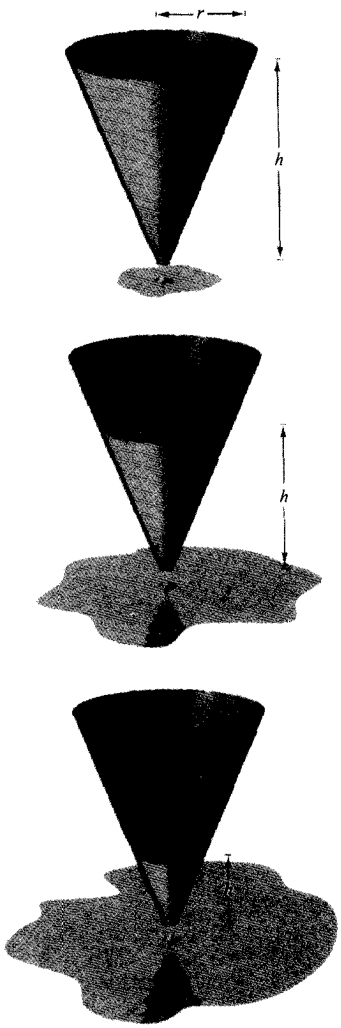


FIGURA 2.31
El volumen está relacionado con el radio y con la altura.

podemos derivar implícitamente con respecto a t obteniendo así la ecuación de ritmos relacionados

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[r^2 \frac{dh}{dt} + h\left(2r\frac{dr}{dt}\right)\right]$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(r^2 \frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}\right)$$

De ella se sigue que el ritmo de cambio de V está relacionado con los ritmos de cambio de h y de r.

EXPLORACIÓN

Cálculo de un ritmo relacionado En el depósito cónico de la Figura 2.31, supongamos que la altura está cambiando a razón de $-0{,}2$ pies/min y el radio a razón de $-0{,}1$ pies/min. ¿Cuál es el ritmo de cambio de V cuando el radio es $r = 1$ pie y la altura es $h = 2$ pies? ¿Depende el ritmo de cambio del volumen de los valores de h y r? Explicar la respuesta.

EJEMPLO 1 Dos ritmos de cambio relacionados

Sean x e y dos funciones derivables relacionadas por la ecuación

$$y = x^2 + 3$$

Calcular dy/dx para $x = 1$, sabiendo que $dx/dt = 2$ en $x = 1$.

Solución: Derivamos ambos lados *con respecto a t*, utilizando la regla de la cadena.

$y = x^2 + 3$	Ecuación original
$\frac{d}{dt}[y] = \frac{d}{dt}[x^2 + 3]$	Derivar con respecto a t
$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$	Regla de la cadena

Cuando $x = 1$ y $dx/dt = 2$, se tiene

$$\frac{dy}{dt} = 2(1)(2) = 4$$ □

Resolución de problemas con ritmos relacionados

En el Ejemplo 1 se daba una ecuación que relacionaba las variables x e y, y se pedía hallar el ritmo de cambio de y para $x = 1$.

Ecuación: $y = x^2 + 3$

Ritmo dado: $\frac{dx}{dt} = 2$ cuando $x = 1$

Hallar: $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 1$

Los ejemplos restantes de esta sección exigen crear un modelo matemático a partir de una descripción en palabras.

EJEMPLO 2 Ondas en un lago

Se deja caer una piedra en un lago en calma, lo que provoca ondas y círculos. El radio r del círculo exterior está creciendo a un ritmo constante de 1 pie/s. Cuando el radio es 4 pies, ¿a qué ritmo está cambiando el área A de la región circular perturbada?

Solución: Las variables r y A están relacionadas por $A = \pi r^2$. El ritmo de cambio del radio r es $dr/dt = 1$

Ecuación: $A = \pi r^2$

Ritmo dado: $\dfrac{dr}{dt} = 1$

Hallar: $\dfrac{dA}{dt}$ cuando $x = 4$

Con esta información, podemos proceder como en el Ejemplo 1.

$$\frac{d}{dt}[A] = \frac{d}{dt}[\pi r^2] \qquad \text{Derivar con respecto a } t$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \qquad \text{Regla de la cadena}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(4)(1) = 8\pi \qquad \text{Sustituir } dr/dt \text{ y } r$$

Cuando $r = 4$, el área está cambiando a razón de 8π pies cuadrados por segundo. □

Nota. En esta estrategia, es imprescindible asegurarse de que el paso 4 no se realiza hasta que el paso 3 esté terminado. De lo contrario, se produciría como resultado final una derivada errónea.

Estrategia para resolver problemas de ritmos relacionados

1. Identificar las magnitudes dadas y las magnitudes *a determinar.* Asignar símbolos a esas cantidades.
2. Escribir una ecuación que contenga a las variables cuyos ritmos de cambio son dados o han de ser determinados.
3. Usando la regla de la cadena, derivar implícitamente ambos lados de la ecuación *con respecto al tiempo t.*
4. *Después* de completar el paso 3, sustituir en la ecuación resultante todos los valores conocidos de las variables y de los ritmos de cambio. A continuación, despejar el ritmo de cambio que se deseaba calcular.

La tabla de la página siguiente recoge una lista de ejemplos de modelos matemáticos que involucran ritmos de cambio. Así, el ritmo de cambio del primer ejemplo es la velocidad del automóvil.

Enunciado en palabras	Modelo matemático
La velocidad de un automóvil tras una hora de viaje es de 50 millas/h	x = distancia recorrida $\frac{dx}{dt} = 50$ cuando $t = 1$
Se introduce agua en una piscina a razón de 10 metros cúbicos por hora	V = volumen de agua en la piscina $\frac{dV}{dt} = 10\ \text{m}^3/\text{h}$
Una rueda gira a 25 revoluciones por minuto (1 rev = 2π radianes)	θ = ángulo de giro $\frac{d\theta}{dt} = 25(2\pi)$ rad/min

EJEMPLO 3 Inflando un globo

Se bombea aire en el interior de un globo (Figura 2.32) a razón de 4,5 pulgadas cúbicas por minuto. Calcular el ritmo de cambio del radio del globo cuando el radio es 2 pulgadas.

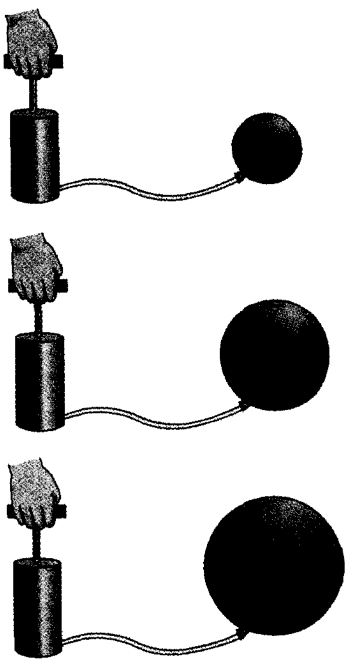


FIGURA 2.32
Globo en expansión.

Solución: Sea V el volumen del globo y r su radio. Como el volumen está creciendo a razón de 4,5 pulgadas cúbicas por minuto, sabemos que en el instante t el ritmo de cambio del volumen es $dV/dt = \frac{9}{2}$. Así pues, el problema admite la siguiente formulación.

Ritmo dado: $\frac{dV}{dt} = \frac{9}{2}$ (ritmo constante)

Hallar: $\frac{dr}{dt}$ cuando $r = 2$

Para calcular el ritmo de cambio del radio, hemos de encontrar una ecuación que relacione el radio r con el volumen V.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{Volumen de una esfera}$$

Por derivación implícita respecto de t obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \qquad \text{Derivar con respecto a } t$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{dV}{dt}\right) \qquad \text{Despejar } dr/dt$$

Finalmente, cuando $r = 2$ el ritmo de cambio del radio resulta ser

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{9}{2}\right) \approx 0{,}09 \text{ pulgadas por minuto.} \qquad \square$$

Nótese que en el Ejemplo 3 el volumen está creciendo a ritmo *constante*, pero el radio cambia a ritmo *variable*. El hecho de que dos ritmos estén relacionados no implica que sean proporcionales. En este caso particular, el radio crece más y más lentamente con el paso del tiempo. ¿Ve por qué sucede así?

EJEMPLO 4 La velocidad de un avión detectado por radar

Un avión vuela por una trayectoria que le llevará a la vertical de una estación de radar, como muestra la Figura 2.33. Si s está decreciendo a razón de 400 millas/h cuando $s = 10$ millas, ¿cuál es la velocidad del avión?

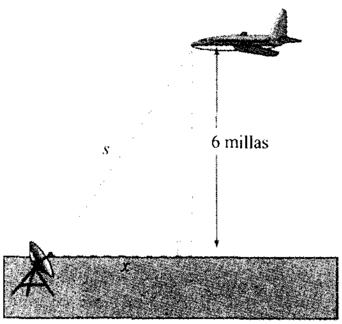


FIGURA 2.33
El avión vuela a 6 millas de altura y dista s millas de la estación de radar.

Solución: Sea x la distancia horizontal al radar (Figura 2.33). Observemos que cuando $s = 10$, $x = \sqrt{10^2 - 36} = 8$.

Ritmo dado: $ds/dt = -400$ cuando $s = 10$

Hallar: dx/dt cuando $s = 10$ y $x = 8$

Podemos hallar la velocidad del avión como sigue.

$$x^2 + 6^2 = s^2 \qquad \text{Teorema de Pitágoras}$$

$$2x\frac{dx}{dt} = 2s\frac{ds}{dt} \qquad \text{Derivar con respecto a } t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{x}\left(\frac{ds}{dt}\right) \qquad \text{Despejar } dx/dt$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{8}(-400) = -500 \text{ millas por hora} \qquad \text{Sustituir } s,\ x, \text{ y } ds/dt$$

Como la velocidad es −500 millas/h, la rapidez (o «velocidad» en sentido coloquial) es 500 millas/h. □

EJEMPLO 5 Ángulo de elevación variable

Calcular el ritmo de cambio del ángulo de elevación θ de la cámara de la Figura 2.34 diez segundos después del despegue.

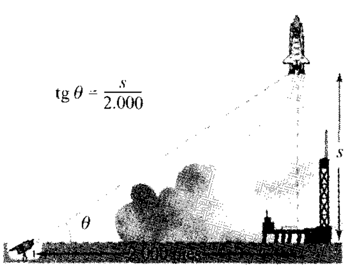


FIGURA 2.34
Una cámara de televisión, situada a ras de suelo, está filmando el despegue de un cohete espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación $s = 50t^2$, donde s se mide en pies y t en segundos. La cámara dista 2.000 pies del punto de lanzamiento.

Solución: Cuando $t = 10$, la altura s del cohete es $s = 50t^2 = 50(10^2) = 5.000$ pies.

Ritmo dado: $ds/dt = 100t$ = velocidad del cohete

Hallar: $d\theta/dt$ cuando $t = 10$ y $s = 5.000$

De la Figura 2.34 vemos que s y θ están relacionadas por la ecuación $\operatorname{tg}\theta = s/2.000$.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{s}{2.000} \qquad \text{Véase Figura 2.34}$$

$$(\sec^2 \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2.000}\left(\frac{ds}{dt}\right) \qquad \text{Derivar con respecto a } t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \cos^2\theta \frac{100t}{2.000} \qquad \text{Sustituir } 100t \text{ por } ds/dt$$

$$= \left(\frac{2.000}{\sqrt{s^2 + 2.000^2}}\right)^2 \frac{100t}{2.000} \qquad \cos\theta = 2.000/\sqrt{s^2 + 2.000^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2.000(100)(10)}{5.000^2 + 2.000^2} \qquad \text{Sustituir } s \text{ y } t$$

$$= \frac{2}{29} \text{ radianes por segundo} \qquad \text{Simplificar}$$

Cuando $t = 10$, θ está cambiando a razón de $\frac{2}{29}$ radianes por segundo. □

EJEMPLO 6 *La velocidad de un pistón*

En el motor de la Figura 2.35, una varilla de 7 pulgadas está conectada a un cigüeñal de 3 pulgadas de radio que gira, en sentido contrario al de las agujas de un reloj, a 200 revoluciones por minuto. Calcular la velocidad del pistón cuando $\theta = \pi/3$.

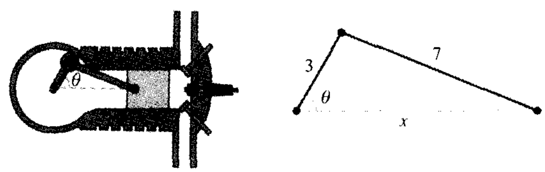


FIGURA 2.35
La velocidad del pistón está relacionada con el ángulo del cigüeñal.

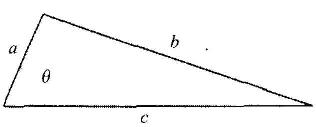


FIGURA 2.36
Ley de los cosenos:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta$.

Solución: Puesto que una revolución completa corresponde a 2π radianes, se sigue que $d\theta/dt = 200(2\pi) = 400\pi$ rad/min.

Ritmo dado: $\dfrac{d\theta}{dt} = 400\pi$ (ritmo constante)

Hallar: $\dfrac{dx}{dt}$ cuando $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Podemos usar la ley de los cosenos (Figura 2.36) para hallar una ecuación que relacione x con θ.

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2(3)(x)\cos\theta$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} - 6\left(-x \operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{dt} + \cos\theta \frac{dx}{dt}\right)$$

$$(6\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt} = 6x \operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6x \operatorname{sen}\theta}{6\cos\theta - 2x}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

Cuando $\theta = \pi/3$, se puede hallar x así:

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2(3)(x)\cos\frac{\pi}{3}$$

$$49 = 9 + x^2 - 6x\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$0 = x^2 - 3x - 40$$

$$0 = (x-8)(x+5)$$

$$x = 8 \qquad \text{Elegir la solución positiva}$$

Así pues, cuando $x = 8$ y $\theta = \pi/3$ la velocidad del pistón es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6(8)(\sqrt{3}/2)}{6(1/2) - 16}(400\pi)$$

$$= \frac{9.600\pi\sqrt{3}}{-13}$$

$$\approx -4.018 \text{ pulgadas por minuto}$$

□

| Nota. La velocidad en el Ejemplo 6 es negativa porque x representa una distancia que está decreciendo.

Ejercicios de la Sección 2.6

En los Ejercicios 1-4, supóngase que x e y son funciones derivables de t y hállense los valores requeridos de dy/dt y dx/dt

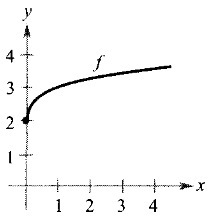
	Ecuación	*Hallar*	*Dado*
1.	$y = \sqrt{x}$	*a*) $\dfrac{dy}{dt}$ cuando $x = 4$	$\dfrac{dx}{dt} = 3$
		b) $\dfrac{dx}{dt}$ cuando $x = 25$	$\dfrac{dy}{dt} = 2$
2.	$y = x^2 - 3x$	*a*) $\dfrac{dy}{dt}$ cuando $x = 3$	$\dfrac{dx}{dt} = 2$
		b) $\dfrac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$	$\dfrac{dy}{dt} = 5$
3.	$xy = 4$	*a*) $\dfrac{dy}{dt}$ cuando $x = 8$	$\dfrac{dx}{dt} = 10$
		b) $\dfrac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$	$\dfrac{dy}{dt} = -6$
4.	$x^2 + y^2 = 25$	*a*) $\dfrac{dy}{dt}$ cuando $x = 3$, $y = 4$	$\dfrac{dx}{dt} = 8$
		b) $\dfrac{dx}{dt}$ cuando $x = 4$, $y = 3$	$\dfrac{dy}{dt} = -2$

En los Ejercicios 5-8, un punto se está moviendo sobre la gráfica de la función, de modo que dx/dt es 2 cm/s. Calcular dy/dt para los valores indicados de x.

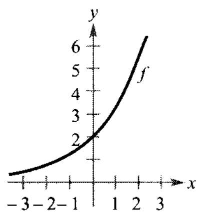
	Función	*Valores de x*	
5.	$y = x^2 + 1$	*a*) $x = -1$	*b*) $x = 0$
		c) $x = 1$	*d*) $x = 3$
6.	$y = \dfrac{1}{1+x^2}$	*a*) $x = -2$	*b*) $x = 0$
		c) $x = 2$	*d*) $x = 10$
7.	$y = \operatorname{tg} x$	*a*) $x = -\dfrac{\pi}{3}$	*b*) $x = -\dfrac{\pi}{4}$
		c) $x = 0$	*d*) $x = 1$
8.	$y = \operatorname{sen} x$	*a*) $x = \dfrac{\pi}{6}$	*b*) $x = \dfrac{\pi}{4}$
		c) $x = \dfrac{\pi}{3}$	*d*) $x = \dfrac{\pi}{2}$

Para pensar En los Ejercicios 9 y 10, usando la gráfica de f, *a*) determinar si dy/dt crece o decrece para x creciente y dx/dt constante, y *b*) decidir si dx/dt crece o decrece para y creciente y dy/dt constante.

9.



10.



11. Hallar el ritmo de cambio de la distancia entre el origen y un punto que se mueve por la gráfica de $y = x^2 + 1$ si $dx/dt = 2$ cm/s.

12. Hallar el ritmo de cambio de la distancia entre el origen y un punto que se mueve sobre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ si $dx/dt = 2$ cm/s.

13. ***Área*** El radio r de un círculo está creciendo a razón de 2 cm/min. Calcular el ritmo de cambio del área cuando *a*) $r = 6$ cm y *b*) $r = 24$ cm.

14. ***Área*** Sea A el área de un círculo de radio r variable con el tiempo. Si dr/dt es constante, ¿es constante dA/dt? Explicar la respuesta.

15. ***Área*** El ángulo entre los dos lados iguales, de longitud s, de un triángulo isósceles es θ.

a) Probar que el área del triángulo viene dada por $A = \frac{1}{2} s^2 \operatorname{sen} \theta$.

b) Si θ está creciendo a razón de 0,5 rad/min, hallar el ritmo de cambio del área cuando $\theta = \pi/6$ y cuando $\theta = \pi/3$.

c) Explicar por qué el ritmo de cambio del área del triángulo no es constante, a pesar de que $d\theta/dt$ es constante.

16. ***Volumen*** El radio de una esfera está creciendo a razón de 2 pulgadas/min.

a) Calcular el ritmo de cambio del volumen cuando $r = 6$ y cuando $r = 12$ pulgadas.

b) Explicar por qué el ritmo de cambio del área del triángulo no es constante, a pesar de que dr/dt es constante.

17. ***Volumen*** Un globo esférico se hincha con gas a razón de 500 cm^3/min. ¿A qué ritmo está creciendo su radio cuando el radio es *a*) 30 cm y *b*) 60 cm?

18. ***Volumen*** Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el volumen cuando cada arista mide *a*) 1 cm y *b*) 10 cm?

19. ***Área de la superficie*** Bajo las condiciones del problema anterior, determinar el ritmo al que cambia el *área de la superficie* cuando cada arista mide *a*) 1 cm y *b*) 10 cm.

20. ***Volumen*** El volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Calcular el ritmo de cambio del volumen si dr/dt es 2 pulgadas/min y $h = 3r$, cuando *a*) $r = 6$ y *b*) $r = 24$ pulgadas.

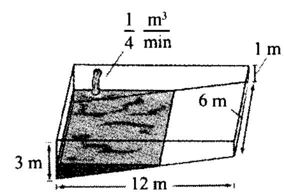
21. ***Volumen*** Por una cinta transportadora está cayendo arena sobre un montón de forma cónica, a razón de 10 pies cúbicos por minuto. El diámetro de la base del montón es unas tres veces la altura. ¿A qué ritmo cambia la altura del montón cuando su altura es 15 pies?

22. ***Profundidad*** Un depósito cónico (con el vértice abajo) mide 10 pies de anchura en su parte más alta y tiene 12 pies de profundidad. Si se echa agua en él a razón de 10 pies cúbicos/min, calcular el ritmo de cambio de la profundidad del agua cuando la profundidad es 8 pies.

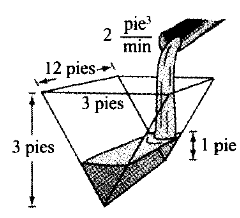
23. ***Profundidad*** Una piscina tiene 12 metros de largo, 6 de ancho, y profundidad entre 1 y 3 m, como muestra la figura adjunta. Se bombea agua en ella a razón de 0,25 m^3/min y hay 1 m de agua en el extremo más profundo.

a) ¿Qué tanto por ciento del volumen de la piscina se ha llenado?

b) ¿A qué ritmo está subiendo el nivel del agua?



24. ***Profundidad*** Una artesa, con las medidas de la figura, acaba en forma de triángulo isósceles. Si se echa agua en ella a razón de 2 pies cúbicos por minuto, ¿a qué ritmo está subiendo el nivel del agua cuando hay 1 pie de profundidad de agua?

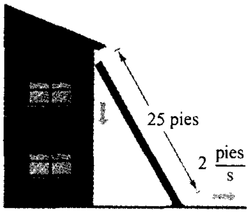


25. ***Escalera deslizante*** Una escalera de 25 pies de longitud está apoyada sobre una pared (véase figura). Su base desliza por el suelo a razón de 2 pies/s.

a) ¿A qué ritmo está bajando su extremo superior por la pared cuando la base dista de ella 7, 15 y 24 pies?

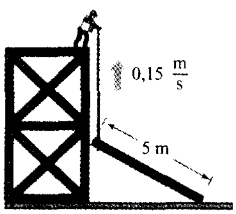
b) Hallar el ritmo al que cambia el área del triángulo formado por la escalera, el suelo y la pared, cuando la base está a 7 pies del muro.

c) Calcular el ritmo de cambio del ángulo entre la escalera y la pared cuando la base está a 7 pies del muro.

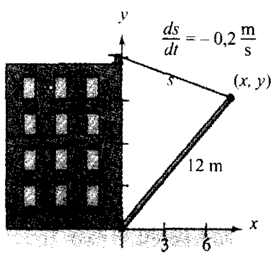


PARA MÁS INFORMACIÓN Véase el artículo «The Falling Ladder Paradox» de Paul Scholten y Andrew Simoson, en el número de enero de 1996 en *The College Mathematics Journal.*

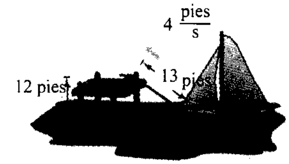
26. ***Construcción*** Un obrero levanta, con ayuda de una soga, un tablón hasta lo alto de un edificio en construcción (véase figura). Supongamos que el otro extremo del tablón sigue una trayectoria perpendicular a la pared y que el obrero mueve el tablón a razón de 0,15 m/s. ¿A qué ritmo desliza por el suelo el extremo cuando está a 2,5 m de la pared?



27. ***Construcción*** Una polea situada en lo alto de un edificio de 12 metros levanta una viga de la misma longitud hasta colocarla en posición vertical, como indica la figura. La cuerda se recoge a razón de –0,2 m/s. Calcular los ritmos de cambio vertical y horizontal del extremo de la viga cuando $y = 6$.



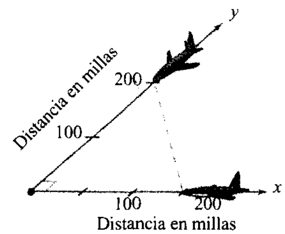
28. ***Atraque de un velero*** Un velero es arrastrado hacia el muelle por medio de una polea situada a una altura de 12 pies, tal como se muestra en la figura adjunta. La cuerda se recoge a razón de 4 pies/s. Calcular la velocidad del velero cuando quedan 13 pies de cuerda sin recoger. ¿Qué ocurre con la velocidad del velero cuando se acerca mucho al muelle?



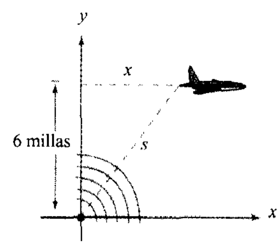
29. ***Control de tráfico aéreo*** Un controlador observa dos aviones que vuelan en trayectorias perpendiculares y a la misma altura (véase figura). Uno de ellos dista 150 millas y se mueve a 450 millas/h. El otro está a 200 millas y se desplaza a 600 millas/h.

a) ¿A qué ritmo decrece la distancia entre ellos?

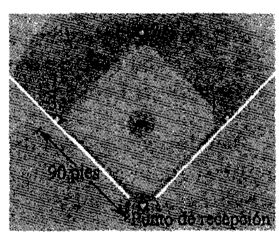
b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para modificar la trayectoria de uno de ellos?



30. ***Control de tráfico aéreo*** Un avión vuela a 6 millas de altura y pasa exactamente por encima de una antena de radar (véase figura). Cuando el avión está a 10 millas ($s = 10$), el radar detecta que la distancia s está cambiando a una velocidad de 240 millas/h. ¿Cuál es la velocidad del avión?



31. Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado (véase figura). Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pies/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción?

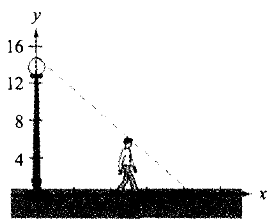


32. En el campo de béisbol del ejercicio anterior, supongamos que el jugador corre desde la primera hasta la segunda base a 28 pies/s. Hallar el ritmo de cambio de su distancia al punto de recepción cuando el jugador se encuentra a 30 pies de la segunda base.

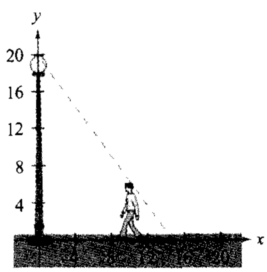
33. ***Longitud de una sombra*** Un hombre de 6 pies de altura camina a 5 pies/s alejándose de una farola cuya bombilla está a 15 pies de altura sobre el suelo (véase figura). Cuando el hombre está a 10 pies de la base de la farola,

a) ¿A qué velocidad se mueve el extremo de su sombra?

b) ¿A qué ritmo está cambiando la longitud de su sombra?



34. ***Longitud de una sombra*** Repetir el ejercicio anterior, supuesto que ese mismo hombre camina hacia la farola, y que la bombilla de ésta se halla situada a 20 pies de altura.



35 ***Diseño de máquinas*** Los puntos extremos de una varilla móvil de 1 m de longitud tienen coordenadas $(x, 0)$ y $(0, y)$ (véase figura). La posición del extremo que se apoya en el eje x viene dada por

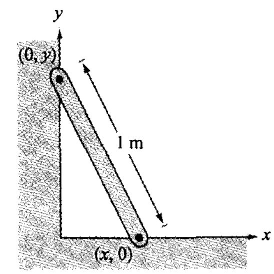
$$x(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{6}$$

donde t se mide en segundos.

a) ¿Cuánto tarda en completar un ciclo?

b) ¿Cuál es el punto más bajo que alcanza el otro extremo de la varilla?

c) Calcular la velocidad del extremo que se mueve por el eje y cuando el otro se halla en $(\frac{1}{4}, 0)$.



36. ***Diseño de máquinas*** Repetir el ejercicio anterior para una función de posición $x(t) = \frac{3}{5} \operatorname{sen} \pi t$. Usar el punto $(\frac{3}{10}, 0)$ para la parte *c*).

37. ***Evaporación*** Al caer, una gota esférica alcanza una capa de aire seco y comienza a evaporarse a un ritmo proporcional a su área superficial ($S = 4\pi r^2$). Probar que el radio de la gota decrece a ritmo constante.

38. ***Electricidad*** El efecto combinado de dos resistencias R_1 y R_2, conectadas en paralelo, es una resistencia R dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

donde R, R_1 y R_2 se miden en ohmios. R_1 y R_2 están creciendo a razón de 1 y 1,5 ohmios/s, respectivamente. ¿A qué ritmo está cambiando R cuando $R_1 = 50$ y $R_2 = 75$ ohmios?

39. ***Expansión adiabática*** Cuando cierto gas poliatómico sufre una expansión adiabática, su presión p y su volumen v satisfacen la ecuación

$$pv^{1,3} = k$$

donde k es una constante. Hallar la relación entre los ritmos dp/dt y dv/dt.

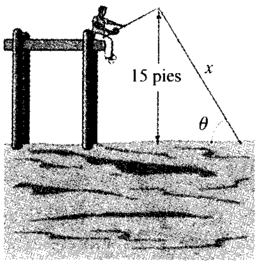
40. ***Diseño de autopistas*** Un tramo de autopista es circular de radio r. Con el fin de mejorar la toma de la curva, se construye ese tramo con un ángulo de inclinación q sobre la horizontal. Este ángulo satisface la ecuación

$$rg \operatorname{tg} \theta = v^2$$

donde v es la velocidad de los automóviles y $g = 32$ pies/s^2 es la aceleración de la gravedad. Hallar la relación entre los ritmos dv/dt y $d\theta/dt$.

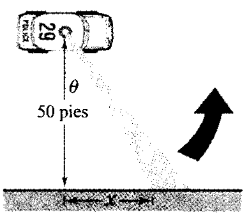
41. ***Ángulo de elevación*** Un globo asciende a 3 m/s desde un punto del suelo distante 30 m de un observador. Calcular el ritmo de cambio del ángulo de elevación del globo cuando está a una altura de 30 m.

42. ***Ángulo de elevación*** El pescador de la figura recoge hilo par∪σa capturar su pieza a razón de 1 pie/s. ¿A qué ritmo cambia el ángulo θ entre el sedal y el agua cuando quedan sin recoger 25 m de hilo?

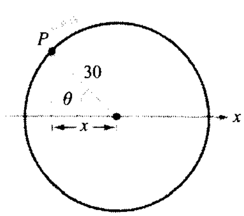


43. ***Ángulo de elevación*** Un avión vuela a 5 millas de altitud, y a una velocidad de 600 millas/h, hacia un punto situado exactamente en la vertical de un observador (véase figura). ¿A qué ritmo está cambiando el ángulo de elevación θ cuando el ángulo es *a*) $\theta = 30°$, *b*) $\theta = 60°$ y *c*) $\theta = 75°$?

44. ***Velocidad lineal y velocidad angular*** El coche patrulla de la figura, aparcado a 50 m de un largo muro, tiene una luz que gira a 30 revoluciones por minuto. ¿A qué velocidad se está moviendo la luz a lo largo del muro cuando el haz forma ángulos de *a*) $\theta = 30°$, *b*) $\theta = 60°$ y *c*) $\theta = 70°$?



45. ***Velocidad lineal y velocidad angular*** Una rueda de 30 cm de radio gira a razón de 10 vueltas por segundo. Se pinta en ella un punto *P* (véase figura).



a) Hallar dx/dt como función de θ.

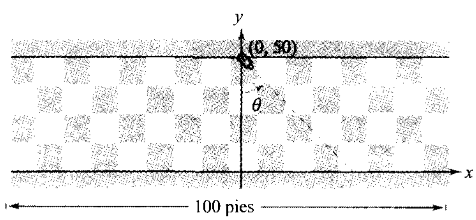
b) Representar en la calculadora la función del apartado *a*).

c) ¿Cuándo es máximo el valor absoluto del ritmo de cambio?

d) Calcular dx/dt cuando $\theta = 30°$ y $\theta = 60°$.

46. ***Control de vuelo*** Un avión vuela en aire en calma a una velocidad de 240 millas/h. Si asciende con un ángulo de 22°, calcular el ritmo al que está ganando altura.

47. ***Cámara de vigilancia*** Una cámara de vigilancia está a 50 pies de altura sobre un vestíbulo de 100 pies de largo (véase figura). Es más fácil diseñar la cámara con una velocidad de rotación constante, pero en tal caso toma las imágenes del vestíbulo a velocidad variable. En consecuencia, es deseable diseñar un sistema con velocidad angular variable de modo tal que la velocidad de la toma a lo largo del vestíbulo sea constante. Hallar un modelo para el ritmo variable de rotación adecuado si $|dx/dt| = 2$ pies/s.



48. ***Para pensar*** Describir la relación entre el ritmo de cambio de *y* y el de *x* en los casos siguientes. Suponemos que todas las variables y derivadas son positivas.

a) $\dfrac{dy}{dt} = 3\,\dfrac{dx}{dt}$

b) $\dfrac{dy}{dt} = x(L - x)\,\dfrac{dx}{dt},\ 0 \leqslant x \leqslant L$

Aceleración En los Ejercicios 49 y 50, calcular la aceleración del objeto especificado. (*Ayuda:* Recordemos que si una variable cambia a ritmo constante su aceleración es nula.)

49. Calcular la aceleración del extremo superior de la escalera del Ejercicio 25 cuando su base está a 7 pies de la pared.

50. Calcular la aceleración del velero del Ejercicio 28 cuando hay 13 pies de soga desde el amarradero.

51. ***Un modelo matemático*** La tabla recoge (en millones) el número de mujeres solteras *s* y casadas *m* en el mundo laboral en EE.UU. desde 1990 hasta 1994. (*Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics.*)

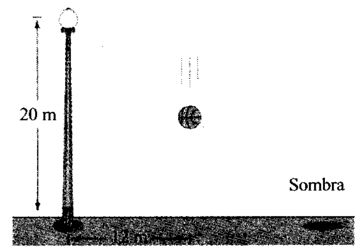
Año	1990	1991	1992	1993	1994
s	14,2	14,3	14,5	14,6	15,3
m	31,0	31,2	31,7	32,0	32,9

a) Usar regresión en la calculadora para hallar un modelo de la forma $m(s) = as^2 + bs + c$ que ajuste esos datos, donde t es el tiempo en años, siendo $t = 0$ el año 1990.

b) Hallar $\dfrac{dm}{dt}$

c) Estimar, con ese modelo, dm/dt para $t = 5$ supuesto que el número s va a crecer a razón de 1,2 millones.

52. Se deja caer una pelota desde una altura de 20 m y a una distancia de 12 m de una farola (véase figura). La sombra de la pelota se mueve a lo largo del suelo. ¿A qué ritmo se está moviendo la sombra 1 segundo después de soltar la pelota? *(Propuesto por Dennis Gittinger, St. Philips College, San Antonio, TX.)*



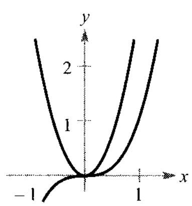
Ejercicios de repaso del Capítulo 2

En los Ejercicios 1 y 2, calcular la derivada de la función usando la propia definición de derivada.

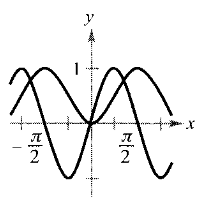
1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ **2.** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

3. ***Redacción*** Cada figura muestra las gráficas de una función y de su derivada. Identificarlas y redactar un breve párrafo explicando los criterios en que se ha basado la decisión.

a)



b)



4. ***Redacción*** Sea la función $f(x) = x\sqrt{4-x}$

a) Representarla en la calculadora.

b) Hallar una ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto (0, 0).

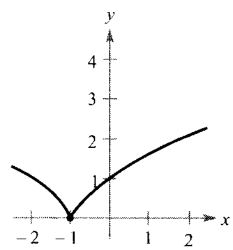
c) Completar la tabla con ayuda de la calculadora.

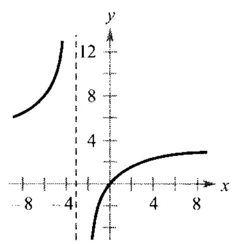
Δx	$f(x+\Delta x)$	$f(x)$	$\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
2			
1			
0,5			
0,1			

d) Redactar un párrafo explicando la interpretación geométrica de la última columna de esa tabla. ¿Qué relación guarda con el resultado del apartado *b*)?

En los Ejercicios 5 y 6, buscar los valores de x en los que f es derivable.

5. $f(x) = (x+1)^{2/3}$ **6.** $f(x) = \dfrac{4x}{x+3}$





En los Ejercicios 7-22, derivar cada función algebraica propuesta.

7. $f(x) = x^3 - 3x^2$ **8.** $f(x) = x^{1/2} - x^{-1/2}$

9. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2}$ **10.** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

11. $g(t) = \dfrac{2}{3t^2}$ **12.** $h(x) = \dfrac{2}{(3x)^2}$

13. $f(x) = \sqrt{1 - x^3}$

14. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

15. $f(x) = (3x^2 + 7)(x^2 - 2x + 3)$

16. $f(s) = (s^2 - 1)^{5/2}(s^3 + 5)$