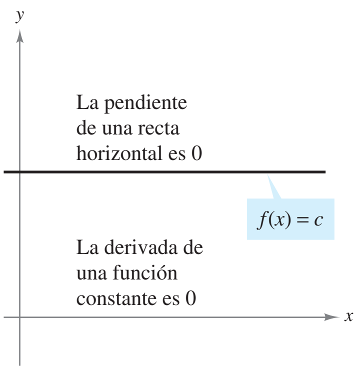
2.2 Reglas básicas de derivación y razón de cambio

- Encontrar la derivada de una función por la regla de la constante.
- Encontrar la derivada de una función por la regla de la potencia.
- Encontrar la derivada de una función por la regla del múltiplo constante.
- Encontrar la derivada de una función por las reglas de suma y diferencia.
- Encontrar la derivada de las funciones seno y coseno.
- Usar derivadas para calcular razón de cambio.



Se observa que la regla de la constante equivale a decir que la pendiente de una recta horizontal es 0. Esto demuestra la relación que existe entre derivada y pendiente
Figura 2.14

La regla de la constante

En la sección 2.1 se usó la definición por medio de límites para calcular las derivadas. Ésta y las dos próximas secciones presentan varias "reglas de derivación" que permiten calcular las derivadas sin el uso *directo* de la definición por límites.

TEOREMA 2.2 LA REGLA DE LA CONSTANTE

La derivada de una función constante es 0. Es decir, si c es un número real, entonces

$$\frac{d}{dx}[c] = 0.$$

(Ver la figura 2.14)

DEMOSTRACIÓN Sea $f(x) = c$. Entonces, por la definición de derivada mediante el proceso de límite, se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[c] &= f'(x)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla de la constante

	Función	*Derivada*
a)	$y = 7$	$\dfrac{dy}{dx} = 0$
b)	$f(x) = 0$	$f'(x) = 0$
c)	$s(t) = -3$	$s'(t) = 0$
d)	$y = k\pi^2$, k es constante	$y' = 0$

EXPLORACIÓN

Conjetura Utilizar la definición de derivada de la sección 2.1 para encontrar la derivada de las siguientes funciones. ¿Qué patrones se observan? Utilizar los resultados para elaborar una conjetura acerca de la derivada de $f(x) = x^n$.

a) $f(x) = x^1$ ***b)*** $f(x) = x^2$ ***c)*** $f(x) = x^3$
d) $f(x) = x^4$ ***e)*** $f(x) = x^{1/2}$ ***f)*** $f(x) = x^{-1}$

La regla de la potencia

Antes de demostrar la próxima regla, revisar el proceso de desarrollo de un binomio.

$$(x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

El desarrollo general del binomio para un entero positivo n cualquiera es

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \underbrace{\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n}_{(\Delta x)^2 \text{ es un factor común en estos términos.}}.$$

Este desarrollo del binomio se va a utilizar para demostrar un caso especial de la regla de la potencia.

NOTA Del ejemplo 7 de la sección 2.1, se encontró que la función $f(x) = x^{1/3}$ está definida en $x = 0$ pero no es derivable en $x = 0$. Esto se debe a que $x^{-2/3}$ no está definida sobre un intervalo que contiene al cero.

TEOREMA 2.3 LA REGLA DE LA POTENCIA

Si n es un número racional, entonces la función $f(x) = x^n$ es derivable y

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Para que f sea derivable en $x = 0$, n debe ser un número tal que x^{n-1} se encuentre definido en un intervalo que contenga al 0.

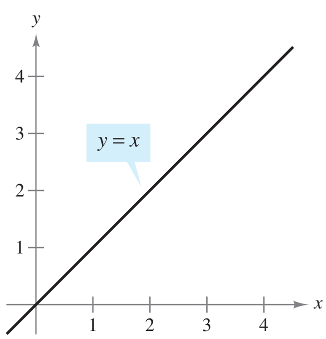
DEMOSTRACIÓN Si n es un entero positivo mayor que 1, entonces del desarrollo del binomio resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^n] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x) + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right] \\
&= nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0 \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Esto demuestra el caso en que n es un entero positivo mayor que 1. Se deja al lector la demostración del caso $n = 1$. En el ejemplo 7 de la sección 2.3 se demuestra el caso para el que n es un entero negativo. En el ejercicio 76 de la sección 2.5 se demuestra el caso en el cual n es racional (en la sección 5.5 la regla de la potencia se extenderá hasta abarcar los valores irracionales de n).

Al utilizar la regla de la potencia, resulta conveniente separar el caso para el que $n = 1$ como otra regla distinta de derivación, a saber

$$\frac{d}{dx}[x] = 1. \qquad \text{Regla de las potencias para } n = 1.$$



La pendiente de la recta $y = x$ es 1
Figura 2.15

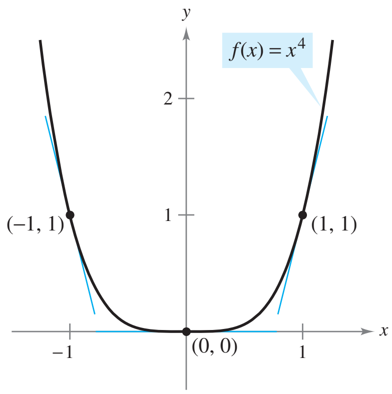
Esta regla es congruente con el hecho de que la pendiente de la recta $y = x$ es 1, como se muestra en la figura 2.15.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de la potencia

Función	*Derivada*
a) $f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$	$g'(x) = \dfrac{d}{dx}[x^{1/3}] = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$
c) $y = \dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[x^{-2}] = (-2)x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

Observar que en el ejemplo 2*c*, *antes* de derivar se ha reescrito $1/x^2$ como x^{-2}. En muchos problemas de derivación, el primer paso consiste en reescribir la función.

Dada:		Reescribir:		Derivar:		Simplificar
$y = \dfrac{1}{x^2}$	⇒	$y = x^{-2}$	⇒	$\dfrac{dy}{dx} = (-2)x^{-3}$	⇒	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{x^3}$



Observar que la pendiente es negativa en el punto $(-1, 1)$, cero en el $(0, 0)$ y positiva en el $(1, 1)$

Figura 2.16

EJEMPLO 3 Pendiente de una gráfica

Calcular la pendiente de la gráfica de $f(x) = x^4$ cuando

a) $x = -1$ ***b)*** $x = 0$ ***c)*** $x = 1.$

Solución La pendiente de una gráfica en un punto es igual a la derivada en dicho punto. La derivada de f es $f'(x) = 4x^3$.

a) Para $x = -1$, la pendiente es $f'(-1) = 4(-1)^3 = -4$. La pendiente es negativa.

b) Para $x = 0$, la pendiente es $f'(0) = 4(0)^3 = 0$. La pendiente es 0.

c) Para $x = 1$, la pendiente es $f'(1) = 4(1)^3 = 4$. La pendiente es positiva.

Ver la figura 2.16.

EJEMPLO 4 Ecuación de una recta tangente

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ cuando $x = -2$.

Solución Para encontrar el *punto* sobre la gráfica de f, evaluar la función en $x = -2$.

$$(-2, f(-2)) = (-2, -4)$$ Punto de la gráfica.

Para calcular la *pendiente* de la gráfica en $x = -2$, evaluar la derivada, $f'(x) = 2x$, en $x = -2$.

$$m = f'(-2) = -4$$ Pendiente de la gráfica en $(-2, 4)$.

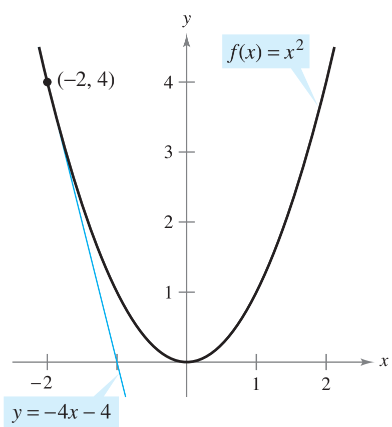
Ahora, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, escribir

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ Forma punto-pendiente.

$$y - 4 = -4[x - (-2)]$$ Sustituir y_1, m y x_1.

$$y = -4x - 4.$$ Simplificar.

Ver la figura 2.17.



La recta tangente $y = -4x - 4$ es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto $(-2, 4)$

Figura 2.17

La regla del múltiplo constante

TEOREMA 2.4 LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE

Si f es una función derivable y c un número real, entonces cf también es derivable y $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$.

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[cf(x)] &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} c\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]\\
&= c\left[\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] && \text{Aplicar teorema 1.2.}\\
&= cf'(x)
\end{aligned}$$

De manera informal, esta regla establece que las constantes se pueden extraer de la derivada, incluso cuando aparecen en un denominador.

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] = cf'(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{c}\right] &= \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{c}\right)f(x)\right]\\
&= \left(\frac{1}{c}\right)\frac{d}{dx}[f(x)] = \left(\frac{1}{c}\right)f'(x)
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Aplicación de la regla del múltiplo constante

	Función	*Derivada*
a)	$y = \dfrac{2}{x}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[2x^{-1}] = 2\dfrac{d}{dx}[x^{-1}] = 2(-1)x^{-2} = -\dfrac{2}{x^2}$
b)	$f(t) = \dfrac{4t^2}{5}$	$f'(t) = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{4}{5}t^2\right] = \dfrac{4}{5}\dfrac{d}{dt}[t^2] = \dfrac{4}{5}(2t) = \dfrac{8}{5}t$
c)	$y = 2\sqrt{x}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[2x^{1/2}] = 2\left(\dfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) = x^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
d)	$y = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{2}x^{-2/3}\right] = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{2}{3}\right)x^{-5/3} = -\dfrac{1}{3x^{5/3}}$
e)	$y = -\dfrac{3x}{2}$	$y' = \dfrac{d}{dx}\left[-\dfrac{3}{2}x\right] = -\dfrac{3}{2}(1) = -\dfrac{3}{2}$

La regla del múltiplo constante y la de la potencia se pueden combinar en una sola. La regla resultante es

$$\frac{d}{dx}[cx^n] = cnx^{n-1}.$$

EJEMPLO 6 Uso de paréntesis al derivar

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
a)	$y = \dfrac{5}{2x^3}$	$y = \dfrac{5}{2}(x^{-3})$	$y' = \dfrac{5}{2}(-3x^{-4})$	$y' = -\dfrac{15}{2x^4}$
b)	$y = \dfrac{5}{(2x)^3}$	$y = \dfrac{5}{8}(x^{-3})$	$y' = \dfrac{5}{8}(-3x^{-4})$	$y' = -\dfrac{15}{8x^4}$
c)	$y = \dfrac{7}{3x^{-2}}$	$y = \dfrac{7}{3}(x^2)$	$y' = \dfrac{7}{3}(2x)$	$y' = \dfrac{14x}{3}$
d)	$y = \dfrac{7}{(3x)^{-2}}$	$y = 63(x^2)$	$y' = 63(2x)$	$y' = 126x$

Las reglas de suma y diferencia

TEOREMA 2.5 LAS REGLAS DE SUMA Y DIFERENCIA

La derivada de la suma (o de la diferencia) de dos funciones derivables f y g es derivable en sí. Además, la derivada de $f + g$ (o $f - g$) es igual a la suma (o diferencia) de las derivadas de f y g.

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$ Regla de la suma.

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$$ Regla de la diferencia.

DEMOSTRACIÓN Una demostración de la regla de la suma se sigue del teorema 1.2 (la de la diferencia se demuestra de manera análoga).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

Las reglas de suma y diferencia pueden ampliarse en cualquier número finito de funciones. Por ejemplo, si $F(x) = f(x) + g(x) - h(x)$, entonces $F'(x) = f'(x) + g'(x) - h'(x)$.

EJEMPLO 7 Aplicación de las reglas de suma y diferencia

	Función	*Derivada*
a)	$f(x) = x^3 - 4x + 5$	$f'(x) = 3x^2 - 4$
b)	$g(x) = -\dfrac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x$	$g'(x) = -2x^3 + 9x^2 - 2$

PARA MAYOR INFORMACIÓN
El esbozo de una demostración geométrica de las derivadas de las funciones seno y coseno puede consultarse en el artículo “The Spider’s Spacewalk Derivation of sin′ and cos′” de Tim Hesterberg en *The College Mathematics Journal*.

Derivadas de las funciones seno y coseno

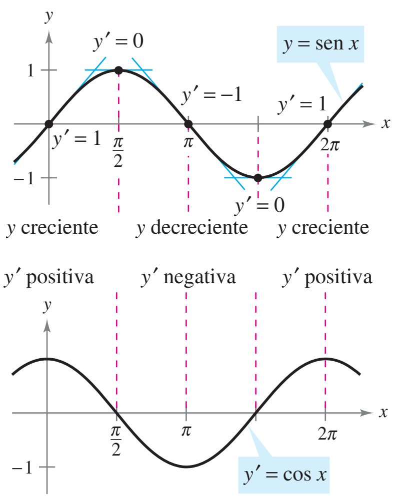
En la sección 1.3 se vieron los límites siguientes:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = 0$$

Estos dos límites pueden utilizarse para demostrar las reglas de derivación de las funciones seno y coseno (las derivadas de las demás funciones trigonométricas se analizan en la sección 2.3).

TEOREMA 2.6 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x \qquad \frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$$



La derivada de la función seno es la función coseno
Figura 2.18

DEMOSTRACIÓN

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$$ Definición de derivada.

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos \Delta x + \cos x \operatorname{sen} \Delta x - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} \Delta x - (\operatorname{sen} x)(1 - \cos \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(\cos x)\left(\frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}\right) - (\operatorname{sen} x)\left(\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}\right) \right]$$

$$= \cos x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \right) - \operatorname{sen} x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \right)$$

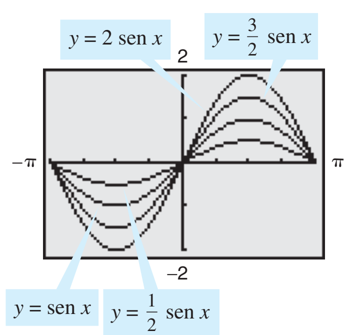
$$= (\cos x)(1) - (\operatorname{sen} x)(0)$$

$$= \cos x$$

Esta regla de derivación se ilustra en la figura 2.18. Observar que para cada x, la *pendiente* de la curva seno es igual al valor del coseno. La demostración de la segunda regla se deja como ejercicio (ver el ejercicio 120).

EJEMPLO 8 Derivadas que contienen senos y cosenos

	Función	*Derivada*
a)	$y = 2 \operatorname{sen} x$	$y' = 2 \cos x$
b)	$y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2} = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x$	$y' = \dfrac{1}{2} \cos x = \dfrac{\cos x}{2}$
c)	$y = x + \cos x$	$y' = 1 - \operatorname{sen} x$



$$\frac{d}{dx}[a \operatorname{sen} x] = a \cos x$$

Figura 2.19

TECNOLOGÍA Una herramienta de graficación permite visualizar la interpretación de una derivada. Por ejemplo, en la figura 2.19 se muestran las gráficas de

$$y = a \operatorname{sen} x$$

para $a = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ y 2. Estimar la pendiente de cada gráfica en el punto (0, 0). Después verificar los cálculos de manera analítica mediante el cálculo de la derivada de cada función cuando $x = 0$.

Razón de cambio

Ya se ha visto que la derivada se utiliza para calcular pendientes. Pero también sirve para determinar la razón de cambio de una variable respecto a otra, lo que le confiere utilidad en una amplia variedad de situaciones. Algunos ejemplos son las tasas de crecimiento de poblaciones, las tasas de producción, las tasas de flujo de un líquido, la velocidad y la aceleración.

Un uso frecuente de la razón de cambio consiste en describir el movimiento de un objeto que va en línea recta. En tales problemas, la recta del movimiento se suele representar en posición horizontal o vertical, con un origen marcado en ella. Sobre tales rectas, el movimiento hacia la derecha (o hacia arriba) se considera de dirección positiva y el movimiento hacia la izquierda (o hacia abajo) de dirección negativa.

La función s que representa la posición (respecto al origen) de un objeto como función del tiempo t se denomina **función de posición**. Si durante cierto lapso de tiempo Δt el objeto cambia su posición en una cantidad $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, entonces, empleando la consabida fórmula:

$$\text{Razón} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

la **velocidad media** es

$$\frac{\text{Cambio en distancia}}{\text{Cambio en tiempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$ Velocidad media.

EJEMPLO 9 Velocidad media de un objeto en su caída

Si se deja caer una bola de billar desde una altura de 100 pies, su altura s en el instante t se representa mediante la función posición

$$s = -16t^2 + 100$$ Función posición.

donde s se mide en pies y t en segundos. Encontrar su velocidad media para cada uno de estos intervalos.

a) [1, 2] ***b)*** [1, 1.5] ***c)*** [1, 1.1]

Solución

a) En el intervalo [1, 2], el objeto cae desde una altura de $s(1) = -16(1)^2 + 100 = 84$ pies hasta una altura de $s(2) = -16(2)^2 + 100 = 36$ pies. La velocidad media es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{36 - 84}{2 - 1} = \frac{-48}{1} = -48 \text{ pies por segundo.}$$

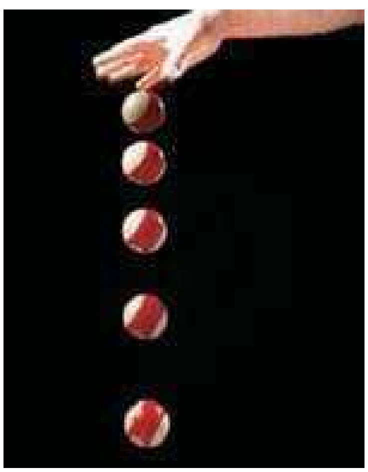
b) En el intervalo [1, 1.5] el objeto cae desde una altura de 84 pies hasta una altura de 64 pies. La velocidad media es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{64 - 84}{1.5 - 1} = \frac{-20}{0.5} = -40 \text{ pies por segundo.}$$

c) En el intervalo [1, 1.1] el objeto cae desde una altura de 84 pies hasta una altura de 80.64 pies. La velocidad media es

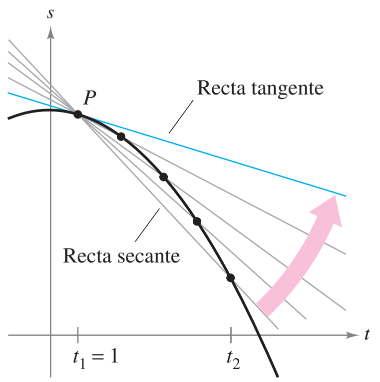
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80.64 - 84}{1.1 - 1} = \frac{-3.36}{0.1} = -33.6 \text{ pies por segundo.}$$

Observar que las velocidades medias son *negativas*, lo que refleja el hecho de que el objeto se mueve hacia abajo.



Richard Megna/Fundamental Photographs

Exposición fotográfica de larga duración de una bola de billar en caída libre.



La velocidad media entre t_1 y t_2 es igual a la pendiente de la recta secante. La velocidad instantánea en t_1 es igual a la pendiente de la recta tangente
Figura 2.20

Supongamos que en el ejemplo anterior se quisiera encontrar la velocidad *instantánea* (o simplemente de la velocidad) del objeto cuando $t = 1$. Al igual que la pendiente de la recta tangente puede aproximarse utilizando las pendientes de rectas secantes, se puede aproximar la velocidad en $t = 1$ por medio de las velocidades medias durante un pequeño intervalo $[1, 1 + \Delta t]$ (ver la figura 2.20). Se obtiene dicha velocidad calculando el límite cuando Δt tiende a cero. Al intentar hacerlo se puede comprobar que la velocidad cuando $t = 1$ es de -32 pies por segundo.

En general, si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, su **velocidad** en el instante t es

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$

Función velocidad.

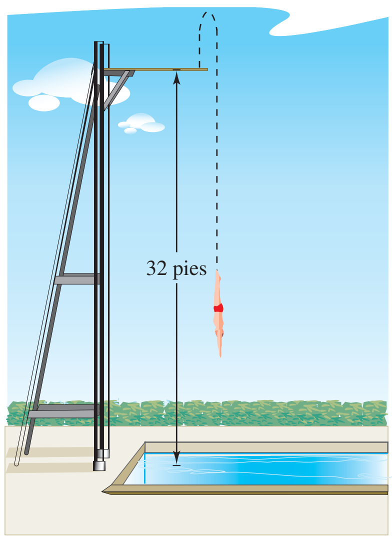
En otras palabras, la función velocidad es la derivada de la función posición. La velocidad puede ser positiva, cero o negativa. La **rapidez** de un objeto se define como el valor absoluto de su velocidad, y nunca es negativa.

La posición de un objeto en caída libre (despreciando la resistencia del aire) bajo la influencia de la gravedad se obtiene mediante la ecuación

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

Función posición.

donde s_0 es la altura inicial del objeto, v_0 la velocidad inicial y g la aceleración de la gravedad. En la Tierra, el valor de g es de aproximadamente -32 pies.



La velocidad es positiva cuando un objeto se eleva, y negativa cuando desciende. Se observa que el clavadista se mueve hacia arriba durante la primera mitad de segundo, porque la velocidad es positiva para $0 < t < \frac{1}{2}$. Cuando la velocidad es de 0, el clavadista ha alcanzado la altura máxima del salto
Figura 2.21

EJEMPLO 10 Aplicación de la derivada para calcular la velocidad

En el instante $t = 0$, un clavadista se lanza desde un trampolín que está a 32 pies sobre el nivel del agua de la piscina (ver la figura 2.21). La posición del clavadista está dada por

$$s(t) = -16t^2 + 16t + 32$$

Función posición.

donde s se mide en pies y t en segundos.

a) ¿Cuánto tarda el clavadista en llegar al agua?

b) ¿Cuál es su velocidad al momento del impacto?

Solución

a) Para determinar el momento en que toca el agua hacemos $s = 0$ y despejamos t.

$$-16t^2 + 16t + 32 = 0$$ Igualar a cero la función posición.

$$-16(t + 1)(t - 2) = 0$$ Factorizar.

$$t = -1 \text{ o } 2$$ Despejar t.

Como $t \geq 0$, hemos de seleccionar el valor positivo, así que el clavadista llega al agua en $t = 2$ segundos.

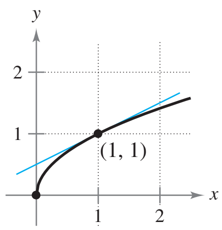
b) Su velocidad en el instante t está dada por la derivada $s'(t) = -32t + 16$. En consecuencia, su velocidad en $t = 2$ es

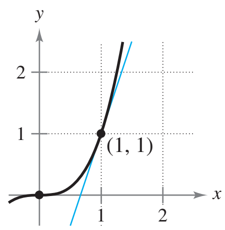
$$s'(2) = -32(2) + 16 = -48 \text{ pies por segundo.}$$

2.2 Ejercicios

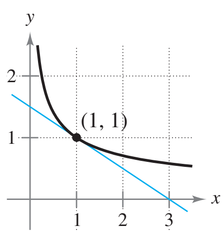
En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica para estimar la pendiente de la recta tangente a $y = x^n$ en el punto (1, 1). Verificar la respuesta de manera analítica.

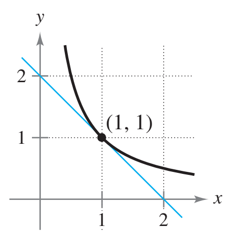
1. *a)* $y = x^{1/2}$ *b)* $y = x^3$





2. *a)* $y = x^{-1/2}$ *b)* $y = x^{-1}$





En los ejercicios 3 a 24, usar las reglas de derivabilidad para calcular la derivada de la función.

3. $y = 12$
4. $f(x) = -9$
5. $y = x^7$
6. $y = x^{16}$
7. $y = \dfrac{1}{x^5}$
8. $y = \dfrac{1}{x^8}$
9. $f(x) = \sqrt[5]{x}$
10. $g(x) = \sqrt[4]{x}$
11. $f(x) = x + 11$
12. $g(x) = 3x - 1$
13. $f(t) = -2t^2 + 3t - 6$
14. $y = t^2 + 2t - 3$
15. $g(x) = x^2 + 4x^3$
16. $y = 8 - x^3$
17. $s(t) = t^3 + 5t^2 - 3t + 8$
18. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$
19. $y = \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta - \cos\theta$
20. $g(t) = \pi\cos t$
21. $y = x^2 - \frac{1}{2}\cos x$
22. $y = 7 + \operatorname{sen} x$
23. $y = \dfrac{1}{x} - 3\operatorname{sen} x$
24. $y = \dfrac{5}{(2x)^3} + 2\cos x$

En los ejercicios 25 a 30, completar la tabla.

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
25.	$y = \dfrac{5}{2x^2}$			
26.	$y = \dfrac{2}{3x^2}$			
27.	$y = \dfrac{6}{(5x)^3}$			
28.	$y = \dfrac{\pi}{(3x)^2}$			
29.	$y = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$			
30.	$y = \dfrac{4}{x^{-3}}$			

En los ejercicios 31 a 38, encontrar la pendiente de la gráfica de la función en el punto indicado. Utilizar la función *derivative* de una herramienta de graficación para verificar los resultados.

	Función	*Punto*
31.	$f(x) = \dfrac{8}{x^2}$	$(2, 2)$
32.	$f(t) = 3 - \dfrac{3}{5t}$	$\left(\frac{3}{5}, 2\right)$
33.	$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{5}x^3$	$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
34.	$y = 3x^3 - 10$	$(2, 14)$
35.	$y = (4x + 1)^2$	$(0, 1)$
36.	$f(x) = 3(5 - x)^2$	$(5, 0)$
37.	$f(\theta) = 4\operatorname{sen}\theta - \theta$	$(0, 0)$
38.	$g(t) = -2\cos t + 5$	$(\pi, 7)$

En los ejercicios 39 a 54, encontrar la derivada de cada función.

39. $f(x) = x^2 + 5 - 3x^{-2}$
40. $f(x) = x^2 - 3x - 3x^{-2}$
41. $g(t) = t^2 - \dfrac{4}{t^3}$
42. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$
43. $f(x) = \dfrac{4x^3 + 3x^2}{x}$
44. $f(x) = \dfrac{x^3 - 6}{x^2}$
45. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$
46. $h(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$
47. $y = x(x^2 + 1)$
48. $y = 3x(6x - 5x^2)$
49. $f(x) = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$
50. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$
51. $h(s) = s^{4/5} - s^{2/3}$
52. $f(t) = t^{2/3} - t^{1/3} + 4$
53. $f(x) = 6\sqrt{x} + 5\cos x$
54. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3\cos x$

En los ejercicios 55 a 58, *a)* encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado, *b)* utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su recta tangente en el punto, y *c)* verificar los resultados empleando la función *derivative* de su herramienta de graficación.

	Función	*Punto*
55.	$y = x^4 - 3x^2 + 2$	$(1, 0)$
56.	$y = x^3 + x$	$(-1, -2)$
57.	$f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$	$(1, 2)$
58.	$y = (x^2 + 2x)(x + 1)$	$(1, 6)$

En los ejercicios 59 a 64, determinar los puntos (si los hay) donde la gráfica de la función tiene una recta tangente horizontal.

59. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

60. $y = x^3 + x$

61. $y = \dfrac{1}{x^2}$

62. $y = x^2 + 9$

63. $y = x + \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x < 2\pi$

64. $y = \sqrt{3}x + 2\cos x, \quad 0 \le x < 2\pi$

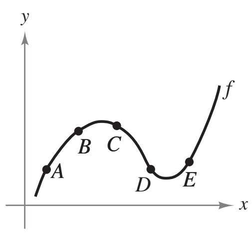
En los ejercicios 65 a 70, encontrar una k tal que la recta sea tangente a la gráfica de la función.

	Función	*Recta*
65.	$f(x) = x^2 - kx$	$y = 5x - 4$
66.	$f(x) = k - x^2$	$y = -6x + 1$
67.	$f(x) = \dfrac{k}{x}$	$y = -\dfrac{3}{4}x + 3$
68.	$f(x) = k\sqrt{x}$	$y = x + 4$
69.	$f(x) = kx^3$	$y = x + 1$
70.	$f(x) = kx^4$	$y = 4x - 1$

71. Bosquejar la gráfica de una función f tal que $f' > 0$ para todas las x y cuya razón de cambio de la función sea decreciente.

Para discusión

72. Utilizar la gráfica para responder a las siguientes preguntas.



a) ¿Entre qué par de puntos consecutivos es mayor la razón de cambio promedio de la función?

b) ¿La razón de cambio promedio de f entre A y B es mayor o menor que la razón de cambio instantáneo en B?

c) Trazar una recta tangente a la gráfica entre los puntos C y D cuya pendiente sea igual a la razón de cambio promedio de la función entre C y D.

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 73 y 74 se muestra la relación que existe entre f y g. Explicar la relación entre f' y g'.

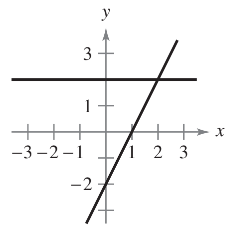
73. $g(x) = f(x) + 6$

74. $g(x) = -5\,f(x)$

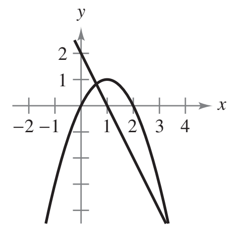
Desarrollo de conceptos (*continuación*)

En los ejercicios 75 y 76, se muestran las gráficas de la función f y de su derivada f' en el mismo plano cartesiano. Clasificar las gráficas como f o f' y explicar en un breve párrafo los criterios empleados para hacer tal selección.

75.



76.



77. Construir las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ y $y = -x^2 + 6x - 5$, así como las dos rectas que son tangentes a ambas gráficas. Encontrar las ecuaciones de dichas rectas.

78. Demostrar que las gráficas de $y = x$ y $y = 1/x$ tienen rectas tangentes perpendiculares entre sí en su punto de intersección.

79. Demostrar que la gráfica de la función

$$f(x) = 3x + \operatorname{sen} x + 2$$

no tiene ninguna recta tangente horizontal.

80. Demostrar que la gráfica de la función

$$f(x) = x^5 + 3x^3 + 5x$$

no tiene una recta tangente con pendiente de 3.

En los ejercicios 81 y 82, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f que pasa por el punto (x_0, y_0), no perteneciente a la gráfica. Para determinar el punto de tangencia (x, y) en la gráfica de f, resolver la ecuación

$$f'(x) = \frac{y_0 - y}{x_0 - x}.$$

81. $f(x) = \sqrt{x}$

$(x_0, y_0) = (-4, 0)$

82. $f(x) = \dfrac{2}{x}$

$(x_0, y_0) = (5, 0)$

83. ***Aproximación lineal*** En una ventana cuadrada de la herramienta de graficación, aplicar el *zoom* para aproximar la gráfica de

$$f(x) = 4 - \tfrac{1}{2}x^2$$

a fin de estimar $f'(1)$. Calcular $f'(1)$ por derivación.

84. ***Aproximación lineal*** En una ventana cuadrada de la herramienta de graficación, aplicar el *zoom* para aproximar la gráfica de

$$f(x) = 4\sqrt{x} + 1$$

a fin de estimar $f'(4)$. Calcular $f'(4)$ por derivación.