CONTENIDO ▪
Aplicaciones a la economía y al comercio ▪

3.10 Aplicaciones a la economía y al comercio

Aplicaciones a la economía y al comercio

En la Sección 2.6 aprendimos que la situación más frecuente en que se miden cambios es respecto al tiempo. Ahora analizaremos algunos ritmos de cambio relevantes en Economía que no se miden respecto al tiempo. Así, los economistas denominan beneficio marginal, ingreso marginal y coste marginal a los ritmos de cambio de los beneficios, de los ingresos y de los costes con respecto al número de unidades producidas o vendidas.

RESUMEN DE TÉRMINOS Y FÓRMULAS COMERCIALES

Términos básicos	*Fórmulas básicas*
x es el número de unidades producidas (o vendidas)	
p es el precio por unidad	
R denota los ingresos totales obtenidos por la venta de x unidades	$R = xp$
C es el coste total de producción de x unidades	
$\overline{C}$ es el coste medio por unidad	$\overline{C} = \dfrac{C}{x}$
P es el beneficio total al vender x unidades	$P = R - C$

El punto de equilibrio es el número de unidades para el cual $R = C$.

Marginales

$$\frac{dR}{dx} = (\text{ingreso marginal}) \approx (\text{ingreso } \textit{extra} \text{ en la venta de una unidad adicional})$$

$$\frac{dC}{dx} = (\text{coste marginal}) \approx (\text{coste } \textit{extra} \text{ en la venta de una unidad adicional})$$

$$\frac{dP}{dx} = (\text{beneficio marginal}) \approx (\text{beneficio } \textit{extra} \text{ en la venta de una unidad adicional})$$

En este resumen, nótese que los marginales se pueden utilizar para estimar el ingreso, beneficio o coste asociado a la producción o venta de una unidad adicional. Esto se ilustra gráficamente para el ingreso marginal en la Figura 3.67.

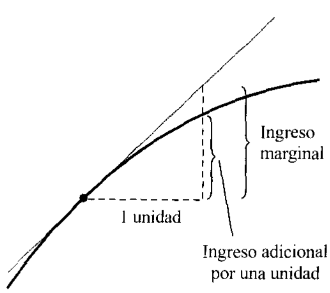


FIGURA 3.67
Una función de ingresos.

EXPLORACIÓN

Gráficas de funciones de ingresos La gráfica de la función de ingresos que muestra la Figura 3.67 es cóncava hacia abajo. ¿Cómo es posible? ¿No tendría que ser una función lineal del tipo

$$R = xp$$

donde x es el número de unidades y p el precio? Discutir esta cuestión en clase o en grupos. Considerar que el número de unidades vendidas x puede ser, él mismo, función del precio por unidad p. Por ejemplo, al bajar el precio unitario, es posible que aumente el número de unidades vendidas.

EJEMPLO 1 Los marginales como aproximaciones

Un empresario determina que el beneficio en la venta de x unidades de cierto artículo viene dado por $P = 0{,}0002x^3 + 10x$.

a) Calcular el beneficio marginal para una producción de 50 unidades.
b) Compararlo con el aumento real de beneficios obtenido al pasar de producir 50 a 51 unidades (véase Figura 3.68).

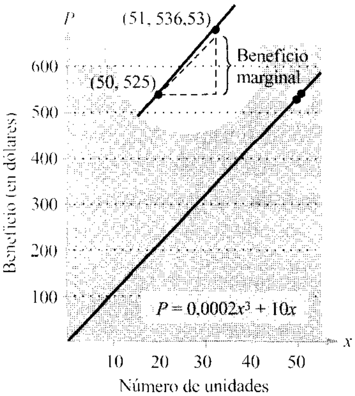


FIGURA 3.68
El beneficio marginal es el beneficio extra por la venta de una unidad adicional.

Solución:

a) El beneficio marginal viene dado por

$$\frac{dP}{dx} = 0{,}0006x^2 + 10$$

Cuando $x = 50$, el beneficio marginal es

$$\frac{dP}{dx} = (0{,}0006)(50)^2 + 10 = \$11{,}50 \qquad \text{Beneficio marginal}$$

b) Para $x = 50$ y 51, los beneficios reales son

$$P = (0{,}0002)(50^3) + 10(50) = 25 + 500 = \$525{,}00$$

$$P = (0{,}0002)(51^3) + 10(51) = 26{,}53 + 510 = \$536{,}53$$

Por tanto, el beneficio adicional al pasar la producción de 50 a 51 unidades es

$$536{,}53 - 525{,}00 = \$11{,}53 \qquad \text{Beneficio extra por una unidad}$$ □

La función de beneficios del Ejemplo 1 es inusual, por cuanto sigue creciendo siempre que el número de unidades vendidas aumente. En la práctica, es más frecuente encontrar situaciones en las que sólo bajando el precio por unidad es posible aumentar las ventas. Tales reducciones de precio acaban provocando la caída de los beneficios. El número x de unidades que los clientes están deseando adquirir a un precio dado p por unidad se conoce como la **función de** (la) **demanda**

$$\boxed{p = f(x)} \qquad \text{Función de demanda}$$

EJEMPLO 2 Una función de demanda

Un comerciante vende 2.000 unidades mensuales a $10 cada unidad. Se predice que las ventas mensuales crecerán 250 unidades por cada $0,25 de reducción en el precio. Hallar la función de demanda correspondiente a esta predicción.

Solución: Como está previsto que x aumente en 250 unidades cada vez que se baje en \$0,25 el precio, la situación queda descrita por la ecuación

$$x = 2.000 + 250\left(\frac{10 - p}{0,25}\right) = 12.000 - 1.000p$$

es decir,

$$p = 12 - \frac{x}{1.000}, \qquad x \geqslant 2.000 \qquad \text{Función de demanda}$$

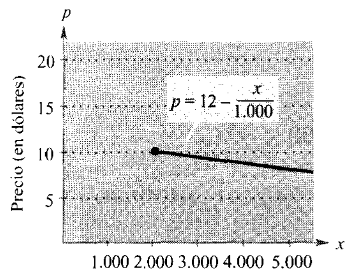


FIGURA 3.69
Una función de demanda p.

La gráfica de esta función de demanda está recogida en la Figura 3.69. □

EJEMPLO 3 Cálculo del ingreso marginal

Un restaurante de comida rápida calcula que la demanda mensual de hamburguesas es

$$p = \frac{60.000 - x}{20.000}$$

Hallar el crecimiento del ingreso marginal (ingreso por hamburguesa) para unas ventas mensuales de 20.000 unidades (véase Figura 3.70).

Solución: Como los ingresos totales vienen dados por $R = xp$, se tiene

$$R = xp = x\left(\frac{60.000 - x}{20.000}\right) = \frac{1}{20.000}(60.000x - x^2)$$

y el ingreso marginal es

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{20.000}(60.000 - 2x)$$

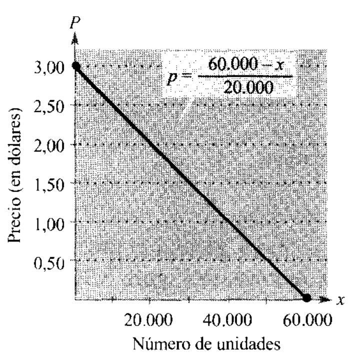


FIGURA 3.70
Al bajar el precio se venden más hamburguesas.

Para $x = 20.000$, el ingreso marginal es

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{20.000}[60.000 - 2(20.000)] = \frac{20.000}{20.000} = \$1/\text{unidad}$$ □

Nota. La función demanda del Ejemplo 3 es típica, en el sentido de que a un bajo precio corresponde una fuerte demanda, como muestra la Figura 3.70.

EJEMPLO 4 Cálculo del beneficio marginal

Puesto que en el Ejemplo 3 el coste de producción de x hamburguesas es

$$C = 5.000 + 0{,}56x$$

hallar el beneficio total y el beneficio marginal para 20.000, 24.000 y 30.000 unidades.

Solución: Al ser $P = R - C$, podemos usar la función de ingresos del Ejemplo 3 para ver que

$$P = \frac{1}{20.000}(60.000x - x^2) - 5.000 - 0{,}56x$$

$$= 2{,}44x - \frac{x^2}{20.000} - 5.000$$

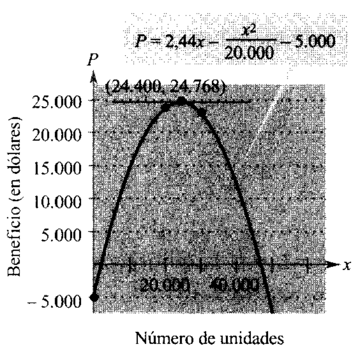


FIGURA 3.71
El máximo beneficio corresponde al punto donde el beneficio marginal es 0. Cuando se venden más de 24.000 hamburguesas, el beneficio marginal es negativo (un aumento de la producción más allá de este nivel producirá una *reducción* de beneficios, en lugar de un aumento de beneficios).

Así pues, el beneficio marginal es

$$\frac{dP}{dx} = 2{,}44 - \frac{x}{10.000}$$

La tabla muestra los beneficios total y marginal para cada una de las tres demandas especificadas.

Demanda	20.000	24.000	30.000
Beneficio	\$23.800	\$24.768	\$23.200
Beneficio marginal	\$0,44	\$0,00	–\$0,56

□

EJEMPLO 5 Cálculo del beneficio máximo

En la comercialización de un producto se ha comprobado que la demanda viene dada por

$$p = \frac{50}{\sqrt{x}} \qquad \text{Función de demanda}$$

El coste de producción de x unidades es $C = 0{,}5x + 500$. Calcular el precio por unidad para el que se consigue un beneficio máximo (véase Figura 3.72).

Solución: A la vista de la función de costes dada, es

$$P = R - C = xp - (0{,}5x + 500) \qquad \text{Ecuación primaria}$$

Sustituyendo la expresión dada por p obtenemos

$$P = x\left(\frac{50}{\sqrt{x}}\right) - (0{,}5x + 500) = 50\sqrt{x} - 0{,}5x - 500$$

Igualando a cero el beneficio marginal

$$\frac{dP}{dx} = \frac{25}{\sqrt{x}} - 0{,}5 = 0$$

vemos que $x = 2.500$. De ello podemos concluir que el beneficio máximo sucede cuando el precio es

$$p = \frac{50}{\sqrt{2.500}} = \frac{50}{50} = \$1{,}00$$ □

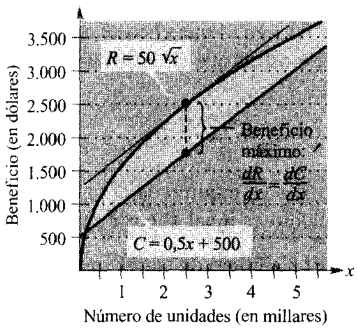


FIGURA 3.72

El máximo beneficio se logra cuando $\frac{dR}{dx} = \frac{dC}{dx}$.

Nota. Para hallar el beneficio máximo en el Ejemplo 5, hemos derivado la función de beneficios, $P = R - C$, y hemos igualado dP/dx a cero. De esta ecuación

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dR}{dx} - \frac{dC}{dx} = 0$$

se sigue que el máximo beneficio ocurre cuando el ingreso marginal es igual al coste marginal, tal como indica la Figura 3.72.

EJEMPLO 6 Minimizando el coste medio

Una empresa estima que el coste, en dólares, de producción de x unidades de cierto producto es $C = 800 + 0{,}04x + 0{,}0002x^2$. Calcular el nivel de producción que hace mínimo el coste medio por unidad.

Solución: Sustituyendo C de la ecuación dada se obtiene

$$\bar{C} = \frac{C}{x} = \frac{800 + 0{,}04x + 0{,}0002x^2}{x} = \frac{800}{x} + 0{,}04 + 0{,}0002x$$

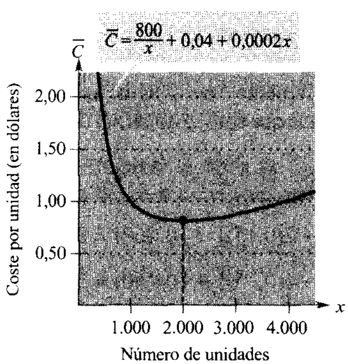


FIGURA 3.73

El mínimo coste medio se consigue cuando $\frac{d\bar{C}}{dx} = 0$.

Haciendo la derivada $d\bar{C}\ dx$ igual a cero resulta

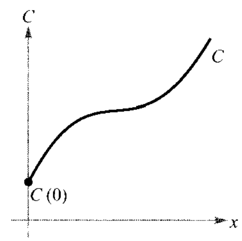
$$\frac{d\bar{C}}{dx} = -\frac{800}{x^2} + 0{,}0002 = 0$$

$$x^2 = \frac{800}{0{,}0002} = 4.000.000 \Rightarrow x = 2.000 \text{ unidades}$$

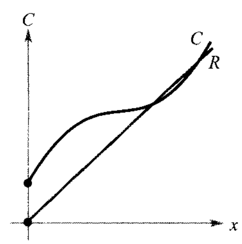
(Véase Figura 3.73.) □

Ejercicios de la Sección 3.10

1. ***Para pensar*** La figura muestra el coste C de producción de x unidades de un producto.
   a) ¿Cómo se llama $C(0)$?
   b) Esbozar la gráfica de la función coste marginal.
   c) ¿Tiene esa función algún extremo? Si lo tiene, describir su significado en términos de Economía.



2. ***Para pensar*** La figura muestra el coste C y los ingresos R de producción y venta de x unidades de un producto.
   a) Esbozar la gráfica de la función ingreso marginal.
   b) Esbozar la gráfica de la función de beneficios. Aproximar la posición del valor de x en el que el beneficio es máximo.



En los Ejercicios 3-6, calcular el número x de unidades que proporciona unos ingresos máximos.

3. $R = 900x - x^2$
4. $R = 600x^2 - 0{,}02x^3$
5. $R = \dfrac{1.000.000x}{0{,}02x^2 + 1.800}$
6. $R = 30x^{2/3} - 2x$

En los Ejercicios 7-10, hallar el número x de unidades para el cual el coste medio por unidad es mínimo.

7. $C = 0{,}125x^2 + 20x + 5.000$
8. $C = 0{,}001x^3 - 5x + 250$
9. $C = 3.000x - x^2\sqrt{300 - x}$
10. $C = \dfrac{2x^3 - x^2 + 5.000x}{x^2 + 2.500}$

En los Ejercicios 11-14, calcular el precio unitario que produce un beneficio P máximo.

	Función de coste	*Función de demanda*
11.	$C = 100 + 30x$	$p = 90 - x$
12.	$C = 2.400x + 5.200$	$p = 6.000 - 0{,}4x^2$
13.	$C = 4.000 - 40x + 0{,}02x^2$	$p = 50 - \dfrac{x}{100}$
14.	$C = 35x + 2\sqrt{x - 1}$	$p = 40 - \sqrt{x - 1}$

Coste medio En los Ejercicios 15 y 16, usar la función de costes para calcular el valor de x en el que el coste medio es mínimo. Para tal valor de x, mostrar que el coste marginal y el coste medio son iguales.

15. $C = 2x^2 + 5x + 18$
16. $C = x^3 - 6x^2 + 13x$
17. Probar que el coste medio es mínimo en el valor de x para el cual el coste medio es igual al coste marginal.
18. ***Beneficio máximo*** El beneficio de cierta empresa es
$$P = 230 + 20s - \frac{1}{2}s^2$$
donde s es la cantidad (en cientos de dólares) gastada en publicidad. ¿Qué valor de s hace máximo el beneficio?
19. ***Investigación numérica, gráfica y analítica*** El coste por unidad para la producción de un modelo de radio es \$60. El fabricante cobra \$90 por unidad para pedidos que no superen las 100 unidades. Con el fin de incentivar grandes pedidos, reduce el precio en \$0,15 por cada unidad que pase de 100 (por ejemplo, las cobraría a \$87 si el pedido fuese de 120).
   a) Completar analíticamente seis filas de una tabla como la adjunta, en la que sólo se muestran dos filas.

x	*Precio*	*Beneficio*
102	$90 - 2(0{,}15)$	$102[90 - 2(0{,}15)] - 102(60) = 3.029{,}40$
104	$90 - 4(0{,}15)$	$104[90 - 4(0{,}15)] - 104(60) = 3.057{,}60$

   b) Usando la calculadora, generar nuevas filas y usar la tabla para estimar el beneficio máximo.
   c) Expresar el beneficio P en función de x.
   d) Hallar, usando el Cálculo, el número crítico de la función y la orden de pedido requerida.