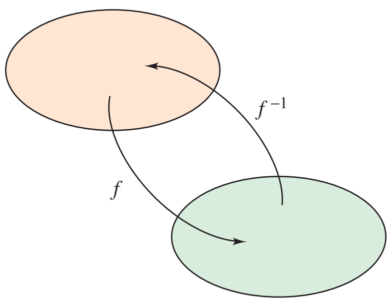
5.3 Funciones inversas

- **Verificar que una función es la inversa de otra.**
- **Determinar si una función tiene una función inversa.**
- **Encontrar la derivada de una función inversa.**

Funciones inversas



Dominio de f = recorrido o rango de f^{-1}
Dominio de f^{-1} = recorrido o rango de f
Figura 5.10

Recordar de la sección P.3 que una función se puede representar por un conjunto de pares ordenados. Por ejemplo, la función $f(x) = x + 3$ de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{4, 5, 6, 7\}$, se puede escribir como

$$f : \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}.$$

Por el intercambio de la primera y segunda coordenadas de cada par ordenado se puede formar la **función inversa** de f. Esta función se denota por f^{-1}. Ésta es una función de B en A, y se escribe como

$$f^{-1} : \{(4, 1), (5, 2), (6, 3), (7, 4)\}.$$

Notar que el dominio de f es el recorrido o rango de f^{-1}, y viceversa, como se ilustra en la figura 5.10. Las funciones f y f^{-1} tienen el efecto de "deshacer" cada una a la otra. Esto es, al componer f con f^{-1} o la composición de f^{-1} con f, se obtiene la función identidad.

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

EXPLORACIÓN

Cálculo de las funciones inversas Explicar cómo "deshacer" lo que hace cada una de las siguientes funciones. Usar la explicación para escribir la función inversa de f.

a) $f(x) = x - 5$
b) $f(x) = 6x$
c) $f(x) = \dfrac{x}{2}$
d) $f(x) = 3x + 2$
e) $f(x) = x^3$
f) $f(x) = 4(x - 2)$

Usar una herramienta de graficación para representar cada función junto con su inversa. ¿Qué observación se puede hacer acerca de cada par de gráficas?

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN INVERSA

Una función g es la **función inversa** de la función f si

$$f(g(x)) = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } g$$

y

$$g(f(x)) = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f.$$

La función g se denota por f^{-1} (se lee como "inversa de f").

NOTA Aunque la notación utilizada para la función inversa se parece a la *notación exponencial*, es un uso distinto del -1 como superíndice. Esto es, en general, $f^{-1}(x) \neq 1/f(x)$. ■

He aquí algunas observaciones relevantes acerca de las funciones inversas.

1. Si g es la función inversa de f, entonces f es la función inversa de g.
2. El dominio de f^{-1} es igual al recorrido o rango de f y el recorrido o rango f^{-1} es igual que el dominio de f.
3. Una función puede no tener función inversa, pero si la tiene, la función inversa es única (ver el ejercicio 108).

Se puede pensar en f^{-1} como una operación que deshace lo hecho por f. Por ejemplo, la resta deshace lo que la suma hace, y la división deshace lo que hace la multiplicación.

Usar la definición de función inversa para comprobar:

$f(x) = x + c$ y $f^{-1}(x) = x - c$ son funciones inversas una de la otra.

$f(x) = cx$ y $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{c}$, $c \neq 0$, son funciones inversas una de la otra.

EJEMPLO 1 Comprobación de funciones inversas

Demostrar que las funciones siguientes son mutuamente inversas.

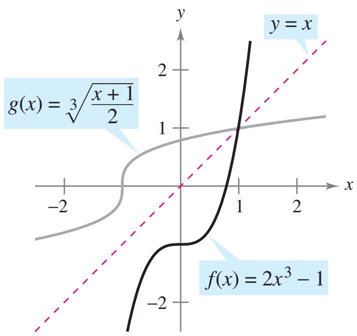
$$f(x) = 2x^3 - 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

Solución Como el dominio y el recorrido o rango de f y g son todos los números reales, se puede concluir que las dos funciones compuestas existen para todo x. La composición de f con g se da por

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 \\ &= 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 \\ &= x + 1 - 1 \\ &= x. \end{aligned}$$

La composición de g con f es

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt[3]{\frac{(2x^3 - 1) + 1}{2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x. \end{aligned}$$



f y g son funciones inversas una de la otra
Figura 5.11

Puesto que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, se puede concluir que f y g son inversas una de otra (ver la figura 5.11).

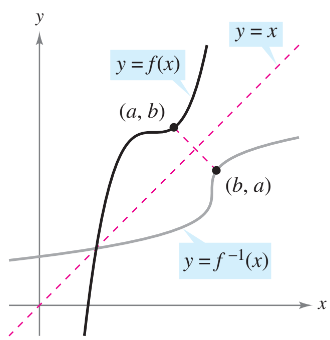
AYUDA DE ESTUDIO En el ejemplo 1, comparar las funciones f y g en forma verbal.

Para f: Primero elevar x al cubo, luego multiplicar por 2, y después restar 1.

Para g: Primero sumar 1, después dividir entre 2, y luego sacar raíz cúbica.

¿Se ve cómo se "deshace el proceso"?

En la figura 5.11, las gráficas de f y $g = f^{-1}$ parecen el reflejo una de la otra respecto a la recta $y = x$. La gráfica de f^{-1} se obtiene **reflejando** la de f en la línea $y = x$. Esta idea generaliza el siguiente teorema.



La gráfica de f^{-1} es un reflejo de la gráfica de f en la recta $y = x$
Figura 5.12

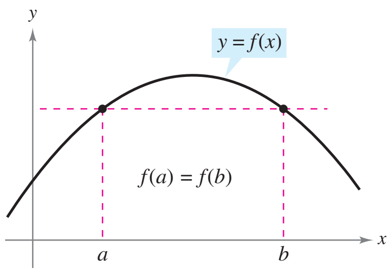
TEOREMA 5.6 PROPIEDAD DE REFLEXIÓN DE LAS FUNCIONES INVERSAS

La gráfica de f contiene el punto (a, b) si y sólo si la gráfica de f^{-1} contiene el punto (b, a).

DEMOSTRACIÓN Si (a, b) está en la gráfica de f, entonces es $f(a) = b$ y se puede escribir

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

De forma que (b, a) está en la gráfica de f^{-1}, como se muestra en la figura 5.12. Un argumento similar demuestra el teorema en la otra dirección.



Si una recta horizontal corta dos veces la gráfica de f, entonces f no es inyectiva
Figura 5.13

Existencia de una función inversa

No todas las funciones tienen función inversa; el teorema 5.6 sugiere un criterio gráfico para aquellas que lo son: el **criterio de la recta horizontal** para una función inversa. Esta prueba establece que la función f tiene inversa si y sólo si toda recta horizontal corta a la gráfica de f a lo más en sólo un punto (figura 5.13). El siguiente teorema explica por qué la prueba de la recta horizontal es válida. (Recordar de la sección 3.3 que la función es *estrictamente monótona* si ésta es creciente o decreciente en todo su dominio.)

TEOREMA 5.7 EXISTENCIA DE LA FUNCIÓN INVERSA

1. Una función tiene función inversa si y sólo si es inyectiva.
2. Si f es estrictamente monótona en todo su dominio, entonces ésta es inyectiva y, por tanto, tiene inversa.

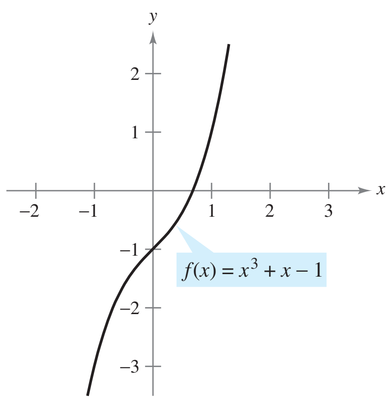
DEMOSTRACIÓN Para demostrar la segunda parte del teorema, recordar de la sección P.3 que f es inyectiva si para x_1 y x_2 en su dominio

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

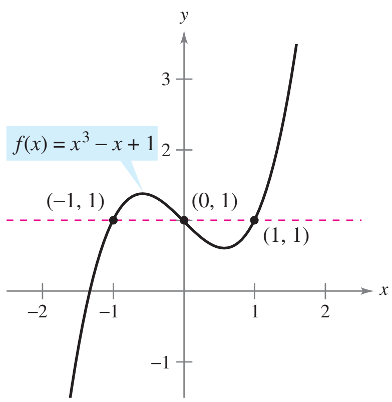
Ahora, se escoge x_1 y x_2 en el dominio de f. Si $x_1 \neq x_2$, entonces, como f es estrictamente monótona, se deduce que

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{o} \qquad f(x_1) > f(x_2).$$

En cualquier caso, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por tanto, f es inyectiva en el intervalo. La demostración de la primera parte del teorema se deja como ejercicio (ver el ejercicio 109).



a) Dado que f es creciente en todo su dominio, tiene función inversa



b) Dado que f no es inyectiva, no tiene una función inversa
Figura 5.14

EJEMPLO 2 Existencia de la función inversa

¿Cuál de las funciones tiene inversa?

a) $f(x) = x^3 + x - 1$ *b*) $f(x) = x^3 - x + 1$

Solución

***a*)** En la figura 5.14*a* se observa una gráfica de f, que aparenta que f es creciente en todo su dominio. Para verificar esto, notar que su derivada, $f'(x) = 3x^2 + 1$, es positiva para todos los valores reales de x. Por tanto, f es estrictamente monótona y debe tener una función inversa.

***b*)** En la figura 5.14*b* se observa una gráfica de f, en la que se puede ver que la función no satisface el criterio de la recta horizontal. En otras palabras, no es inyectiva. Por ejemplo, f toma el mismo valor cuando $x = -1$, 0 y 1.

$$f(-1) = f(1) = f(0) = 1 \qquad \text{No inyectiva.}$$

En consecuencia, por el teorema 5.7, f no admite inversa.

NOTA Suele ser más fácil probar que una función *tiene* función inversa que hallarla. Por ejemplo, sería algebraicamente difícil hallar la función inversa del ejemplo 2*a*.

A continuación se sugiere un procedimiento para encontrar la función inversa de una función.

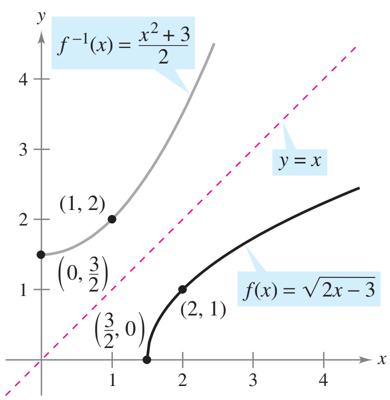
Estrategia para hallar la inversa de una función

1. Utilizar el teorema 5.7 para determinar si la función dada $y = f(x)$ tiene inversa.
2. Despejar x como función de y: $x = g(y) = f^{-1}(y)$.
3. Intercambiar x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.
4. Definir como dominio de f^{-1} el recorrido de f.
5. Verificar que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

EJEMPLO 3 Cálculo de la inversa de una función

Hallar la función inversa de

$$f(x) = \sqrt{2x - 3}.$$



El dominio de f^{-1}, $[0, \infty)$ es el recorrido o rango de f

Figura 5.15

Solución De la gráfica de f en la figura 5.15, aparece que f se incrementa sobre su dominio entero $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$. Para verificar esto, observar que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$ es positivo sobre el dominio de f. Así, f es estrictamente monótona y debe tener una función inversa. Para encontrar una ecuación para la función inversa, sea $y = f(x)$ y despejar x en términos de y.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x-3} &= y && \text{Hacer } y = f(x).\\
2x - 3 &= y^2 && \text{Elevar al cuadrado.}\\
x &= \frac{y^2+3}{2} && \text{Despejar } x.\\
y &= \frac{x^2+3}{2} && \text{Intercambiar } x \text{ y } y.\\
f^{-1}(x) &= \frac{x^2+3}{2} && \text{Sustituir } y \text{ por } f^{-1}(x).
\end{aligned}$$

El dominio de f^{-1} es el recorrido o rango de f, que es $[0, \infty)$. Se puede verificar este resultado como sigue.

$$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{2\left(\frac{x^2+3}{2}\right) - 3} = \sqrt{x^2} = x, \quad x \geq 0$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 + 3}{2} = \frac{2x - 3 + 3}{2} = x, \quad x \geq \frac{3}{2}$$

NOTA Recordar que se puede utilizar cualquier letra para representar la variable independiente. Así,

$$f^{-1}(y) = \frac{y^2+3}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$$

$$f^{-1}(s) = \frac{s^2+3}{2}$$

representan la misma función. ■

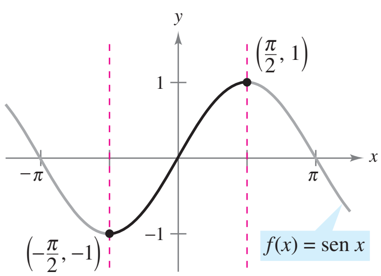
El teorema 5.7 es útil en el siguiente tipo de problemas. Supóngase una función que *no* es inyectiva en su dominio. Al restringir el dominio a un intervalo en que la función sea estrictamente monótona, se obtiene una nueva función que *ya* es inyectiva en el dominio restringido.

EJEMPLO 4 Analizar si una función es inyectiva

Demostrar que la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

no es inyectiva en toda la recta real. Después demostrar que $[-\pi/2, \pi/2]$ es el intervalo más grande, centrado en el origen, en el que f es estrictamente monótona.



f es inyectiva en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$
Figura 5.16

Solución Es claro que f no es inyectiva, ya que muchos valores diferentes de x dan un mismo valor de y. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}(0) = 0 = \operatorname{sen}(\pi).$$

Además, f es creciente en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, porque su derivada

$$f'(x) = \cos x$$

es positiva en él. Por último, como en los puntos terminales a la derecha y a la izquierda hay extremos relativos de la función seno, se puede concluir que la función f es creciente en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$ y que en cualquier otro intervalo mayor, la función no es estrictamente monótona (ver la figura 5.16).

Derivada de la función inversa

Los dos teoremas siguientes discuten la derivada de las funciones inversas. El razonamiento del teorema 8 se sigue de la propiedad reflexiva de la función inversa, como se muestra en la figura 5.12. En el apéndice A pueden verse las demostraciones de los dos teoremas.

TEOREMA 5.8 CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD DE LAS FUNCIONES INVERSAS

Sea f una función cuyo dominio es un intervalo I. Si f tiene una función inversa, entonces los siguientes enunciados son verdaderos.

1. Si f es continua en su dominio, entonces f^{-1} es continua en su dominio.
2. Si f es creciente en su dominio, entonces f^{-1} es creciente en su dominio.
3. Si f es decreciente en su dominio, entonces f^{-1} es decreciente en su dominio.
4. Si f es derivable en c y $f'(c) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(c)$.

EXPLORACIÓN

Graficar las funciones inversas

$$f(x) = x^3$$

y

$$g(x) = x^{1/3}.$$

Calcular la pendiente de f en (1, 1), (2, 8) y (3, 27), y la pendiente de g en (1, 1), (8, 2) y (27, 3). ¿Qué se observa? ¿Qué ocurre en (0, 0)?

TEOREMA 5.9 LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si f tiene una función inversa g, entonces g es derivable para todo x tal que $f'(g(x)) \neq 0$. Además,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(g(x)) \neq 0.$$

EJEMPLO 5 Cálculo de la derivada de una función inversa

Sea $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 1$.

a) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(x)$ para $x = 3$?
b) ¿Cuál es el valor de $(f^{-1})'(x)$ para $x = 3$?

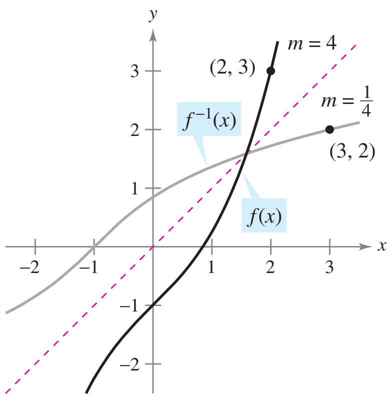
Solución Notar que f es una función inyectiva, así que tiene una función inversa.

a) Como $f(x) = 3$ cuando $x = 2$, se sabe que $f^{-1}(3) = 2$.
b) Como la función f es derivable y tiene inversa, se puede aplicar el teorema 5.9 (con $g = f^{-1}$) y se escribe

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(2)}.$$

Además, usando $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 1$, se concluye que

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{3}{4}(2^2) + 1} = \frac{1}{4}.$$



Las gráficas de las funciones inversas f y f^{-1} tienen pendientes recíprocas en los puntos (a, b) y (b, a)
Figura 5.17

En el ejemplo 5, notar que la pendiente en el punto (2, 3) de la gráfica de f es 4 y la pendiente de f^{-1} en el punto (3, 2) es $\frac{1}{4}$ (ver la figura 5.17). Esta relación recíproca (que se sigue del teorema 5.9) puede escribirse como se muestra.

Si $y = g(x) = f^{-1}(x)$, entonces $f(y) = x$ y $f'(y) = \dfrac{dx}{dy}$. El teorema 5.9 dice que

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(dx/dy)}.$$

Así que, $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy}.}$

EJEMPLO 6 Las gráficas de las funciones inversas tienen pendientes recíprocas

Sea $f(x) = x^2$ (para $x \geq 0$) y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Probar que las pendientes de las gráficas de f y f^{-1} son recíprocas en los puntos siguientes.

a) (2, 4) y (4, 2) ***b)*** (3, 9) y (9, 3)

Solución Las derivadas de f y f^{-1} están dadas por

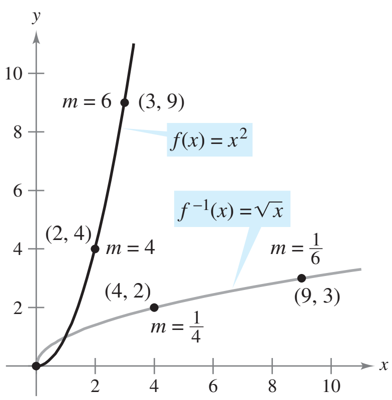
$$f'(x) = 2x \qquad \text{y} \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

a) En (2, 4), la pendiente de la gráfica de f es $f'(2) = 2(2) = 4$. En (4, 2) la pendiente de la gráfica de f^{-1} es

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}.$$

b) En el punto (3, 9), la pendiente de la gráfica de f es $f'(3) = 2(3) = 6$. En (9, 3), la pendiente de la gráfica de f^{-1} es

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}.$$



En (0, 0), la derivada de f es 0, y la derivada de f^{-1} no existe
Figura 5.18

Así, en ambos casos, las pendientes son recíprocas, como ilustra la figura 5.18.

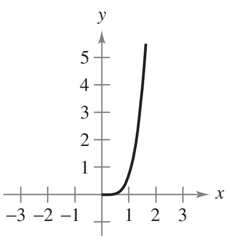
5.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, mostrar que *f* y *g* son funciones inversas *a*) analíticamente y *b*) gráficamente.

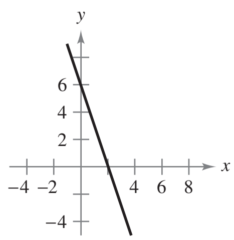
1. $f(x) = 5x + 1, \qquad g(x) = \dfrac{x - 1}{5}$
2. $f(x) = 3 - 4x, \qquad g(x) = \dfrac{3 - x}{4}$
3. $f(x) = x^3, \qquad g(x) = \sqrt[3]{x}$
4. $f(x) = 1 - x^3, \qquad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$
5. $f(x) = \sqrt{x - 4}, \qquad g(x) = x^2 + 4, \quad x \geq 0$
6. $f(x) = 16 - x^2, \quad x \geq 0, \qquad g(x) = \sqrt{16 - x}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad g(x) = \dfrac{1}{x}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}, \quad x \geq 0, \qquad g(x) = \dfrac{1 - x}{x}, \quad 0 < x \leq 1$

En los ejercicios 9 a 12, relacionar la gráfica de la función con la gráfica de su inversa. [Las gráficas de las funciones inversas están rotuladas *a*), *b*), *c*) y *d*).]

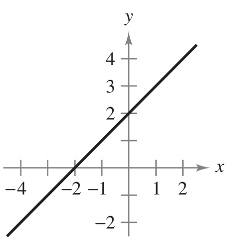
a)



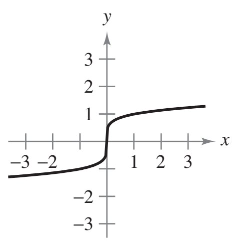
b)



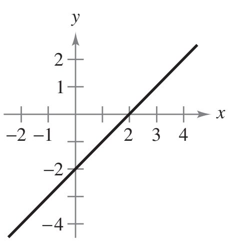
c)



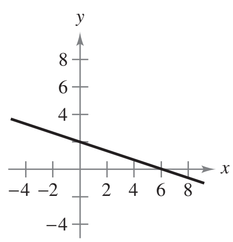
d)



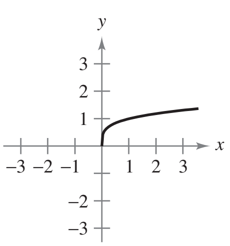
9.



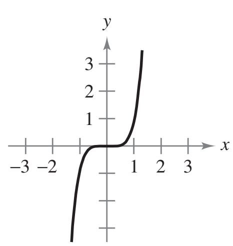
10.



11.



12.



En los ejercicios 13 a 22, usar una herramienta de graficación para representar la función. Entonces, usar la prueba de la recta horizontal para determinar si la función es inyectiva en su dominio entero y así tiene una función inversa.

13. $f(x) = \frac{3}{4}x + 6$
14. $f(x) = 5x - 3$
15. $f(\theta) = \operatorname{sen} \theta$
16. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$
17. $h(s) = \dfrac{1}{s - 2} - 3$
18. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$
19. $f(x) = \ln x$
20. $f(x) = 5x\sqrt{x - 1}$
21. $g(x) = (x + 5)^3$
22. $h(x) = |x + 4| - |x - 4|$

En los ejercicios 23 a 30, *a*) encontrar la función inversa de *f*, *b*) graficar *f* y f^{-1} sobre la misma configuración de ejes coordenados, *c*) describir la relación entre las gráficas y *d*) establecer el dominio y el rango de *f* y f^{-1}.

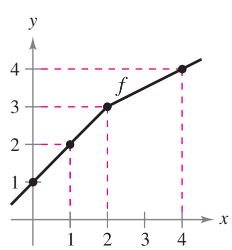
23. $f(x) = 2x - 3$
24. $f(x) = 3x$
25. $f(x) = x^5$
26. $f(x) = x^3 - 1$
27. $f(x) = \sqrt{x}$
28. $f(x) = x^2, \quad x \geq 0$
29. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$
30. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad x \geq 2$

En los ejercicios 31 a 36, *a*) encontrar la función inversa de *f*. *b*) Usar una herramienta de graficación para representar *f* y f^{-1} en la misma pantalla. *c*) Describir la relación entre las gráficas y *d*) establecer el dominio así como el recorrido o rango de *f* y f^{-1}.

31. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$
32. $f(x) = 3\sqrt[5]{2x - 1}$
33. $f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$
34. $f(x) = x^{3/5}$
35. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 7}}$
36. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$

En los ejercicios 37 y 38, usar la gráfica de la función *f* para hacer una tabla de valores para los puntos dados. Entonces, hacer una segunda tabla que pueda usarse para encontrar f^{-1} y bosquejar la gráfica de f^{-1}.

37.



38.