46. Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$

47. ***Programación*** En una calculadora programable, escriba un programa que estime

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

Suponga que el programa sólo se aplicará a funciones cuyo límite cuando x tiende a c existe. [*Ayuda:* Haga $y_1 = f(x)$ y genere dos listas cuyas entradas formen los pares ordenados

$$(c \pm [0{,}1]^n, \quad f(c \pm [0{,}1]^n))$$

para $n = 0, 1, 2, 3$ y 4.]

48. Utilizando el programa creado en el Ejercicio 47, estimar el límite

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$$

49. Demostrar que si existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$, ese límite debe ser único. [*Ayuda:* Tomar

$$\lim_{x \to c} f(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} f(x) = L_2$$

y probar que $L_1 = L_2$.]

50. Consideremos la recta $f(x) = mx + b$, donde $m \neq 0$. Aplicando la definición ε-δ de límite, demostrar que

$$\lim_{x \to c} f(x) = mc + b$$

51. Demostrar que

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

es equivalente a

$$\lim_{x \to c} [f(x) - L] = 0$$

52. Consideremos la función $f(x) = (1 + x)^{1/x}$. Estimar el límite $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ evaluando f en valores de x próximos a 0. Esbozar la gráfica de f.

1.3 Cálculo analítico de límites

CONTENIDO

Propiedades de los límites

En la Sección 1.2, vimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c no depende del valor de f en $x = c$. Puede ocurrir, no obstante, que este límite sea $f(c)$. En estos casos, se puede evaluar el límite por **sustitución directa**. Esto es,

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } c$$

Las funciones con este *buen comportamiento* se dicen **continuas en c**. En la Sección 1.4, se examinará con más detalle este concepto.

TEOREMA 1.1 ALGUNOS LÍMITES BÁSICOS

Sean b, c números reales y n un entero positivo. Entonces:

1. $\lim_{x \to c} b = b$ 2. $\lim_{x \to c} x = c$ 3. $\lim_{x \to c} x^n = c^n$

EXPLORACIÓN

Para demostrar los teoremas de esta página y las siguientes, puede utilizar la definición formal ε-δ de límite de la sección previa. Damos aquí un ejemplo de cómo usar esta definición para demostrar la propiedad 2 del Teorema 1.1.

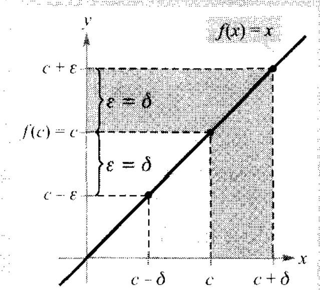
Para demostrarla, hay que probar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |x - c| < \delta$$

Como la segunda desigualdad es una versión más estricta de la primera, se puede elegir sencillamente $\delta = \varepsilon$, como se ilustra abajo. Esto completa la demostración.



Discuta esta demostración. Las demostraciones del resto de las propiedades de los límites se incluyen en el apéndice y en los ejercicios.

EJEMPLO 1 Evaluación de límites básicos

a) $\lim\limits_{x \to 2} 3 = 3$ b) $\lim\limits_{x \to -4} x = -4$ c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$ □

Nota. Cuando encuentre nuevas notaciones o símbolos en Matemáticas, asegúrese de que sabe cómo se leen. Por ejemplo, el límite del Ejemplo 1*c*) se lee «el límite de x^2 cuando x tiende a 2 es 4».

TEOREMA 1.2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Sean b, c números reales, n un entero positivo y f, g funciones con los siguientes límites

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} g(x) = K$$

1. Múltiplo escalar: $\lim\limits_{x \to c} [bf(x)] = bL$
2. Suma o diferencia: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
3. Producto: $\lim\limits_{x \to c} [f(x)g(x)] = LK$
4. Cociente: $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$, supuesto que $K \neq 0$
5. Potencias: $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$

EJEMPLO 2 El límite de un polinomio

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} (4x^2 + 3) &= \lim_{x \to 2} 4x^2 + \lim_{x \to 2} 3 && \text{Propiedad 2} \\
&= 4\left(\lim_{x \to 2} x^2\right) + \lim_{x \to 2} 3 && \text{Propiedad 1} \\
&= 4(2^2) + 3 && \text{Ejemplo 1} \\
&= 19 && \text{Simplificar}
\end{aligned}$$
□

Observemos que, en el Ejemplo 2, el límite (cuando $x \to 2$) de la función polinómica $p(x) = 4x^2 + 3$ es simplemente el valor de p en $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2} p(x) = p(2) = 4(2^2) + 3 = 19$$

Esta propiedad de *sustitución directa* es válida para todas las funciones polinómicas y todas las racionales cuyos denominadores no se anulen en el punto considerado.

TEOREMA 1.3 LÍMITES DE FUNCIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES

Sean p una función polinómica y c un número real. Entonces

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

Sean $r(x) = p(x)/q(x)$ una función racional, y c un número real tal que $q(c) \neq 0$. Entonces

$$\lim_{x \to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$$

EL SÍMBOLO DE RAÍZ CUADRADA

El primer uso de un símbolo para denotar la raíz cuadrada data del siglo XVI. Al principio, los matemáticos emplearon el símbolo $\sqrt{\ }$ que tiene sólo dos trazos. Se escogió este símbolo porque se asemejaba a una *r* minúscula para representar la palabra *raíz*.

EJEMPLO 3 Límite de una función racional

Hallar el límite $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 2}{x + 1}$

Solución: Puesto que el denominador no es 0 cuando $x = 1$, se puede aplicar el Teorema 1.3 para obtener

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 2}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 + 2}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$ □

Las funciones polinómicas y racionales constituyen dos de los tres tipos básicos de funciones algebraicas. El próximo teorema concierne al límite del tercer tipo de función algebraica, aquella en la que interviene una raíz.

TEOREMA 1.4 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN RADICAL

Sea n un entero positivo. El siguiente límite es válido para todo c si n es impar, y para todo $c > 0$ si n es par.

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

El siguiente teorema extenderá notablemente su capacidad de evaluar límites, ya que muestra cómo tratar el límite de una función compuesta.

TEOREMA 1.5 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to c} g(x) = L$ y $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$, entonces

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L)$$

EJEMPLO 4 Límite de una función compuesta

a) De

$$\lim_{x \to 0} (x^2 + 4) = 0^2 + 4 = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$$

se sigue que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$$

b) De

$$\lim_{x \to 3} (2x^2 - 10) = 2(3^2) - 10 = 8 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = 2$$

se sigue que

$$\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{2x^2 - 10} = \sqrt[3]{8} = 2$$

□

Se ha visto que los límites de muchas funciones algebraicas se pueden calcular por sustitución directa. Cada una de las seis funciones trigonométricas básicas también posee esta deseable propiedad, como establece el siguiente teorema (presentado sin demostración).

TEOREMA 1.6 LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea c un número real en el dominio de la función trigonométrica dada. Entonces

1. $\lim_{x \to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c$
2. $\lim_{x \to c} \cos x = \cos c$
3. $\lim_{x \to c} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} c$
4. $\lim_{x \to c} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} c$
5. $\lim_{x \to c} \sec x = \sec c$
6. $\lim_{x \to c} \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} c$

EJEMPLO 5 Límites de funciones trigonométricas

a) $\lim_{x \to 0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(0) = 0$

b) $\lim_{x \to \pi} (x \cos x) = \left(\lim_{x \to \pi} x\right)\left(\lim_{x \to \pi} \cos x\right) = \pi \cos(\pi) = -\pi$

c) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}^2 x = \lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^2 = 0^2 = 0$

□

Estrategia para el cálculo de límites

En las tres páginas previas, se han estudiado diversos tipos de funciones cuyos límites pueden calcularse por sustitución directa. El conocimiento de estas funciones, junto con el siguiente teorema, permiten desarrollar una estrategia para calcular límites.

TEOREMA 1.7 FUNCIONES QUE COINCIDEN SALVO EN UN PUNTO

Sea c un número real y sea $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene c. Si existe el límite de $g(x)$ cuando x tiende a c, entonces también existe el de $f(x)$ y

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$$

EJEMPLO 6 Cálculo del límite de una función

Hallar el límite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

Solución: Sea $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$. Factorizando y cancelando factores, se puede escribir f como

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x-1)}} = x^2 + x + 1 = g(x), \quad x \neq 1$$

Así pues, para todos los valores de x distintos de $x = 1$, las funciones f y g coinciden, como ilustra la Figura 1.16. Como $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ existe, se puede aplicar el Teorema 1.7 y concluir que f y g tienen el mismo límite en $x = 1$.

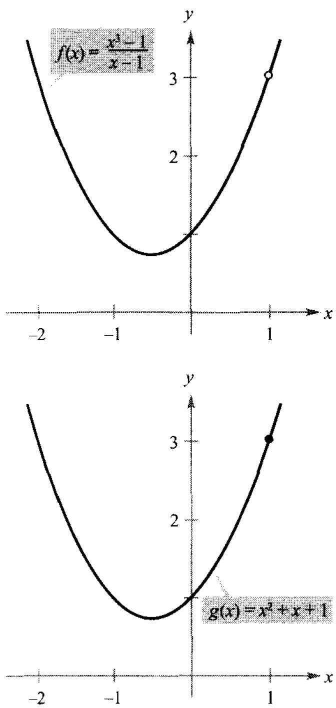


FIGURA 1.16
f y g coinciden salvo en un punto.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} && \text{Factorizar} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{x-1}} && \text{Cancelar factores idénticos} \\
&= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) && \text{Aplicar el Teorema 1.7} \\
&= 1^2 + 1 + 1 && \text{Usar sustitución directa} \\
&= 3 && \text{Simplificar}
\end{aligned}$$

□

ADVERTENCIA Cuando aplique esta estrategia al cálculo de límites, recuerde que algunas funciones no tienen límite (cuando x tiende a c). Por ejemplo, el siguiente límite no existe

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 1}{x - 1}$$

Estrategia para el cálculo de límites

1. Aprenda a reconocer qué límites pueden evaluarse por sustitución directa. (Estos límites se enumeran en los Teoremas 1.1 al 1.6.)
2. Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c *no puede* evaluarse por sustitución directa, intente encontrar una función g que coincida con f para todo x distinto de $x = c$. [Elija g tal que el límite de $g(x)$ *pueda* evaluarse por sustitución directa.]
3. Aplique el Teorema 1.7 para concluir *analíticamente* que

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = g(c)$$

4. Use una *gráfica* o una *tabla* para reforzar su conclusión.

Técnicas de cancelación y de racionalización

En los Ejemplos 7 y 8 se exhiben dos técnicas para calcular límites analíticamente. La primera supone la cancelación de factores comunes, y la segunda la racionalización del numerador de una fracción.

EJEMPLO 7 Técnica de cancelación

Hallar el límite $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

Solución: Aunque se trata del límite de una función racional, *no se puede* aplicar el Teorema 1.3 porque el límite del denominador es 0.

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to -3} (x^2 + x - 6) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -3} (x + 3) = 0 \end{cases}$$

La sustitución directa falla

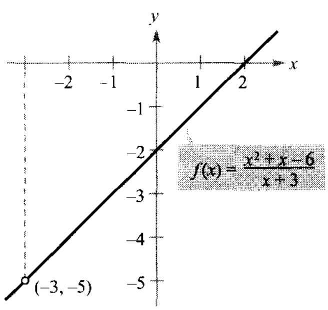


FIGURA 1.17
f no está definida para $x = -3$.

Dado que el límite del numerador también es 0, numerador y denominador tienen el factor común $(x + 3)$. Por tanto, para todo $x \neq -3$, podemos cancelar este factor para obtener

$$\frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \frac{\cancel{(x+3)}(x - 2)}{\cancel{x+3}} = x - 2, \qquad x \neq -3$$

Del Teorema 1.7, se sigue que

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \lim_{x \to -3} (x - 2) \qquad \text{Aplicar el Teorema 1.7}$$

$$= -5 \qquad \text{Usar sustitución directa}$$

Este resultado se muestra gráficamente en la Figura 1.17. Observemos que la gráfica de la función f coincide con la de la función $g(x) = x - 2$, salvo que la gráfica de f tiene un hueco en el punto $(-3, -5)$. □

En el Ejemplo 7, la sustitución directa produce la forma 0/0, que carece de significado. Tal expresión se denomina forma indeterminada porque no es posible (a partir sólo de esa forma) determinar el límite. Si al intentar evaluar un límite se llega a esta forma, debe escribirse la fracción de modo que el nuevo denominador no tenga límite 0. Una manera de conseguirlo consiste en *cancelar factores idénticos*, como se muestra en el Ejemplo 7. Otra manera es *racionalizar el numerador*, como ilustra el Ejemplo 8.

Nota. En la solución del Ejemplo 7, asegúrese de que capta la utilidad del Teorema de Factorización del Álgebra. Este teorema establece que si c es un cero de una función polinómica, entonces $(x - c)$ es un factor del polinomio. Por tanto, si aplica sustitución directa a una función racional y obtiene

$$r(c) = \frac{p(c)}{q(c)} = \frac{0}{0}$$

puede concluir que $(x - c)$ es un factor común de $p(x)$ y $q(x)$.

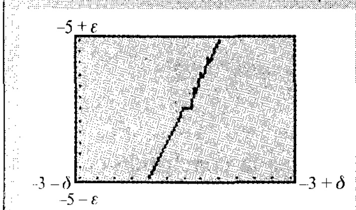


FIGURA 1.18
Gráfica incorrecta de f.

Puesto que las gráficas de

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} \quad \text{y} \quad g(x) = x - 2$$

difieren sólo en el punto $(-3, -5)$, una calculadora gráfica podría no ser capaz de distinguirlas. No obstante, debido a la configuración de puntos («pixels») y a los errores de redondeo, es posible encontrar configuraciones de pantalla que distingan las gráficas. Concretamente, aplicando el zoom repetidas veces cerca del punto $(-3, -5)$ en la gráfica de f, la calculadora podría mostrar fallos o irregularidades que no existen en la gráfica real. (Véase la Figura 1.18.) Modificando la configuración de pantalla, podría obtenerse la gráfica correcta de f.

EJEMPLO 8 Técnica de racionalización

Calcular el límite $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

Solución: Por sustitución directa, se obtiene la forma indeterminada 0/0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 0} (\sqrt{x+1} - 1) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to 0} x = 0 \end{cases}$$

La sustitución directa falla

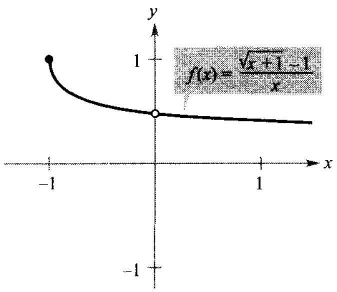


FIGURA 1.19
El límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 es $1/2$.

En este caso, podemos escribir la fracción racionalizando el denominador.

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\\
&= \frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}\\
&= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}, \quad x \neq 0
\end{aligned}
$$

Ahora, usando el Teorema 1.7, se puede evaluar el límite como sigue.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\\
&= \frac{1}{1+1}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Una tabla o una gráfica pueden servir para reforzar la conclusión de que el límite es $1/2$. (Véase la Figura 1.19.)

x tiende a 0 por la izquierda → ← x tiende a 0 por la derecha

x	−0,25	−0,1	−0,01	−0,001	0	0,001	0,01	0,1	0,25
$f(x)$	0,5359	0,5132	0,5013	0,5001	?	0,4999	0,4988	0,4881	0,4721

$f(x)$ tiende a 0,5 → ← $f(x)$ tiende a 0,5

Nota. La técnica de racionalización para el cálculo de límites se basa en multiplicar por una forma conveniente de 1. En el Ejemplo 8, la forma apropiada es

$$1 = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$

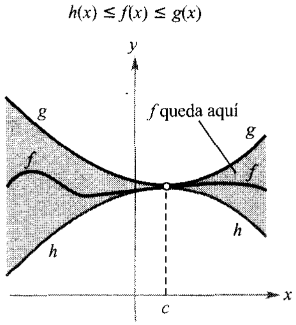


FIGURA 1.20
El teorema del encaje.

Teorema del encaje

El siguiente teorema concierne al límite de una función que está «encajada» entre otras dos, cada una de las cuales tiene el mismo límite en un valor de x dado, como ilustra la Figura 1.20. (En el apéndice se da la demostración de este teorema.)

TEOREMA 1.8 TEOREMA DEL ENCAJE

Si $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene c, excepto posiblemente en el propio c, y si

$$\lim_{x \to c} h(x) = L = \lim_{x \to c} g(x)$$

entonces $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe y es igual a L.

En la demostración del Teorema 1.9 se aprecia la utilidad del teorema del encaje.

TEOREMA 1.9 DOS LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS ESPECIALES

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

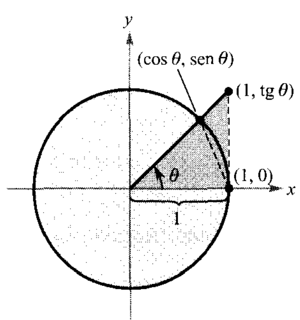
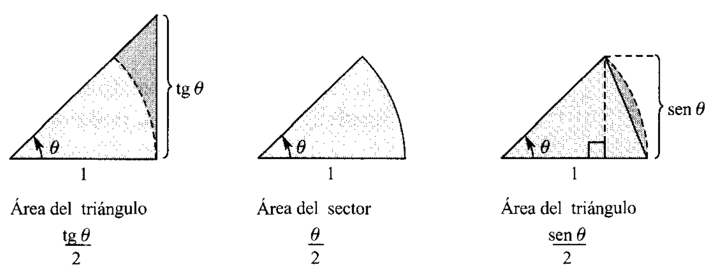


FIGURA 1.21
Para demostrar el Teorema 1.9, se usa un sector circular.

Demostración: Con el fin de evitar la confusión entre dos usos distintos de x, presentamos la demostración utilizando la variable θ, donde θ denota un ángulo agudo *medido en radianes*. La Figura 1.21 muestra un sector circular encajado entre dos triángulos.



Multiplicando cada expresión por $2/\operatorname{sen}\theta$ resulta

$$\frac{1}{\cos\theta} \geqslant \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \geqslant 1$$

y tomando inversos se obtiene

$$\cos\theta \leqslant \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leqslant 1$$

PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre la función $f(x) = \text{sen } x/x$, puede consultarse el artículo «The Function (sin x)/x» de William B. Gearhart y Harris S. Shultz en *The College Mathematics Journal*, marzo 1990.

Como $\cos\theta = \cos(-\theta)$ y $(\text{sen }\theta)/\theta = [\text{sen }(-\theta)]/(-\theta)$, concluimos que esta desigualdad es válida para todo θ no nulo del intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$. Finalmente, dado que $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ y $\lim\limits_{\theta\to 0} 1 = 1$, podemos aplicar el teorema del encaje para concluir que $\lim\limits_{\theta\to 0}(\text{sen }\theta)/\theta = 1$. La demostración del valor del segundo límite se deja como ejercicio (véase el Ejercicio 103). □

EJEMPLO 9 Un límite en el que interviene una función trigonométrica

Hallar el límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg } x}{x}$

Solución: La sustitución directa conduce a la forma indeterminada 0/0. Para resolver este problema, podemos escribir tg x como (sen x)/(cos x) y obtener

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg } x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

Ahora, como

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$$

puede obtener

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg } x}{x} &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)\\ &= (1)(1)\\ &= 1\end{aligned}$$

(Véase Figura 1.22.) □

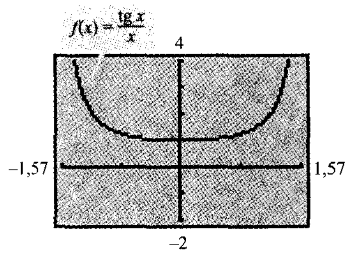


FIGURA 1.22
El límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 es 1.

EJEMPLO 10 Un límite en el que interviene una función trigonométrica

Calcular el límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen } 4x}{x}$

Solución: La sustitución directa conduce a la forma indeterminada 0/0. Para resolver este problema, podemos escribir el límite como

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 4x}{x} = 4\left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 4x}{4x}\right)$$

Haciendo ahora $y = 4x$ y observando que $x \to 0$ si y sólo si $y \to 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 4x}{x} &= 4\left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 4x}{4x}\right)\\ &= 4\left(\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen } y}{y}\right)\\ &= 4(1)\\ &= 4\end{aligned}$$

(Véase Figura 1.23.) □

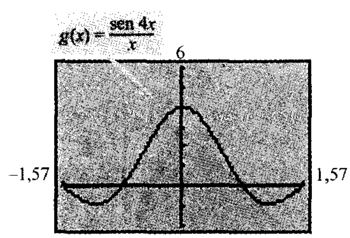


FIGURA 1.23
El límite de $g(x)$ cuando x tiende a 0 es 4.

Una calculadora permite confirmar los límites de los ejemplos. Así, las Figuras 1.22 y 1.23 muestran las gráficas de

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$$

Observe que la primera gráfica parece contener el punto (0, 1) y la segunda parece contener el (0, 4), lo que apoya las conclusiones obtenidas en los Ejemplos 9 y 10.

Ejercicios de la Sección 1.3

En los Ejercicios 1-4, representar la función en la calculadora y estimar visualmente los límites.

1. $h(x) = x^2 - 5x$

a) $\lim\limits_{x \to 5} h(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$

2. $g(x) = \dfrac{12(\sqrt{x} - 3)}{x - 9}$

a) $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

3. $f(x) = x \cos x$

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to \pi/3} f(x)$

4. $f(t) = t|t - 4|$

a) $\lim\limits_{t \to 4} f(t)$

b) $\lim\limits_{t \to -1} f(t)$

En los Ejercicios 5-28, hallar el límite.

5. $\lim\limits_{x \to 4} x^2$

6. $\lim\limits_{x \to -3} (3x + 2)$

7. $\lim\limits_{x \to 0} (2x - 1)$

8. $\lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + 1)$

9. $\lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + x - 2)$

10. $\lim\limits_{x \to 1} (3x^3 - 2x^2 + 4)$

11. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x + 1}$

12. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{x + 4}$

13. $\lim\limits_{x \to -4} (x + 3)^2$

14. $\lim\limits_{x \to 0} (2x - 1)^3$

15. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x}$

16. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2}{x + 2}$

17. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 1}{x}$

18. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x - 4}$

19. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \operatorname{sen} x$

20. $\lim\limits_{x \to \pi} \operatorname{tg} x$

21. $\lim\limits_{x \to 1} \cos \pi x$

22. $\lim\limits_{x \to 1} \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}$

23. $\lim\limits_{x \to 0} \sec 2x$

24. $\lim\limits_{x \to \pi} \cos 3x$

25. $\lim\limits_{x \to 5\pi/6} \operatorname{sen} x$

26. $\lim\limits_{x \to 5\pi/3} \cos x$

27. $\lim\limits_{x \to 3} \operatorname{tg} \left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$

28. $\lim\limits_{x \to 7} \sec \left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$

En los Ejercicios 29-32, utilizar la información dada para calcular los límites.

29. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to c} g(x) = 3$

a) $\lim\limits_{x \to c} [5g(x)]$

b) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)g(x)]$

d) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

30. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \dfrac{3}{2}$

$\lim\limits_{x \to c} g(x) = \dfrac{1}{2}$

a) $\lim\limits_{x \to c} [4f(x)]$

b) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)g(x)]$

d) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

31. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 4$

a) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^3$

b) $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{f(x)}$

c) $\lim\limits_{x \to c} [3f(x)]$

d) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^{3/2}$

32. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 27$

a) $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[3]{f(x)}$

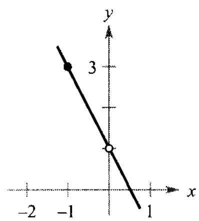
b) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{18}$

c) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^2$

d) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^{2/3}$

En los Ejercicios 33-36, usar la gráfica para determinar visualmente el límite (si existe). Cuando sea posible, hallar una función que coincida con la dada excepto en el punto en cuestión.

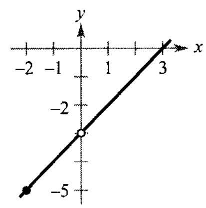
33. $g(x) = \dfrac{-2x^2 + x}{x}$



a) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$

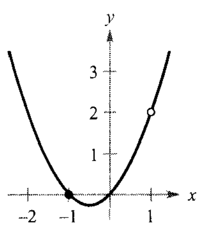
34. $h(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x}$



a) $\lim\limits_{x \to -2} h(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$

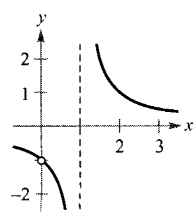
35. $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{x - 1}$



a) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$

36. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$



a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

En los Ejercicios 37-40, hallar el límite de la función (si existe). Encontrar una función que coincida con la dada salvo en el punto y representarla en la calculadora.

37. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

38. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$

39. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

40. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$

En los Ejercicios 41-52, hallar el límite (si existe).

41. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 25}$

42. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2 - x}{x^2 - 4}$

43. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

44. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$

45. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$

46. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[1/(x + 4)] - (1/4)}{x}$

47. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[1/(2 + x)] - (1/2)}{x}$

48. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$

49. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x}$

50. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$

51. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 1 - (x^2 - 2x + 1)}{\Delta x}$

52. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$

Investigación gráfica, numérica y analítica En los Ejercicios 53-56, representar la función en la calculadora y estimar el límite. Usar una tabla para reforzar la conclusión. Después, calcular el límite por métodos analíticos.

53. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

54. $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{x - 16}$

55. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[1/(2 + x)] - (1/2)}{x}$

56. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^5 - 32}{x - 2}$

En los Ejercicios 57-68, determinar el límite (si existe) de la función trigonométrica.

57. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{5x}$

58. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3(1 - \cos x)}{x}$

59. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sec \theta - 1}{\theta \sec \theta}$

60. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\cos \theta \operatorname{tg} \theta}{\theta}$

61. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

62. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x}$

63. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1 - \cos h)^2}{h}$

64. $\lim\limits_{\phi \to \pi} \phi \sec \phi$

65. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}$

66. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

67. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$

$\left[\textit{Ayuda:} \text{ Calcular el } \lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^2.\right]$

68. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

$\left[\textit{Ayuda:} \text{ Calcular el } \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2 \operatorname{sen} 2x}{2x}\right)\left(\dfrac{3x}{3 \operatorname{sen} 3x}\right).\right]$