Metodo de la Transformada de Laplace.

Usando nuestra ecuación

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + 4q = 50\cos t \quad , \text{ con las condiciones}$$

que $q(0) = 0 \qquad q'(0) = 0 \Rightarrow I(0) = 0$

Para la resolución de esta ecuación usaremos la transformada de la derivada y algunos otros teoremas sobre la transformada inversa.

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) \qquad (1)$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\,Y(s) - y(0) \qquad (2)$$

en efecto aplicamos (1) y (2) para nuestra ecuación:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + 4q\right\} = \mathcal{L}\{50\cos t\}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{d^2q}{dt^2}\right\} + 2\mathcal{L}\left\{\frac{dq}{dt}\right\} + 4\mathcal{L}\{q\} = 50\mathcal{L}\{\cos t\}.$$

$$\Rightarrow \left(s^2 Q(s) - s\,q(0) - q'(0)\right) + 2\left(s\,Q(s) - q(0)\right) + 4\left(Q(s)\right) = 50\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

$\Rightarrow$ Y como $q(0) = q'(0) = 0$

$$\Rightarrow s^2 Q(s) + 2s\,Q(s) + 4\,Q(s) = 50 \frac{s}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow Q(s)\left(s^2 + 2s + 4\right) = 50\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)$$

$$Q(s)\,(s+2)^2 = 50\,\frac{s}{(s^2+1)}$$

$$Q(s) = 50\,\frac{s}{(s^2+1)} \cdot \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = 50\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

$$\Rightarrow q(t) = 50\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}\right] * \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}\right]$$

$$= 50\left(\cos t\right) * \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}\Big|_{s \to s+2}\right]$$

$$= 50\,(\cos t) * \left[e^{-2t}\,t\right]$$

$$= 50\left[(\cos t) * (t\,e^{-2t})\right]$$

$$= 50\left[(t\,e^{-2t}) * (\cos t)\right]$$

$$= 50\int_0^t (\alpha\,e^{-2\alpha}) \cos(t-\alpha)\,d\alpha.$$

$$= 50\int_0^t \alpha\,e^{-2\alpha} \cos(t-\alpha)\,d\alpha.$$

Integrando por parte.

Si $u = \alpha$ $\qquad dv = e^{-2x}\cos(t-\alpha)\,dx$

$du = d\alpha$ $\qquad V = -\frac{1}{5}e^{-2\alpha}\left(2\cos(t-\alpha) + \mathrm{sen}(t-\alpha\right)$

$\Rightarrow -\frac{\alpha}{5}e^{-2\alpha}\left(2\cos(t-\alpha) + \mathrm{sen}(t-\alpha)\right) + \frac{1}{5}\int e^{-2x}\left(2\cos(t-\alpha) + \mathrm{sen}(t\right.$

$\Rightarrow$ nuevamente aplicamos el método por parte y evaluamos en el intervalo $[0, t]$

$\therefore$ Obtenemos: que:

$$q(t) = 50\int_0^t \alpha e^{-2\alpha}\cos(t-\alpha)\,d\alpha = -20e^{-2t}t - 6e^{-2t} + 6\cos t + 8\,\mathrm{sen}\,t.$$

Finalmente, nuestra solución bajo las "condiciones" iniciales $q(0) = 0$ y $q'(0) = 0$

es: $q(t) = -20e^{-2t}t - 6e^{-2t} + 6\cos t + 8\,\mathrm{sen}\,t.$

$$= -6e^{-2t} - 20te^{-2t} + 6\cos t + 8\,\mathrm{sen}\,t. \quad //$$