LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

(apuntes escritos por Dr. Manuel Pargada)

1. INTRODUCCIÓN

Entre las transformaciones más usuales que operan con funciones f(x) cumpliendo condiciones adecuadas en I=[a,b], para obtener otras funciones en I, están por ejemplo :

- La operación D de derivación : $\mathrm{D}\left[f(x)\right] = f'(x)$
- La operación I de integración : $I\left[f(x)\right] = \int_a^x f(t)\,dt$
- La transformación M_g definida por : $M_g\left[f(x)\right] = g(x)\cdot f(x)$

  siendo g(x) una función concreta.

En cada caso, hay que asignar alguna restricción a las funciones f(x) a las que se aplica una transformación dada. Así, en el primer ejemplo, f(x) debe ser derivable en un cierto intervalo, etc.

Las tres transformaciones citadas son ***lineales***, es decir, que verifican :

$$T\left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right] = c_1 T\left[f_1(x)\right] + c_2 T\left[f_2(x)\right] \qquad \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Una clase importante dentro de las transformaciones lineales, son las llamadas ***transformaciones integrales***. Se consideran las funciones f(x) definidas en un intervalo finito o infinito a $\le x \le$ b y se escoge una función fija K(s,x) de la variable x y el parámetro s. Entonces la correspondiente transformada integral está dada por :

$$\boxed{T\left[f(x)\right] = \int_a^b K(s,x)\,f(x)\,dx = F(s)}$$

La función K(s,x) se llama ***núcleo de la transformación T*.** Se muestra fácilmente que ***T es lineal, cualquiera que sea la K(s,x).***

En la matemática aplicada se estudian varios casos especiales de transformadas integrales, adaptadas a la resolución de diversos problemas : transformada de Fourier, transformada de Fourier de seno, ídem de coseno, transformada de Hankel, de Mellin, etc.

Se trata de estudiar ahora la ***transformación de Laplace*** especialmente indicada para simplificar el proceso de resolver problemas de valor inicial, cuyas ecuaciones diferenciales sean lineales, y primordialmente cuando se incluyen funciones discontinuas. Es muy utilizada en teoría de circuitos.

Antes de entrar en sus aplicaciones, se va a comenzar introduciendo esta transformada de Laplace así como sus propiedades fundamentales y más útiles.

2. DEFINICIÓN Y TRANSFORMADAS DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

Definición

Sea f(t) definida en $(0, \infty)$. Se define la transformada de Laplace de f(t), como la función $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, definida por la integral

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s)} \qquad [1]$$

Deberá existir la integral impropia y dependiente del parámetro s, es decir, deberá ser convergente para ciertos valores de s. Sólo entonces podrá decirse que existe la transformada de Laplace de $f(t)$, o que $f(t)$ es $\mathcal{L}$ - transformable.

Nota El parámetro s se considerará aquí real. Es esto suficiente para las aplicaciones con ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes y algunas de coeficientes variables. En otros casos es necesario trabajar en el campo complejo, considerando a s como complejo.

Ejemplo 1: ***Sea $f(t) = 1$, $t \geq 0$***

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\cdot 1 \cdot \mathrm{d}\,t = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}\,t = \lim_{\lambda\to\infty}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\right]_0^\lambda = \lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{1}{s}-\frac{\mathrm{e}^{-s\lambda}}{s}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \quad , \quad s > 0}$$ pues la integral diverge para $s \leq 0$

<u>Nota</u> Si fuese complejo s, es decir, $s = s_1 + \mathrm{i}s_2$, entonces $\mathrm{e}^{-st} = \mathrm{e}^{-(s_1+\mathrm{i}s_2)t} = \mathrm{e}^{-s_1 t}\left(\cos s_2 t - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, s_2 t\right)$ y la integral impropia anterior sólo converge si $s_1 > 0$, es decir Re (s) > 0.

<u>Ejemplo 2:</u> *Sea <u>f(t) = e^{at} , t ³ 0</u>*

$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{at}\right] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} \cdot \mathrm{e}^{at} \cdot dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t}\, dt$. Es el caso anterior cambiando s por s - a.

Luego:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a} \quad , \quad s > a}$$

<u>Ejemplo 3:</u> *Sea <u>f(t) = t^a , a Î R , t ³ 0</u>*

$\mathcal{L}\left[t^a\right] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} \cdot t^a \cdot \mathrm{d}t$. Cambio: $st = x$. Entonces: $t = \dfrac{x}{s}$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{s}$ y

$\mathcal{L}\left[t^a\right] = \dfrac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \cdot x^a \cdot \mathrm{d}x$ Luego:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[t^a\right] = \frac{\mathrm{G}(a+1)}{s^{a+1}} \quad si \quad s > 0 \quad a > -1}$$

En particular :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0 \quad n \in N} \qquad \boxed{\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \quad s > 0} \qquad \boxed{\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \quad , s > 0}$$

<u>Ejemplo 4:</u> Sea *<u>f(t) = cos at ó f(t) = sin at t ³ 0</u>*

$\mathcal{L}[\cos at] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot \cos at \cdot dt$ = Integrando dos veces por partes $\Rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad , s > 0}$$. Análogamente : $$\boxed{\mathrm{L}[\mathrm{s}\,i\,\mathrm{n}\, at] = \frac{a}{s^2 + a^2} , s > 0}$$

Podría obtenerse mejor así : Trabajando como en los ejemplos 1 y 2, sustituyendo a por ai ($a \in \Re$), resulta:

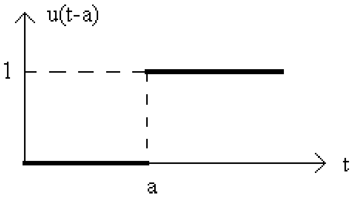
$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,at}\right] = \frac{1}{s - a\,\mathrm{i}}, \quad \text{para Re } (s - a\mathrm{i}) > 0\,, \quad \text{es decir } s > 0 \text{ si } s \text{ es real.}$$

Por tanto: $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}\right] = \dfrac{s + a\,\mathrm{i}}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$

$$\text{Luego} \begin{cases} \mathcal{L}[\cos at] = \mathcal{L}\left[\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}at})\right] = \mathrm{Re}\dfrac{s + a\,\mathrm{i}}{s^2 + a^2} = \dfrac{s}{s^2 + a^2} & , s > 0 \\ \mathcal{L}[\mathrm{sen}\, at] = \mathcal{L}\left[\mathrm{Im}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,at})\right] = \mathrm{Im}\dfrac{s + a\,\mathrm{i}}{s^2 + a^2} = \dfrac{a}{s^2 + a^2} & , s > 0 \end{cases}$$

<u>Ejemplo 5:</u> *Sea la función escalón unidad <u>u (t - a)</u> o función de Heaviside.*

$$\mathrm{u}\,(t - a) = \begin{cases} 0 & , \quad t < a \\ 1 & , \quad t \geq a \end{cases} \qquad (a > 0)$$



Es $\boxed{\mathcal{L}\,[u(t - a)]} =$

$$= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \cdot u(t - a) \cdot \mathrm{d}\,t = \int_a^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}\,t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right]_a^{\infty} = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s} \quad , s > 0}$$

En particular: $\boxed{\mathcal{L}\,[u(t)] = \mathcal{L}\,[1] = \dfrac{1}{s} \quad , s > 0}$

<u>*3. EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA*</u>

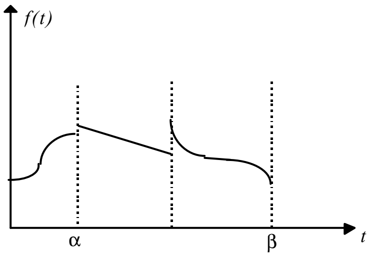
En los ejemplos anteriores se ha visto por cálculo directo que la integral [1] existe realmente para las funciones consideradas, en algún intervalo de valores de s. Pero eso no ocurre así siempre. Por ejemplo, la integral impropia de [1] no converge para ningún valor de s si f(t) = $\dfrac{1}{t}$ ó f(t) = e^{t^2}, por crecer estas funciones demasiado rápido cuando $t \to 0^+$ o $t \to \infty$ respectivamente. Afortunadamente existe la transformada para la mayor parte de las funciones que aparecen en aplicaciones donde intervienen ecuaciones diferenciales lineales.

Se trata ahora de establecer un conjunto razonable de condiciones que garanticen la existencia de transformada para las funciones que las cumplen.

a) **Definición:**

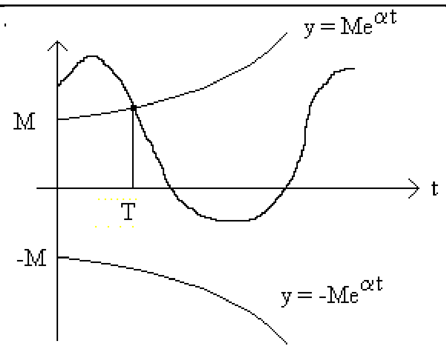
> *"Se dice que f(t) es* ***seccionalmente continua*** *(o continua a trozos) en* ***[a , b] = I*** *, si f(t) es continua en todos los puntos de I, excepto quizá en un nº finito de ellos, en los que f(t) deberá tener límites laterales finitos"*
> *"Se dice que f(t) es* ***seccionalmente continua en [0 , ¥]****, si lo es en [0, T], " T > 0"*

Si f(t) es seccionalmente continua en [α , β], es integrable en [α , β]



b) **Definición**

> *"Se dice que f(t) es de* ***orden exponencial** a* ***cuando t ® ¥****, si existen constantes positivas M, T tales que:* $|f(t)| < \mathrm{M}e^{\alpha t} \quad \forall t > \mathrm{T}$ *"*



Es decir que f(t) no crece más rápido que una función de la forma M $e^{\alpha t}$.

Son por ejemplo de orden exponencial las funciones 1, e^{at}, t^n, sen bt, cos bt, $t^n e^{at}$, e^{at} cos bt,... .

No lo es e^{t^2}, pues crece más rápidamente que $e^{\alpha t}$, cualquiera que sea α ya que :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{at}} = \lim_{t\to\infty} e^{t(t-a)} = \infty$$

c) Notación

Se designará con el símbolo A, al conjunto de funciones f(t), tales que:

- Son seccionalmente continuas en [0,∞)
- Son de orden exponencial cuando $t \to \infty$

d) **Teorema de existencia**

" Si f(t) Î A*, entonces existe* $\mathcal{L}$ *[f], " s mayor que un cierto* **a** *"*

Es decir que f(t) $\in$ A es condición <u>suficiente</u> para que exista L [$f(t)$] y además, al menos para todo $s > \alpha$.

<u>Demostración</u>

f(t) de orden exponencial $\Rightarrow \exists$ M , T > 0 y $\alpha \in$ R / | f(t) | < M $e^{\alpha t}$ $\forall$ t > T

$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\forall$ s pues e^{-st} f(t) es seccionalmente continua en

[0 , T].

Es | e^{-st} f(t) | < M $e^{-(s-\alpha)t}$ $\forall\, t > \mathrm{T}$

y

$$\int_{\mathrm{T}}^{\infty} \mathrm{M}\,\mathrm{e}^{-(s-\alpha)t}\,\mathrm{d}t \le \int_0^{\infty} \mathrm{M}\,\mathrm{e}^{-(s-\alpha)t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{M}}{s-\alpha}\lim_{\lambda\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-(s-\alpha)t}\right]_0^{\lambda} = \frac{\mathrm{M}}{s-\alpha} \quad si \quad s > \alpha$$

Luego $\int_{\mathrm{T}}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolutamente si $s > \alpha$.

Por tanto, existe $\mathcal{L}$ [f(t)] = $\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{T}}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \quad si \quad s > \alpha$

<u>Notas</u>

- Puede demostrarse además que el dominio de definición de F(s) es de la forma (s_o , ∞) ó [s_o , ∞).

- No se cumple en general el recíproco del teorema, es decir que la condición no es necesaria. Así por ejemplo, f(t) = $t^{-1/2}$ $\notin$ A , pues tiene discontinuidad infinita en $t = 0$ y por tanto no es seccionalmente continua en [0, T] . Pero tiene transformada, pues : $\mathcal{L}$ [$t^{-1/2}$] = $\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$, $s > 0$

4. PROPIEDAD DE LINEALIDAD

Para hablar de transformación lineal, deben establecerse previamente los espacios vectoriales.

- A es evidentemente un espacio vectorial real con las definiciones usuales de suma de funciones y producto por escalar.
- Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones reales definidas en intervalos (s_o,∞) ó $[s_o,\infty)$. También es espacio vectorial real, si dadas dos funciones F, G $\in \mathcal{F}$, se define F+G en la forma usual, en la intersección de los dominios de F y G. Se considerarán además como iguales dos funciones en $\mathcal{F}$,si coinciden en un intervalo de la forma (α , ∞).
- Entonces $\mathcal{L}$ es aplicación del espacio vectorial A en el $\mathcal{F}$.

Con estas consideraciones, se verifica :

Teorema

$\mathcal{L}$ *es un operador lineal, es decir : Si f, g tiene transformada inversa de Laplace para s > a, y a , b Î Â, entonces af+bg tiene transformada para s > a y*
$\mathcal{L}\,[af(t)+bg(t)] = a\,\mathcal{L}\,[\,f(t)] + b\,\mathcal{L}\,[\,g(t)] \qquad s > a$

En efecto :

$$\mathcal{L}\,[af+bg](s) = \int_0^\infty e^{-st}\left[af(t)+bg(t)\right]\mathrm{d}t = a\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= a\,\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] = aF(s)+bG(s) \quad , \ s>\alpha \qquad \text{c.q.d.}$$

Ejemplo 6: *Calcular* $\mathcal{L}\left[\operatorname{sen}^2 at\right]$

Es
$$\mathcal{L}\left[\operatorname{sen}^2 at\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1-\cos 2at}{2}\right] = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[\cos 2at]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4a^2}\right] = \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)} \ , \quad s>0$$

<u>**Ejemplo 7**</u>**:** *Calcular* $\mathcal{L}[\mathrm{Ch}\, at]$ *y* $\mathcal{L}[\mathrm{Sh}\, at]$

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{Ch}\, at\right] = \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{at} + \mathrm{e}^{-at}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right] = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|$$

Análogamente $$\mathcal{L}\left[\mathrm{Sh}\, at\right] = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|$$

<u>*5. PROPIEDADES DE TRASLACIÓN Y CAMBIO DE ESCALA*</u>

a) <u>Primera propiedad de traslación:</u>

Si f Î A y $\mathcal{L}$ *[f(t)]* = F*(s), s >* **a***, entonces* $\mathcal{L}$ ***[e*** ^{at}*f(t)]* = F*(s-a), s - a >* **a**

En efecto : $\mathcal{L}$ [e $^{at}f(t)$] = $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(s-a)$ $\qquad s - a > \alpha$

<u>**Ejemplo 8:**</u> *Calcular* $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{at}\cos bt\right]$

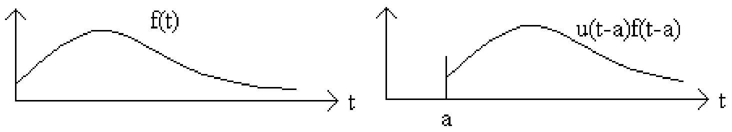
$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{at}\cos bt\right] = \mathcal{L}\left[\cos bt\right]\Big|_{s-a} = \frac{s}{s^2 + b^2}\bigg|_{s-a} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$$

<u>**Ejemplo 9**</u>**:** *Calcular* $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-3t}\, t^4\right]$

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-3t}\, t^4\right] = \mathcal{L}\left[t^4\right]\Big|_{s+3} = \frac{4!}{(s+3)^5}, \quad s > -3$$

b) <u>Segunda propiedad de traslación</u>

<u>Nota previa:</u> La función u(t-a)·f(t-a) = $\begin{cases} 0 & , \ t < a \\ \mathrm{f}(t-a) & , \ t > a \end{cases}$ es la obtenida por traslado de f(t) <u>a</u> unidades a la derecha, tomando además el valor 0, para $t < a$



Si $f \in$ A *y* $\mathcal{L}$ $[f(t)] = F(s)$, $s > \alpha.>.0$, *entonces para* $a > 0$: $\mathcal{L}\,[f(t-a)\cdot u(t-a)]\,(s) = e^{-as}F(s), \quad s > \alpha$

En efecto : $\mathcal{L}\left[f(t-a)u(t-a)\right] = \int_0^\infty e^{-st}\, f(t-a)\, u(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_a^\infty e^{-st}\, f(t-a)\,\mathrm{d}t \quad =$

$$\underset{(\text{Cambio } x = t-a)}{=} \int_0^\infty e^{-s(x+a)}\, f(x)\,\mathrm{d}x = e^{-as}F(s) \qquad \text{c.q.d.}$$

Nota: Estos desplazamientos surgen en la práctica cuando hay tiempos de retraso en la alimentación de energía a sistemas eléctricos (la alimentación ocurre en t = a > 0) El factor e^{-as} que aparece en la transformada, se llama factor de retardo

Ejemplo 10: *Calcular* $\mathcal{L}[g(t)]$ *siendo* $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ (t-1)^3 & t > 1 \end{cases}$

Es $g(t) = f(t-1)\cdot u(t-1)$ con $f(t) = t^3$

Por tanto: $\mathcal{L}\left[g(t)\right] = e^{-s}\,\mathcal{L}\left[t^3\right] = \dfrac{e^{-s}\,3!}{s^4}\;, \quad s > 0$

c) Cambio de escala

Si f Î A *y* $\mathcal{L}$ *[f(t)] = F(s), (s > a), entonces* $\mathcal{L}$ *[f(at)]* $= \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$, *s > aa*

En efecto: $$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty e^{-st}\, f(at)\,\mathrm{d}t \overset{(at=x)}{=} \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}x}\, f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,F\left(\frac{s}{a}\right)$$

6. TRANSFORMADA DE DERIVADAS E INTEGRALES

a) Transformada de derivadas

Sea $f(t)$ continua en $(0,\infty)$ y de orden exponencial α y sea f' seccionalmente continua en $[0,\infty)$. Entonces $\mathcal{L}\ [f'(t)] = s\,F(s) - f(0^+)$, $\quad (s > \alpha)$

S.D.

Si se cumplen las condiciones anteriores, salvo que $f(t)$ tiene discontinuidad por salto en $t = a > 0$, entonces : $$\mathcal{L}\ [\,f'(t)] = s\,F(s) - f(0^+) - e^{-as}\,[f(a^+)-f(a^-)]$$ *Análogo si existen varias discontinuidades por salto.*

S.D.

Si f, f' , ... , $f^{(n-1)}$ son continuas en $(0,\infty)$ y de orden exponencial α y $f^{n)}$ es seccionalmente continua en $[0,\infty)$, entonces : $$\mathcal{L}\,[f^{(n)}(t)]\,(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)\,, \quad (s > \alpha)$$

Así para n = 2

$$\mathcal{L}\,[f''(t)] = s\,\mathcal{L}\,[f'] - f'(0^+) = s\,[\,s\,F(s) - f(0^+)] - f'(0^+) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{L}\,[f''(t)] = s^2 F(s) - s\,f(0^+) - f'(0^+).$$

En general, inducción.

Aquí se intuye la utilidad de la transformada de Laplace para resolver problemas de valor inicial. Se reemplaza la "derivación respecto a *t* ", por "multiplicación por *s*", transformándose una ecuación diferencial con coeficientes constantes, en una algebraica.

<u>Ejemplo 11:</u> *Calcular* $\underline{\mathcal{L}[\text{sen}\, at]}$ *,usando la* exp*resion para* $\mathcal{L}[f'']$

Para f(t) = sen at es : $f'(t) = a \cos t$, $f''(t) = -a^2 \text{ sen } at$, $f(0) = 0$, $f'(0) = a$

Luego $\mathcal{L}[\text{f}''] = \begin{cases} \text{L}[-a^2 \text{ s}i\text{ n}\, at] = -a^2 \text{L}[\text{s}i\text{ n}\, at] \\ s^2 \text{L}[f] - sf(0) - f'(0) = s^2 \text{L}[\text{s}i\text{ n}\, at] - a \end{cases}$

Por tanto : $-a^2 \text{L}[\text{s}i\text{ n}\, at] = s^2 \text{L}[\text{s}i\text{ n}\, at] - a$.

Es decir : $\text{L}[\text{s}i\text{ n}\, at] = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$

b) <u>Transformada de integrales</u>

Si f Î A*, entonces* $\begin{cases} \mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)\, dx\right] = \dfrac{\text{F}(s)}{s} \\ \mathcal{L}\left[\int_a^t f(x)\, dx\right] = \dfrac{\text{F}(s)}{s} - \dfrac{1}{s}\int_0^a f(x) dx \end{cases}$

Demostración para el caso particular en que f sea continua en [0,∞):
Sea $\int_0^t f(x)\, dx = g(t)$. Entonces : $g'(t) = f(t)$, $g(0) = 0$ y $g(t)$ continua en [0,∞). Luego $\mathcal{L}[g'(t)] = \begin{cases} \mathcal{L}[f(t)] = \text{F}(s) \\ s\,\text{G}(s) - 0 \end{cases}$

Por tanto: G(s) = $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)\, \text{d}\, x\right] = \dfrac{\text{F}(s)}{s}$ c.q.d.

También: $\mathcal{L}\left[\int_a^t f(x)\, \text{d}\, x\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right] - \mathcal{L}\left[\int_0^a f(x) dx\right] = \dfrac{\text{F}(s)}{s} - \dfrac{1}{s}\int_0^a f(x) dx$

<u>7. MULTIPLICACIÓN POR t^n Y DIVISIÓN POR t</u>

a) <u>Multiplicación por t^n</u>

Si f Î A *y* $\mathcal{L}[f(t)] = \text{F}(s)$ *(s > a), entonces* $\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \dfrac{\text{d}^n}{\text{d}\, s^n}\text{F}(s)$

(s > a),

Por ser $f \in$ A, puede mostrarse que es aplicable la regla de Leibniz en lo que sigue:

$$\frac{\mathrm{d\,F}}{\mathrm{d}\,s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}\,t \overset{\text{T. Leibniz}}{=\!=\!=\!=} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\left[\mathrm{e}^{-st} f(t)\right]\mathrm{d}\,t = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, tf(t)\,\mathrm{d}\,t = -\mathcal{L}[t\, f(t)]$$

Por inducción se muestra la fórmula general para la derivada n-ésima.

<u>**Ejemplo 12**</u>: ***Calcular*** $\mathcal{L}[t \text{ sen } at]$ ***y*** $\mathcal{L}[t \cos at]$

$$\mathcal{L}[t\,\text{sen}\,at] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\mathcal{L}[\text{sen}\,at] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\frac{a}{s^2+a^2} = \frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}, \quad s>0$$

$$\mathcal{L}[t\cos at] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\mathcal{L}[\cos at] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\frac{s}{s^2+a^2} = \frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}, \quad s>0$$

b) <u>**División por t**</u>

Si $f \in$ A y $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \mathrm{F}(s)$, *entonces* $\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty \mathrm{F}(u)\,\mathrm{d}\,u$, si existe $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t}$ *finito*

En efecto:

Sea $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$. Entonces: $f(t) = t\cdot g(t)$. Luego $\mathrm{F}(s) = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\mathrm{G}(s)$, de donde

$\mathrm{G}(s) = -\int_a^s \mathrm{F}(u)\,\mathrm{d}\,u$. Como según veremos es $\lim\limits_{s\to\infty}\mathrm{G}(s)=0$, resulta :

$$\mathrm{G}(s) = -\left[\int_a^\infty \mathrm{F}(u)\,\mathrm{d}\,u - \int_s^\infty \mathrm{F}(u)\,\mathrm{d}\,u\right] = \int_s^\infty \mathrm{F}(u)\,\mathrm{d}\,u \qquad \text{c.q.d.}$$

<u>**Ejemplo 13:**</u> *Calcular* $\underline{\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}\,x\right]}$

Es $\mathcal{L}\int_0^t \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}\,x = \dfrac{1}{s}\mathcal{L}\left[\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right] = \dfrac{1}{s}\int_s^\infty \mathcal{L}\left[1-\mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}\,s =$

$$= \frac{1}{s}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)\mathrm{d}\,s = \frac{1}{s}\left[\ln\frac{s}{s+1}\right]_s^{\infty} = \frac{1}{s}\ln\frac{s+1}{s}\,, \qquad s > 0$$

<u>Ejemplo 14:</u> *Calcular* $I = \int_0^{\infty}\frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}\,\mathrm{d}\,t$

$$\text{Es I} = \mathcal{L}\left[\frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}\right]\Bigg|_{s=0} = \int_0^{\infty}\mathcal{L}\left[\cos 6t - \cos 4t\right]\,ds =$$

$$= \int_0^{\infty}\left(\frac{s}{s^2+36} - \frac{s}{s^2+16}\right)\mathrm{d}\,s = \frac{1}{2}\ln\frac{s^2+36}{s^2+16}\Bigg|_0^{\infty} = -\frac{1}{2}\ln\frac{36}{16} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{6}{4}\right)^2 = \boxed{\ln\frac{2}{3}}$$

<u>8. COMPORTAMIENTO DE F(s) EN s = 0 Y s = ¥</u>

(Tan sólo enunciados)

a) <u>Comportamiento de F(*s*) cuando *s* ® ¥</u>

Si f(t) Î A*, entonces:* $\lim_{s\to\infty} \mathrm{F}(s) = 0$

b) <u>Teorema de valor inicial o primer teorema tauberiano</u>

Si f(t) Î A*, entonces:* $\lim_{s\to\infty} s\,\mathrm{F}(s) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$*, si existen estos límites*

c) <u>Teorema de valor final o segundo teorema tauberiano</u>

Si f(t) Î A*, entonces:* $\lim_{s\to 0} s\,\mathrm{F}(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$ *si existen finitos estos límites*

Ejemplo 15: *Comprobar el teorema de valor inicial para la función* $f(t) = 3 - 2\cos t$

Es $F(s) = \mathcal{L}\,[3\text{-}2\cos t] = \dfrac{3}{s} - \dfrac{2s}{s^2+1}$

$$\lim_{s\to\infty} s\,F(s) = 1 \quad , \quad \lim_{t\to 0} f(t) = 1$$

9. TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE FUNCIONES ESPECIALES

a) Transformada de funciones periódicas

Si $f \in$ A *y es periódica con periodo T, entonces:* $\mathcal{L}\,[f(t)] = \dfrac{\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}$

En efecto : $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \sum_0^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^\infty I_n$

Es:

$$I_n = \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\,dt \xrightarrow{(t = x+nT)} \int_0^T e^{-s(x+nT)} f(x+nT)\,dx = e^{-snT}\int_0^T e^{-sx} f(x)\,dx$$

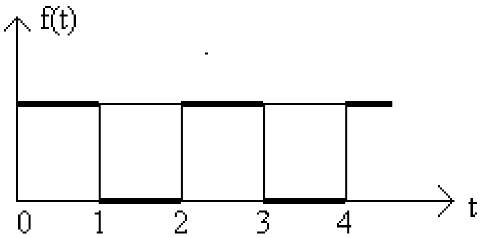
$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[f(t)] = \left[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots\right]\int_0^T e^{-sx} f(x)\,dx = \frac{\int_0^T e^{-sx} f(x)\,dx}{1-e^{-sT}} \qquad \text{c.q.d.}$$

Ejemplo 16: *Hallar* $\mathcal{L}[f(t)]$ *siendo* $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$ *y con periodo* 2

Es: T = 2

$$\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-st} f(t)\,dt + \int_1^2 e^{-st}\cdot 0\,dt =$$

$$= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-s}}{s}$$



Luego: $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})} = \dfrac{1}{s\left(1+e^{-s}\right)} = \dfrac{e^s}{s\left(1+e^s\right)}$

Puede hacerse de otro modo , expresado f(t) en términos de la función escalón.

Evidentemente es : $f(t) = u(t) - u(t-1) + u(t-2) - u(t-3) + \ldots$, $t > 0$

Como $\mathcal{L}[u(t-a)] = \dfrac{e^{-as}}{s}$ $(s > 0)$, resulta :

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}\left[1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \ldots\right] = \frac{1}{s}\,\frac{1}{1 + e^{-s}}$$

b) <u>Función escalón unitario</u>

Ya se definió la función escalón unitario (o función de Heaviside) como :

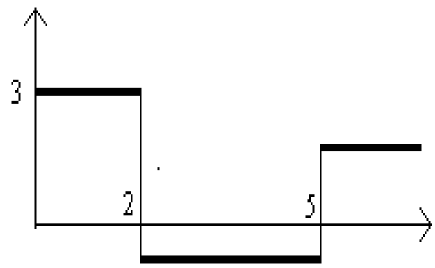
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \qquad \text{ó} \qquad u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases} \qquad (a > 0)$$

También se estableció que : $\mathcal{L}[u(t)] = \dfrac{1}{s}$ y $\mathcal{L}[u(t-a)] = \dfrac{e^{-as}}{s}$

La función escalón, junto con la segunda propiedad de traslación o desplazamiento, son muy útiles en el tratamiento de funciones seccionalmente continuas.

<u>Ejemplo 17</u>:

Hallar $\mathcal{L}[f(t)]$, *siendo* $f(t) = \begin{cases} 3 & t < 2 \\ -1 & 2 < t < 5 \\ 2 & 5 < t \end{cases}$



Es $f(t) = 3\,u(t) - 4\,u(t-2) + 3\,u(t-5)$

Luego $\boxed{F(s) = \dfrac{1}{s}\left[3 - 4\,e^{-2s} + 3\,e^{-5s}\right]}$

Ejemplo 18: *Hallar* $\mathcal{L}[g(t)u(t-a)]$

Por la propiedad segunda de traslación es: $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}\,\mathcal{L}[f(t)]$.

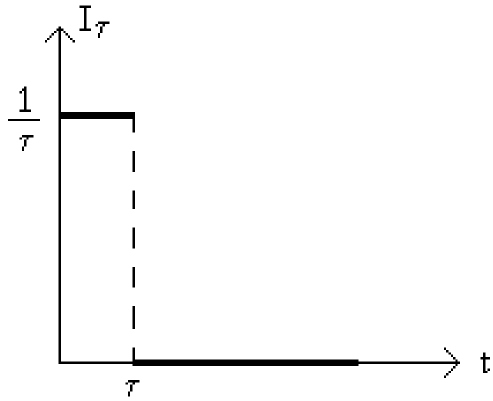
En el caso del ejemplo, la $f(t)$ tal que $g(t) = f(t-a)$ es $f(t) = g(t+a)$.

Por tanto : $\boxed{\mathcal{L}[g(t)u(t-a)] = e^{-as}\,\mathcal{L}[g(t+a)]}$

c) **Funciones impulso y función d(t) de Dirac**

- Se entiende por función impulso $\mathrm{I}_\tau(t)$

la $\quad \mathrm{I}_\tau(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau} & 0 < t < \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$



Puede servir de modelo para representar una fuerza o excitación de magnitud constante $\dfrac{1}{\tau}$, ,que actúa sobre un sistema durante un tiempo τ, desde t = 0 , proporcionando al sistema un impulso total unitario $\int_0^\tau \mathrm{I}_\tau(t)\,\mathrm{d}t = 1$

$$\text{Se verifica :} \begin{cases} \int_0^\infty \mathrm{I}_\tau(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau \dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{d}t = 1 \\ \mathcal{L}[\mathrm{I}_\tau(t)] = \int_0^\tau \mathrm{e}^{-st}\,\dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\Bigg]_0^\tau = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-s\tau}}{s\tau} \qquad \forall s \end{cases}$$

- En la función impulso anterior, haciendo disminuir el tiempo τ durante el que actúa la fuerza o excitación $\dfrac{1}{\tau}$, puede considerarse la situación que se produce cuando la fuerza imparte un impulso unitario al sistema, en un tiempo arbitrariamente pequeño, a partir de $t = 0$, lo que podría designarse como impulso unitario instantáneo en $t = 0$. (El impulso podría no ser unitario y en otro instante $t = \mathrm{a}$)

Se utiliza esta idea en sistemas mecánicos, circuitos eléctricos, etc. Por ejemplo, el golpe de un martillo, o una carga concentrada en un punto de una viga. Para estos casos de fuerzas violentas de corta duración, o sobre una pequeña sección, suele usarse la llamada *función delta de Dirac d(t)* o función *impulso unitario instantáneo en t = 0*. Es una función ficticia, aproximada por $\mathrm{I}_\tau(t)$ cuando $\tau \to 0^+$.

No puede hablarse de $\lim\limits_{\tau\to 0^+} \mathrm{I}_\tau(t)$ pues no existe dicho limite, pero aprovechando que $\lim\limits_{\tau\to 0}\int_0^\infty \mathrm{I}_\tau(t)\,\mathrm{d}t = 1$ y $\lim\limits_{\tau\to 0}\mathcal{L}[\mathrm{I}_\tau(t)] = \lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s\tau}}{s\tau} = \lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{s\,\mathrm{e}^{-s\tau}}{s} = 1$, se describe $\delta(t)$ por medio de :

$$\boxed{\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad , \quad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1}$$

Nota:

Para establecer la $\delta(t)$, suele partirse de la $\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\, e^{-nx^2}$, para la cual también $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$

Literalmente, no tiene sentido lo anterior, pues si una función es nula en todos los puntos, menos en uno, su integral en (-∞, ∞) es nula. No es por tanto $\delta(t)$ una función en el sentido habitual. Es un caso particular de lo que en la matemática se conoce como *una función generalizada o distribución*.

Sin embargo la descripción de $\delta(t)$ que se ha hecho en el recuadro ultimo, sugiere bien la idea de la situación limite de $I_\tau(t)$. Además, tras las justificaciones matemáticas mostradas por Laurent Schwartz, puede operarse con $\delta(t)$ en varias cuestiones sobre integrales y sobre transformadas de Laplace, de manera análoga a lo establecido para las funciones de la familia A.

También puede usarse en forma análoga la $\delta(t\text{-}a)$ para describir un impulso unitario instantáneo en $t = a$.

Es : $$\boxed{\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & t \neq a \\ \infty & t = a \end{cases} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, dt = 1 \quad ; \quad \mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}}$$

Se verifica también :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t)\, dt = f(a) \ \text{si}\ f(t) \ \text{es continua en intervalo que contenga a}\ \underline{t = a}}$$

Y $$\boxed{\int_{-\infty}^{t} \delta(x-a)\, dx = u(t-a)}$$

Nota Se observa que $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ cumple que $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \neq 0$

No contradice la propiedad $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$, pues $\delta(t) \notin$ A.