Ejer. 81-84: Grafique las dos ecuaciones en el mismo plano de coordenadas, y estime las coordenadas de sus puntos de intersección.

81 $y = x^3 + x$; $\quad x^2 + y^2 = 1$

82 $y = 3x^4 - \frac{3}{2}$; $\quad x^2 + y^2 = 1$

83 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; $\quad \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = 1$

84 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$; $\quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

85 **Distancia entre autos** La distancia D (en millas) entre dos autos que se encuentran en la misma carretera, en el tiempo t (en minutos), está descrita por la ecuación $D = |2t - 4|$ en el intervalo $[0, 4]$. Grafique D y describa el movimiento de los autos.

86 **Agua en una piscina** La cantidad de agua A en una piscina en el día x está dada por $A = 12{,}000x - 2000x^2$, donde A es en galones y $x = 0$ corresponde al mediodía de un domingo. Grafique A en el intervalo $[0, 6]$ y describa la cantidad de agua en la piscina.

87 **Velocidad del sonido** La velocidad del sonido v en el aire varía con la temperatura. Se puede calcular en ft/s usando la ecuación $v = 1087\sqrt{\dfrac{T + 273}{273}}$, donde T es la temperatura (en °C).

(a) Aproxime v cuando $T = 20$°C.

(b) Determine la temperatura al grado más cercano, tanto algebraica como gráficamente, cuando la velocidad del sonido sea 1000 ft/s.

88 El área A de un triángulo equilátero con un lado de longitud s es $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}s^2$. Suponga que A debe ser igual a 100 ft^2 con un error de a lo más ± 1 ft^2. Determine gráficamente con qué precisión debe medirse s para satisfacer este requisito de error. (*Sugerencia:* Grafique $y = A$, $y = 99$, y $y = 101$.)

3.3 Rectas

Uno de los conceptos básicos en geometría es el de una *recta.* En esta sección restringiremos nuestro análisis a rectas que se encuentran en un plano de coordenadas, lo que nos permitirá usar métodos algebraicos para estudiar sus propiedades. Dos de nuestros principales objetivos pueden expresarse como sigue:

(1) Dada una recta l en un plano de coordenadas, encontrar una ecuación cuya gráfica corresponda a l.

(2) Dada una ecuación de la recta l en un plano de coordenadas, trazar la gráfica de la ecuación.

El siguiente concepto es fundamental para el estudio de las rectas.

Definición de la pendiente de una recta

Sea l una recta que no es paralela al eje y y sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos distintos en l. La **pendiente m** de l es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

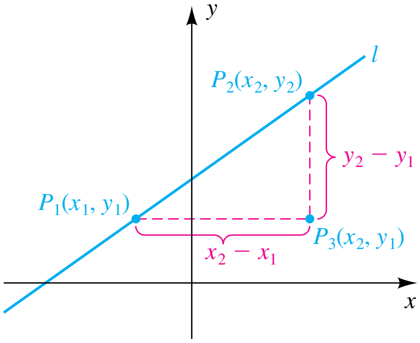
Si l es paralela al eje y, entonces la pendiente de l no está definida.

La letra griega Δ se usa en matemáticas para denotar "cambio en". Así, podemos pensar en la pendiente m como

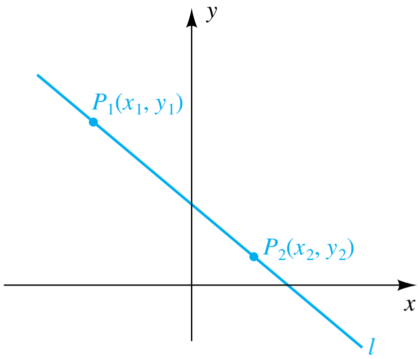
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}.$$

Figura 1

(a) Pendiente positiva (la recta sube)



(b) Pendiente negativa (la recta cae)



Los puntos típicos P_1 y P_2 sobre la recta l se muestran en la figura 1. El numerador $y_2 - y_1$ en la fórmula para m es el cambio vertical en dirección de P_1 a P_2 y puede ser positivo, negativo o cero. El denominador $x_2 - x_1$ es el cambio horizontal de P_1 a P_2, y puede ser positivo o negativo, pero nunca cero, porque l no es paralela al eje y si existe una pendiente. En la figura 1(a) la pendiente es positiva y decimos que la recta *sube*. En la figura 1(b) la pendiente es negativa y la recta *cae*.

En el proceso de hallar la pendiente de una recta, no importa cuál punto marquemos como P_1 y cuál como P_2, porque

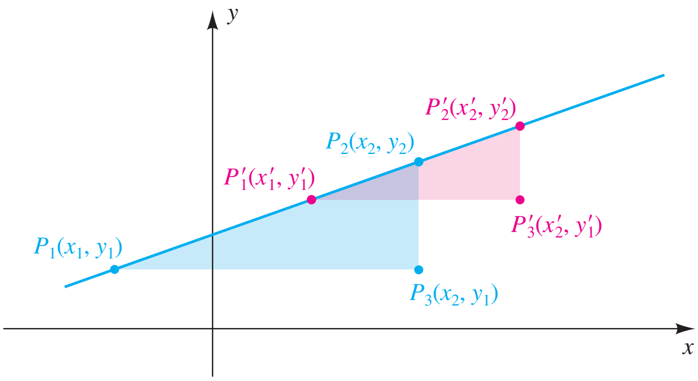
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Si los puntos se marcan de modo que $x_1 < x_2$, como en la figura 1, entonces $x_2 - x_1 > 0$ y por lo tanto la pendiente es positiva, negativa o cero, en caso de que $y_2 > y_1$, $y_2 < y_1$, o $y_2 = y_1$, respectivamente.

La definición de pendiente no depende de los dos puntos que se escojan en l. Si se usan otros puntos $P_1'(x_1', y_1')$ y $P_2'(x_2', y_2')$, entonces, como en la figura 2, el triángulo con vértices P_1', P_2', y $P_3'(x_2', y_1')$ es semejante al triángulo con vértices P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$. Como las razones entre lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}.$$

Figura 2



EJEMPLO 1 Hallar pendientes

Trace la recta que pasa por cada par de puntos y encuentre su pendiente m:

(a) $A(-1, 4)$ y $B(3, 2)$ **(b)** $A(2, 5)$ y $B(-2, -1)$

(c) $A(4, 3)$ y $B(-2, 3)$ **(d)** $A(4, -1)$ y $B(4, 4)$

SOLUCIÓN Las rectas se trazan en la figura 3. Usamos la definición de pendiente para hallar la pendiente de cada recta.

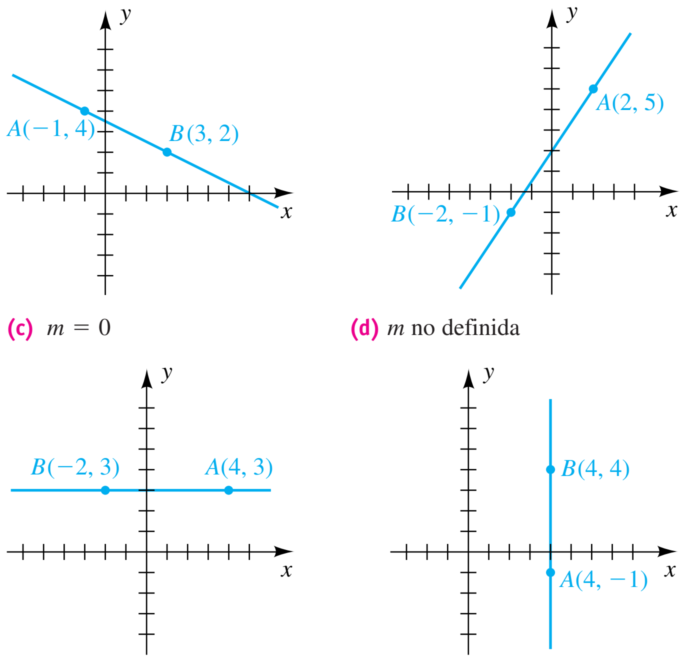


Figura 3

(a) $m = -\frac{1}{2}$ **(b)** $m = \frac{3}{2}$

(c) $m = 0$ **(d)** m no definida

(a) $m = \dfrac{2 - 4}{3 - (-1)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

(b) $m = \dfrac{5 - (-1)}{2 - (-2)} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

(c) $m = \dfrac{3 - 3}{-2 - 4} = \dfrac{0}{-6} = 0$

(d) La pendiente no está definida porque la recta es paralela al eje y. Nótese que si se usa la fórmula para m, el denominador es cero.

EJEMPLO 2 **Trazar una recta con una pendiente determinada**

Trace la recta que pasa por $P(2, 1)$ que tiene

(a) pendiente $\frac{5}{3}$ **(b)** pendiente $-\frac{5}{3}$

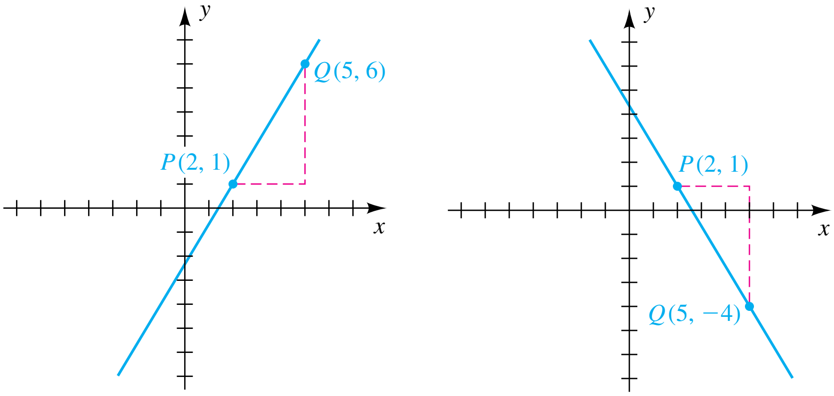
SOLUCIÓN Si la pendiente de una recta es a/b y b es positiva, entonces por cada cambio de b unidades en la dirección horizontal, la recta sube o cae $|a|$ unidades, dependiendo de si a es positiva o negativa, respectivamente.

(a) Si $P(2, 1)$ está en la recta y $m = \frac{5}{3}$, podemos obtener otro punto sobre la recta al iniciar en P y moviéndonos 3 unidades a la derecha y 5 unidades *hacia arriba*. Esto nos da el punto $Q(5, 6)$ y la recta está determinada como en la figura 4(a).

(continúa)

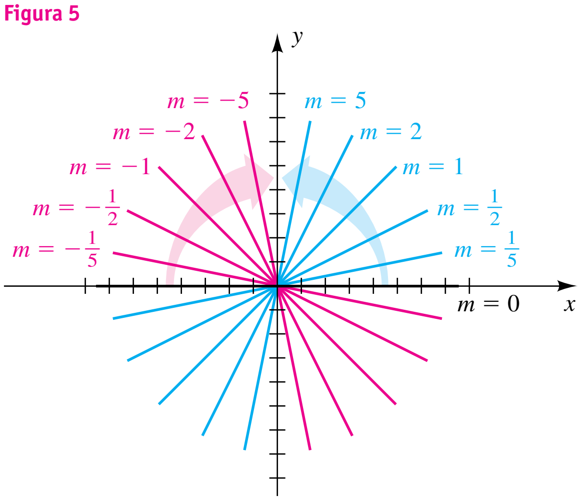
(b) Si $P(2, 1)$ está en la recta y $m = -\frac{5}{3}$, nos movemos 3 unidades a la derecha y 5 unidades *hacia abajo*, obteniendo la recta que pasa por $Q(5, -4)$, como en la figura 4(b).

Figura 4
(a) $m = \frac{5}{3}$ **(b)** $m = -\frac{5}{3}$



El diagrama de la figura 5 indica las pendientes de varias rectas que pasan por el origen. La recta que se encuentra en el eje x tiene pendiente $m = 0$. Si esta recta se hace girar alrededor de O *en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj* (como se indica con la flecha azul), la pendiente es positiva y aumenta, llegando al valor 1 cuando la recta biseca al primer cuadrante y continúa aumentando a medida que la recta se acerca al eje y. Si hacemos girar la recta de pendiente $m = 0$ *en el sentido de las manecillas de un reloj* (como se indica con la flecha roja), la pendiente es negativa, llegando al valor -1 cuando la recta biseca al segundo cuadrante y se hace grande y negativa a medida que la recta se acerca al eje y.

Figura 5



Las rectas que son horizontales o verticales tienen ecuaciones sencillas, como se indica en la tabla siguiente.

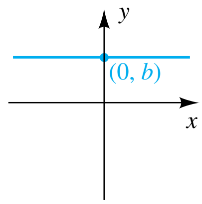
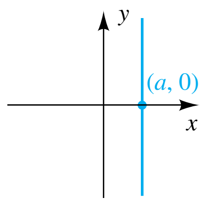
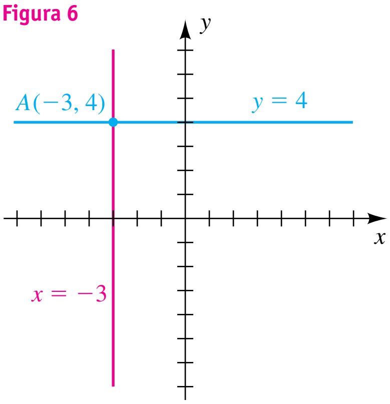
Terminología	Definición	Gráfica	Ecuación	Pendiente
Recta horizontal	Una recta paralela al eje x		$y = b$ la intersección con el eje y es b	La pendiente es 0
Recta vertical	Una recta paralela al eje y		$x = a$ la intersección con el eje x es a	La pendiente no está definida

Figura 6



Un error común es considerar la gráfica de $y = b$ como si sólo consistiera de un solo punto $(0, b)$. Si expresamos la ecuación en la forma $0 \cdot x + y = b$, vemos que el valor de x es indiferente; así, la gráfica de $y = b$ está formada por los puntos (x, b) para *toda* x y por tanto es una recta horizontal. Del mismo modo, la gráfica de $x = a$ es la recta vertical formada por todos los puntos (a, y), donde y es un número real.

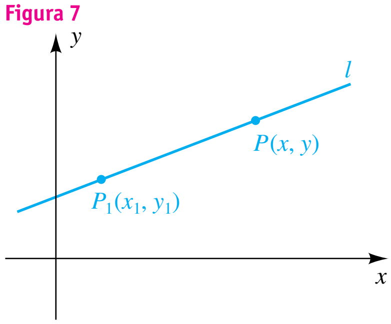
EJEMPLO 3 Hallar ecuaciones de rectas horizontales y verticales

Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $A(-3, 4)$ que sea paralela a

(a) el eje x **(b)** el eje y

SOLUCIÓN Las dos rectas están trazadas en la figura 6. Como se indica en la tabla precedente, las ecuaciones son $y = 4$ para la parte (a) y $x = -3$ para la parte (b).

Figura 7



A continuación busquemos la ecuación de una recta l que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m. Si $P(x, y)$ es cualquier punto con $x \neq x_1$ (vea figura 7), entonces P está en l si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es m, es decir, si

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Nótese que (x_1, y_1) es una solución de la última ecuación y por tanto los puntos en l son precisamente los puntos que corresponden a las soluciones. Esta ecuación para l se conoce como **forma de punto pendiente.**

Forma de punto pendiente para la ecuación de una recta	Una ecuación para la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m es $$y - y_1 = m(x - x_1).$$

La forma de punto pendiente es sólo una posibilidad para una ecuación de una recta. Hay numerosas ecuaciones equivalentes. A veces simplificamos la ecuación obtenida usando la forma de punto pendiente para

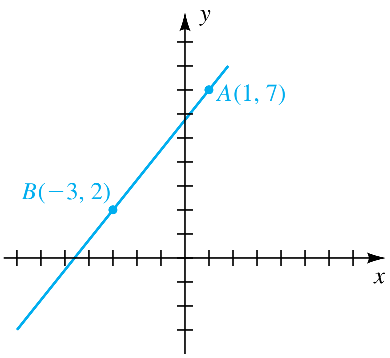
$$ax + by = c \qquad \text{o} \qquad ax + by + d = 0,$$

donde a, b y c son enteros sin factor común, $a > 0$, y $d = -c$.

EJEMPLO 4 Hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$.

Figura 8



SOLUCIÓN La recta está trazada en la figura 8. La fórmula para la pendiente m nos da

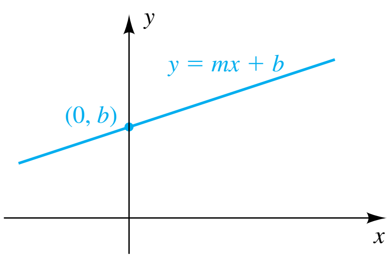
$$m = \frac{7 - 2}{1 - (-3)} = \frac{5}{4}.$$

Podemos usar las coordenadas de A o de B para (x_1, y_1) en la forma de punto pendiente. Con el uso de $A(1, 7)$ tenemos

$$\begin{aligned} y - 7 &= \tfrac{5}{4}(x - 1) && \text{forma de punto pendiente} \\ 4(y - 7) &= 5(x - 1) && \text{multiplique por 4} \\ 4y - 28 &= 5x - 5 && \text{multiplique factores} \\ -5x + 4y &= 23 && \text{reste } 5x \text{ y sume 28} \\ 5x - 4y &= -23 && \text{multiplique por } -1 \end{aligned}$$

La última ecuación es una de las formas deseadas para la ecuación de una recta. Otra es $5x - 4y + 23 = 0$.

Figura 9



La forma de punto pendiente para la ecuación de una recta se puede reescribir como $y = mx - mx_1 + y_1$, que es de la forma

$$y = mx + b$$

con $b = -mx_1 + y_1$. El número real b es la intersección con el eje y de la gráfica, como se indica en la figura 9. Como la ecuación $y = mx + b$ muestra la pendiente m y el cruce b con el eje y de l, se denomina **forma de ordenada en el origen** para la ecuación de una recta. Recíprocamente, si comenzamos con $y = mx + b$, podemos escribir

$$y - b = m(x - 0).$$

Comparando esta ecuación con la forma de punto pendiente, vemos que la gráfica es una recta con pendiente m y que pasa por el punto $(0, b)$. Hemos demostrado el siguiente resultado.

Forma de ordenada en el origen para la ecuación de una recta	La gráfica de $y = mx + b$ es una recta que tiene pendiente m y cruce b con el eje y.

EJEMPLO 5 **Expresar una ecuación en forma de ordenada en el origen**

Exprese la ecuación $2x - 5y = 8$ en forma de ordenada en el origen.

SOLUCIÓN Nuestra meta es despejar y de la ecuación dada para obtener la forma $y = mx + b$. Podemos proceder como sigue:

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 8 && \text{enunciado} \\ -5y &= -2x + 8 && \text{reste } 2x \\ y &= \left(\frac{-2}{-5}\right)x + \left(\frac{8}{-5}\right) && \text{divida entre } -5 \\ y &= \tfrac{2}{5}x + \left(-\tfrac{8}{5}\right) && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

La última ecuación es la forma de ordenada en el origen $y = mx + b$ con pendiente $m = \frac{2}{5}$ y cruce con el eje y de $b = -\frac{8}{5}$.

De la forma de punto pendiente se deduce que toda recta es una gráfica de una ecuación

$$ax + by = c,$$

donde a, b y c son números reales y a y b no son cero ambas. A esta ecuación se le llama **ecuación lineal** en x y y. Demostremos, recíprocamente, que la gráfica de $ax + by = c$, con a y b sin que sean cero ambas, es siempre una recta. Si $b \neq 0$, podemos despejar y y obtener

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \frac{c}{b},$$

que, por la forma de ordenada en el origen, es una ecuación de una recta con pendiente $-a/b$ y c/b de cruce con el eje y. Si $b = 0$ pero $a \neq 0$, podemos despejar x, obteniendo $x = c/a$, que es la ecuación de una recta vertical con intersección c/a con el eje x. Esta discusión establece el siguiente resultado.

Forma general para la ecuación de una recta	La gráfica de una ecuación lineal $ax + by = c$ es una recta y, recíprocamente, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

Para mayor sencillez, usamos la terminología *la recta* $ax + by = c$ más que *la recta con ecuación* $ax + by = c$.

EJEMPLO 6 **Trazar la gráfica de una ecuación lineal**

Trace la gráfica de $2x - 5y = 8$.

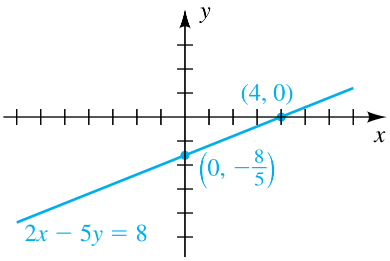
SOLUCIÓN Sabemos, de la exposición precedente, que la gráfica es una recta y que es suficiente hallar dos puntos en la gráfica. Encontremos los puntos de intersección con los ejes x y y al sustituir $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente, en la ecuación dada $2x - 5y = 8$.

cruce con el eje x: Si $y = 0$, entonces $2x = 8$, o $x = 4$.

cruce con el eje y: Si $x = 0$, entonces $-5y = 8$, o $y = -\frac{8}{5}$.

Localizando los puntos $(4, 0)$ y $\left(0, -\frac{8}{5}\right)$ y trazando la recta que pase por ellos nos da la gráfica de la figura 10.

Figura 10



El siguiente teorema especifica la relación entre **rectas paralelas** (rectas en un plano que no se cruzan) y pendiente.

Teorema de pendientes de rectas paralelas	Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

PRUEBA Sean l_1 y l_2 rectas distintas de pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Si los puntos de intersección con el eje y son b_1 y b_2 (vea la figura 11), entonces, por la forma de ordenada en el origen, las rectas tienen ecuaciones

$$y = m_1x + b_1 \qquad \text{y} \qquad y = m_2x + b_2.$$

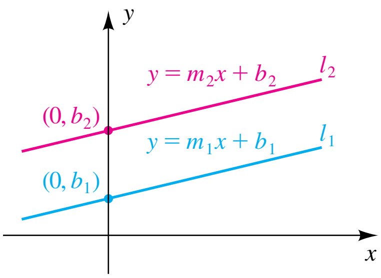
Las rectas se cruzan en algún punto (x, y) si y sólo si los valores de y son iguales para alguna x, es decir, si

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2,$$

o bien,
$$(m_1 - m_2)x = b_2 - b_1.$$

De la última ecuación se puede despejar x si y sólo si $m_1 - m_2 \neq 0$. Hemos demostrado que las rectas l_1 y l_2 se cruzan si y sólo si $m_1 \neq m_2$. Por lo tanto, *no* se cruzan (son paralelas) si y sólo si $m_1 = m_2$.

Figura 11



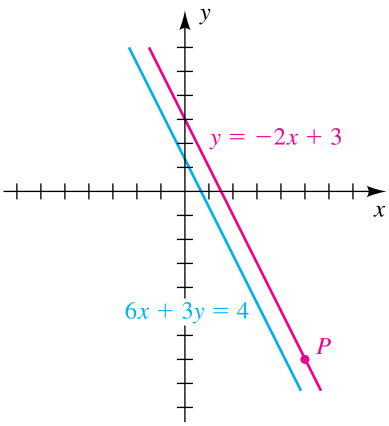
EJEMPLO 7 **Hallar una ecuación de una recta paralela a una recta determinada**

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $P(5, -7)$ que es paralela a la recta $6x + 3y = 4$.

SOLUCIÓN Primero expresamos la ecuación dada en forma de ordenada en el origen:

$$\begin{aligned} 6x + 3y &= 4 && \text{enunciado} \\ 3y &= -6x + 4 && \text{reste } 6x \\ y &= -2x + \tfrac{4}{3} && \text{divida entre 3} \end{aligned}$$

Figura 12



La última ecuación está en la forma de ordenada en el origen, $y = mx + b$, con pendiente $m = -2$ y cruce de $\frac{4}{3}$ con el eje y. Como las rectas paralelas tienen la misma pendiente, la recta requerida también tiene pendiente -2. Usando el punto $P(5, -7)$ nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned} y - (-7) &= -2(x - 5) && \text{forma de ordenada en el origen} \\ y + 7 &= -2x + 10 && \text{simplifique} \\ y &= -2x + 3 && \text{reste 7} \end{aligned}$$

La última ecuación está en la forma de ordenada en el origen y muestra que la recta paralela que hemos encontrado tiene cruce 3 con el eje y. Esta recta y la recta dada se trazan en la figura 12.

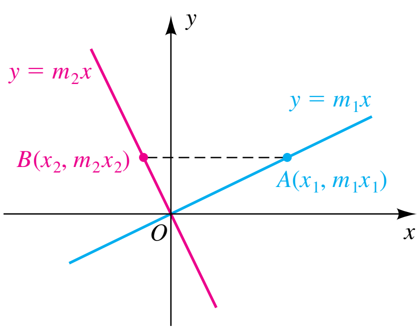
Como solución alternativa, podríamos usar el hecho de que las rectas de la forma $6x + 3y = k$ tienen la misma pendiente que la recta dada y por tanto son paralelas a ella. Sustituyendo $x = 5$ y $y = -7$ en la ecuación $6x + 3y = k$ nos da $6(5) + 3(-7) = k$ o bien, lo que es equivalente, $k = 9$. La ecuación $6x + 3y = 9$ es equivalente a $y = -2x + 3$.

Si las pendientes de dos rectas no verticales no son iguales, entonces las rectas no son paralelas y se cruzan en exactamente un punto.

El siguiente teorema nos da información acerca de **rectas perpendiculares** (rectas que se cruzan a un ángulo recto).

Teorema de pendientes de rectas perpendiculares	Dos rectas con pendiente m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $$m_1 m_2 = -1.$$

Figura 13



PRUEBA Para mayor sencillez, consideremos el caso especial de dos rectas que se cruzan en el origen O, como se ilustra en la figura 13. Las ecuaciones de estas rectas son $y = m_1x$ y $y = m_2x$. Si, como en la figura, escogemos los puntos $A(x_1, m_1x_1)$ y $B(x_2, m_2x_2)$ diferentes de O en las rectas, entonces las rectas son perpendiculares si y sólo si el ángulo AOB es un ángulo recto. Aplicando el teorema de Pitágoras, sabemos que el ángulo AOB es un ángulo recto si y sólo si

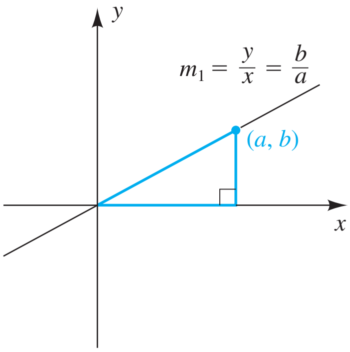
$$[d(A, B)]^2 = [d(O, B)]^2 + [d(O, A)]^2$$

o bien, por la fórmula de la distancia,

$$(x_2 - x_1)^2 + (m_2x_2 - m_1x_1)^2 = x_2^2 + (m_2x_2)^2 + x_1^2 + (m_1x_1)^2.$$

(continúa)

Figura 14



Elevar al cuadrado los términos, simplificar y factorizar nos da

$$-2m_1m_2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0$$
$$-2x_1x_2(m_1m_2 + 1) = 0.$$

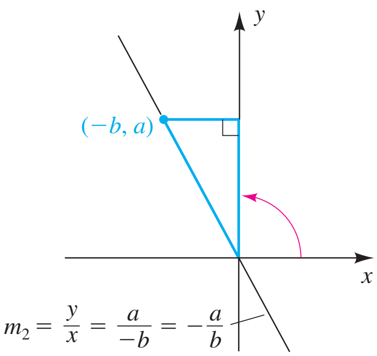
Como x_1 y x_2 no son cero, podemos dividir ambos lados entre $-2x_1x_2$, obteniendo $m_1m_2 + 1 = 0$. Así, las rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$.

El mismo tipo de prueba se puede dar si las rectas se cruzan en *cualquier* punto (a, b).

Una forma cómoda de recordar las condiciones sobre pendientes de rectas perpendiculares es notar que m_1 y m_2 deben ser *recíprocos negativos* entre sí, es decir, $m_1 = -1/m_2$ y $m_2 = -1/m_1$.

Podemos visualizar el resultado del último teorema como sigue. Trace un triángulo como en la figura 14; la recta que contiene su hipotenusa tiene pendiente $m_1 = b/a$. Ahora haga girar el triángulo 90° como en la figura 15. La recta ahora tiene pendiente $m_2 = a/(-b)$, que es el recíproco negativo de m_1.

Figura 15



EJEMPLO 8 Hallar una ecuación de una recta perpendicular a una recta determinada

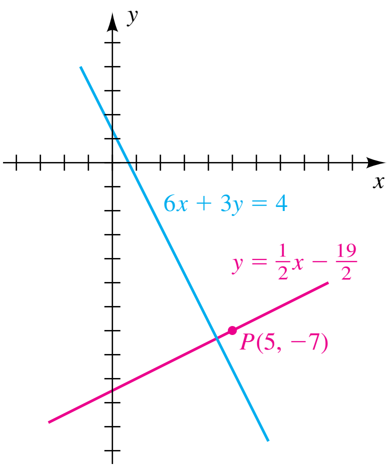
Encuentre la forma ordenada en el origen para la recta que pasa por $P(5, -7)$ que es perpendicular a la recta $6x + 3y = 4$.

SOLUCIÓN Consideramos la recta $6x + 3y = 4$ en el ejemplo 7 y encontramos que su pendiente es -2. En consecuencia, la pendiente de la recta requerida es el recíproco negativo $-[1/(-2)]$, o sea $\frac{1}{2}$. El uso de $P(5, -7)$ nos da lo siguiente:

$$y - (-7) = \tfrac{1}{2}(x - 5) \quad \text{forma de punto pendiente}$$
$$y + 7 = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{2} \quad \text{simplifique}$$
$$y = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{19}{2} \quad \text{poner en forma de ordenada en el origen}$$

La última ecuación está en la forma de ordenada en el origen y muestra que la recta perpendicular tiene intersección $-\frac{19}{2}$ con el eje y. Esta recta y la recta dada se trazan en la figura 16.

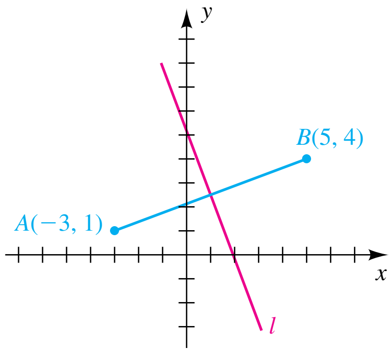
Figura 16



EJEMPLO 9 Hallar una ecuación de una mediatriz

Dados $A(-3, 1)$ y $B(5, 4)$, encuentre la forma general de la mediatriz l del segmento de recta AB.

Figura 17



SOLUCIÓN El segmento de recta AB y su mediatriz l se muestran en la figura 17. Calculamos lo siguiente, donde M es el punto medio de AB:

Coordenadas de M:	$\left(\dfrac{-3+5}{2}, \dfrac{1+4}{2}\right) = \left(1, \dfrac{5}{2}\right)$	fórmula del punto medio
Pendiente de AB:	$\dfrac{4-1}{5-(-3)} = \dfrac{3}{8}$	fórmula de pendiente
Pendiente de l:	$-\dfrac{1}{\frac{3}{8}} = -\dfrac{8}{3}$	recíproco negativo de $\frac{3}{8}$

Usando el punto $M\left(1, \frac{5}{2}\right)$ y pendiente $-\frac{8}{3}$ nos da las siguientes ecuaciones equivalentes de l:

$$y - \tfrac{5}{2} = -\tfrac{8}{3}(x-1) \qquad \text{forma de punto pendiente}$$
$$6y - 15 = -16(x-1) \qquad \text{multiplique por el mcd, 6}$$
$$6y - 15 = -16x + 16 \qquad \text{multiplique}$$
$$16x + 6y = 31 \qquad \text{ponga en forma general}$$

Dos variables x y y están **linealmente relacionadas** si $y = ax + b$, donde a y b son números reales y $a \neq 0$. Las relaciones lineales entre variables se presentan con frecuencia en problemas aplicados. El siguiente ejemplo da una ilustración.

EJEMPLO 10 Relacionar temperatura del aire con altitud

La relación entre la temperatura del aire T (en °F) y la altitud h (en pies sobre el nivel del mar) es aproximadamente lineal para $0 \leq h \leq 20{,}000$. Si la temperatura al nivel del mar es 60°F, un aumento de 5000 pies en altitud baja la temperatura del aire en alrededor de 18°.

(a) Exprese T en términos de h y trace la gráfica en un sistema de coordenadas hT.

(b) Aproxime la temperatura del aire a una altitud de 15,000 pies.

(c) Aproxime la altitud a la que la temperatura sea 0°.

SOLUCIÓN

(a) Si T está linealmente relacionada con h, entonces

$$T = ah + b$$

para algunas constantes a y b (a representa la pendiente y b la intersección en T). Como $T = 60°$ cuando $h = 0$ ft (nivel del mar), el punto de cruce T es 60, y la temperatura T para $0 \leq h \leq 20{,}000$ está dada por

$$T = ah + 60.$$

De los datos dados, observamos que cuando la altitud $h = 5000$ ft, la temperatura $T = 60° - 18° = 42°$. En consecuencia, podemos hallar a como sigue:

$$42 = a(5000) + 60 \qquad \text{sea } T = 42 \text{ y } h = 5000$$
$$a = \frac{42-60}{5000} = -\frac{9}{2500} \qquad \text{despeje } a$$

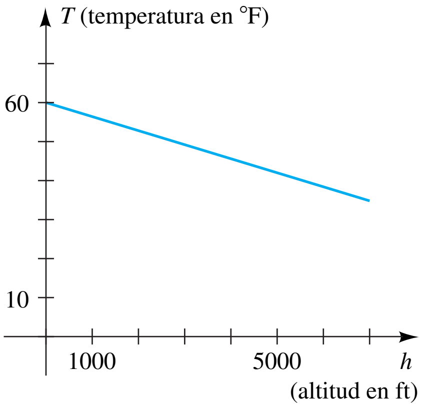
(continúa)

Sustituyendo por a en $T = ah + 60$ nos da la fórmula siguiente para T:

$$T = -\tfrac{9}{2500}h + 60$$

La gráfica aparece en la figura 18, con diferentes escalas en los ejes.

Figura 18



(b) Usando la última fórmula para T obtenida en la parte (a), encontramos que la temperatura (en °F) cuando $h = 15{,}000$ es

$$T = -\tfrac{9}{2500}(15{,}000) + 60 = -54 + 60 = 6.$$

(c) Para hallar la altitud h que corresponde a $T = 0°$, procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} T &= -\tfrac{9}{2500}h + 60 && \text{de la parte (a)} \\ 0 &= -\tfrac{9}{2500}h + 60 && \text{sea } T = 0 \\ \tfrac{9}{2500}h &= 60 && \text{sume } \tfrac{9}{2500}h \\ h &= 60 \cdot \tfrac{2500}{9} && \text{multiplique por } \tfrac{2500}{9} \\ h &= \frac{50{,}000}{3} \approx 16{,}667 \text{ ft} && \text{simplifique y aproxime} \end{aligned}$$

Un **modelo matemático** es una descripción matemática de un problema. Para nuestros fines, estas descripciones serán gráficas y ecuaciones. En el último ejemplo, la ecuación $T = -\tfrac{9}{2500}h + 60$ *modela* la relación entre temperatura del aire y altitud.

En el siguiente ejemplo, encontramos un modelo de la forma $y = mx + b$, llamada la *recta de regresión lineal*. Podemos considerar esta recta como *la recta de mejor ajuste*, es decir, la única recta que mejor describe el comportamiento de los datos.

EJEMPLO 11 **Hallar una recta de mejor ajuste**

(a) Encuentre la recta de mejor ajuste que aproxime los datos siguientes en tiempos de récord mundial para carrera de 100 metros planos para mujeres.

Año (x)	Corredora	Tiempo en segundos (y)
1952	Marjorie Jackson	11.4
1960	Wilma Rudolph	11.3
1972	Renate Stecher	11.07
1984	Evelyn Ashford	10.76

(b) Grafique los datos y la recta de regresión.

(c) Wyomia Tyus tenía el récord en 1968 en 11.08 segundos. ¿Qué tiempo pronostica el modelo para 1968? Esta pregunta se llama **interpolación,** puesto que debemos estimar un valor entre valores conocidos. ¿Qué tiempo predice el modelo para 1988? Esta pregunta requiere de **extrapolación**, porque debemos estimar un valor fuera de valores conocidos.

(d) Interprete la pendiente de la recta.

SOLUCIÓN

Introduzca los datos.

TI-83/4 Plus

(a) Ponga años en L1, tiempos en L2.

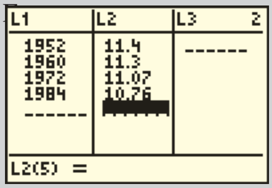
TI-86

Ponga años en xStat, tiempos en yStat.

Borre todas las asignaciones y listas Y en este momento. Una lista se puede borrar al poner el cursor en el nombre de la lista y pulsar CLEAR y ▽.

TI-83/4 Plus:

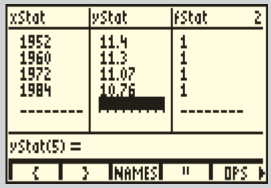
STAT 1 1952 ENTER
1960 ENTER 1972 ENTER 1984 ENTER
△ (4 veces) ▷ 11.4 ENTER
11.3 ENTER 11.07 ENTER 10.76 ENTER



TI-86:

2nd STAT EDIT(F2) 1952 ENTER
1960 ENTER 1972 ENTER 1984 ENTER
△ (4 veces) ▷ 11.4 ENTER
11.3 ENTER 11.07 ENTER 10.76 ENTER

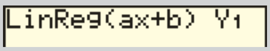
Llene la lista de frecuencia, fStat, con unos.



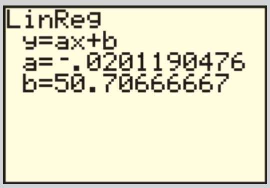
Encuentre la recta de mejor ajuste (la ecuación de regresión) y guárdela en Y_1.

TI-83/4 Plus:

STAT ▷ 4
VARS ▷ 1 1 ENTER

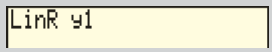


⋮

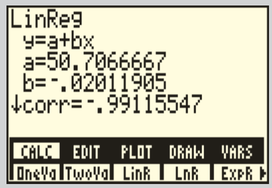


TI-86:

EXIT 2nd STAT CALC(F1) LinR(F3)
2nd alpha Y 1 ENTER



⋮



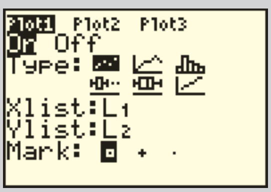
De la pantalla, vemos que la recta de mejor ajuste tiene la ecuación (aproximada) $y = -0.02x + 50.71$. En la TI-83/4 Plus, para ver valores r^2 y r encienda DiagnosticOn del CATALOG.

(b)

Encienda STAT PLOT 1.

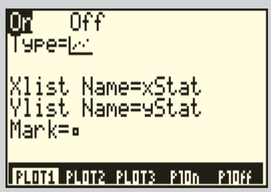
TI-83/4 Plus:

2nd STAT PLOT 1 ENTER

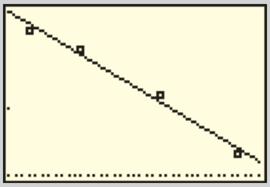
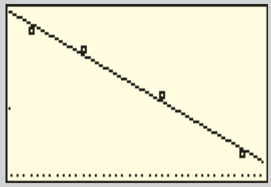
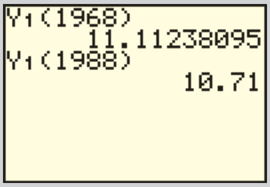
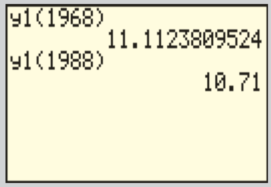


TI-86:

2nd STAT PLOT(F3) PLOT1(F1) ENTER



(continúa)

Grafique los datos en la recta de regresión.	ZOOM 9	GRAPH ZOOM(F3) MORE ZDATA(F5) CLEAR
		
(c) Encuentre Y_1 (1968).	2nd QUIT CLEAR VARS ▷ 1 1 (1968) ENTER	2nd QUIT CLEAR 2nd alpha Y 1 (1968) ENTER
Encuentre Y_1 (1988).	2nd ENTRY ◁ (3 veces) 8 ENTER	2nd ENTRY ◁ (3 veces) 8 ENTER
		

Del modelo, obtenemos una estimación de 11.11 segundos para 1968; el tiempo real fue 11.08 segundos. Para $x = 1988$, obtenemos $y = 10.71$. En 1988, Florence Griffith-Joyner destrozó el récord mundial con un tiempo de 10.49 segundos disminuyendo por mucho, esa predicción.

(d) La pendiente de la recta de regresión es alrededor de -0.02, lo cual indica que el tiempo de récord mundial está decreciendo en 0.02 segundos/año.

3.3 *Ejercicios*

Ejer. 1-6: Trace la recta que pasa por A y B, y encuentre su pendiente m.

1 $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$

2 $A(4, -1)$, $B(-6, -3)$

3 $A(2, 5)$, $B(-7, 5)$

4 $A(5, -1)$, $B(5, 6)$

5 $A(-3, 2)$, $B(-3, 5)$

6 $A(4, -2)$, $B(-3, -2)$

Ejer. 7-10: Use pendientes para demostrar que los puntos son vértices del polígono especificado.

7 $A(-3, 1)$, $B(5, 3)$, $C(3, 0)$, $D(-5, -2)$; paralelogramo

8 $A(2, 3)$, $B(5, -1)$, $C(0, -6)$, $D(-6, 2)$; trapecio

9 $A(6, 15)$, $B(11, 12)$, $C(-1, -8)$, $D(-6, -5)$; rectángulo

10 $A(1, 4)$, $B(6, -4)$, $C(-15, -6)$; triángulo rectángulo

11 Si tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(-1, -3)$, $B(4, 2)$, y $C(-7, 5)$, encuentre el cuarto vértice.

12 Los $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, y $D(x_4, y_4)$ denotan los vértices de un cuadrilátero arbitrario. Demuestre que los segmentos de recta que unen los puntos medios de lados adyacentes forman un paralelogramo.

Ejer. 13-14: Trace la gráfica de $y = mx$ para los valores dados de m.

13 $m = 3, -2, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}$

14 $m = 5, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

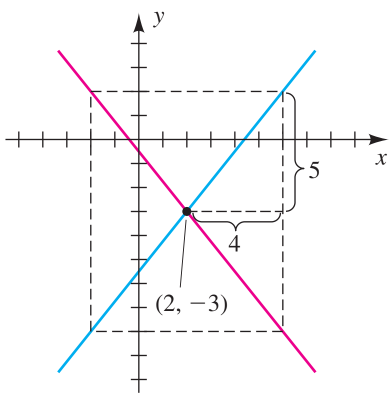
Ejer. 15-16: Trace la gráfica de la recta que pasa por P para cada valor de m.

15 $P(3, 1)$; $m = \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{5}$

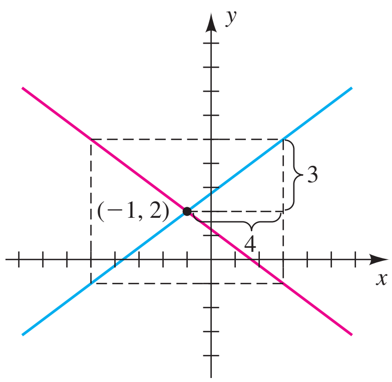
16 $P(-2, 4)$; $m = 1, -2, -\frac{1}{2}$

Ejer. 17-18: Escriba ecuaciones de las rectas.

17



18



Ejer. 19-20: Trace las gráficas de las rectas en el mismo plano de coordenadas.

19 $y = x + 3$, $y = x + 1$, $y = -x + 1$

20 $y = -2x - 1$, $y = -2x + 3$, $y = \frac{1}{2}x + 3$

Ejer. 21-32: Encuentre una forma general de una ecuación de la recta que pasa por el punto A que satisfaga la condición dada.

21 $A(5, -2)$

(a) paralelo al eje y

(b) perpendicular al eje y

22 $A(-4, 2)$

(a) paralelo al eje x

(b) perpendicular al eje x

23 $A(5, -3)$; pendiente -4

24 $A(-1, 4)$; pendiente $\frac{2}{3}$

25 $A(4, 0)$; pendiente -3

26 $A(0, -2)$; pendiente 5

27 $A(4, -5)$; que pase por $B(-3, 6)$

28 $A(-1, 6)$; cruce con el eje x en 5

29 $A(2, -4)$; paralelo a la recta $5x - 2y = 4$

30 $A(-3, 5)$; paralelo a la recta $x + 3y = 1$

31 $A(7, -3)$; perpendicular a la recta $2x - 5y = 8$

32 $A(4, 5)$; perpendicular a la recta $3x + 2y = 7$

Ejer. 33-36: Encuentre la forma de ordenada en el origen de la recta que satisface las condiciones dadas.

33 Intersección con el eje x en 4, intersección con el eje y en -3

34 Intersección con el eje x en -5, intersección con el eje y en -1

35 Que pase por los puntos $A(5, 2)$ y $B(-1, 4)$

36 Que pase por los puntos $A(-2, 1)$ y $B(3, 7)$

Ejer. 37-38: Encuentre la forma general de una ecuación para la mediatriz del segmento AB.

37 $A(3, -1)$, $B(-2, 6)$

38 $A(4, 2)$, $B(-2, 10)$

Ejer. 39-40: Encuentre una ecuación para la recta que biseca los cuadrantes dados.

39 II y IV

40 I y III

Ejer. 41-44: Use la forma de ordenada en el origen para hallar la pendiente y cruce con el eje *y* de la recta dada y trace su gráfica.

41 $2x = 15 - 3y$

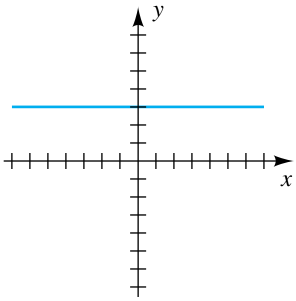
42 $7x = -4y - 8$

43 $4x - 3y = 9$

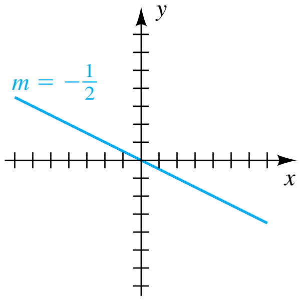
44 $x - 5y = -15$

Ejer. 45-46: Encuentre la ecuación de la recta mostrada en la figura.

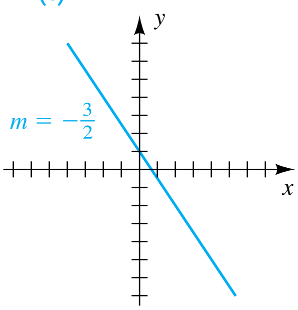
45 (a)



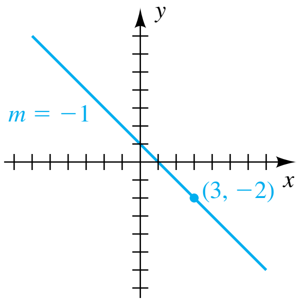
(b)



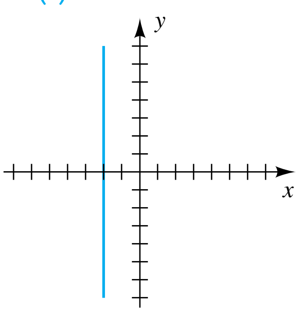
(c)



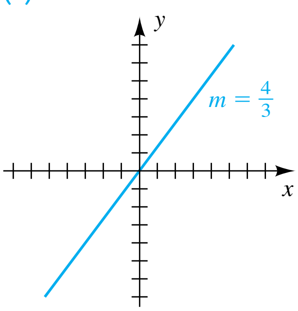
(d)



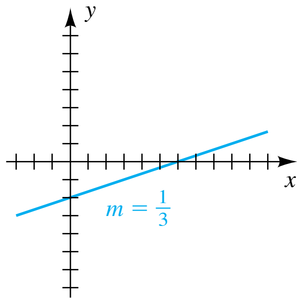
46 (a)



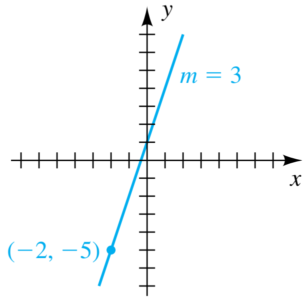
(b)



(c)



(d)



Ejer. 47-48: Si una recta *l* tiene puntos de intersección *a* y *b* con los ejes *x* y *y*, respectivamente, entonces su *forma canónica* o *simétrica* (puntos de intersección) es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Encuentre la forma canónica o simétrica para la recta dada.

47 $4x - 2y = 6$

48 $x - 3y = -2$

49 Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro $C(3, -2)$ y es tangente a la recta $y = 5$.

50 Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $P(3, 4)$.

51 **Crecimiento fetal** El crecimiento de un feto de más de 12 semanas de edad se puede aproximar con la fórmula $L = 1.53t - 6.7$, donde L es la longitud (en centímetros) y t es la edad (en semanas). La longitud prenatal se puede determinar por ultrasonido. Aproxime la edad de un feto cuya longitud es 28 centímetros.

52 **Estimación de salinidad** La salinidad del océano se refiere a la cantidad de material disuelto encontrado en una muestra de agua de mar. La salinidad S se puede estimar a partir de la cantidad C de cloruro en agua de mar usando $S = 0.03 + 1.805C$, donde S y C son medidos por peso en partes por mil. Aproxime C si S es 0.35.

53 **Peso de una ballena jorobada** El peso esperado E (en toneladas) de una ballena jorobada se puede aproximar por su longitud L (en pies) con la fórmula $W = 1.70L - 42.8$ para $30 \leq L \leq 50$.

(a) Estime el peso de una ballena jorobada de 40 pies.

(b) Si el error al estimar la longitud pudiera ser de hasta 2 pies, ¿cuál es el error correspondiente para el peso estimado?

54 Crecimiento de una ballena azul Las ballenas azules recién nacidas miden aproximadamente 24 pies de largo y pesan 3 toneladas. Las ballenas jóvenes son amamantadas durante 7 meses y, llegado el tiempo de destete, con frecuencia miden 53 pies de largo y pesan 23 toneladas. Denotemos con L y W la longitud (en pies) y el peso (en toneladas), respectivamente, de una ballena que tiene t meses de edad.

(a) Si F y t están relacionadas linealmente exprese L en términos de t.

(b) ¿Cuál es el incremento diario en el tamaño de un ballenato? (Considere un mes $= 30$ días.)

(c) Si W y t están relacionadas linealmente, exprese W en términos de t.

(d) Cuál es el incremento diario en el peso del ballenato?

55 Estadísticas de beisbol Suponga que un jugador de beisbol de las ligas mayores ha conectado 15 cuadrangulares en los primeros 14 juegos y mantiene este paso en toda la temporada de 162 juegos.

(a) Exprese el número y de cuadrangulares en términos del número x de juegos jugados.

(b) ¿Cuántos cuadrangulares conectará el jugador en la temporada?

56 Producción de queso Un fabricante de queso produce 18,000 libras de queso del 1 de enero al 24 de marzo. Suponga que este ritmo de producción continúa para el resto del año.

(a) Exprese el número y de libras de queso producidas en términos del número x del día en un año de 365 días.

(b) Prediga, a la libra más cercana, el número de libras producidas para el año.

57 Peso en la infancia Un bebé pesa 10 libras al nacer y tres años más tarde el peso del niño es 30 libras. Suponga que el peso W (en libras) en la infancia está linealmente relacionado con la edad t (en años).

(a) Exprese W en términos de t.

(b) ¿Cuál es W en el sexto cumpleaños del niño?

(c) ¿A qué edad el niño pesará 70 libras?

(d) Trace, en un plano tW, una gráfica que muestre la relación entre W y t para $0 \leq t \leq 12$.

58 Pago de préstamo Un estudiante universitario recibe un préstamo sin intereses de \$8250 de un familiar. El estudiante pagará \$125 al mes hasta pagar el préstamo.

(a) Exprese la cantidad P (en dólares) pendiente de pago en términos del tiempo t (en meses).

(b) ¿Después de cuántos meses el estudiante deberá \$5,000?

(c) Trace, en un plano tP, una gráfica que muestre la relación entre P y t para la duración del préstamo.

59 Vaporizar agua La cantidad de calor H (en joules) necesaria para convertir un gramo de agua en vapor está linealmente relacionada con la temperatura T (en °C) de la atmósfera. A 10°C esta conversión requiere 2480 joules y cada aumento en temperatura de 15°C baja la cantidad de calor necesaria en 40 joules. Exprese H en términos de T.

60 Potencia aeróbica En fisiología del ejercicio, la potencia aeróbica P se define en términos de máxima inhalación de oxígeno. Para altitudes de hasta 1800 metros, la potencia aeróbica es óptima, es decir, 100%. A más de 1800 metros, P disminuye linealmente desde el máximo de 100% a un valor cercano al 40% a 5000 metros.

(a) Exprese la potencia aeróbica P en términos de la altitud h (en metros) para $1800 \leq h \leq 5000$.

(b) Estime la potencia aeróbica en la Ciudad de México (altitud 2400 metros), sede de los Juegos Olímpicos de Verano de 1968.

61 Isla de calor urbano El fenómeno de una isla de calor urbano se ha observado en Tokio. El promedio de temperatura fue de 13.5°C en 1915 y desde entonces ha subido 0.032°C por año.

(a) Suponiendo que la temperatura T (en °C) está linealmente relacionada con el tiempo t (en años) y que $t = 0$ corresponde a 1915, exprese T en términos de t.

(b) Prediga el promedio de temperatura en el año 2010.

62 Aumento de temperatura del suelo En 1870, el promedio de temperatura del suelo en París fue de 11.8°C. Desde entonces, ha subido a un ritmo casi constante, llegando a 13.5°C en 1969.

(a) Exprese la temperatura T (en °C) del tiempo t (en años), donde $t = 0$ corresponde al año 1870 y $0 \leq t \leq 99$.

(b) ¿Durante qué año fue de 12.5°C el promedio de temperatura del suelo?

63 Gastos en un negocio El propietario de una franquicia de helados debe pagar a la casa matriz \$1000 por mes más 5% de los ingresos mensuales R. El costo de operación de la