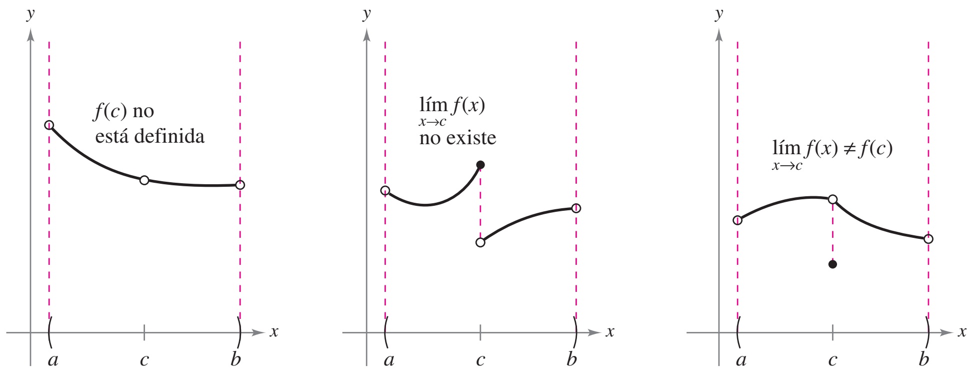
# 1.4 Continuidad y límites laterales o unilaterales

- Determinar la continuidad en un punto y en un intervalo abierto.
- Determinar límites laterales o unilaterales y continuidad en un intervalo cerrado.
- Usar propiedades de continuidad.
- Comprender y aplicar el teorema del valor intermedio.

## Continuidad en un punto y en un intervalo abierto

En matemáticas, el término *continuo* tiene el mismo significado que en su uso cotidiano. Decir, de manera informal, que una función $f$ es continua en $x = c$ significa que no hay interrupción de la gráfica de $f$ en $c$. Es decir, la gráfica no tiene saltos o huecos en $c$. En la figura 1.25 se identifican tres valores de $x$ en los que la gráfica de $f$ *no es continua*. En los demás puntos del intervalo $(a, b)$, la gráfica de $f$ no sufre interrupciones y es **continua**.




Existen tres condiciones para las que la gráfica de $f$ no es continua en $x = c$
**Figura 1.25**

**EXPLORACIÓN**

De modo informal, se podría decir que una función es *continua* en un intervalo abierto si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Utilizar una herramienta de graficación para representar las siguientes funciones en el intervalo indicado. De las gráficas, ¿qué funciones se dice que son continuas en dicho intervalo? ¿Se puede confiar en los resultados obtenidos gráficamente? Explicar el razonamiento.

| *Función* | *Intervalo* |
|---|---|
| ***a)*** $y = x^2 + 1$ | $(-3, 3)$ |
| ***b)*** $y = \dfrac{1}{x - 2}$ | $(-3, 3)$ |
| ***c)*** $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ | $(-\pi, \pi)$ |
| ***d)*** $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ | $(-3, 3)$ |
| ***e)*** $y = \begin{cases} 2x - 4, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$ | $(-3, 3)$ |

En la figura 1.25, parece que la continuidad en $x = c$ puede destruirse mediante cualquiera de las siguientes condiciones.

1. La función no está definida en $x = c$.
2. No existe el límite de $f(x)$ en $x = c$.
3. El límite de $f(x)$ en $x = c$ existe, pero no es igual a $f(c)$.

Si no se da *ninguna* de las tres condiciones anteriores, se dice que la función $f$ es **continua en *c***, como lo señala la importante definición que sigue.

**DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD**

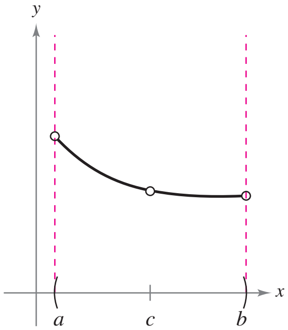
*Continuidad en un punto:* Una función $f$ es **continua en *c*** si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

1. $f(c)$ está definida.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

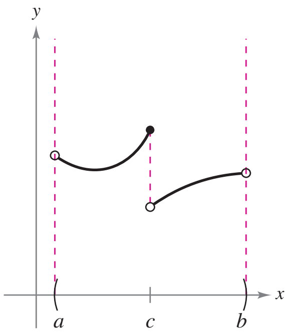
*Continuidad en un intervalo abierto:* Una función es **continua en un intervalo abierto $(a, b)$** si es continua en cada punto del intervalo. Una función continua en la recta completa de los números reales $(-\infty, \infty)$ es **continua en todas partes**.

***PARA MAYOR INFORMACIÓN***
Para obtener más información sobre el concepto de continuidad, ver el artículo "Leibniz and the Spell of the Continuous" de Hardy Grant en *The College Mathematics Journal*.

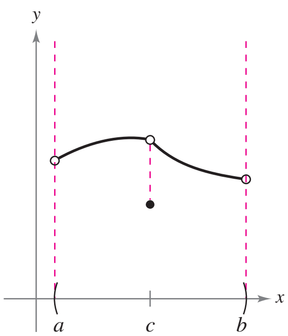
Considerar un intervalo abierto $I$ que contiene un número real $c$. Si una función $f$ está definida en $I$ (excepto, posiblemente, en $c$) y no es continua en $c$, se dice que $f$ tiene una **discontinuidad** en $c$. Las discontinuidades se clasifican en dos categorías: **evitables o removibles** e **inevitables o no removibles**. Se dice que una discontinuidad en $c$ es evitable o removible si $f$ se puede hacer continua definiendo (o redefiniendo) apropiadamente $f(c)$. Por ejemplo, las funciones en las figuras 1.26*a* y *c* presentan discontinuidades evitables o removibles en $c$, mientras que la de la figura 1.26*b* presenta una discontinuidad inevitable o no removible en $c$.




***a*)** Discontinuidad evitable o removible




***b*)** Discontinuidad inevitable o no removible




***c*)** Discontinuidad evitable o removible

**Figura 1.26**

## *EJEMPLO 1* Continuidad de una función

Analizar la continuidad de cada función.

***a*)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ***b*)** $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ***c*)** $h(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$ ***d*)** $y = \operatorname{sen} x$

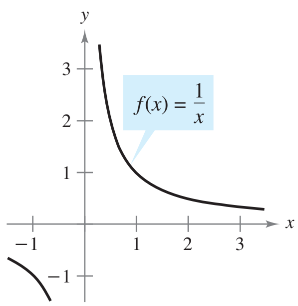
### Solución

***a*)** El dominio de $f$ lo constituyen todos los números reales distintos de cero. A partir del teorema 1.3, se puede concluir que $f$ es continua en todos los valores de $x$ de su dominio. En $x = 0$, $f$ tiene una discontinuidad inevitable, como se muestra en la figura 1.27*a*. En otras palabras, no hay modo de definir $f(0)$ para hacer que la nueva función sea continua en $x = 0$.

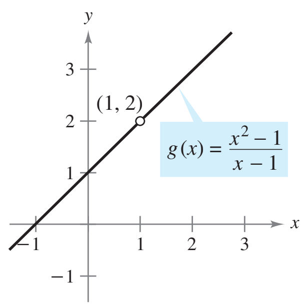
***b*)** El dominio de $g$ lo constituyen todos los números reales excepto $x = 1$. Aplicando el teorema 1.3, se puede concluir que $g$ es continua en todos los valores de $x$ de su dominio. En $x = 1$, la función presenta una discontinuidad evitable, como se muestra en la figura 1.27*b*. Si $g(1)$ se define como 2, la "nueva" función es continua para todos los números reales.

***c*)** El dominio de $h$ está formado por todos los números reales. La función $h$ es continua en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$, y puesto que $\lim_{x \to 0} h(x) = 1$, $h$ es continua en toda la recta real, como ilustra la figura 1.27*c*.

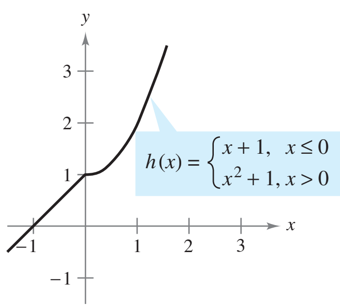
***d*)** El dominio de $y$ está conformado por todos los números reales. Del teorema 1.6, se puede concluir que la función es continua en todo su dominio $(-\infty, \infty)$, como se muestra en la figura 1.27*d*.



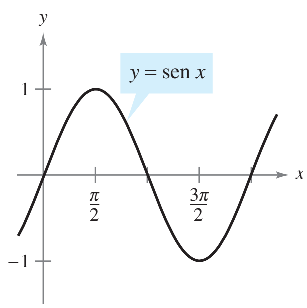

***a*)** Discontinuidad inevitable o no removible en $x = 0$




***b*)** Discontinuidad evitable o removible en $x = 1$



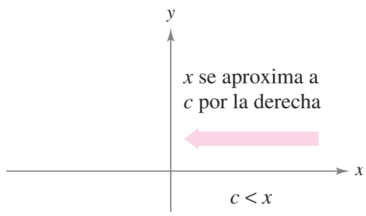

***c*)** Continua en toda la recta real



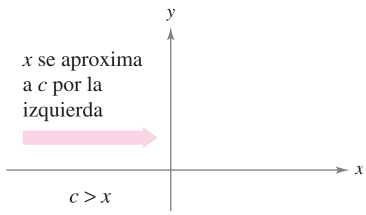

***d*)** Continua en toda la recta real

**Figura 1.27**

**AYUDA DE ESTUDIO** Algunas veces se llama a la función del ejemplo 1*a* "discontinua". Pero se ha encontrado que esta terminología es confusa. Es preferible decir que la función tiene una discontinuidad en $x = 0$, es decir, que $f$ es discontinua.




*a*) Límite por la derecha




*b*) Límite por la izquierda
**Figura 1.28**

## Límites laterales y continuidad en un intervalo cerrado

Para comprender la noción de continuidad en un intervalo cerrado, es necesario estudiar antes un tipo diferente de límite, llamado **límite lateral**. Por ejemplo, el **límite por la derecha** significa que $x$ se aproxima a $c$ por valores superiores a $c$ (ver la figura 1.28*a*). Este límite se denota como

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L. \qquad \text{Límite por la derecha.}$$

Del mismo modo, el **límite por la izquierda** significa que $x$ se aproxima a $c$ por valores inferiores a $c$ (ver la figura 1.28*b*). Este límite se denota como

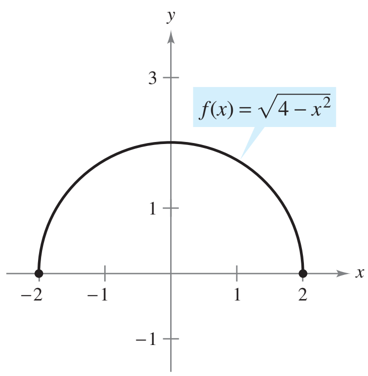
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L. \qquad \text{Límite por la izquierda.}$$

Los límites laterales son útiles al calcular límites de funciones que contienen radicales. Por ejemplo, si $n$ es un entero dado

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0.$$

### EJEMPLO 2 Un límite lateral

Encontrar el límite de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ cuando $x$ se aproxima a $-2$ por la derecha.




El límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $-2$ por la derecha es 0
**Figura 1.29**

**Solución** Como se muestra en la figura 1.29, el límite cuando $x$ se aproxima a $-2$ por la derecha es

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0.$$

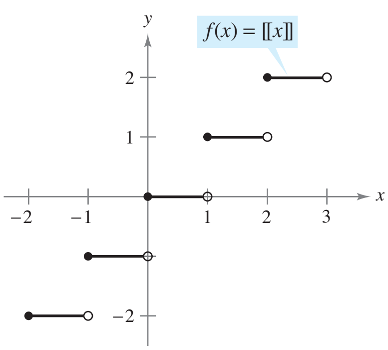
Los límites laterales pueden usarse para investigar el comportamiento de las **funciones escalón**. Un tipo común de función escalón es la **función parte entera o mayor entero** $[\![x]\!]$, que se define como

$$[\![x]\!] = \text{mayor entero } n \text{ tal que } n \le x \qquad \text{Función mayor entero.}$$

Por ejemplo, $[\![2.5]\!] = 2$ y $[\![-2.5]\!] = -3$.

### EJEMPLO 3 La función parte entera o mayor entero

Calcular el límite de la función parte entera o mayor entero $f(x) = [\![x]\!]$ cuando $x$ tiende a 0 por la izquierda y por la derecha.




Función parte entera o mayor entero
**Figura 1.30**

**Solución** Como se muestra en la figura 1.30, el límite cuando $x$ se aproxima a 0 *por la izquierda* está dado por

$$\lim_{x \to 0^-} [\![x]\!] = -1$$

mientras que el límite cuando $x$ se aproxima a 0 *por la derecha* está dado por

$$\lim_{x \to 0^+} [\![x]\!] = 0.$$

La función parte entera o mayor entero no es continua en 0 debido a que los límites por la izquierda y por la derecha en ese punto son diferentes. Mediante un razonamiento similar, se puede concluir que la función parte entera o mayor entero tiene una discontinuidad en cualquier entero $n$.

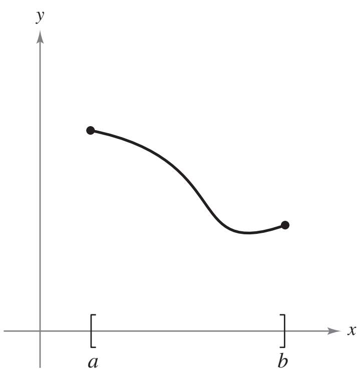
Cuando el límite por la izquierda no es igual al límite por la derecha, el límite (bilateral) *no existe*. El siguiente teorema lo explica mejor. Su demostración se obtiene directamente de la definición de límite lateral.

**TEOREMA 1.10 EXISTENCIA DE UN LÍMITE**

Si $f$ es una función y $c$ y $L$ son números reales, el límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $c$ es $L$ si y sólo si

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

El concepto de límite lateral permite extender la definición de continuidad a los intervalos cerrados. Básicamente, se dice que una función es continua en un intervalo cerrado si es continua en el interior del intervalo y posee continuidad lateral en los extremos. Esto se enuncia de manera formal como sigue.




Función continua en un intervalo cerrado
**Figura 1.31**

**DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD EN UN INTERVALO CERRADO**

Una función $f$ es **continua en un intervalo cerrado $[a, b]$** si es continua en el intervalo abierto $(a, b)$ y

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

La función $f$ es **continua por la derecha** en $a$ y **continua por la izquierda** en $b$ (ver la figura 1.31).

Se pueden establecer definiciones análogas para incluir la continuidad en intervalos con la forma $(a, b]$ y $[a, b)$, que no son abiertos ni cerrados o infinitos. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{x}$$

es continua en el intervalo infinito $[0, \infty)$, y la función

$$g(x) = \sqrt{2 - x}$$

es continua en el intervalo infinito $(-\infty, 2]$.

## *EJEMPLO 4* Continuidad en un intervalo cerrado

Analizar la continuidad de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

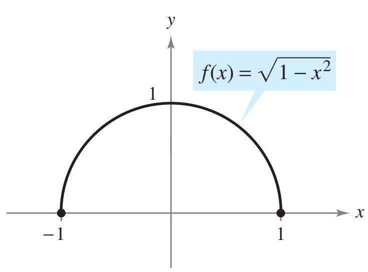
**Solución** El dominio de $f$ es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. En todos los puntos del intervalo abierto $(-1, 1)$, la continuidad de $f$ obedece a los teoremas 1.4 y 1.5. Además, dado que

$$\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1) \qquad \text{Continua por la derecha.}$$

y

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(1) \qquad \text{Continua por la izquierda.}$$

se puede concluir que $f$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, como se ilustra en la figura 1.32.

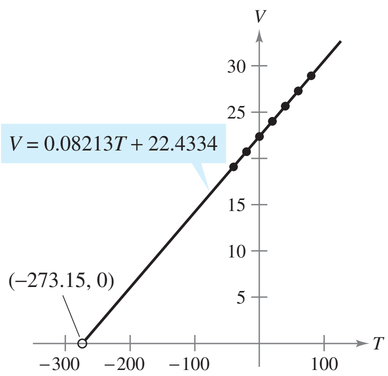



Función continua en $[-1, 1]$
**Figura 1.32**

El siguiente ejemplo muestra cómo se puede aplicar un límite lateral con el fin de determinar el cero absoluto en la escala Kelvin.

### *EJEMPLO 5* Ley de Charles y cero absoluto

En la escala Kelvin, el *cero absoluto* es la temperatura 0 K. A pesar de que se han obtenido temperaturas muy cercanas a 0 K en laboratorio, nunca se ha alcanzado el cero absoluto. De hecho, existen evidencias que sugieren la imposibilidad de alcanzar el cero absoluto. ¿Cómo determinaron los científicos que 0 K es el "límite inferior" de la temperatura de la materia? ¿Cuál es el cero absoluto en la escala Celsius?




El volumen del hidrógeno gaseoso depende de su temperatura
**Figura 1.33**

**Solución** La determinación del cero absoluto proviene del trabajo del físico francés Jacques Charles (1746-1823), quien descubrió que el volumen de un gas a presión constante crece de manera lineal con respecto a la temperatura. En la tabla siguiente se ilustra la relación entre volumen y temperatura. Para crear los valores que aparecen en la tabla, una mol de hidrógeno se mantiene a una presión constante de una atmósfera. El volumen $V$ es aproximado y se mide en litros y la temperatura $T$ se mide en grados Celsius.

| $T$ | $-40$ | $-20$ | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | 19.1482 | 20.7908 | 22.4334 | 24.0760 | 25.7186 | 27.3612 | 29.0038 |

En la figura 1.33 se muestran los puntos representados en la tabla. Empleando dichos puntos, se puede determinar que $T$ y $V$ se relacionan a través de la ecuación lineal

$$V = 0.08213T + 22.4334 \qquad \text{o} \qquad T = \frac{V - 22.4334}{0.08213}.$$

Mediante el razonamiento de que el volumen del gas puede tender a 0 (pero nunca ser igual o menor que cero) se puede concluir que la "temperatura mínima posible" se obtiene por medio de

$$\begin{aligned} \lim_{V \to 0^+} T &= \lim_{V \to 0^+} \frac{V - 22.4334}{0.08213} \\ &= \frac{0 - 22.4334}{0.08213} \qquad \text{Usar sustitución directa.} \\ &\approx -273.15. \end{aligned}$$

De tal manera, el cero absoluto en la escala Kelvin (0 K) es de aproximadamente $-273.15°$ en la escala Celsius.

Fotografía cortesía de W. Ketterle, MIT

En 2003, investigadores del Massachusetts Institute of Technology utilizaron láser y evaporación para producir un gas superfrío en el que los átomos se superponen. Este gas se denomina condensado de Bose-Einstein. Midieron una temperatura de alrededor de 450 pK (picokelvin) o –273.14999999955°C aproximadamente. (*Fuente*: *Science Magazine*, 12 de septiembre de 2003.)

La tabla que se encuentra a continuación muestra las temperaturas del ejemplo 5, en la escala Fahrenheit. Repetir la solución del ejemplo 5 utilizando estas temperaturas y volúmenes. Utilizar el resultado para determinar el valor del cero absoluto en la escala Fahrenheit.

| $T$ | $-40$ | $-4$ | 32 | 68 | 104 | 140 | 176 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | 19.1482 | 20.7908 | 22.4334 | 24.0760 | 25.7186 | 27.3612 | 29.0038 |

**NOTA** La Ley de Charles para los gases (suponiendo una presión constante) puede enunciarse como

$$V = RT \qquad \text{Ley de Charles.}$$

donde $V$ es el volumen, $R$ es una constante y $T$ es la temperatura. En este enunciado de la ley, ¿qué propiedad debe tener la escala de temperaturas?

Bettmann/Corbis

**AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857)**

El concepto de función continua fue presentado por vez primera por Augustin-Louis Cauchy en 1821. La definición expuesta en su texto *Cours d'Analyse* establecía que las pequeñas modificaciones indefinidas en $y$ eran resultado de las pequeñas modificaciones indefinidas en $x$. "… $f(x)$ será una función *continua* si… los valores numéricos de la diferencia $f(x + \alpha) - f(x) = 0$ disminuyen de forma indefinida con los de $\alpha$…"

## Propiedades de la continuidad

En la sección 1.3 se estudiaron las propiedades de los límites. Cada una de esas propiedades genera una propiedad correspondiente relativa a la continuidad de una función. Por ejemplo, el teorema 1.11 es consecuencia directa del teorema 1.2. (Se muestra una prueba del teorema 1.11 en el apéndice A.)

**TEOREMA 1.11 PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD**

Si $b$ es un número real y $f$ y $g$ son continuas en $x = c$, entonces las siguientes funciones también son continuas en $c$.

1. Múltiplo escalar: $bf$
2. Suma y diferencia: $f \pm g$
3. Producto: $fg$
4. Cociente: $\dfrac{f}{g}$, si $g(c) \neq 0$

Las funciones de los siguientes tipos son continuas en sus dominios.

1. Funciones polinomiales: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_1 x + a_0$
2. Funciones racionales: $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$
3. Funciones radicales: $f(x) = \sqrt[n]{x}$
4. Funciones trigonométricas: $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$

Combinando el teorema 1.11 con esta síntesis, se puede concluir que una gran variedad de funciones elementales son continuas en sus dominios.

### *EJEMPLO 6* Aplicación de las propiedades de la continuidad

Por el teorema 1.11, cada una de las siguientes funciones es continua en todos los puntos de su dominio.

$$f(x) = x + \operatorname{sen} x, \qquad f(x) = 3 \tan x, \qquad f(x) = \frac{x^2 + 1}{\cos x}$$

El siguiente teorema, consecuencia del teorema 1.5, permite determinar la continuidad de funciones *compuestas*, como

$$f(x) = \operatorname{sen} 3x, \qquad f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \qquad f(x) = \tan \frac{1}{x}.$$

**TEOREMA 1.12 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA**

Si $g$ es continua en $c$ y $f$ es continua en $g(c)$, entonces la función compuesta dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en $c$.

**NOTA** Una consecuencia del teorema 1.12 es que si $f$ y $g$ satisfacen las condiciones señaladas, es posible determinar que el límite de $f(g(x))$ cuando $x$ se aproxima a $c$ es

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(g(c)).$$

**DEMOSTRACIÓN** Por definición de continuidad, $\displaystyle\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$ y $\displaystyle\lim_{x \to g(c)} f(x) = f(g(c))$. Al aplicar el teorema 1.5 con $L = g(c)$ se obtiene $\displaystyle\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(g(c))$. De esta manera, $(f \circ g) = f(g(x))$ es continua en $c$.

## *EJEMPLO 7* Prueba de la continuidad

Describir el intervalo o intervalos donde cada función es continua.

***a*)** $f(x) = \tan x$ ***b*)** $g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ***c*)** $h(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

### Solución

***a*)** La función tangente $f(x) = \tan x$ no está definida en

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad \text{donde } n \text{ es un entero.}$$

En todos los demás puntos es continua. De tal modo, $f(x) = \tan x$ es continua en todos los intervalos abiertos

$$\ldots, \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \ldots$$

como muestra la figura 1.34*a*.

***b*)** Puesto que $y = 1/x$ es continua excepto en $x = 0$ y la función seno es continua para todos los valores reales de $x$, resulta que $y = \operatorname{sen}(1/x)$ es continua en todos los valores reales salvo en $x = 0$. En $x = 0$, no existe el límite de $g(x)$ (ver el ejemplo 5 de la sección 1.2). Por tanto, $g$ es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, como se muestra en la figura 1.34*b*.

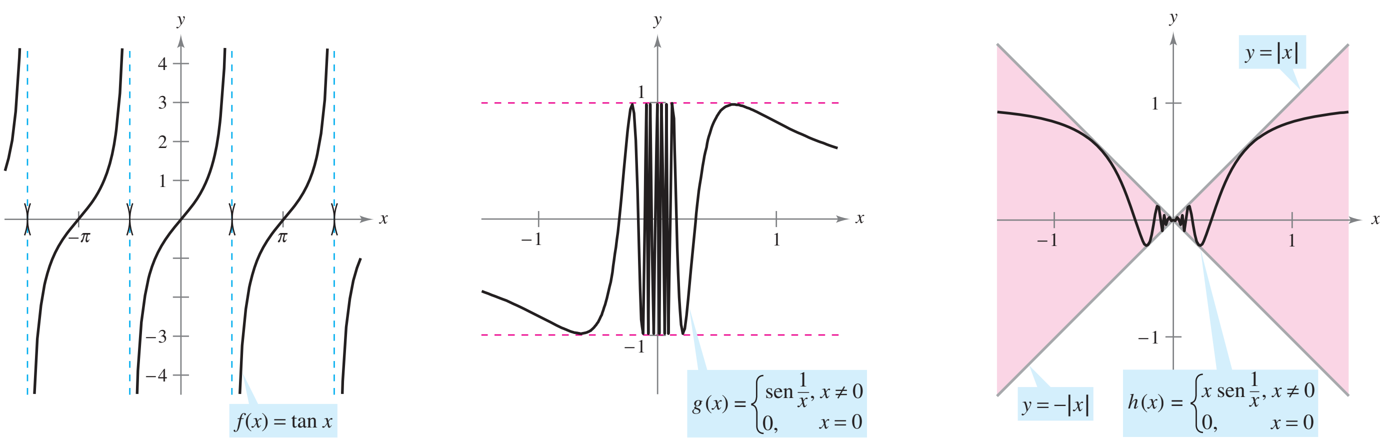
***c*)** Esta función es parecida a la del apartado *b*), con excepción de que las oscilaciones están amortiguadas por el factor $x$. Aplicando el teorema del encaje, se obtiene

$$-|x| \leq x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq |x|, \qquad x \neq 0$$

y se puede concluir que

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0.$$

De tal manera, $h$ es continua en toda la recta real, como se muestra en la figura 1.34*c*.




***a*)** $f$ es continua en cada intervalo abierto de su dominio

***b*)** $g$ es continua en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$

***c*)** $h$ es continua en toda la recta real

**Figura 1.34**

## Teorema del valor intermedio

El teorema 1.13 es un importante teorema relativo al comportamiento de las funciones continuas en un intervalo cerrado.

**TEOREMA 1.13 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO**

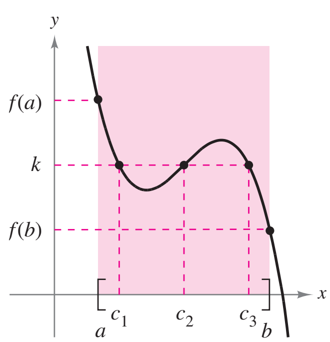
Si $f$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ y $k$ es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número $c$ en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = k.$$

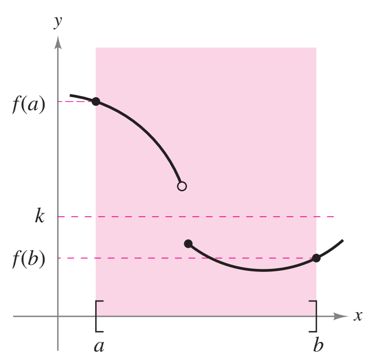
**NOTA** El teorema del valor intermedio asegura que existe al menos un número $c$, pero no proporciona un método para encontrarlo. Tales teoremas se denominan **teoremas de existencia**. Al consultar un libro de cálculo avanzado, se observará que la demostración de este teorema se basa en una propiedad de los números reales denominada *completitud*. El teorema del valor intermedio establece que para una función continua $f$, si $x$ recorre todos los valores desde $a$ hasta $b$, entonces $f(x)$ debe asumir todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Como ejemplo sencillo de este hecho, tomar en cuenta la estatura de las personas. Supongamos que una niña medía 1.52 m al cumplir 13 años y 1.70 m al cumplir 14 años, entonces, para cualquier altura $h$ entre 1.52 y 1.70 m, debe existir algún momento $t$ en el que su estatura fue exactamente de $h$. Esto parece razonable debido a que el crecimiento humano es continuo y la estatura de una persona no cambia de un valor a otro en forma abrupta.

El teorema del valor intermedio garantiza la existencia de *al menos* un número $c$ en el intervalo cerrado $[a, b]$. Puede, claro está, haber más de uno, tal que $f(c) = k$, como se muestra en la figura 1.35. Una función discontinua no necesariamente manifiesta la propiedad del valor intermedio. Por ejemplo, la gráfica de la función discontinua de la figura 1.36 salta sobre la recta horizontal dada por $y = k$, sin que exista valor alguno para $c$ en $[a, b]$, tal que $f(c) = k$.

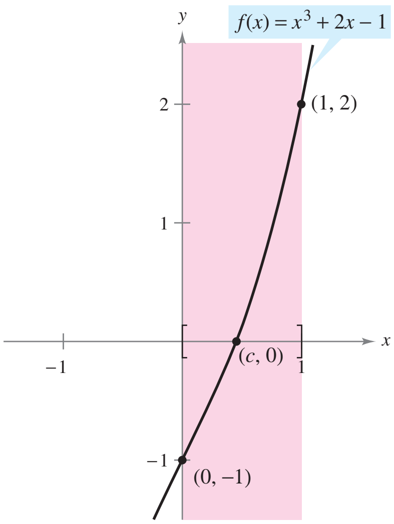



$f$ es continua en $[a, b]$
[Existen 3 números $c$ tales que $f(c) = k$]
**Figura 1.35**




$f$ no es continua en $[a, b]$
[No existen números $c$ tales que $f(c) = k$]
**Figura 1.36**

El teorema del valor intermedio suele emplearse para localizar los ceros de una función continua en un intervalo cerrado. De manera más específica, si $f$ es continua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signo distinto, entonces el teorema nos garantiza la existencia de por lo menos un cero de $f$ en el intervalo cerrado $[a, b]$.




*f* es continua en [0,1] con $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$
**Figura 1.37**

### *EJEMPLO 8* Una aplicación del teorema del valor intermedio

Utilizar el teorema del valor intermedio para demostrar que la función polinomial $f(x) = x^3 + 2x - 1$ tiene un cero en el intervalo [0, 1].

**Solución** Observar que *f* es continua en el intervalo cerrado [0, 1]. Dado que

$$f(0) = 0^3 + 2(0) - 1 = -1 \quad \text{y} \quad f(1) = 1^3 + 2(1) - 1 = 2$$

resulta que $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$. Por tanto, se puede aplicar el teorema del valor intermedio y concluir que debe existir algún *c* en [0, 1] tal que

$$f(c) = 0 \qquad f \text{ tiene un cero en el intervalo cerrado } [0, 1].$$

como se muestra en la figura 1.37.

El **método de bisección** para estimar los ceros reales de una función continua es parecido al método empleado en el ejemplo 8. Si se sabe que existe un cero en el intervalo cerrado $[a, b]$, dicho cero debe pertenecer al intervalo $[a, (a + b)/2]$ o $[(a + b)/2, b]$. A partir del signo de $f([a + b]/2)$, se puede determinar cuál intervalo contiene al cero. Mediante bisecciones sucesivas del intervalo, se puede “atrapar” al cero de la función.

**TECNOLOGÍA** También se puede usar el *zoom* de una herramienta de graficación para estimar los ceros reales de una función continua. Al hacer acercamientos de forma repetida a la zona donde la gráfica corta al eje *x* y ajustar la escala de dicho eje, se puede estimar el cero de la función con la precisión deseada. El cero de $x^3 + 2x - 1$ es alrededor de 0.453, como se muestra en la figura 1.38.

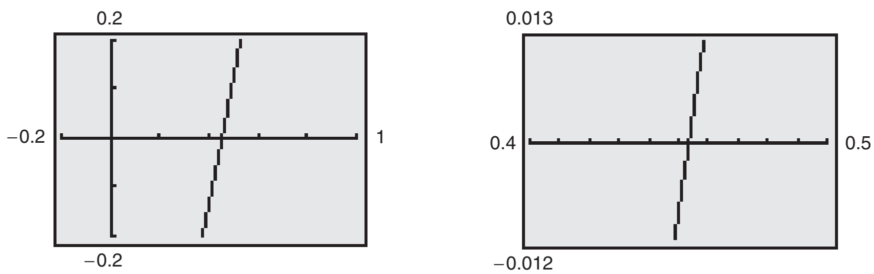
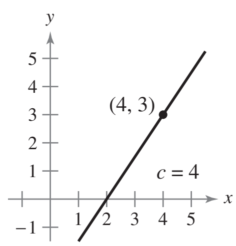


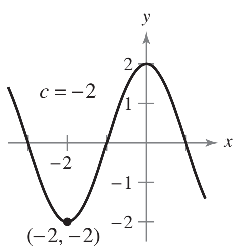

**Figura 1.38** Aplicación del *zoom* al cero de $f(x) = x^3 + 2x - 1$

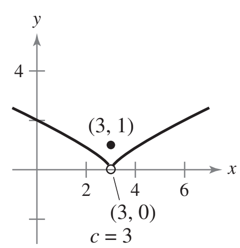
## 1.4 Ejercicios

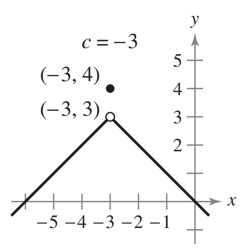
**En los ejercicios 1 a 6, utilizar una herramienta de graficación para determinar el límite y analizar la continuidad de la función.**

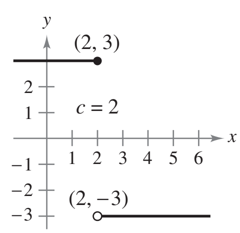
*a)* $\lim_{x \to c^+} f(x)$ *b)* $\lim_{x \to c^-} f(x)$ *c)* $\lim_{x \to c} f(x)$

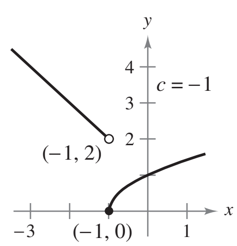
**1.**



**2.**



**3.**



**4.**



**5.**



**6.**


**En los ejercicios 7 a 26, calcular el límite (si existe). Si no existe, explicar por qué.**

**7.** $\lim\limits_{x\to 8^+} \dfrac{1}{x+8}$

**8.** $\lim\limits_{x\to 5^-} -\dfrac{3}{x+5}$

**9.** $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x-5}{x^2-25}$

**10.** $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2-x}{x^2-4}$

**11.** $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

**12.** $\lim\limits_{x\to 9^-} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

**13.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

**14.** $\lim\limits_{x\to 10^+} \dfrac{|x-10|}{x-10}$

**15.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \dfrac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}$

**16.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \dfrac{(x+\Delta x)^2+x+\Delta x-(x^2+x)}{\Delta x}$

**17.** $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}, & x\le 3\\ \dfrac{12-2x}{3}, & x>3\end{cases}$

**18.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+6, & x<2\\ -x^2+4x-2, & x\ge 2\end{cases}$

**19.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x<1\\ x+1, & x\ge 1\end{cases}$

**20.** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ 1-x, & x>1\end{cases}$

**21.** $\lim\limits_{x\to \pi} \cot x$

**22.** $\lim\limits_{x\to \pi/2} \sec x$

**23.** $\lim\limits_{x\to 4^-} (5[\![x]\!]-7)$

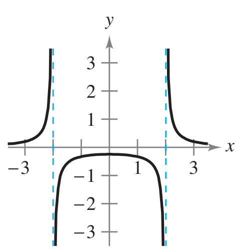
**24.** $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x-[\![x]\!])$

**25.** $\lim\limits_{x\to 3} (2-[\![-x]\!])$

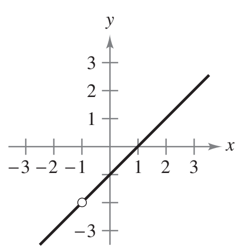
**26.** $\lim\limits_{x\to 1} \left(1-\left[\!\!\left[-\dfrac{x}{2}\right]\!\!\right]\right)$

**En los ejercicios 27 a 30, analizar la continuidad de cada función.**

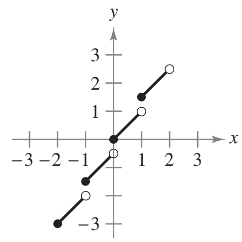
**27.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$



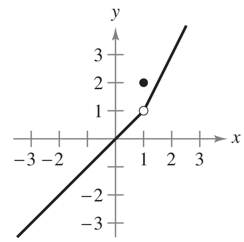
**28.** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$



**29.** $f(x)=\frac{1}{2}[\![x]\!]+x$



**30.** $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ 2, & x=1\\ 2x-1, & x>1\end{cases}$



**En los ejercicios 31 a 34, analizar la continuidad de la función en el intervalo cerrado.**

| | *Función* | *Intervalo* |
|---|---|---|
| **31.** | $g(x)=\sqrt{49-x^2}$ | $[-7, 7]$ |
| **32.** | $f(t)=3-\sqrt{9-t^2}$ | $[-3, 3]$ |
| **33.** | $f(x)=\begin{cases}3-x, & x\le 0\\ 3+\frac{1}{2}x, & x>0\end{cases}$ | $[-1, 4]$ |
| **34.** | $g(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ | $[-1, 2]$ |

**En los ejercicios 35 a 60, encontrar los valores de *x* (si existe alguno) en los que *f* no es continua. ¿Cuáles discontinuidades son evitables o removibles?**

**35.** $f(x)=\dfrac{6}{x}$

**36.** $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$

**37.** $f(x)=x^2-9$

**38.** $f(x)=x^2-2x+1$

**39.** $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$

**40.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

**41.** $f(x)=3x-\cos x$

**42.** $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2}$

**43.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x}$

**44.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

**45.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

**46.** $f(x)=\dfrac{x-6}{x^2-36}$

**47.** $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x-10}$

**48.** $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

**49.** $f(x)=\dfrac{|x+7|}{x+7}$

**50.** $f(x)=\dfrac{|x-8|}{x-8}$

**51.** $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$

**52.** $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & x<1\\ x^2, & x\ge 1\end{cases}$

**53.** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \le 2 \\ 3 - x, & x > 2 \end{cases}$

**54.** $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \le 2 \\ x^2 - 4x + 1, & x > 2 \end{cases}$

**55.** $f(x) = \begin{cases} \tan \dfrac{\pi x}{4}, & |x| < 1 \\ x, & |x| \ge 1 \end{cases}$

**56.** $f(x) = \begin{cases} \csc \dfrac{\pi x}{6}, & |x - 3| \le 2 \\ 2, & |x - 3| > 2 \end{cases}$

**57.** $f(x) = \csc 2x$

**58.** $f(x) = \tan \dfrac{\pi x}{2}$

**59.** $f(x) = [\![x - 8]\!]$

**60.** $f(x) = 5 - [\![x]\!]$

**En los ejercicios 61 y 62, utilizar una herramienta de graficación para representar la función. A partir de la gráfica, estimar**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

**¿Es continua la función en toda la recta real? Explicar la respuesta.**

**61.** $f(x) = \dfrac{|x^2 - 4|x}{x + 2}$

**62.** $f(x) = \dfrac{|x^2 + 4x|(x + 2)}{x + 4}$

**En los ejercicios 63 a 68, encontrar la constante *a*, o las constantes *a* y *b*, tales que la función sea continua en toda la recta real.**

**63.** $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \ge 1 \\ ax - 4, & x < 1 \end{cases}$

**64.** $f(x) = \begin{cases} 3x^3, & x \le 1 \\ ax + 5, & x > 1 \end{cases}$

**65.** $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 2 \\ ax^2, & x > 2 \end{cases}$

**66.** $g(x) = \begin{cases} \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{x}, & x < 0 \\ a - 2x, & x \ge 0 \end{cases}$

**67.** $f(x) = \begin{cases} 2, & x \le -1 \\ ax + b, & -1 < x < 3 \\ -2, & x \ge 3 \end{cases}$

**68.** $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}, & x \ne a \\ 8, & x = a \end{cases}$

**En los ejercicios 69 a 72, analizar la continuidad de la función compuesta $h(x) = f(g(x))$.**

**69.** $f(x) = x^2$
$g(x) = x - 1$

**70.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$g(x) = x - 1$

**71.** $f(x) = \dfrac{1}{x - 6}$
$g(x) = x^2 + 5$

**72.** $f(x) = \operatorname{sen} x$
$g(x) = x^2$

**En los ejercicios 73 a 76, utilizar una herramienta de graficación para representar la función. Usar la gráfica para determinar todo valor de *x* en donde la función no sea continua.**

**73.** $f(x) = [\![x]\!] - x$

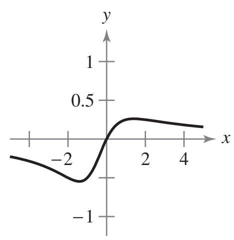
**74.** $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$

**75.** $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x > 4 \\ 2x - 5, & x \le 4 \end{cases}$

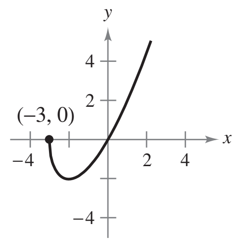
**76.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x}, & x < 0 \\ 5x, & x \ge 0 \end{cases}$

**En los ejercicios 77 a 80, describir el o los intervalos en los que la función es continua.**

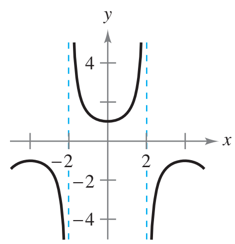
**77.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 2}$



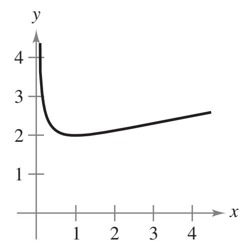

**78.** $f(x) = x\sqrt{x + 3}$




**79.** $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{4}$




**80.** $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$




***Redacción*** **En los ejercicios 81 y 82, utilizar una herramienta de graficación para representar la función en el intervalo $[-4, 4]$. ¿Parece continua en este intervalo la gráfica de la función? ¿Es continua la función en $[-4, 4]$? Escribir unas líneas sobre la importancia de examinar una función analíticamente, además de hacerlo de manera gráfica.**

**81.** $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

**82.** $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

***Redacción*** **En los ejercicios 83 a 86, explicar por qué la función tiene un cero en el intervalo dado.**

| | *Función* | *Intervalo* |
|---|---|---|
| **83.** | $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^3 + 4$ | $[1, 2]$ |
| **84.** | $f(x) = x^3 + 5x - 3$ | $[0, 1]$ |
| **85.** | $f(x) = x^2 - 2 - \cos x$ | $[0, \pi]$ |
| **86.** | $f(x) = -\dfrac{5}{x} + \tan\left(\dfrac{\pi x}{10}\right)$ | $[1, 4]$ |