{1}{2}$. En consecuencia, el vértice $V(h, k)$ de la parábola es $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Como $a = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba.

Para hallar el cruce con el eje y de la gráfica de $y = 2x^2 - 6x + 4$, hacemos $x = 0$ y obtenemos $y = 4$. Para hallar los cruces con el eje x, hacemos $y = 0$ y resolvemos la ecuación $2x^2 - 6x + 4 = 0$ o la ecuación equivalente $2(x - 1)(x - 2) = 0$, obteniendo $x = 1$ y $x = 2$. Localizar el vértice y usar los puntos de cruce con los ejes x y y dará suficientes puntos para un trazo de forma razonablemente precisa (vea la figura 5).

EJEMPLO 4 **Hallar una ecuación estándar de una parábola**

Exprese $y = -x^2 - 2x + 8$ como ecuación estándar de una parábola con eje vertical. Encuentre el vértice y trace la gráfica.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 2x + 8 && \text{enunciado} \\ &= -(x^2 + 2x + \quad) + 8 && \text{factorice } -1 \text{ de } -x^2 - 2x \\ &= -(x^2 + 2x + 1) + (8 + 1) && \text{complete el cuadrado para } x^2 + 2x \\ &= -(x + 1)^2 + 9 && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

Ésta es la ecuación estándar de una parábola con $h = -1$, $k = 9$, y por tanto el vértice es $(-1, 9)$. Como $a = -1 < 0$, la parábola abre hacia abajo.

El punto de cruce con el eje y de la gráfica de $y = -x^2 - 2x + 8$ es el término constante, 8. Para hallar los cruces con el eje x, resolvemos $-x^2 - 2x + 8 = 0$ o bien, lo que es equivalente, $x^2 + 2x - 8 = 0$. La factorización nos da $(x + 4)(x - 2) = 0$ y por tanto los puntos de cruce son $x = -4$ y $x = 2$. Usando esta información nos da el trazo de la figura 6.

Si una parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene cruces x_1 y x_2 con el eje x, como se ilustra en la figura 7 para el caso $a < 0$, entonces el eje de la parábola es la recta vertical $x = (x_1 + x_2)/2$ que pasa por el punto medio de $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$. Por tanto, la coordenada h sobre el eje x del vértice (h, k) es $h = (x_1 + x_2)/2$. Algunos casos especiales se ilustran en las figuras 5 y 6.

En el siguiente ejemplo encontramos la ecuación de una parábola a partir de los datos dados.

EJEMPLO 5 **Hallar la ecuación de una parábola con un vértice dado**

Encuentre la ecuación de una parábola que tiene vértice $V(2, 3)$ y un eje vertical y pasa por el punto $(5, 1)$.

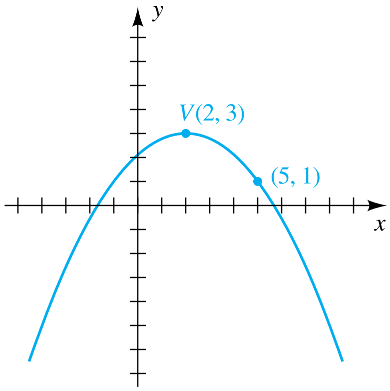


Figura 8

SOLUCIÓN La figura 8 muestra el vértice V, el punto (5, 1), y una posible posición de la parábola. Usando la ecuación estándar

$$y = a(x - h)^2 + k$$

con $h = 2$ y $k = 3$ tendremos

$$y = a(x - 2)^2 + 3.$$

Para hallar a, usamos el hecho de que (5, 1) está en la parábola y por tanto es una solución de la última ecuación. Así,

$$1 = a(5 - 2)^2 + 3, \qquad \text{o} \qquad a = -\tfrac{2}{9}.$$

En consecuencia, la ecuación para la parábola es

$$y = -\tfrac{2}{9}(x - 2)^2 + 3.$$

El siguiente teorema nos da una fórmula sencilla para localizar el vértice de una parábola.

Teorema para localizar el vértice de una parábola

El vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene coordenada x

$$-\frac{b}{2a}.$$

PRUEBA Empecemos por escribir $y = ax^2 + bx + c$ como

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \qquad\right) + c.$$

Ahora completamos el cuadrado al sumar $\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$ a la expresión dentro de los paréntesis:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Nótese que si $b^2/(4a^2)$ se suma *dentro* del paréntesis, entonces, debido al factor a del *exterior*, en realidad hemos sumado $b^2/(4a)$ a y. Por tanto, debemos compensar al restar $b^2/(4a)$. La última ecuación se puede escribir como

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Ésta es la ecuación de una parábola que tiene vértice (h, k) con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$.

No es necesario recordar la fórmula para la coordenada y del vértice de la parábola del resultado precedente. Una vez hallada la coordenada x, podemos calcular la coordenada y al sustituir $-b/(2a)$ por x en la ecuación de la parábola.

EJEMPLO 6 **Hallar el vértice de una parábola**

Encuentre el vértice de la parábola $y = 2x^2 - 6x + 4$.

SOLUCIÓN Consideramos esta parábola del ejemplo 3 y hallamos el vértice al completar el cuadrado. Usaremos la fórmula del vértice con $a = 2$ y $b = -6$, obteniendo la coordenada x

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

A continuación encontramos la coordenada y al sustituir $\frac{3}{2}$ por x en la ecuación dada:

$$y = 2\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\tfrac{3}{2}\right) + 4 = -\tfrac{1}{2}$$

Entonces, el vértice es $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (vea figura 5).

Como la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ para $a \neq 0$ es una parábola, podemos usar la fórmula del vértice para ayudar a encontrar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática. Específicamente, como la coordenada x del vértice V es $-b/(2a)$, la coordenada y de V es el valor de la función $f(-b/(2a))$. Además, como la parábola abre hacia abajo si $a < 0$ y hacia arriba si $a > 0$, el valor de esta función es el valor máximo o mínimo, respectivamente, de f. Podemos resumir estos datos como sigue.

Teorema sobre el valor máximo o mínimo de una función cuadrática

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, entonces $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ es

(1) el valor máximo de f si $a < 0$

(2) el valor mínimo de f si $a > 0$

Usaremos este teorema en los siguientes dos ejemplos.

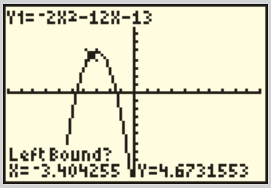
EJEMPLO 7 **Hallar un valor máximo (o mínimo)**

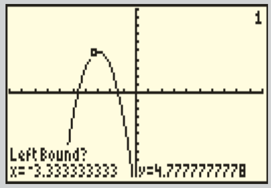
Encuentre el vértice de la parábola $y = f(x) = -2x^2 - 12x - 13$.

SOLUCIÓN Como el coeficiente de x^2 es -2 y $-2 < 0$, la parábola abre hacia abajo y el valor y del vértice es un valor *máximo*. Asignamos $-2x^2 - 12x - 13$ a Y_1 y graficamos Y_1 en una pantalla estándar.

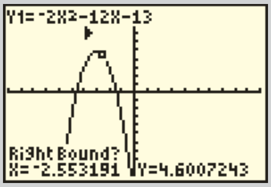
	TI-83/4 Plus	TI-86
Encuentre un valor máximo.	2nd CALC 4	GRAPH MORE MATH(F1) FMAX(F5)

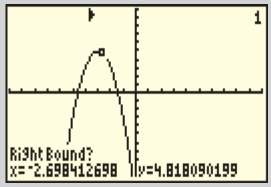
Use la tecla izquierda del cursor para mover el cursor intermitente a la izquierda del vértice y presione ENTER.



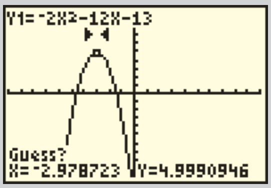


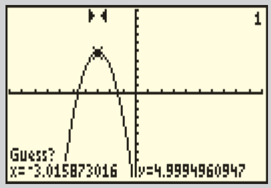
Ahora mueva el cursor a la derecha del vértice y presione ENTER.





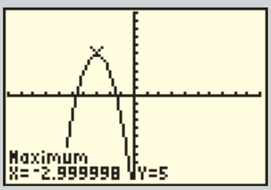
Como ensayo, ponga el cursor entre los límites izquierdo y derecho y presione ENTER.

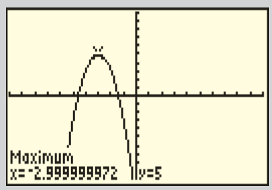




Nota de calculadora: Alternativamente, podemos introducir valores de x para nuestras respuestas. Las siguientes respuestas producen un máximo de 5 en $x = -3$.

¿A la izquierda?	−4 ENTER
¿A la derecha?	−2 ENTER
¿Ensayo?	−3 ENTER





La calculadora indica que el vértice es alrededor de $(-3, 5)$. (Se pueden obtener resultados diferentes dependiendo de las posiciones del cursor.)

(continúa)

Podemos hallar un valor máximo desde la pantalla inicial como sigue. (Suponga que hemos visto la gráfica y estimado que la coordenada x del vértice se encuentra entre -3.5 y -2.5.) Primero encontramos el valor x del vértice.

Use el operador de máxima función.

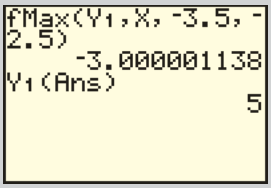
MATH 7 VARS ▷ 1 1 , X,T,θ,n , -3.5 , -2.5) ENTER

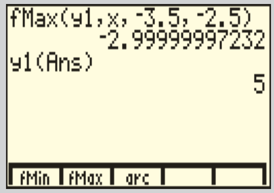
2nd CALC MORE fMax(F2) 2nd alpha Y 1 , x-VAR , -3.5 , -2.5) ENTER

A continuación encontramos el valor y del vértice usando el resultado de fMax (está guardado en ANS).

VARS ▷ 1 1 (2nd ANS) ENTER

2nd alpha Y 1 (2nd ANS) ENTER





Nótense los resultados "extraños" dados por fMax. (El profesor no se impresiona mucho si el alumno dice que el vértice es $(-3.000001138, 5)$.) En este caso una calculadora es útil, pero es fácil calcular que

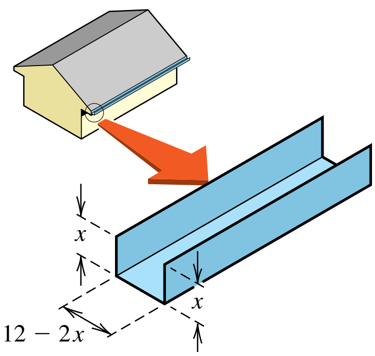
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2(-2)} = -3 \quad \text{y} \quad f(-3) = 5,$$

que nos da un vértice de $(-3, 5)$ (y una respuesta que agradará al profesor).

EJEMPLO 8 **Hallar el valor máximo de una función cuadrática**

Una larga hoja rectangular metálica, de 12 pulgadas de ancho, se ha de convertir en canal al doblar hacia arriba cada uno de los lados, de modo que sean perpendiculares a la hoja. ¿Cuántas pulgadas deben ser hacia arriba las que den al canal su mayor capacidad?

Figura 9



SOLUCIÓN El canal se ilustra en la figura 9. Si x denota el número de pulgadas hacia arriba en cada lado, el ancho de la base del canal es $12 - 2x$ pulgadas. La capacidad será máxima cuando el área de sección transversal del rectángulo con lados de longitudes x y $12 - 2x$ tiene su valor máximo. Si con $f(x)$ denotamos esta área, tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= x(12 - 2x) \\ &= 12x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 12x, \end{aligned}$$

que tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a = -2$, $b = 12$, y $c = 0$. Como

f es una función cuadrática y $a = -2 < 0$, se deduce del teorema precedente que el valor máximo de f se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-2)} = 3.$$

Por lo tanto, 3 pulgadas deben voltearse hacia arriba en cada lado para lograr máxima capacidad.

Como solución alternativa, podemos observar que la gráfica de la función $f(x) = x(12 - 2x)$ tiene cruces con el eje x en $x = 0$ and $x = 6$. En consecuencia, el promedio de los cruces,

$$x = \frac{0 + 6}{2} = 3,$$

es la coordenada x del vértice de la parábola y el valor que da la máxima capacidad.

En el capítulo 2 resolvimos algebraicamente ecuaciones cuadráticas y desigualdades. El siguiente ejemplo indica la forma en que se pueden resolver con ayuda de una calculadora graficadora.

EJEMPLO 9 Análisis del vuelo de un proyectil

Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde una altura de 600 pies sobre el suelo. Su altura $h(t)$ en pies sobre el suelo después de t segundos está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 803t + 600.$$

(a) Determine una pantalla razonable que incluya todas las características pertinentes de la gráfica de h.

(b) Estime cuándo será de 5000 pies sobre el suelo la altura del proyectil.

(c) Determine cuándo será más de 5000 pies sobre el suelo la altura del proyectil.

(d) ¿Cuánto tiempo estará en vuelo el proyectil?

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de h es una parábola que abre hacia abajo. Para estimar Ymáx (nótese que usamos x y y indistintamente con t y h), aproximemos el valor máximo de h. Usando

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{803}{2(-16)} \approx 25.1,$$

vemos que la altura máxima es aproximadamente $h(25) = 10{,}675$.

El proyectil sube durante aproximadamente los primeros 25 segundos y debido a que su altura en $t = 0$, 600 pies, es pequeña en comparación con 10,675, tomará sólo ligeramente más que 25 segundos adicionales para caer al suelo. Como h y t son positivas, una pantalla razonable es

$$[0, 60, 5] \qquad \text{por} \qquad [0, 11{,}000, 1000].$$

(continúa)

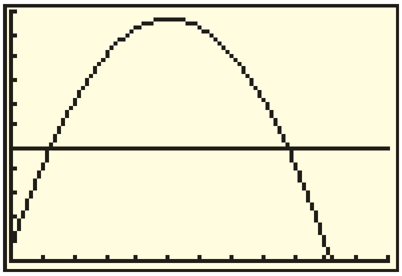
Nota de calculadora: Una vez que determinemos los valores Xmín y Xmáx, podemos usar la función ZoomFit (acercamiento) para graficar una función sobre el intervalo [Xmín, Xmáx]. En este ejemplo, asignamos 0 a Xmín y 51 a Xmáx y luego seleccionamos ZoomFit bajo el menú ZOOM.

(b) Deseamos estimar dónde la gráfica de h cruza la recta horizontal $h(t) = 5000$, de modo que hacemos las asignaciones

$$Y_1 = -16x^2 + 803x + 600 \qquad \text{y} \qquad Y_2 = 5000$$

y obtenemos una pantalla semejante a la figura 10. Es importante recordar que la gráfica de Y_1 muestra sólo la altura en el tiempo t —*no* es la trayectoria del proyectil, que es vertical. Usando una función de intersección, encontramos que el valor más pequeño de t para el que $h(t) = 5000$ es alrededor de 6.3 segundos.

Figura 10
[0, 60, 5] por [0, 11,000, 1000]



Como el vértice está sobre el eje de la parábola, el otro tiempo en el que $h(t)$ es 5000 es aproximadamente $25.1 - 6.3$, o sea 18.8, segundos *después* de $t = 25.1$ —es decir, en $t \approx 25.1 + 18.8 = 43.9$ segundos.

(c) El proyectil está a más de 5000 pies sobre el suelo cuando la gráfica de la parábola de la figura 10 está arriba de la recta horizontal, es decir, cuando

$$6.3 < t < 43.9.$$

(d) El proyectil estará en vuelo hasta $h(t) = 0$. Esto corresponde al punto de cruce en el eje x en la figura 10. Usando una función de raíz o cero, obtenemos $t \approx 50.9$ segundos. (Nótese que como el punto de cruce con el eje y no es cero, es incorrecto simplemente duplicar el valor de t del vértice para hallar el tiempo total del vuelo; no obstante, esto *sería* aceptable para problemas con $h(0) = 0$.)

Al trabajar con funciones cuadráticas, con frecuencia estamos más interesados en hallar el vértice y los puntos de cruce con el eje x. Típicamente, una función cuadrática determinada se asemeja con mucho a una de las tres formas que se indican en la tabla siguiente.

Relación entre formas de función cuadrática y sus vértices y puntos de cruce con el eje x

Forma	Vértice (h, k)	Puntos de intersección con el eje x (si los hay)
(1) $y = f(x) = a(x - h)^2 + k$	h y k como en la forma	$x = h \pm \sqrt{-k/a}$ (vea abajo)
(2) $y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$h = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $k = f(h)$	$x = x_1, x_2$
(3) $y = f(x) = ax^2 + bx + c$	$h = -\dfrac{b}{2a}$, $k = f(h)$	$x = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (vea abajo)

Si los radicandos en (1) o (3) son negativos, entonces no hay puntos de intersección con el eje x. Para hallar éstos con la forma (1), use la ecuación cuadrática especial que aparece en la página 82. Si el lector tiene una función cuadrática de la forma (3) y desea hallar el vértice y puntos de cruce con el eje x, puede ser mejor primero hallar los puntos de intersección con el eje x con el uso de la fórmula cuadrática. A continuación puede fácilmente obtener la coordenada x del vértice, h, porque

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = h \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Desde luego, si la función de la forma (3) es fácilmente factorizable, no es necesario usar la fórmula cuadrática.

Estudiaremos parábolas más adelante en un capítulo posterior.

3.6 Ejercicios

Ejer. 1-4: Encuentre la ecuación estándar de cualquier parábola que tenga vértice V.

1 $V(-3, 1)$

2 $V(4, -2)$

3 $V(0, -3)$

4 $V(-2, 0)$

Ejer. 5-12: Exprese $f(x)$ en la forma $a(x - h)^2 + k$

5 $f(x) = -x^2 - 4x - 8$

6 $f(x) = x^2 - 6x + 11$

7 $f(x) = 2x^2 - 12x + 22$

8 $f(x) = 5x^2 + 20x + 17$

9 $f(x) = -3x^2 - 6x - 5$

10 $f(x) = -4x^2 + 16x - 13$

11 $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 9x - 34$

12 $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{23}{5}$

Ejer. 13-22: (a) Use la fórmula cuadrática para hallar los ceros de f. (b) Encuentre el valor máximo o mínimo de $f(x)$. (c) Trace la gráfica de f.

13 $f(x) = x^2 - 4x$

14 $f(x) = -x^2 - 6x$

15 $f(x) = -12x^2 + 11x + 15$

16 $f(x) = 6x^2 + 7x - 24$

17 $f(x) = 9x^2 + 24x + 16$

18 $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

19 $f(x) = x^2 + 4x + 9$

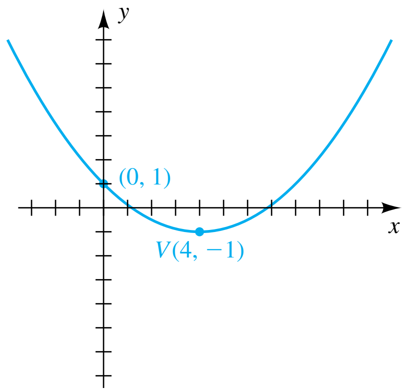
20 $f(x) = -3x^2 - 6x - 6$

21 $f(x) = -2x^2 + 20x - 43$

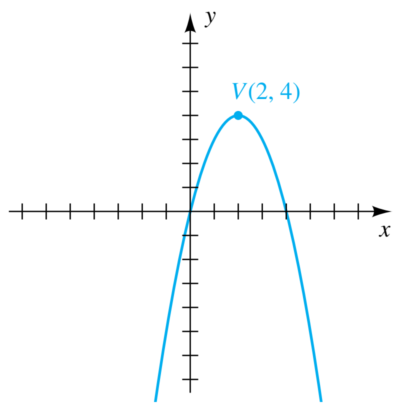
22 $f(x) = 2x^2 - 4x - 11$

Ejer. 23-26: Encuentre la ecuación estándar de la parábola que se muestra en la figura.

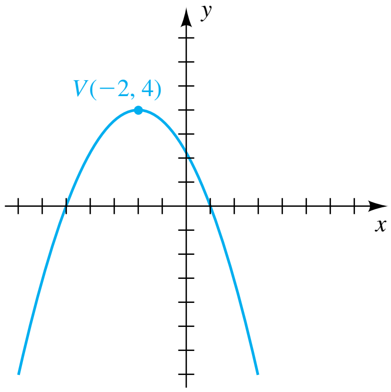
23



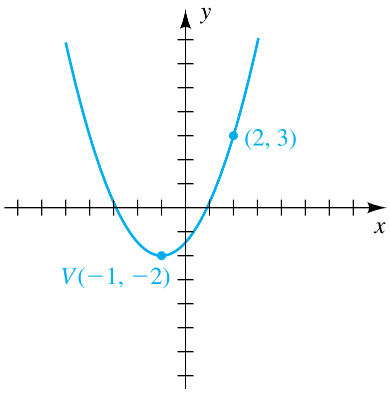
24



25



26

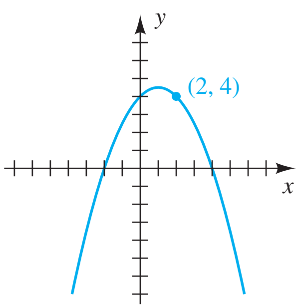


Ejer. 27-28: Encuentre una ecuación de la forma

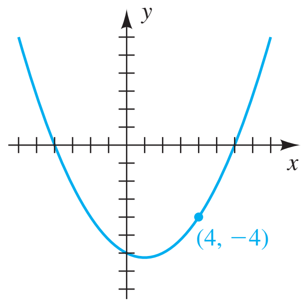
$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

de la parábola que se muestra en la figura. Vea la tabla de la página 222.

27



28



Ejer. 29-34: Encuentre la ecuación estándar de una parábola que tiene un eje vertical y satisface las condiciones dadas.

29 Vértice $(0, -2)$, que pasa por $(3, 25)$

30 Vértice $(0, 5)$, que pasa por $(2, -3)$

31 Vértice $(3, 5)$, intersección en 0 con el eje x

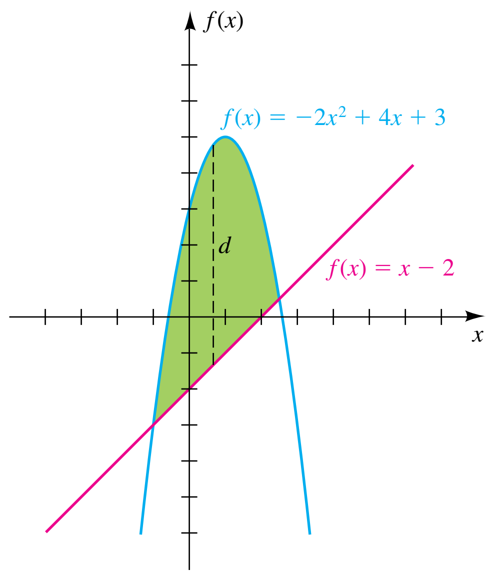
32 Vértice $(4, -7)$, intersección en -4 con el eje x

33 Intersecciones con el eje x en -3 y 5, el punto más alto tiene coordenada y en 4

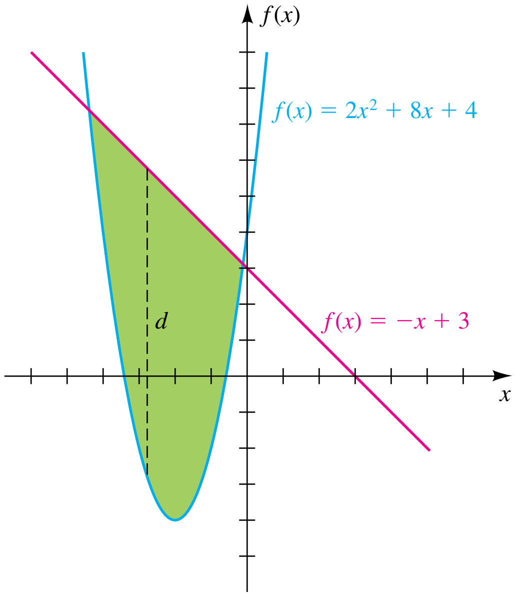
34 Intersecciones con el eje x en 8 y 0, el punto más bajo tiene coordenada y en -48

Ejer. 35-36: Encuentre la máxima distancia vertical *d* entre la parábola y la recta para la región de color verde.

35



36



Ejer. 37-38: Existe ozono en todos los niveles de la atmósfera terrestre. La densidad del ozono varía en forma estacional y de latitud. En Edmonton, Canadá, la densidad $D(h)$ del ozono (en 10^{-3} cm/km) para altitudes h entre 20 kilómetros y 35 kilómetros se determinó experimentalmente. Para cada $D(h)$ y estación, aproxime la altitud a la que la densidad del ozono es máxima.

37 $D(h) = -0.058h^2 + 2.867h - 24.239$ (otoño)

38 $D(h) = -0.078h^2 + 3.811h - 32.433$ (primavera)

39 **Rapidez de crecimiento infantil** La rapidez de crecimiento y (en libras por mes) de un infante está relacionada con el peso actual x (en libras) por la fórmula $y = cx(21 - x)$, donde c es una constante positiva y $0 < x < 21$. ¿A qué peso se presenta la máxima rapidez de crecimiento?

40 **Rendimiento de gasolina** El número de millas M que cierto automóvil puede recorrer con un galón de gasolina, a una velocidad de v mi/h, está dado por

$$M = -\frac{1}{30}v^2 + \frac{5}{2}v \qquad \text{para } 0 < v < 70.$$

(a) Encuentre la velocidad más económica para un viaje.

(b) Encuentre el máximo valor de M.

41 **Altura de un proyectil** Un objeto se proyecta verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio, con una velocidad inicial de 144 ft/s. Su distancia $s(t)$ en pies sobre el suelo después de t segundos está dada por la ecuación

$$s(t) = -16t^2 + 144t + 100.$$

(a) Encuentre su máxima distancia sobre el suelo.

(b) Encuentre la altura del edificio.

42 **Vuelo de un proyectil** Un objeto es proyectado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de v_0 pies/s y su distancia $s(t)$ en pies sobre el suelo después de t segundos está dada por la fórmula $s(t) = -16t^2 + v_0 t$.

(a) Si el objeto choca contra el suelo después de 12 segundos, encuentre su velocidad inicial v_0.

(b) Encuentre su distancia máxima sobre el suelo.

43 Encuentre dos números reales positivos cuya suma sea 40 y cuyo producto sea un máximo.

44 Encuentre dos números reales positivos cuya diferencia sea 40 y cuyo producto sea un mínimo.

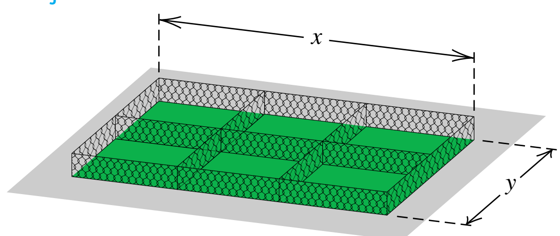
45 **Construcción de jaulas** Mil pies de cerca de celosía se van a usar para construir seis jaulas para animales, como se ve en la figura.

(a) Exprese el ancho y como función de la longitud x.

(b) Exprese el área encerrada total A de las jaulas como función de x.

(c) Encuentre las dimensiones que maximizan el área encerrada.

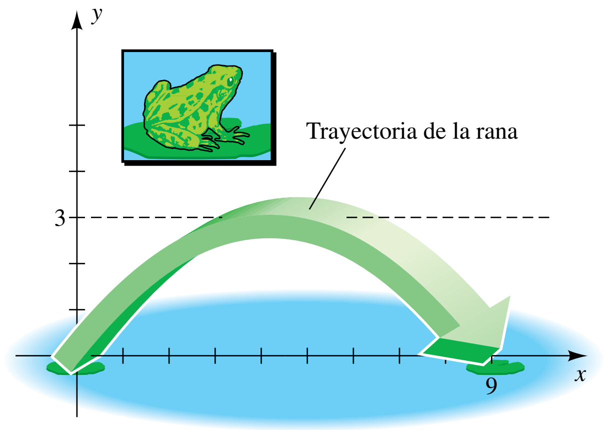
Ejercicio 45



46 **Instalación de una cerca en un campo** Un agricultor desea poner una cerca alrededor de un campo rectangular y luego dividir el campo en tres terrenos rectangulares al poner dos cercas paralelas a uno de los lados. Si el agricultor puede comprar sólo 1000 yardas de cerca, ¿qué dimensiones darán el máximo de área rectangular?

47 **Animales saltarines** Los vuelos de animales saltarines típicamente tienen trayectorias parabólicas. La figura de la página siguiente ilustra el salto de una rana sobrepuesto en un plano de coordenadas. La longitud del salto es de 9 pies y la máxima altura desde el suelo es 3 pies. Encuentre una ecuación estándar para la trayectoria de la rana.

Ejercicio 47

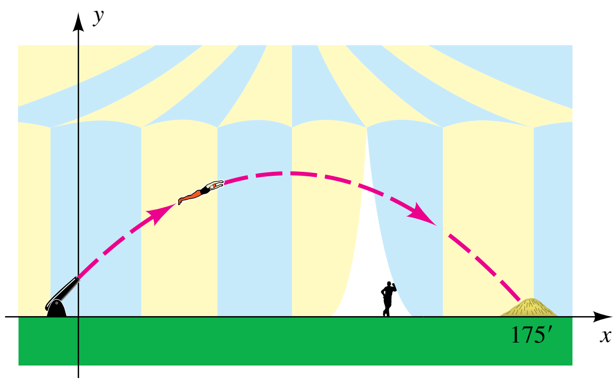


48 La bala de cañón humana En la década de 1940, la exhibición de la bala de cañón humana fue ejecutada regularmente por Emmanuel Zacchini para el circo Ringling Brothers and Barnum & Bailey. La punta del cañón se elevaba 15 pies del suelo y la distancia horizontal total recorrida era de 175 pies. Cuando el cañón se apuntaba a un ángulo de 45°, una ecuación del vuelo parabólico (vea la figura) tenía la forma $y = ax^2 + x + c$.

(a) Use la información dada para hallar una ecuación del vuelo.

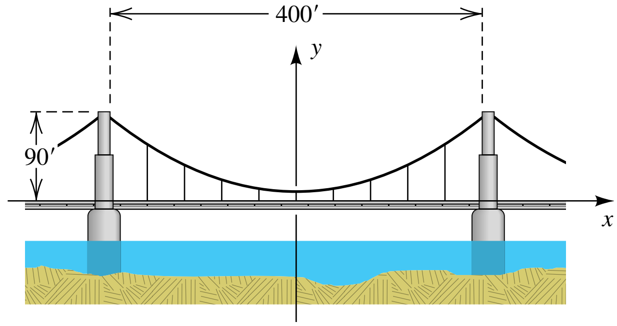
(b) Encuentre la altura máxima alcanzada por la bala de cañón humana.

Ejercicio 48



49 Forma de un puente colgante Una sección de un puente colgante tiene su peso uniformemente distribuido entre torres gemelas que están a 400 pies entre sí y se elevan 90 pies sobre la calzada horizontal (vea la figura). Un cable tendido entre los remates de las torres tiene la forma de una parábola y su punto central está 10 pies sobre la calzada. Suponga que se introducen ejes de coordenadas, como se ve en la figura.

Ejercicio 49



(a) Encuentre una ecuación para la parábola.

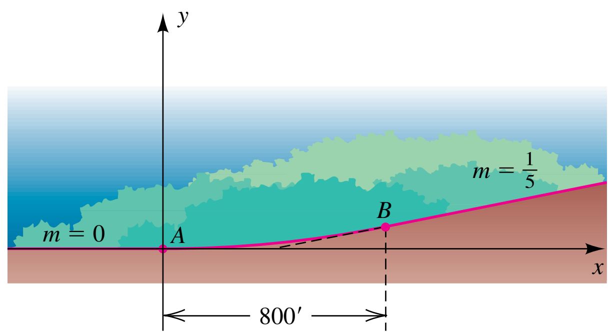
(b) Nueve cables verticales igualmente espaciados se usan para sostener el puente (vea la figura). Encuentre la longitud total de estos soportes.

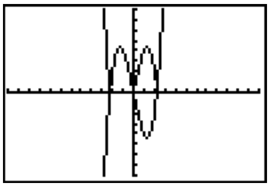
50 Diseño de una carretera Unos ingenieros de tránsito están diseñando un tramo de carretera que conectará una calzada horizontal con una que tiene una pendiente del 20% (es decir, pendiente $\frac{1}{5}$), como se ilustra en la figura. La transición suave debe tener lugar sobre una distancia horizontal de 800 pies, con una pieza parabólica de carretera empleada para conectar los puntos A y B. Si la ecuación del segmento parabólico es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, se puede demostrar que la pendiente de la recta tangente en el punto $P(x, y)$ sobre la parábola está dada por $m = 2ax + b$.

(a) Encuentre una ecuación de la parábola que tiene una recta tangente de pendiente 0 en A y $\frac{1}{5}$ en B.

(b) Encuentre las coordenadas de B.

Ejercicio 50



77 

$[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

79 **(a)** \$300, \$360

(b) $C_1(x) = \begin{cases} 180 & \text{si } 0 \le x \le 200 \\ 180 + 0.40(x - 200) & \text{si } x > 200 \end{cases}$

$C_2(x) = 235 + 0.25x$ para $x \ge 0$

(c)

x	Y_1	Y_2
100	180	260
200	180	285
300	220	310
400	260	335
500	300	360
600	340	385
700	380	410
800	420	435
900	460	460
1000	500	485
1100	540	510
1200	580	535

(d) I si $x \in [0, 900)$, II si $x > 900$

EJERCICIOS 3.6

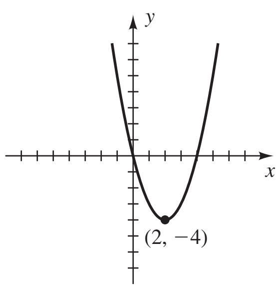
1 $y = a(x + 3)^2 + 1$ **3** $y = ax^2 - 3$

5 $f(x) = -(x + 2)^2 - 4$ **7** $f(x) = 2(x - 3)^2 + 4$

9 $f(x) = -3(x + 1)^2 - 2$

11 $f(x) = -\dfrac{3}{4}(x - 6)^2 - 7$

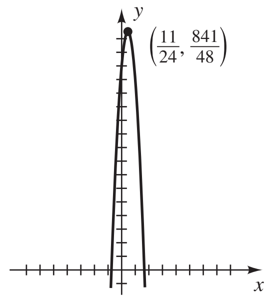
13 **(a)** 0, 4
(b) Mín: $f(2) = -4$
(c)



15 **(a)** $-\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{3}$

(b) Máx: $f\left(\dfrac{11}{24}\right) = \dfrac{841}{48}$

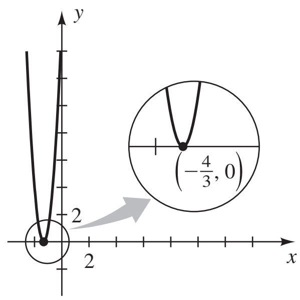
(c)



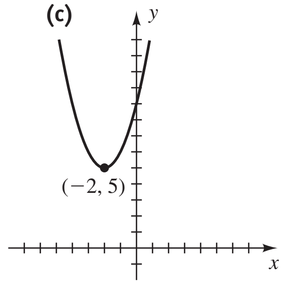
17 **(a)** $-\dfrac{4}{3}$

(b) Mín: $f\left(-\dfrac{4}{3}\right) = 0$

(c)

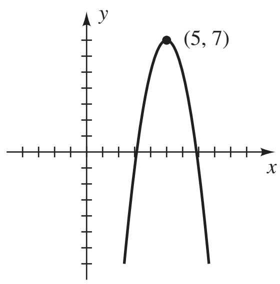


19 **(a)** Ninguno
(b) Mín: $f(-2) = 5$
(c)



21 **(a)** $5 \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{14} \approx 6.87, 3.13$ **(b)** Máx: $f(5) = 7$

(c)



23 $y = \dfrac{1}{8}(x - 4)^2 - 1$ **25** $y = -\dfrac{4}{9}(x + 2)^2 + 4$

27 $y = -\dfrac{1}{2}(x + 2)(x - 4)$

29 $y = 3(x - 0)^2 - 2$ **31** $y = -\dfrac{5}{9}(x - 3)^2 + 5$

33 $y = -\dfrac{1}{4}(x - 1)^2 + 4$ **35** 6.125 **37** 24.72 km

39 10.5 lb **41** **(a)** 424 pies **(b)** 100 pies **43** 20 y 20

45 **(a)** $y(x) = 250 - \frac{3}{4}x$ **(b)** $A(x) = x\left(250 - \frac{3}{4}x\right)$

(c) $166\frac{2}{3}$ pies por 125 pies

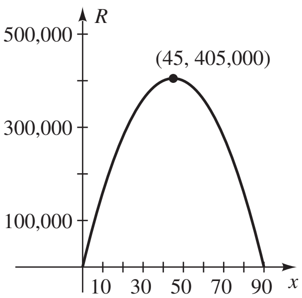
47 $y = -\frac{4}{27}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + 3$

49 **(a)** $y = \frac{1}{500}x^2 + 10$ **(b)** 282 pies **51** 2 pies

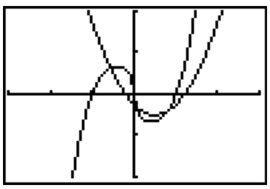
53 500 pares

55 **(a)** $R(x) = 200x(90 - x)$

(b) \$45



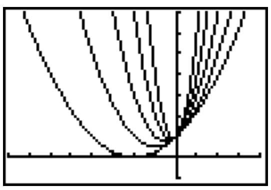
57



$(-0.57, 0.64)$, $(0.02, -0.27)$, $(0.81, -0.41)$

$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

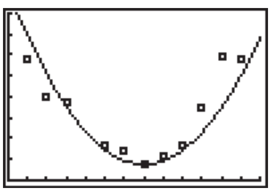
59



Resultan valores más pequeños de a en una parábola más ancha; mayores valores de a resultan en una parábola más angosta.

$[-8, 4]$ por $[-1, 7]$

61 **(b)** $f(x) = 0.17(x - 7)^2 + 0.77$

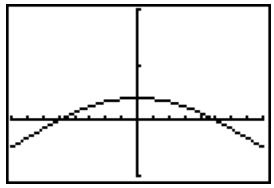


$[0, 13]$ por $[0, 8]$

(c) 2.3 pulg.

63 **(a)** $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{25}x + 80 & \text{si } -800 \le x < -500 \\ -\frac{1}{6250}x^2 + 40 & \text{si } -500 \le x \le 500 \\ -\frac{4}{25}x + 80 & \text{si } 500 < x \le 800 \end{cases}$

(b)



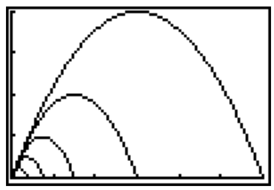
$[-800, 800, 100]$ por $[-100, 200, 100]$

65 **(a)** $f(x) = -\frac{4}{225}x^2 + \frac{8}{3}x$

(b)

$[0, 180, 50]$ por $[0, 120, 50]$

(c)



$[0, 600, 50]$ por $[0, 400, 50]$

El valor de k afecta la altura y la distancia recorrida en un factor de $\frac{1}{k}$.

EJERCICIOS 3.7

1 **(a)** 15 **(b)** -3 **(c)** 54 **(d)** $\frac{2}{3}$

3 **(a)** $3x^2 + 1$; $3 - x^2$; $2x^4 + 3x^2 - 2$; $\frac{x^2 + 2}{2x^2 - 1}$

(b) $\mathbb{R}$ **(c)** Todos los números reales excepto $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$

5 **(a)** $2\sqrt{x + 5}$; 0; $x + 5$; 1 **(b)** $[-5, \infty)$ **(c)** $(-5, \infty)$

7 **(a)** $\frac{3x^2 + 6x}{(x - 4)(x + 5)}$; $\frac{x^2 + 14x}{(x - 4)(x + 5)}$; $\frac{2x^2}{(x - 4)(x + 5)}$; $\frac{2(x + 5)}{x - 4}$