32 Llenado de una piscina Con agua de una manguera, una piscina se puede llenar en 8 horas. Si se usa una segunda manguera sola, más grande, puede llenarse la piscina en 5 horas. ¿Cuánto tardaría en llenarse si ambas mangueras se usaran simultáneamente?

33 Entrega de periódicos Una niña tarda 45 minutos en repartir los periódicos de su ruta, pero, si su hermano la ayuda, a ambos les lleva sólo 20 minutos. ¿Cuánto tardaría su hermano en repartir los periódicos por sí solo?

34 Vaciado de un tanque Un tanque de agua se puede vaciar usando una bomba durante 5 horas. Una segunda bomba más pequeña puede vaciar el tanque en 8 horas. Si la bomba más grande se arranca a la 1:00 p.m., ¿en cuánto tiempo debe arrancarse la bomba más pequeña para que el tanque se vacíe a las 5:00 p.m.?

35 Promedio de calificaciones (GPA) Una estudiante universitaria ha terminado 48 horas de créditos con un promedio GPA de 2.75. Para entrar al programa en que ella desea estar, debe tener un GPA de 3.2. ¿Cuántas horas de créditos adicionales de trabajo de 4.0 subirán su GPA a 3.2?

36 Ley de Ohm En teoría eléctrica, la ley de Ohm expresa que $I = V/R$, donde I es la corriente en amperes, V es la fuerza electromotriz en volts y R es la resistencia en ohms. En cierto circuito $V = 110$ y $R = 50$. Si V y R han de cambiarse para tener la misma cantidad numérica, ¿qué cambio en ellos hará que I se duplique?

37 Temperatura del aire Debajo de la base de una nube, la temperatura del aire T (en °F) a una altura h (en pies) se puede aproximar con la ecuación $T = T_0 - \left(\frac{5.5}{1000}\right)h$, donde T_0 es la temperatura al nivel del suelo.

(a) Determine la temperatura del aire a una altura de 1 milla si la temperatura del suelo es 70°F.

(b) ¿A qué altura se alcanza la temperatura de congelación?

38 Altura de una nube La altura h (en pies) de la base de una nube se puede estimar usando $h = 227(T - D)$, donde T es la temperatura del suelo y D es el punto de rocío.

(a) Si la temperatura es 70°F y el punto de rocío es 55°F, encuentre la altura de la base de la nube.

(b) Si el punto de rocío es 65°F y la base de la nube está a 3500 pies, estime la temperatura del suelo.

39 Temperatura de una nube La temperatura T dentro de una nube a una altura h (en pies) sobre la base de la nube se puede aproximar usando la ecuación $T = B - \left(\frac{3}{1000}\right)h$, donde B es la temperatura de la nube en su base. Determine la temperatura a 10,000 pies en una nube con una temperatura de su base de 55°F y una altura de base de 4000 pies. **Nota:** Para una aplicación interesante que abarca los tres ejercicios precedentes, vea el ejercicio 6 de los ejercicios de repaso al final del capítulo.

40 Relación huesos-estatura Los arqueólogos pueden determinar la estatura de un ser humano sin tener un esqueleto completo. Si un arqueólogo encuentra sólo un húmero, entonces la estatura del individuo se puede determinar usando una relación lineal sencilla. (El húmero es el hueso entre el hombro y el codo.) Para una mujer, si x es la longitud del húmero (en centímetros), entonces su estatura h (en centímetros) se puede determinar usando la fórmula $h = 65 + 3.14x$. Para un hombre, debe usarse $h = 73.6 + 3.0x$.

(a) Se encuentra un esqueleto femenino que tiene un húmero de 30 centímetros. Encuentre la altura de la mujer cuando murió.

(b) La estatura de una persona disminuirá típicamente en 0.06 centímetros por año después de los 30 años. Se encuentra el esqueleto completo de un hombre. El húmero mide 34 centímetros y la estatura del hombre era de 174 centímetros. Determine su edad aproximada cuando murió.

2.3 Ecuaciones cuadráticas

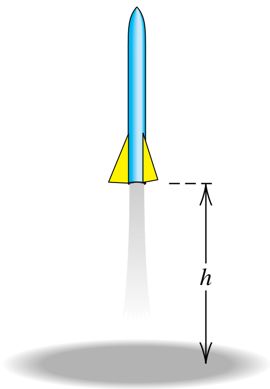
Un cohete de juguete se lanza verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo, como se ilustra en la figura 1. Si su velocidad inicial es 120 ft/s y la única fuerza que actúa sobre él es la gravedad, entonces la altura h del cohete (en pies) sobre el suelo después de t segundos está dada por

$$h = -16t^2 + 120t.$$

Algunos valores de h para los primeros 7 segundos de vuelo aparecen en la tabla siguiente.

***t* (s)**	0	1	2	3	4	5	6	7
***h* (ft)**	0	104	176	216	224	200	144	56

Figura 1



Vemos de la tabla que, cuando ascendía, el cohete estaba 180 pies sobre el suelo en algún momento entre $t = 2$ y $t = 3$. Cuando descendía, el cohete estaba 180 pies sobre el suelo en algún momento entre $t = 5$ y $t = 6$. Para hallar los valores exactos de t para los cuales $h = 180$ pies, debemos resolver la ecuación

$$180 = -16t^2 + 120t,$$

o bien

$$16t^2 - 120t + 180 = 0.$$

Como se indica en la tabla siguiente, una ecuación de este tipo se denomina *ecuación cuadrática* en t. Después de desarrollar una fórmula para resolver ecuaciones como ésta, regresaremos a este problema en el ejemplo 13 y hallaremos los tiempos exactos en los cuales el cohete estaba 180 pies sobre el suelo.

Terminología	Definición	Ejemplos
Ecuación cuadrática en x	Una ecuación que puede escribirse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$	$4x^2 = 8 - 11x$ $x(3 + x) = 5$ $4x = x^2$

Para que podamos resolver muchos tipos de ecuaciones, haremos uso del siguiente teorema.

Teorema del factor cero

Si p y q son expresiones algebraicas, entonces

$$pq = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad p = 0 \quad \text{o} \quad q = 0.$$

El teorema del factor cero se puede extender a cualquier número de expresiones algebraicas, es decir,

$$pqr = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad p = 0 \quad \text{o} \quad q = 0 \quad \text{o} \quad r = 0,$$

y así sucesivamente. Se deduce que si $ax^2 + bx + c$ se pueden escribir como un producto de dos polinomios de primer grado, entonces se pueden hallar soluciones al igualar a 0 cada uno de los factores, como se ilustra en los siguientes dos ejemplos. Esta técnica se conoce como **método de factorización.**

EJEMPLO 1 **Resolución de una ecuación por factorización**

Resuelva la ecuación $3x^2 = 10 - x$.

SOLUCIÓN Para usar el método de factorización, *es esencial que sólo el número* 0 *aparezca en un lado de la ecuación.* Así, procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 10 - x && \text{enunciado} \\ 3x^2 + x - 10 &= 0 && \text{sumar } x - 10 \\ (3x - 5)(x + 2) &= 0 && \text{factorizar} \\ 3x - 5 = 0, \quad x + 2 &= 0 && \text{teorema del factor cero} \\ x = \tfrac{5}{3}, \qquad x &= -2 && \text{despejar } x \end{aligned}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación dada son $\frac{5}{3}$ y -2.

EJEMPLO 2 **Resolución de una ecuación por factorización**

Resuelva la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

SOLUCIÓN Procedemos como en el ejemplo 1:

$$\begin{aligned} x^2 + 16 &= 8x && \text{enunciado} \\ x^2 - 8x + 16 &= 0 && \text{restar } 8x \\ (x - 4)(x - 4) &= 0 && \text{factorizar} \\ x - 4 = 0, \quad x - 4 &= 0 && \text{teorema del factor cero} \\ x = 4, \qquad x &= 4 && \text{despejar } x \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación cuadrática dada tiene una solución, 4.

Como $x - 4$ aparece como factor dos veces en la solución previa, a 4 lo llamamos **raíz doble** o **raíz de multiplicidad 2** de la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

Si una ecuación cuadrática tiene la forma $x^2 = d$ para algún número $d > 0$, entonces $x^2 - d = 0$ o, lo que es equivalente,

$$\left(x + \sqrt{d}\right)\left(x - \sqrt{d}\right) = 0.$$

Al igualar a cero cada factor nos da las soluciones $-\sqrt{d}$ y $\sqrt{d}$. Con frecuencia usamos el símbolo $\pm\sqrt{d}$ (*más o menos* $\sqrt{d}$) para representar $\sqrt{d}$ y $-\sqrt{d}$. Entonces, para $d > 0$, hemos demostrado el siguiente resultado. (El caso $d < 0$ requiere el sistema de números complejos que se estudia en la Sección 2.4.)

Una ecuación cuadrática especial	Si $x^2 = d$, entonces $x = \pm\sqrt{d}$.

Comentario sobre la notación: Es práctica común que una variable represente más de un valor, como en $x = \pm 3$. Una notación más descriptiva es $x_{1,2} = \pm 3$, lo que implica que $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$.

El proceso de resolver $x^2 = d$ como se indica en la caja precedente se conoce como *tomar la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación.* Nótese que si $d > 0$ obtenemos una raíz cuadrada positiva y una raíz cuadrada negativa, no sólo la raíz cuadrada principal definida en la sección 1.2.

EJEMPLO 3 **Resolución de ecuación de la forma $x^2 = d$**

Resuelva las ecuaciones:

(a) $x^2 = 5$ **(b)** $(x + 3)^2 = 5$

SOLUCIÓN

(a)

$$x^2 = 5 \quad \text{enunciado}$$
$$x = \pm\sqrt{5} \quad \text{tome la raíz cuadrada}$$

Entonces, las soluciones son $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$.

(b)

$$(x + 3)^2 = 5 \quad \text{enunciado}$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{5} \quad \text{tome la raíz cuadrada}$$
$$x = -3 \pm \sqrt{5} \quad \text{reste 3}$$

Entonces, las soluciones son $-3 + \sqrt{5}$ y $-3 - \sqrt{5}$.

En el trabajo que sigue sustituiremos una expresión de la forma $x^2 + kx$ por $(x + d)^2$, donde k y d son números reales. Este procedimiento, llamado **completar el cuadrado** para $x^2 + kx$, exige sumar $(k/2)^2$, como se describe en la caja siguiente. (El mismo procedimiento se usa para $x^2 - kx$.)

Completar el cuadrado

Para completar el cuadrado para $x^2 + kx$ o $x^2 - kx$, sumamos $\left(\frac{k}{2}\right)^2$; esto es, *sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.*

$$\textbf{(1)}\quad x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2$$

$$\textbf{(2)}\quad x^2 - kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2$$

EJEMPLO 4 **Completar el cuadrado**

Determine el valor o valores de d que completen el cuadrado para cada expresión. Escriba el trinomio y el cuadrado del binomio que representa.

(a) $x^2 - 3x + d$ **(b)** $x^2 + dx + 64$

SOLUCIÓN

(a) El cuadrado de la mitad del coeficiente de x es $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Así, $d = \frac{9}{4}$ y

$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2.$$

(continúa)

(b) Si $(x + c)^2 = x^2 + dx + 64$, entonces $x^2 + 2cx + c^2 = x^2 + dx + 64$, de modo que c^2 debe ser igual a 64 y $2c$ debe ser igual a d. Por tanto, c debe ser igual a 8 o -8 y, como $d = 2c$, d podría ser 16 o -16. Entonces tenemos

$$x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2 \quad \text{o} \quad x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2.$$

En el siguiente ejemplo resolvemos una ecuación cuadrática completando cuadrados.

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación cuadrática al completar el cuadrado

Resuelva la ecuación $x^2 - 5x + 3 = 0$.

SOLUCIÓN Es conveniente primero reescribir la ecuación para que los únicos términos que contengan x se encuentren en el lado izquierdo, como sigue:

$$\begin{aligned}
x^2 - 5x + 3 &= 0 && \text{enunciado} \\
x^2 - 5x &= -3 && \text{reste 3} \\
x^2 - 5x + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 &= -3 + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 && \text{completar el cuadrado, sumando } \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 \text{ a } \textit{ambos} \text{ lados} \\
\left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 &= \tfrac{13}{4} && \text{ecuación equivalente} \\
x - \tfrac{5}{2} &= \pm\sqrt{\tfrac{13}{4}} && \text{tome la raíz cuadrada} \\
x &= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} && \text{sumar } \tfrac{5}{2}
\end{aligned}$$

Entonces, las soluciones de la ecuación son $\left(5 + \sqrt{13}\right)/2 \approx 4.3$ y $\left(5 - \sqrt{13}\right)/2 \approx 0.7$.

En el ejemplo 5, resolvimos una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a = 1$. Si $a \neq 1$, podemos resolver la ecuación cuadrática al sumar un paso al procedimiento empleado en el ejemplo precedente. Después de reescribir la ecuación para que sólo términos con x se encuentren en el lado izquierdo,

$$ax^2 + bx = -c,$$

dividimos ambos lados entre a, obteniendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Entonces completamos el cuadrado al sumar $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ a ambos lados. Esta técnica se usa en la prueba de la siguiente e importante fórmula.

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La fórmula cuadrática nos da dos soluciones de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Que son $x = x_1, x_2$, donde

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

DEMOSTRACIÓN Supondremos que $b^2 - 4ac \geq 0$ de modo que $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un número real. (El caso en que $b^2 - 4ac < 0$ se estudiará en la siguiente sección.) continuemos como sigue:

$ax^2 + bx + c = 0$	enunciado
$ax^2 + bx = -c$	reste c
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	divida entre a
$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$	complete el cuadrado
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	ecuación equivalente
$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	tome la raíz cuadrada
$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	reste $\frac{b}{2a}$

Podemos escribir el radical de la última ecuación como

$$\pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{(2a)^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}.$$

Como $|2a| = 2a$ si $a > 0$ o $|2a| = -2a$ si $a < 0$, vemos que en todos los casos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nótese que si la fórmula cuadrática se ejecuta en forma apropiada, no es necesario comprobar las soluciones.

El número $b^2 - 4ac$ bajo el signo del radical de la fórmula cuadrática se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. El discriminante se puede usar para determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación, como en la tabla siguiente.

Valor del discriminante $b^2 - 4ac$	Naturaleza de las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$
Valor positivo	Dos raíces reales y desiguales
0	Una raíz de multiplicidad 2
Valor negativo	No hay raíz real

El discriminante en los dos ejemplos siguientes es positivo. En el ejemplo 8 el discriminante es 0.

EJEMPLO 6 **Uso de la fórmula cuadrática**

Resuelva la ecuación $4x^2 + x - 3 = 0$

SOLUCIÓN Sea $a = 4$, $b = 1$, y $c = -3$ en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(4)(-3)}}{2(4)} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8} \qquad \text{simplifique el discriminante}$$

$$= \frac{-1 \pm 7}{8} \qquad \sqrt{49} = 7$$

Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{-1 + 7}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{-1 - 7}{8} = -1.$$

El ejemplo 6 también se puede resolver por factorización. Si escribimos $(4x - 3)(x + 1) = 0$ e igualamos a cero cada factor tendremos $x = \frac{3}{4}$ y $x = -1$.

EJEMPLO 7 **Uso de la fórmula cuadrática**

Resuelva la ecuación $2x(3 - x) = 3$.

SOLUCIÓN Para usar la fórmula cuadrática, debemos escribir la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$2x(3 - x) = 3 \qquad \text{enunciado}$$

$$6x - 2x^2 = 3 \qquad \text{multiplique factores}$$

$$-2x^2 + 6x - 3 = 0 \qquad \text{reste 3}$$

$$2x^2 - 6x + 3 = 0 \qquad \text{multiplique por } -1$$

Ahora sea $a = 2$, $b = -6$, y $c = 3$ en la fórmula cuadrática, obteniendo

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4}.$$

Como 2 es un factor del numerador y del denominador, podemos simplificar la última fracción como sigue:

$$\frac{\cancel{2}\left(3 \pm \sqrt{3}\right)}{\cancel{2} \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones son

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{2} \approx 2.37 \quad \text{y} \quad \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0.63.$$

Nótese que

$$\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \neq \frac{3}{2} \pm \sqrt{3}.$$

El 2 del denominador debe dividirse entre ***ambos*** *términos del numerador, de modo que*

$$\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

El siguiente ejemplo ilustra el caso de una doble raíz.

EJEMPLO 8 **Uso de la fórmula cuadrática**

Resuelva la ecuación $9x^2 - 30x + 25 = 0$.

SOLUCIÓN Sean $a = 9$, $b = -30$, y $c = 25$ en la fórmula cuadrática:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(9)(25)}}{2(9)} && x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{18} && \text{simplifique} \\
&= \frac{30 \pm 0}{18} = \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

En consecuencia, la ecuación tiene una (doble) raíz: $\frac{5}{3}$.

EJEMPLO 9 **Eliminando las fracciones de una ecuación**

Resuelva la ecuación $\dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{5}{x+3} = \dfrac{36}{x^2-9}$

SOLUCIÓN Usando las directrices expresadas en la sección 2.1 para resolver una ecuación que contenga expresiones racionales, multiplicamos por el mcd, $(x + 3)(x - 3)$, recordando que, por la directriz 2, los números (-3 y 3) que hacen que el mcd sea cero no pueden ser soluciones. Entonces, procedemos como sigue:

$$
\begin{aligned}
\frac{2x}{x-3} + \frac{5}{x+3} &= \frac{36}{x^2-9} && \text{enunciado} \\
2x(x+3) + 5(x-3) &= 36 && \text{multiplique por el mcd } (x+3)(x-3) \\
2x^2 + 6x + 5x - 15 - 36 &= 0 && \text{multiplique factores y reste 36} \\
2x^2 + 11x - 51 &= 0 && \text{simplifique} \\
(2x + 17)(x - 3) &= 0 && \text{factorice} \\
2x + 17 = 0, \quad x - 3 &= 0 && \text{teorema del factor cero} \\
x = -\tfrac{17}{2}, \qquad x &= 3 && \text{despeje } x
\end{aligned}
$$

Como $x = 3$ no puede ser una solución, vemos que $x = -\frac{17}{2}$ es la única solución de la ecuación dada.

El siguiente ejemplo muestra cómo se puede usar la fórmula cuadrática para ayudar a factorizar trinomios

EJEMPLO 10 **Factorizar con la fórmula cuadrática**

Factorice el polinomio $21x^2 - 13x - 20$.

SOLUCIÓN Resolvemos la ecuación cuadrática asociada,

$$21x^2 - 13x - 20 = 0,$$

usando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(21)(-20)}}{2(21)}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{169 + 1680}}{42} = \frac{13 \pm \sqrt{1849}}{42}$$

Como $$x = \frac{13 \pm 43}{42}$$

$$x = \frac{13 + 43}{42} = \frac{4}{3}; \; x = \frac{13 - 43}{42} = -\frac{5}{7}$$

Ahora escribimos la ecuación como producto de factores lineales, ambos de la forma (x − solución):

$$\left(x - \tfrac{4}{3}\right)\left(x - \left(-\tfrac{5}{7}\right)\right) = 0$$

Elimine los denominadores al multiplicar ambos lados por $3 \cdot 7$:

$$3 \cdot 7\left(x - \tfrac{4}{3}\right)\left(x + \tfrac{5}{7}\right) = 0 \cdot 3 \cdot 7$$

$$3\left(x - \tfrac{4}{3}\right) \cdot 7\left(x + \tfrac{5}{7}\right) = 0$$

$$(3x - 4)(7x + 5) = 0$$

El lado izquierdo es la factorización deseada, es decir,

$$21x^2 - 13x - 20 = (3x - 4)(7x + 5).$$

En el ejemplo siguiente, usamos la fórmula cuadrática para resolver una ecuación que contiene más de una variable.

EJEMPLO 11 **Uso de la fórmula cuadrática**

De la ecuación $y = x^2 - 6x + 5$ despeje x, donde $x \leq 3$.

SOLUCIÓN La ecuación se puede escribir en la forma

$$x^2 - 6x + 5 - y = 0,$$

de modo que es una ecuación cuadrática en x con coeficientes $a = 1$, $b = -6$, y $c = 5 - y$. Nótese que y es considerada como una constante puesto que estamos despejando la variable x. Ahora usamos la fórmula cuadrática:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5-y)}}{2(1)} && \color{magenta}{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\\
&= \frac{6 \pm \sqrt{16+4y}}{2} && \text{simplifique } b^2 - 4ac\\
&= \frac{6 \pm \sqrt{4}\sqrt{4+y}}{2} && \text{factorice } \sqrt{4}\\
&= \frac{6 \pm 2\sqrt{4+y}}{2} && \sqrt{4} = 2\\
&= 3 \pm \sqrt{4+y} && \text{divida 2 en } \textit{ambos} \text{ términos}
\end{aligned}
$$

Como $\sqrt{4+y}$ es no negativa, $3 + \sqrt{4+y}$ es mayor o igual a 3 y $3 - \sqrt{4+y}$ es menor o igual a 3. Como la restricción dada es $x \le 3$, tenemos

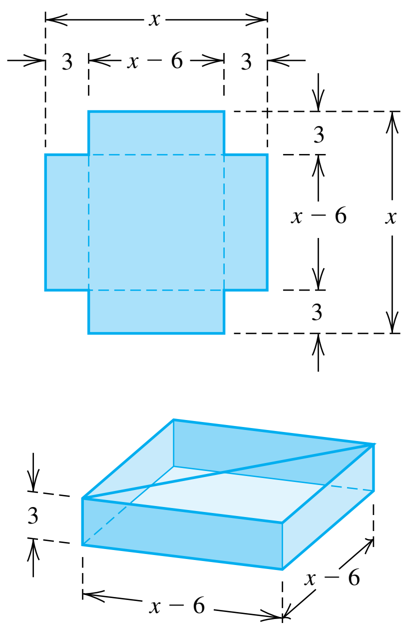
$$x = 3 - \sqrt{4+y}.$$

Muchos problemas aplicados llevan a ecuaciones cuadráticas. Una se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 12 Construcción de una caja rectangular

Una caja con base cuadrada y sin tapa ha de construirse a partir de una pieza cuadrada de hojalata cortando un cuadrado de 3 pulgadas en cada esquina y doblando los lados. Si la caja debe contener 48 pulg^3, ¿de qué tamaño debe ser la pieza de hojalata a usarse?

Figura 2



SOLUCIÓN Empezamos por trazar la imagen de la figura 2, denotando con x la longitud desconocida del lado de la pieza de hojalata. A continuación, cada lado de la base de la caja tendrá una longitud $x - 3 - 3 = x - 6$.

Como el área de la base de la caja es $(x-6)^2$ y la altura es 3, obtenemos

$$\text{volumen de caja} = 3(x-6)^2.$$

Como la caja debe contener 48 pulg^3,

$$3(x-6)^2 = 48.$$

Ahora despejamos x:

$$
\begin{aligned}
(x-6)^2 &= 16 && \text{divida entre 3}\\
x - 6 &= \pm 4 && \text{tome la raíz cuadrada}\\
x &= 6 \pm 4 && \text{sume 6}
\end{aligned}
$$

(continúa)

En consecuencia,

$$x = 10 \quad \text{o} \quad x = 2.$$

Prueba Si consultamos la figura 2, vemos que $x = 2$ es inaceptable porque no hay caja posible en este caso, pero si empezamos con un cuadrado de 10 pulgadas de hojalata, cortamos esquinas de 3 pulgadas y doblamos, obtenemos una caja que tiene dimensiones de 4 pulgadas, 4 pulgadas y 3 pulgadas. La caja tiene el volumen deseado de 48 pulg^3. Entonces, un cuadrado de 10 pulgadas es la respuesta al problema.

Como se ilustra en el ejemplo 12, aun cuando una ecuación se formule correctamente, es posible llegar a soluciones que no tienen sentido por la naturaleza física de un problema determinado. Estas soluciones deben desecharse. Por ejemplo, no aceptaríamos la respuesta -7 años para la edad de una persona o $\sqrt{50}$ por el número de automóviles en un lote de estacionamiento.

En el siguiente ejemplo resolvemos el problema que vimos al principio de esta sección.

EJEMPLO 13 Hallar la altura de un cohete de juguete

La altura h sobre el suelo (en pies) de un cohete de juguete, t segundos después que es lanzado, está dada por $h = -16t^2 + 120t$. ¿Cuándo estará el cohete a 180 pies sobre el suelo?

SOLUCIÓN Usando $h = -16t^2 + 120t$, obtenemos lo siguiente:

$$180 = -16t^2 + 120t \qquad \text{sea } h = 180$$

$$16t^2 - 120t + 180 = 0 \qquad \text{sume } 16t^2 - 120t$$

$$4t^2 - 30t + 45 = 0 \qquad \text{divida entre 4}$$

Nótese que la ecuación es cuadrática en t, de modo que de la fórmula cuadrática se despeja t.

Aplicando la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = -30$ y $c = 45$ nos da

$$t = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(4)(45)}}{2(4)}$$

$$= \frac{30 \pm \sqrt{180}}{8} = \frac{30 \pm 6\sqrt{5}}{8} = \frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{4}.$$

Por lo tanto, el cohete está a 180 pies sobre el suelo en los tiempos siguientes:

$$t = \frac{15 - 3\sqrt{5}}{4} \approx 2.07 \text{ s}$$

$$t = \frac{15 + 3\sqrt{5}}{4} \approx 5.43 \text{ s}$$

2.3 *Ejercicios*

Ejer. 1-14: Resuelva la ecuación por factorización.

1 $6x^2 + x - 12 = 0$

2 $4x^2 + x - 14 = 0$

3 $15x^2 - 12 = -8x$

4 $15x^2 - 14 = 29x$

5 $2x(4x + 15) = 27$

6 $x(3x + 10) = 77$

7 $75x^2 + 35x - 10 = 0$

8 $48x^2 + 12x - 90 = 0$

9 $12x^2 + 60x + 75 = 0$

10 $4x^2 - 72x + 324 = 0$

11 $\dfrac{2x}{x + 3} + \dfrac{5}{x} - 4 = \dfrac{18}{x^2 + 3x}$

12 $\dfrac{5x}{x - 2} + \dfrac{3}{x} + 2 = \dfrac{-6}{x^2 - 2x}$

13 $\dfrac{5x}{x - 3} + \dfrac{4}{x + 3} = \dfrac{90}{x^2 - 9}$

14 $\dfrac{3x}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{-4}{x^2 - 4}$

Ejer. 15-16: Determine si las dos ecuaciones son equivalentes.

15 (a) $x^2 = 16,\ x = 4$ (b) $x = \sqrt{9},\ x = 3$

16 (a) $x^2 = 25,\ x = 5$ (b) $x = \sqrt{64},\ x = 8$

Ejer. 17-24: Resuelva la ecuación usando la ecuación cuadrática especial de la página 82.

17 $x^2 = 169$

18 $x^2 = 361$

19 $25x^2 = 9$

20 $16x^2 = 49$

21 $(x - 3)^2 = 17$

22 $(x + 4)^2 = 31$

23 $4(x + 2)^2 = 11$

24 $9(x - 1)^2 = 7$

Ejer. 25-26: Determine el valor o valores de *d* que completen el cuadrado para la expresión.

25 (a) $x^2 + 9x + d$ (b) $x^2 - 8x + d$

(c) $x^2 + dx + 36$ (d) $x^2 + dx + \frac{49}{4}$

26 (a) $x^2 + 13x + d$ (b) $x^2 - 6x + d$

(c) $x^2 + dx + 25$ (d) $x^2 + dx + \frac{81}{4}$

Ejer. 27-30: Resuelva completando el cuadrado. (*Nota:* Vea la exposición después del ejemplo 5 como ayuda para resolver los ejercicios 29 y 30.)

27 $x^2 + 6x + 7 = 0$

28 $x^2 - 8x + 11 = 0$

29 $4x^2 - 12x - 11 = 0$

30 $4x^2 + 20x + 13 = 0$

Ejer. 31-44: Resuelva usando la fórmula cuadrática.

31 $6x^2 - x = 2$

32 $5x^2 + 13x = 6$

33 $x^2 + 4x + 2 = 0$

34 $x^2 - 6x - 3 = 0$

35 $2x^2 - 3x - 4 = 0$

36 $3x^2 + 5x + 1 = 0$

37 $\frac{3}{2}z^2 - 4z - 1 = 0$

38 $\frac{5}{3}s^2 + 3s + 1 = 0$

39 $\dfrac{5}{w^2} - \dfrac{10}{w} + 2 = 0$

40 $\dfrac{x + 1}{3x + 2} = \dfrac{x - 2}{2x - 3}$

41 $4x^2 + 81 = 36x$

42 $24x + 9 = -16x^2$

43 $\dfrac{5x}{x^2 + 9} = -1$

44 $\frac{1}{7}x^2 + 1 = \frac{4}{7}x$

Ejer. 45-48: Use la fórmula cuadrática para factorizar las expresiones.

45 $x^2 + x - 30$

46 $x^2 + 7x$

47 $12x^2 - 16x - 3$

48 $15x^2 + 34x - 16$

Ejer. 49-50: Use la fórmula cuadrática para despejar (a) x en términos de y y (b) y en términos de x.

49 $4x^2 - 4xy + 1 - y^2 = 0$

50 $2x^2 - xy = 3y^2 + 1$

Ejer. 51-54: Despeje la variable especificada.

51 $K = \frac{1}{2}mv^2$ despeje v (energía cinética)

52 $F = g\dfrac{mM}{d^2}$ despeje d (ley de Newton de gravitación)

53 $A = 2\pi r(r + h)$ despeje r (área superficial de un cilindro cerrado)

54 $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ despeje t (distancia que cae un objeto)

55 **Velocidad de un gas** Cuando un gas caliente sale de una chimenea cilíndrica, su velocidad varía en toda una sección circular de la chimenea, con el gas cerca del centro de la sección transversal teniendo una mayor velocidad que el gas cerca del perímetro. Este fenómeno puede ser descrito por la fórmula

$$V = V_{\text{máx}}\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right],$$

donde $V_{\text{máx}}$ es la velocidad máxima del gas, r_0 es el radio de la chimenea y V es la velocidad del gas a una distancia r del centro de la sección transversal circular. De esta fórmula, despeje r.

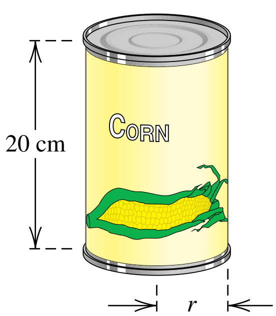
56 **Densidad de la atmósfera** Para altitudes h de hasta 10,000 metros, la densidad D de la atmósfera de la Tierra (en kg/m^3) se puede aproximar con la fórmula

$$D = 1.225 - (1.12 \times 10^{-4})h + (3.24 \times 10^{-9})h^2.$$

Aproxime la altitud si la densidad de la atmósfera es 0.74 kg/m^3.

57 **Dimensiones de una lata** Un fabricante de latas desea construir una lata cilíndrica circular recta de altura 20 centímetros y capacidad 3000 cm^3 (vea la figura). Encuentre el radio interior r de la lata.

Ejercicio 57



58 **Construcción de una caja rectangular** Consulte el ejemplo 12. Una caja sin tapa ha de construirse al cortar cuadrados de 3 pulgadas de las esquinas de una lámina rectangular de hojalata cuya longitud es el doble de su ancho. ¿Una lámina de qué medidas producirá una caja que tenga un volumen de 60 pulg^3?

59 **Tiro de una pelota de beisbol** Una pelota de beisbol es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 64 ft/s. El número de pies s sobre el suelo después de t segundos está dado por la ecuación $s = -16t^2 + 64t$.

(a) ¿Cuándo estará la pelota a 48 pies sobre el suelo?

(b) ¿Cuándo regresará al suelo?

60 **Distancia de frenado** La distancia que un auto recorre entre el momento en que el conductor toma la decisión de pisar el freno y el tiempo en que el auto en realidad se detiene es la distancia de frenado. Para un cierto auto que corre a v mi/h, la distancia de frenado d (en pies) está dada por $d = v + (v^2/20)$.

(a) Encuentre la distancia de frenado cuando v es 55 mi/h.

(b) Si un conductor decide frenar a 120 pies de un señalamiento de parada, ¿qué tan rápido puede ir el auto y todavía detenerse en el momento en que llegue al señalamiento?

61 **Temperatura de agua hirviendo** La temperatura T (en °C) a la que el agua hierve está relacionada con la elevación h (en metros sobre el nivel del mar) por la fórmula

$$h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2$$

para $95 \leq T \leq 100$.

(a) ¿A qué elevación hierve el agua a una temperatura de 98°C?

(b) La altura del Monte Everest es aproximadamente 8840 metros. Estime la temperatura a la que el agua hierve en la cima de esta montaña. (*Sugerencia:* Use la fórmula cuadrática con $x = 100 - T$.)

62 **Ley de Coulomb** Una partícula de carga -1 está colocada en una recta de coordenadas en $x = -2$ y una partícula de carga -2 está colocada en $x = 2$, como se ve en la figura. Si una partícula de carga $+1$ está colocada en una posición x entre -2 y 2, la ley de Coulomb en teoría eléctrica expresa

33 36 min **35** 27
37 **(a)** 40.96°F **(b)** 6909 pies **39** 37°F

EJERCICIOS 2.3

1 $-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ **3** $-\frac{6}{5}, \frac{2}{3}$ **5** $-\frac{9}{2}, \frac{3}{4}$ **7** $-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}$
9 $-\frac{5}{2}$ **11** $-\frac{1}{2}$ **13** $-\frac{34}{5}$
15 **(a)** No, -4 no es una solución de $x = 4$. **(b)** Sí
17 ± 13 **19** $\pm\frac{3}{5}$ **21** $3 \pm \sqrt{17}$ **23** $-2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{11}$
25 **(a)** $\frac{81}{4}$ **(b)** 16 **(c)** ± 12 **(d)** ± 7
27 $-3 \pm \sqrt{2}$ **29** $\frac{3}{2} \pm \sqrt{5}$ **31** $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$
33 $-2 \pm \sqrt{2}$ **35** $\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{41}$ **37** $\frac{4}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{22}$
39 $\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{15}$ **41** $\frac{9}{2}$ **43** No hay soluciones reales
45 $(x + 6)(x - 5)$ **47** $(2x - 3)(6x + 1)$
49 **(a)** $x = \dfrac{y \pm \sqrt{2y^2 - 1}}{2}$ **(b)** $y = -2x \pm \sqrt{8x^2 + 1}$
51 $v = \sqrt{\dfrac{2K}{m}}$ **53** $r = \dfrac{-\pi h + \sqrt{\pi^2 h^2 + 2\pi A}}{2\pi}$
55 $r = r_0\sqrt{1 - (V/V_{\max})}$ **57** $\sqrt{150/\pi} \approx 6.9$ cm
59 **(a)** Después de 1 s y después de 3 s **(b)** Después de 4 s
61 **(a)** 4320 m **(b)** 96.86°C **63** 2 pies
65 12 pies por 12 pies
67 $3 + \frac{1}{2}\sqrt{14} \approx 4.9$ mi o $3 - \frac{1}{2}\sqrt{14} \approx 1.1$ mi
69 **(a)** $d = 100\sqrt{20t^2 + 4t + 1}$ **(b)** 3:30 p.m.
71 14 pulg por 27 pulg **73** 7 mi/h **75** 300 pares
77 2 pies **79** 15.89 s
81 **(a)** 0; $-4{,}500{,}000$ **(b)** 2.13×10^{-7}
83 **(a)** (2) **(b)** 47.65°F

EJERCICIOS 2.4

1 $2 + 4i$ **3** $18 - 3i$ **5** $41 - 11i$ **7** $17 - i$
9 $21 - 20i$ **11** $-24 - 7i$ **13** 25 **15** **(a)** $-i$
(b) 1 **17** **(a)** i **(b)** -1 **19** $\frac{3}{10} - \frac{3}{5}i$ **21** $\frac{1}{2} - i$
23 $\frac{34}{53} + \frac{40}{53}i$ **25** $\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$ **27** $-142 - 65i$
29 $-2 - 14i$ **31** $-\frac{44}{113} + \frac{95}{113}i$ **33** $\frac{21}{2}i$
35 $x = 4, y = -1$ **37** $x = 3, y = -4$ **39** $3 \pm 2i$
41 $-2 \pm 3i$ **43** $\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{55}\,i$ **45** $-\frac{1}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{47}\,i$
47 $-5, \frac{5}{2} \pm \frac{5}{2}\sqrt{3}\,i$ **49** $\frac{5}{2}, -\frac{25}{26} \pm \frac{15}{26}\sqrt{3}\,i$
51 $\pm 4, \pm 4i$ **53** $\pm 2i, \pm\frac{3}{2}i$ **55** $0, -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}\,i$
57
$$\begin{aligned}\overline{z + w} &= \overline{(a + bi) + (c + di)}\\ &= \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i\\ &= (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}\end{aligned}$$
59
$$\begin{aligned}\overline{z \cdot w} &= \overline{(a + bi) \cdot (c + di)}\\ &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}\\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i\\ &= ac - adi - bd - bci\\ &= a(c - di) - bi(c - di)\\ &= (a - bi) \cdot (c - di) = \bar{z} \cdot \bar{w}\end{aligned}$$
61 Si $\bar{z} = z$, entonces $a - bi = a + bi$ y por tanto $-bi = bi$, o $2bi = 0$. Así, $b = 0$ y $z = a$ es real. Inversamente, si z es real, entonces $b = 0$ y por tanto $\bar{z} = \overline{a + 0i} = a - 0i = a + 0i = z$.

EJERCICIOS 2.5

1 $-15, 7$ **3** $-\frac{2}{3}, 2$ **5** No hay solución **7** $\pm\frac{2}{3}, 2$
9 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}, -\frac{5}{2}, 0$ **11** 0, 25 **13** $-\frac{57}{5}$ **15** $\frac{9}{5}$
17 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{62}$ **19** 6 **21** 6 **23** 5, 7 **25** -3
27 -1 **29** $-\frac{5}{4}$ **31** 3 **33** 0, 4 **35** $\pm 3, \pm 4$
37 $\pm\frac{1}{10}\sqrt{70 \pm 10\sqrt{29}}$ **39** $\pm 2, \pm 3$ **41** $\frac{8}{27}, -8$
43 $\frac{16}{9}$ **45** $-\frac{8}{27}, \frac{1}{125}$ **47** $-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}$ **49** 0, 4096
51 **(a)** 8 **(b)** ± 8 **(c)** No hay solución real **(d)** 625
(e) No hay solución
53 $l = \dfrac{gT^2}{4\pi^2}$ **55** $h = \dfrac{1}{\pi r}\sqrt{S^2 - \pi^2 r^4}$ **57** $h \approx 97\%$ of L
59 9.16 pies/sec **61** \$4.00 **63** $2\sqrt[3]{\dfrac{432}{\pi}} \approx 10.3$ cm
65 53.4%
67 Hay dos posibles rutas, correspondientes a $x \approx 0.6743$ millas y $x \approx 2.2887$ millas
69 **(a)** (2) **(b)** 860 min **71** $3.7 \times 3.7 \times 1.8$

EJERCICIOS 2.6

1 **(a)** $-2 < 2$ **(b)** $-11 < -7$ **(c)** $-\frac{7}{3} < -1$
(d) $1 < \frac{7}{3}$