# UNIVERSIDAD TECNOLOGICA DE PANAMÁ

## FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA

## DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

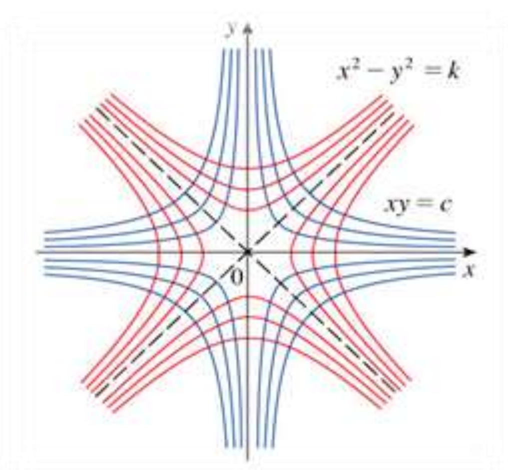
## CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

## MÓDULO I y II

## "CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y SUS APLICACIONES"

**DOCENTE**

**EDIS ALBERTO FLORES**



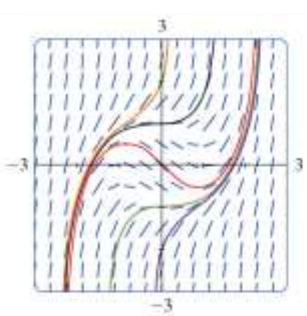
# ÍNDICE

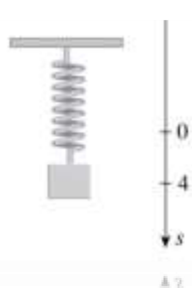
## Introducción

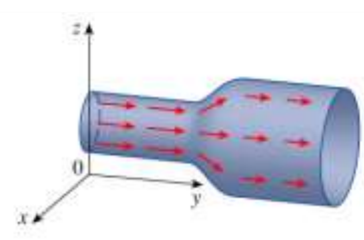
La comprensión de la naturaleza y sus fenómenos necesita del auxilio de las matemáticas, y las Ecuaciones Diferenciales constituye una herramienta esencial para matemáticos, físicos, ingenieros y demás técnicos y científicos, pues, sucede con frecuencia que las leyes físicas que gobiernan los fenómenos de la naturaleza se expresan habitualmente en forma de ecuaciones diferenciales, por lo que éstas, en sí, constituyen una expresión cuantitativa de dichas leyes: por ejemplo las leyes de conservación de la masa y de la energía térmica, las leyes de la mecánica, etc., se expresan en forma de ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones del movimiento de los cuerpos (la segunda ley de Newton) es una ecuación diferencial de segundo orden, como lo es la ecuación que describe los sistemas oscilantes, la propagación de las ondas, la transmisión del calor, la difusión, el movimiento de partículas subatómicas, etc.

En una primera parte (módulo I) estudiaremos los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales como introducción al curso de E.D.O. En esta etapa iniciamos, las definiciones de las ecuaciones diferenciales, los tipos de ecuaciones diferenciales, el orden, grado, forma de las ecuaciones lineales, las soluciones y el teorema de Picard (existencia y unicidad).

En una segunda parte (módulo II) estudiaremos la resolución de las ecuaciones diferenciales de primer orden como herramienta en las aplicaciones de modelados matemáticos en diferentes áreas de la física y matemática. En esta segunda parte continuamos con las diferentes definiciones de las ecuaciones diferenciales y las sustituciones para la su resolución de estas, contemplando inicialmente las ecuaciones de variables separables, homogéneas, cuasihomogéneas, exactas, factor integrante, lineales, Bernoullí, Ricatti, Clairaut y las aplicaciones de las mismas.



# Módulo I

## I. Definiciones y Conceptos

I.1. *Definición*: Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial.

I.2. *Definición*: Si la ecuación contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces la ecuación se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (E.D.O).

- Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias:

1) $2\frac{dy}{dx} + 3y = 2$
2) $3y'' - 2y' + y = 0$
3) $(4xy - 2y^2)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$
4) $\frac{dv}{dt} + 3\frac{ds}{dt} = 7t^2$
5) $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = \sin x$

I.3. *Definición*: Si la ecuación contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variable independiente, entonces la ecuación se dice que es una ecuación en derivadas parciales.

- Ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales:

1) $\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial y} = 2$
2) $\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial t}{\partial x\,\partial y} = 1$
3) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u$
4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$
5) $v_{tt} = v_{xx} + 2v_x$

I.4. *Definición (orden):* El orden de una ecuación diferencial es la derivada de mayor orden en la ecuación, por ejemplo en las ecuaciones siguientes

1) $2\frac{dy}{dx} + 3y = 2$ ; es de primer orden ya que su mayor derivada es de primer orden
2) $3y'' - 2y' + y = 0$ ; es de segundo orden ya que su mayor derivada es de segundo orden
3) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u$ ; es de segundo orden
4) $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = \sin x$ ; es de tercer orden.
5) $2y^{(IV)} + 5y''' - y' = \cos x$ ; es de cuarto orden.

6) $(4xy - 2y^2)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$; es de primer orden.

I.5. *Definición (Grado):* El grado de una ecuación diferencial es el exponente que abarca el término del orden de la ecuación diferencial. En los siguientes ejemplos observemos el orden y el grado de las ecuaciones.

1) $2\frac{dy}{dx} + 3y = 2$ es de primer orden y primer grado.
2) $2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = 2$ es de primer orden y de tercer grado.
3) $3\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)^3 - \frac{2}{3}\left(\frac{dv}{dt}\right)^5 = \cos t$ es de segundo orden y de tercer grado.
4) $(y''')^2 - 3(y'')^3 + 2(y')^4 = \ln x$ es de tercer orden y de segundo grado.

I.6. *Definición (E.D.O Lineal):* Una ecuación diferencial ordinaria se dice que es lineal si tiene la forma:

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + \cdots + a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$$

Donde los $a_n(x)$ y $f(x)$ son funciones de la variable independiente y la variable dependiente y sus derivadas son de grado uno. Si no cumple con estas condiciones entonces se dicen no lineales.

Ejemplos:

1) $2\frac{dy}{dx} + 3y = 2$ es lineal de primer orden
2) $2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = 2$ no es lineal, pues es de grado 3
3) $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = \sin x$ es lineal de tercer orden
4) $y\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = \sin x$ no es lineal, el coeficiente es de la variable dependiente.
5) $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = \sin y$ no es lineal, la función $f(x)$ es de variable $y$
6) $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \sin x$ no es lineal una derivada es de gado 4
7) $(y^2 + 1)dx + xdy = 0$ no es lineal con respecto a la variable $x$, pero si es lineal con respecto a la variable $y$.

II. Solución de una E.D.O: Se dice que una función $f$ con dominio en un intervalo $I$ es solución a una ecuación diferencial en el intervalo $I$, si la función satisface la ecuación diferencial en el intervalo $I$.

Ejemplo (1): Demostrar que la familia de funciones $y = C_1 \cos 5x$ es solución de la ecuación $y'' + 25y = 0$

En efecto, derivando dos veces $y = C_1 \cos 5x$

$\Rightarrow y' = -5C_1 \sin 5x$

$\Rightarrow y'' = -25C_1 \cos 5x$ luego remplazamos esta expresión en la ecuación $y'' + 25y = 0$

$\Rightarrow -25C_1 \cos 5x + 25(C_1 \cos 5x) = -25C_1 \cos 5x + 25C_1 \cos 5x = 0$ lo cual prueba que es solución.

Ejemplo (2): Demostrar que $y^2 = c_1\left(x + \frac{1}{4}c_1\right)$ es solución de $y = 2xy' + y(y')^2$

Derivamos implícitamente la relación:

$\Rightarrow 2yy' = c_1$ luego despejamos $y'$

$\Rightarrow y' = \frac{c_1}{2y}$ y remplazamos en el miembro derecho de la ecuación diferencial, esto es

$\Rightarrow y = 2x\left(\frac{c_1}{2y}\right) + y\left(\frac{c_1}{2y}\right)^2$ simplificando las expresiones y factorizando

$$\Rightarrow y = x\left(\frac{c_1}{y}\right) + y\left(\frac{c_1}{2y}\right)^2 = \frac{xc_1}{y} + \frac{c_1^2}{4y} = \frac{4c_1x + c_1^2}{4y} = \frac{4c_1\left(x + \frac{1}{4}c_1\right)}{4y} = \frac{c_1\left(x + \frac{1}{4}c_1\right)}{y}$$

Entonces $y = \frac{c_1\left(x+\frac{1}{4}c_1\right)}{y}$ que es $y^2 = c_1\left(x + \frac{1}{4}c_1\right)$ lo cual muestra una equivalencia y satisface nuestra igualdad.

Ejemplo (3): Demostrar que $x = y\ln(cy)$ es solución de $y'(x + y) = y$

Derivando implícitamente,

$\Rightarrow 1 = y'\ln(cy) + y\left[\frac{cy'}{cy}\right]$ simplificamos

$\Rightarrow 1 = y'\ln(cy) + y'$

$\Rightarrow 1 = y'(\ln(cy) + 1) \Rightarrow y' = \frac{1}{\ln(cy)+1}$; luego remplazamos en la ecuación diferencial

$y'(x + y) = y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\ln(cy)+1}(x + y) = y$; además $x = y\ln(cy)$, entonces

$\Longrightarrow \frac{1}{\ln(cy)+1}(y\ln(cy)+y)=y;$ factorizando por $y$

$\Longrightarrow \frac{1}{\ln(cy)+1}y(\ln(cy)+1)=y$

$\Longrightarrow y=y$

Por lo tanto verifica la igualdad y es entonces solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo (4): Demostrar que $y=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+ce^{-x^2}$ es solución de $y'+2xy=1$

En efecto derivando la expresión y aplicamos el teorema fundamental del calculo,

$$y'=-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt+e^{-x^2}\left(e^{x^2}\right)-2xce^{-x^2}=-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt+1-2xce^{-x^2}$$

Remplazamos en la ecuación $y'+2xy=1$

$$-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt+1-2xce^{-x^2}+2x\left[e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+ce^{-x^2}\right]=1$$

$$-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt+1-2xce^{-x^2}+2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+2xce^{-x^2}=1$$

$\Longrightarrow 1=1$

Lo cual completa la verificación deseada.

III. Problema de valor inicial.

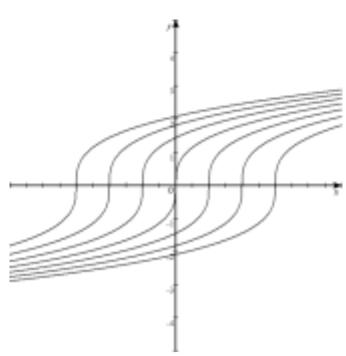
Una ecuación diferencial acompañada de unas condiciones iniciales se le llama un problema de valor inicial, con frecuencia es importante saber si un problema de valor inicial tiene solución y también deseamos saber si esta solución es única, aunque no podamos conseguir explícitamente la solución, el siguiente teorema nos responde las inquietudes que acabamos de plantear.

Teorema de Picard (1.1)

Sea $R$ una región rectangular en el plano $XY$ definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ que contiene al punto $(x_0, y_0)$ en su interior. Si $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $R$, entonces existe un intervalo $I$ con centro en $x_0$ y una única función $y(x)$ definida en $I$ que satisface el problema de valor inicial $y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$.

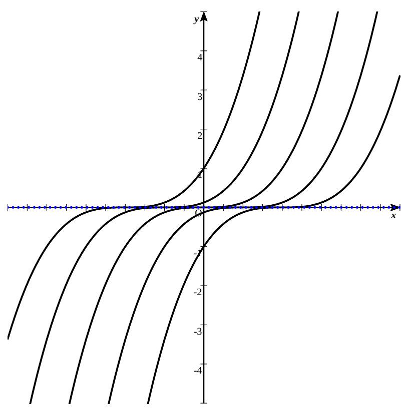
Ejemplo (5): Para la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2$, se tiene que $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ son continuas en todo el plano $XY$, por lo tanto por cualquier punto $(x_0, y_0)$ del plano $XY$ pasa una y solo una solución de la ecuación diferencial anterior. Es importante anotar que para esta ecuación diferencial es imposible hallar una solución explicita o analítica, solo con métodos numéricos se puede hallar la solución.

Ejemplo (6): Para la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{y^2}$ consideremos $f(x,y) = \frac{1}{y^2}$ y notemos que $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{y^3}$ para el intervalo $(x_0, 0)$del eje $OX$ la función $f(x,y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ no es continua en este intervalo. Notemos que la solución $y = \sqrt[3]{3(x+c_0)}$ solo pasa por un solo punto de $OX$ para cada curva.



Ejemplo (7): Para la ecuación diferencial $y' = xy + e^{-y}$ , consideremos la función $f(x,y) = xy + e^{-y}$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y}$ son continuas con respecto a $x$ e $y$ en todos los puntos del plano $XOY$. Según el teorema de existencia y unicidad, la región R en que la ecuación dada tiene solución única es todo el plano $XOY$.

Ejemplo (8): Para la ecuación diferencial $y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ , consideramos la función $f(x,y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ es una función definida y continua en todo los puntos del plano $XOY$. La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ no esta definida para $y = 0$, es decir sobre la región $OX$ infringe la condición. Por siguiente es posible que no haya unicidad en los puntos del eje $OX$. Es fácil comprobar que $y = \frac{(x+c)^3}{8}$ es solución de la ecuación y además $y = 0$ es solución trivial de esta. Luego notemos que existen al menos dos soluciones e infringen la unicidad.



IV. Clases de Soluciones de una Ecuación diferencial

Si todas las soluciones de la ecuación diferencial $F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$ en un intervalo pueden obtenerse de $G(x, y, c_1, \cdots c_n)$, con $c_i \in \mathbb{R}$ (parámetros), mediante valores apropiados de $c_i$, entonces a $G(x, y, c_1, \cdots c_n)$ se le llama la solución general. Si la solución no contiene los parámetros $c_i$ se le llama la solución particular, es decir que la solución particular es generada por valores de los parámetros $c_i$. Por otro lado, una solución que no pueda obtenerse a partir de la solución general se le llama solución singular.

*Observación*: notaremos que para una ecuación lineal de orden $n$, la solución general tendrá también $n$ parámetro, así la ecuación diferencial $y'' - y' - 20y = 0$ de segundo orden tiene como solución general $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-4x}$ .

Bajo condiciones iniciales $y(0) = 1\,; y'(0) = 2$ también podemos obtener una solución particular $y_p = \frac{9}{8}e^{5x} + \frac{1}{9}e^{-4x}$ de la general. Sin embargo en algunas ecuaciones diferenciales como $xy' - 4y = 0$ tiene como solución general $y = Cx^4$ y para $C = 1$ la solución particular $y = x^4$ , pero $f(x) = \begin{cases} x^4 & para \;\; x \geq 0 \\ \\ -x^4 & para \;\; x < 0 \end{cases}$ es una solución singular ya que no la podemos obtener de la solución general.

# V. Ejercicios Propuestos

## Ejercicios (1):

- Clasifique cada ecuación diferencial según su orden, grado y si es lineal o no. Señale la función desconocida y la variable independiente.

1) $y''' - 5xy' = e^x + 1$

- ☑ Orden: ______
- ☑ Grado: ______
- ☑ Función desconocida o variable dependiente: ______
- ☑ Variable independiente: ________
- ☑ Lineal Sí ☐ No ☐

2) $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = Cos\ x$

- ☑ Orden: ______
- ☑ Grado: ______
- ☑ Función desconocida o variable dependiente: ______
- ☑ Variable independiente: ________
- ☑ Lineal Sí ☐ No ☐

3) $yy' + 2y = 1 + x^2$

- ☑ Orden: ______
- ☑ Grado: ______
- ☑ Función desconocida o variable dependiente: ______
- ☑ Variable independiente: ________
- ☑ Lineal Sí ☐ No ☐

4) $t\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) + t^2\,\dfrac{dy}{dt} - Sen\,t \cdot \sqrt{y} = t^2 - t + 1$

- ☑ Orden: ______
- ☑ Grado: ______
- ☑ Función desconocida o variable dependiente: ______
- ☑ Variable independiente: ________
- ☑ Lineal Sí ☐ No ☐

5) $s^2 \cdot \dfrac{d^2t}{ds^2} + st \cdot \dfrac{dt}{ds} = s$

- ☑ Orden: ______
- ☑ Grado: ______
- ☑ Función desconocida o variable dependiente: ______
- ☑ Variable independiente: ________
- ☑ Lineal Sí ☐ No ☐

6) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}$

- ☑ Orden: ______
- ☑ Grado: ______
- ☑ Función desconocida o variable dependiente: ______
- ☑ Variable independiente: ________
- ☑ Lineal Sí ☐ No ☐

7) $y\dfrac{d^2x}{dy^2} = y^2 + 1$

- ☑ Orden: ______
- ☑ Grado: ______
- ☑ Función desconocida o variable dependiente: ______
- ☑ Variable independiente: ________
- ☑ Lineal Sí ☐ No ☐

8) $x^3y^{(4)} - x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$

- ☑ Orden: ______
- ☑ Grado: ______
- ☑ Función desconocida o variable dependiente: ______
- ☑ Variable independiente: ________
- ☑ Lineal Sí ☐ No ☐

9) $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2 \cdot \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

- ☑ Orden: ______
- ☑ Grado: ______
- ☑ Función desconocida o variable dependiente: ______
- ☑ Variable independiente: ________

- ☑ Lineal Sí ☐ No ☐

10) $(1-y^2)dx + x\,dy = 0$

- ☑ Orden: ______
- ☑ Grado: ______
- ☑ Función desconocida o variable dependiente: ______
- ☑ Variable independiente: ________
- ☑ Lineal Sí ☐ No ☐ (respecto a la variable $x$ y respecto a la variable $y$)

## Ejercicios (2):

- Aplicando el teorema de existencia y unicidad, determine la región donde las siguientes ecuaciones diferenciales admiten solución única.

1) $y' = y + 3\sqrt[3]{y}$
2) $y' = \sqrt{x^2 - y} - x$
3) $y' = \frac{y+1}{x-y}$
4) $y' = 1 - \cot y$
5) $y' = \frac{x}{y}$
6) $y' = \sqrt{x - y}$
7) $y' = \sqrt{1 - y^2}$
8) $y' = \sin y - \cos x$

## Ejercicios (3):

- Verificar en los siguientes ejercicios que las funciones o relaciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas

1) $y = \frac{\sin x}{x}$ *es solución de* $xy' + y = \cos x$
2) $y = ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ *es solución de* $y' + 2y - e^x = 0$
3) $y = 2 + c\sqrt{1 + x^2}$ *es solución de* $(1 - x^2)y' + xy = 2x$
4) $y = e^{\arcsin cx}$ *es solución de* $xy' = y\tan(\ln y)$
5) $y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + ce^x$ *es solución de* $y' - y = e^{x+x^2}$

6) $y = x\left(\int \frac{e^x}{x}dx + c\right)$ $es\ \ solución\ \ de\ \ xy' - y = xe^x$

7) $\left.\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}\right\}$ $es\ solución\ paramétrica\ \ de\ x + yy' = 0$

8) $e^{-y} - cx = 1$ $es\ solución\ de\ xy' + 1 = e^y$

9) Si $y' - x\sqrt{y} = 0$ demostrar que:

a) $y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2$ $es\ solucón\ general$

b) Si $c = 0$ mostrar que $y = \frac{x^2}{4}$ $es\ solución\ particular.$

c) Explicar porque $y = 0$ es solución singular.

10) Si $y' = y^2 - 1$, demostrar que:

a) $y = \frac{1+ce^{2x}}{1-ce^{2x}}$ $es\ solucón\ general\ .$

b) Explicar porque $y = -1$ es solución singular.

# Módulo II

I. **Definición**: Una ecuación diferencial de primer orden es de la forma :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

También podemos escribirla en su forma canónica, si consideramos

$f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ Entonces $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \Longrightarrow M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

En la resolución de este tipo de ecuaciones podemos apreciar varios métodos que se asocian según el tipo de ecuación. Iniciaremos con el primer método denominado "variable separable".

## 1.1. Ecuaciones de variables separables

**Definición:** Una ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ se dice de variables separables si, $f(x,y)$ la podemos escribir de la forma $f(x,y) = h(x).k(y)$.

En efecto, si $\frac{dy}{dx} = f(x,y) = h(x).k(x)$ entonces $\frac{dy}{dx} = h(x).k(y)$

$\Longrightarrow \frac{dy}{k(y)} = h(x)dx$ y si consideramos la sustitución $k(y) = \frac{1}{g(y)}$ entonces

$\Longrightarrow g(y)dy = h(x)dx$ integrando ambos lados

$\Longrightarrow \int g(y)dy = \int h(x)dx$

$\Longrightarrow G(y) + c_1 = H(x) + c_2$ si hacemos $c_2 - c_1 = C$ se tiene que:

$\Longrightarrow G(y) = H(x) + C.$

Ejemplo (1): Resuelva la ecuación $\frac{dy}{dx} = e^{2x-3y}$

En efecto $\frac{dy}{dx} = e^{2x-3y}$ separamos las variables por la propiedad de los exponentes $\frac{dy}{dx} = e^{2x}e^{-3y} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{e^{3y}} \Longrightarrow = e^{2x}dx,$ integrado en ambos lados

$$\Longrightarrow \int e^{3y}dy = \int e^{2x}dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}e^{3y} = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$\Rightarrow 2e^{3y} = 3e^{2x} + C_0$ donde $C_0 = 6C.$

Ejemplo (2): Resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4(x^2+1)}$ con valores $y(1) = \frac{\pi}{4}$

Solución: separamos variable $\frac{dx}{(x^2+1)} = 4dt$ integrado en ambos lados

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^2+1)} = \int 4\,dy$$

$\Rightarrow \arctan x = 4y + C$ determinando $C$

$$\Rightarrow \arctan(1) = 4\left(\frac{\pi}{4}\right) + c$$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \pi + C$ donde se obtiene $C = -\frac{3\pi}{4}$

Finalmente la solución particular es: $y = \frac{1}{4}\arctan x - \frac{3}{16}\pi.$

## Ejercicios propuestos (1)

i. Resuelva las siguientes ecuaciones por separación de variable.

**Ejercicio 1.** $(4y + yx^2)\,dy - (2x + xy^2)\,dx = 0$

**Ejercicio 2.** $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$

**Ejercicio 3.** $3e^x \tan y\,dx + (2 - e^x)\sec^2 y\,dy = 0$

**Ejercicio 4.** $y' \operatorname{sen} x = y \ln y$, si $y\left(\frac{\Pi}{2}\right) = e$

**Ejercicio 5.** $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

**Ejercicio 6.** $x^2 y' = y - xy$, si $y(-1) = -1$
(**Rta.** $\ln|y| = -\frac{1}{x} - \ln|x| - 1$)

**Ejercicio 7.** $\frac{dy}{dx} - y^2 = -9$ que pase por los puntos:
a) $(0,0)$, b) $(0,3)$, c) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

**Ejercicio 8.** Se suministran bacterias como alimento a una población de protozoarios a una razón constante $\mu$. Se ha observado que las bacterias son devoradas a una tasa proporcional al cuadrado de su cantidad. Si $c(t)$ es la cantidad de bacterias en el instante $t$, hallar la E.D.; determinar $c(t)$ en función de $c(0)$; ¿cuál es la concentración de equilibrio de las bacterias, es decir, cuando $c'(t) = 0$ ?
(**Rta.:** $\frac{\sqrt{\mu}+\sqrt{k}c(t)}{\sqrt{\mu}-\sqrt{k}c(t)} = \frac{\sqrt{\mu}+\sqrt{k}c(0)}{\sqrt{\mu}-\sqrt{k}c(0)}e^{2\sqrt{k\mu}t}$ ; concentración de equilibrio $c = \sqrt{\frac{\mu}{k}}$)

**Ejercicio 9.** Resolver por variables separables: $a\left[x\frac{dy}{dx} + 2y\right] = xy\frac{dy}{dx}$ en $y = a$ y $x = 2a$.

## 1.2. Ecuaciones diferenciales Homogéneas

### 1.2.1. Funciones homogéneas.

**Definición:** una función $f(x,y)$ se dice que es homogénea de grado $n$ si existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$

Ejemplo (3) Determine si la función $f(x,y) = 2x^2 + xy + y^2$ es homogénea y el grado de la misma.

**Solución**: en efecto consideremos $f(tx,ty) = 2(tx)^2 + (xt)(yt) + (yt)^2$

$\Rightarrow 2t^2x^2 + t^2(xy) + t^2y \Rightarrow factorizando\ por\ t^2$

$\Rightarrow t^2\ (2x^2 + xy + y^2) \Rightarrow t^2 f(x,y)$, entonces $f(x,y)$ es homogénea de grado 2

Ejemplo (4) Determine si la función $f(x,y) = xy - y^2 + 1$ es homogénea y el grado de la misma.

**Solución**:

$f(tx,ty) = (tx)(ty) - (ty)^2 + 1 \Rightarrow t^2xy - t^2\,y^2 + 1 \Rightarrow t^2\,(xy - y^2) + 1 \neq f(x,y)$

Entonces $f(x,y)$ no les homogénea.

**Definición:** Una ecuación de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es homogénea si tanto $M(x,y)$ $y$ $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado. Es decir si:

$$M(tx,ty) = t^n\, M(x,y) \quad \text{y} \quad N(tx,ty) = t^n\, N(x,y)$$

Método de Solución

Dada la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ donde $M(x,y)$ $y$ $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado; mediante la sustitución $y = ux$ ó $x = vy$ (donde $u$ y $v$ son nuevas variables dependientes), puede transformarse en una ecuación diferencial de variable separable.

Demostración: Sea la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ donde $M(x,y)$ $y$ $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado, luego hacemos la sustitución

$y = ux$ , y derivamos con respecto a $x$ $y' = u + x\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ , además escribimos nuestra ecuación en forma de cociente, $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ y sustituyendo

$$\Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = -\frac{M(x,ux)}{N(x,ux)}$$

$$\Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = -\frac{x^n M(1,u)}{x^n N(1,u)} \quad \textit{por ser homogénea}$$

$$\Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = -\frac{M(1,u)}{N(1,u)}$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx} = -\frac{M(1,u)}{N(1,u)} - u \;\Rightarrow x\frac{du}{dx} = -\frac{M(1,u) - u\,N(1,u)}{N(1,u)}, \textit{luego separamos varible}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{N(1,u)}{M(1,u) + u\,N(1,u)}du \quad \textit{finalmente agrupamos e integramos}$$

$$* \int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + u\,N(1,u)}du = 0$$

Otro resultado se obtiene cuando hacemos la sustitución $x = vy$

$$* \int \frac{dy}{y} + \int \frac{M(v,1)}{N(v,1) + vM(v,1)}dv = 0$$

Observación: Si la estructura algebraica de $N$ es más sencilla que la de $M$, entonces es conveniente usar la sustitución $y = ux$. Si es lo contrario usaremos la sustitución $x = vy$. También podemos usar el resultado final de la formulación en algunas ocasiones, es decir la expresión para la sustitución $y = ux$ y $x = vy$ respectivamente.

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)} du = 0 \quad \text{ó} \quad bien \int \frac{dy}{y} + \int \frac{M(v,1)}{N(v,1) + vM(v,1)} dv = 0$$

Ejemplo (5) Resolver la ecuación diferencial $\left(x + ye^{\frac{y}{x}}\right) dx - xe^{\frac{y}{x}} dy = 0$ , con $y(1) = 0$, usando los dos métodos y compare su respuesta.

Solución:
$(x + ye^{\frac{y}{x}})\, dx - xe^{\frac{y}{x}}\, dy = 0$ donde

$$\overbrace{M(x,y) = x + ye^{\frac{y}{x}}}^{\text{homogénea de orden 1}} \quad \text{y} \quad \overbrace{N(x,y) = -xe^{\frac{y}{x}}}^{\text{homogénea de orden 1}}$$

La sustitución más sencilla es: $y = ux$, por tanto $dy = u\, dx + x\, du$
Sustituyendo en la E.D.

$$(x + uxe^{\frac{ux}{x}})\, dx - xe^{\frac{ux}{x}}(u\, dx + x\, du) = 0$$

o sea que

$$x\, dx - x^2 e^u\, du = 0$$

luego $x\, dx = x^2 e^u\, du$, separando variables y considerando $x \neq 0$, obtenemos,

$$\frac{dx}{x} = e^u\, du \Rightarrow \ln x = e^u + C$$

Por lo tanto la solución general es

$$\ln x = e^{\frac{y}{x}} + C$$

Para hallar la solución particular que pasa por el punto $y(1) = 0$, sustituímos en la solución general y obtenemos:

$\ln 1 = e^{\frac{0}{1}} + C \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 + C$ de donde $C = -1$

Por lo tanto,

$$\ln x = e^{\frac{y}{x}} - 1$$

es la solución particular

Solución usando la fórmula: Como hacemos la sustitución

$y = ux$ *tenemos que* $u = \frac{y}{x}$, entonces

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + u\,N(1,u)}\,du = 0$$

Donde $M(x,y) = x + ye^{\frac{y}{x}}$ y $N(x,y) = -xe^{\frac{y}{x}}$ luego

$M(1,u) = 1 + ue^{u} \quad y \quad N(1,u) = -e^{u}$ Remplazando

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{-e^{u}}{1 + ue^{u} + u(-e^{u})}\,du = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{-e^{u}}{1 + ue^{u} - u(e^{u})}\,du = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{-e^{u}}{1}\,du = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int e^{u}\,du = 0$$

$\ln|x| - e^{u} = c$ *remplazamos* a $u = \frac{y}{x}$

$\ln|x| - e^{\frac{y}{x}} = c$ y para el valor inicial

$$\ln 1 - e^{0} = c \quad \Rightarrow c = -1$$

Y la solución particular $\ln|x| - e^{u} = -1$

Que resulta la respuesta anterior.

Ejercicios propuestos (2): Resolver los siguientes ejercicios por el método de las homogéneas, ó convertirla en homogéneas y resolver según sea el caso.

**Ejercicio 1.** $\left(y + x\cot\frac{y}{x}\right)\,dx - x\,dy = 0.$

**Ejercicio 2.** $(x + \sqrt{y^2 - xy})\frac{dy}{dx} = y$ , con $y(1) = 1$.
(**Rta.:** $\ln|y| + 2\sqrt{\frac{y-x}{y}} = 0$)

**Ejercicio 3.** $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)\,dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0.$

**Ejercicio 4.** $(x^2 - 2y^2)\,dx + xy\,dy = 0.$
(**Rta.:** $x = C(1 - (\frac{y}{x})^2)^{\frac{1}{2}}$)

**Ejercicio 5.** $xy' = y + 2xe^{\frac{-y}{x}}.$

**Ejercicio 6.** $(x + y^3)\,dx + (3y^5 - 3y^2x)\,dy = 0$, (Ayuda: hacer $x = z^\alpha$).

**Ejercicio 7.** $2(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2})\,dx + x^3\,dy = 0$, (Ayuda: hacer $y = z^\alpha$).
(**Rta.:** $x^4(1 + 2Cy) = C^2$)

**Ejercicio 8.** $y\cos x\,dx + (2y - \operatorname{sen} x)\,dy = 0$, (Ayuda: hacer $u = \operatorname{sen} x$).

**Ejercicio 9.** $y(\ln\frac{y}{x} + 1)\,dx - x\ln\frac{y}{x}\,dy = 0.$
(**Rta.:** $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln^2|\frac{y}{x}| = C$)

**Ejercicio 10.** $\frac{dy}{dx} = \cos(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x}.$
(**Rta.:** $\sec(\frac{y}{x}) + \tan(\frac{y}{x}) = Cx$)

**Ejercicio 11.** Hallar la solución particular de la E.D.

$$yx^2dx - (x^3 + y^3)dy = 0,$$

donde $y(0) = 1$
(**Rta.:** $\ln|y| = \frac{1}{3}(\frac{x}{y})^3$)

## 1.3. Ecuaciones diferenciales Cuasihomogéneas

Estudiaremos las ecuaciones de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \quad y \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + bx + c}{Ax + By + C}\right)$$

### 1.3.1. Ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$

Para este tipo de ecuaciones haremos la sustitución $z = ax + by + c$ para convertirla en una ecuación diferencial de variable separable.

En efecto si $z = ax + by + c \implies \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$, si despejamos a $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right)$, remplazamos:

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z)$$

$$\frac{dz}{dx} = b\,f(z) + a \quad separamos\ varibles$$

$$\frac{dz}{b\,f(z) + a} = dx \quad integramos$$

$$\int \frac{dz}{b\,f(z) + a} = \int dx$$

$$\int \frac{dz}{b\,f(z) + a} = x + c \ \ y\ a\ esto\ le\ sustituimos\ z = ax + by + c$$

Ejemplo (6): Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = (-5x + y)^2 - 4$

**Solución:** consideremos la sustitución $z = -5x + y$ entonces su derivada con respecto a $x$ es:

$$\frac{dz}{dx} = -5 + \frac{dy}{dx} \implies \frac{dz}{dx} + 5 = \frac{dy}{dx} \quad luego\ sustituimos\ en\ la\ E.D$$

$$\frac{dz}{dx} + 5 = (z)^2 - 4$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 - 9 \quad separando\ las\ varibles$$

$$\int \frac{dz}{z^2 - 9} = \int dx$$

$$\int \frac{dz}{(z-3)(z+3)} = x + c \quad por\ fracciones\ parciales$$

$$\int \left[\frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+3}\right] dz = x + c$$

Para el valor de A, tenemos $A = \frac{1}{z+3}$ , $con\ \ z = 3 \quad \Longrightarrow A = \frac{1}{6}$ y para el valor de B en forma análoga $B = \frac{1}{z-3}$ , $con\ \ z = -3 \ \Longrightarrow B = -\frac{1}{6}$ por tanto:

$$\int \frac{\frac{1}{6}}{z-3} dz + \int \frac{-\frac{1}{6}}{z+3} dz = x + c$$

$$\frac{1}{6}\int \frac{1}{z-3} dz - \frac{1}{6}\int \frac{1}{z+3} dz = x + c$$

$$\frac{1}{6}\left[\int \frac{1}{z-3} dz - \int \frac{1}{z+3} dz\right] = x + c$$

$$\frac{1}{6}[\ln(z-3) - \ln(z+3)\,] = x + c$$

$$[\ln(z-3) - \ln(z+3)\,] = 6x + 6c$$

$$\ln\frac{z-3}{z+3} = 6x + C_1 \ \ aplicamos\ exponenciales\ en\ ambos\ lados$$

$$\frac{z-3}{z+3} = e^{6x+C_1} \Longrightarrow \frac{z-3}{z+3} = Ce^{6x}$$

$$z - 3 = (z+3)Ce^{6x} \quad despejando\ z$$

$$z = \frac{3(Ce^{6x}+1)}{1-Ce^{6x}} \quad y\ remplazamos\ \ z = \ -5x + y$$

$$-5x + y = \frac{3(Ce^{6x}+1)}{1-Ce^{6x}} \ \ y\ finalmente$$

$$y = 5x + \frac{3(Ce^{6x}+1)}{1-Ce^{6x}}$$

Ejercicios propuestos (3): Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales usando la sustitución adecuada. $\int \frac{dz}{b\,f(z)+a} = x + c$

Ejercicio (1) $\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$

Ejercicio (2) $\frac{dy}{dx} = tan^2(x + y)$

Ejercicio (3) $\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

Ejercicio (4) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x-y}{x+y}$

Ejercicio (5) $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y)$

Ejercicio (6) $\frac{dy}{dx} = 1 + e^{y-x+5}$

Ejercicio (7) $\frac{dy}{dx} = \cos(x + y)\ \ con\ \ y(0) = \frac{\pi}{4}$

Ejercicio (8) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+2y}{3x+2y+2}\ \ \ con\ y(-1) = -1$

### 1.3.2. **Ecuaciones de la forma**: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+bx+c}{Ax+By+C}\right)$

Para esta ecuación estudiaremos dos casos.

**I. caso:** Si $ax + by + c = 0\ \ y\ \ Ax + By + C = 0\ \ son\ paralelas$

Entonces sus pendientes son iguales $m_1 = m_2$ esto es si :

$\frac{-a}{b} = \frac{-A}{B} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{A}{B} \Rightarrow \frac{B}{b} = \frac{A}{a} = k \Rightarrow \frac{B}{b} = k\ \ y\ \ \frac{A}{a} = k \Rightarrow A = ka\ \ y\ \ B = kb$ entonces:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + bx + c}{Ax + By + C}\right) = f\left(\frac{ax + bx + c}{kax + kby + C}\right) = \left(\frac{ax + bx + c}{k[ax + by] + C}\right)$$

Por lo tanto podemos usar la sustitución $z = ax + by$ y procedemos de la misma forma del caso 1.3.1. , es decir $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right)$ entonces

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f\left(\frac{z + c}{kz + C}\right)\ \ separando\ variables$$

$$\int \frac{dz}{b.f\left(\frac{z + c}{kz + C}\right) + a} = x + c$$

**II. caso:** Si $ax + by + c = 0 \ \ y \ \ Ax + By + C = 0 \ \ son\ incidentes$ .

Supongamos que su intersección es el punto $P_0(h, k)$, entonces con la sustitución

$x = X + h \ \ y \ \ y = Y + k$ (una traslación al origen), nuestra ecuación se transforma en una ecuación diferencial homogénea.

En efecto, derivando y sustituyendo en $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+bx+c}{Ax+By+C}\right)$

$$dx = dX \quad y \quad dy = dY$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{dY} = f\left(\frac{a(X+h) + b(Y+k) + c}{A(X+h) + B(Y+k) + C}\right) = f\left(\frac{aX + bY + c + (ah + bk)}{AX + BY + C + (Ah + Bk)}\right)$$

Podemos comprobar fácilmente que $(ah + bk) = -c \quad y \quad (Ah + Bk) = -C,$ de esto resulta:

$$\frac{dX}{dY} = f\left(\frac{aX + bY}{AX + BY}\right)$$

Que es una ecuación diferencial homogénea de primer orden.

<u>Ejemplo (7):</u> Resolver la ecuación diferencial $(x - y + 1)dx + (x + 2y - 5)dy = 0$

Solución: en primer lugar determinemos los valores de $h$ y $k$ resolviendo el sistema lineal,

$$\begin{cases} h - k + 1 = 0 \\ h + 2k - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = 1\, y \ \ k = 2$$

Luego hacemos la sustitución $x = X + 1 \ \ y \ \ y = Y + 2$ la cual nos transforma nuestra ecuación en:

$$(X - Y)dX + (X + 2Y)dY = 0$$

Claramente es una ecuación diferencial homogénea de grado 1, para la solución usaremos la forma simplificada, es decir hacemos la sustitución $Y = uX$, lo que conduce a la formulación:

$$\int \frac{dX}{X} + \int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + u\, N(1,u)} du = 0$$

*Recordemos hemos transformado nuestra ecuación en homogénea para las variables $X$ e $Y$, por lo tanto debemos considerar al final en retomar las variables $x$ e $y$.

Por otro lado tenemos que

$M(X,Y) = X - Y \ \ \Rightarrow M(1,u) = 1 - u \quad y \quad N(X,Y) = X + 2Y \Rightarrow N(1,u) = 1 + 2u$

$$\Rightarrow \int \frac{dX}{X} + \int \frac{1+2u}{1-u+u(1+2u)}\,du = C$$

$$\Rightarrow \ln|X| + \int \frac{1+2u}{1-u+u+2u^2}\,du = C$$

$$\Rightarrow \ln|X| + \int \frac{1+2u}{1+2u^2}\,du = C$$

$$\Rightarrow \ln|X| + \int \frac{du}{1+2u^2} + 2\int \frac{u}{1+2u^2}\,du = C$$

$$\Rightarrow \ln|X| + \int \frac{du}{1+2u^2} + 2\int \frac{u}{1+2u^2}\,du = C$$

Integrando por sustitución en ambos casos

$\left[hacemos\ \ \alpha = \sqrt{2}\,u\ \ para\ la\ p\,rimera\ integral\ \ \ y\ \ \ \omega = 1+2u^2\ \ para\ la\ segunda\right]$

$$\Rightarrow \ln|X| + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{2}{4}\int \frac{d\omega}{\omega} = C$$

$$\Rightarrow \ln|X| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\alpha + \frac{1}{2}\ln(\omega) = C$$

$$\Rightarrow \ln|X| + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\,u\right) + \tfrac{1}{2}\ln(1+2u^2) = C\ ;\ \text{ remplazando por } u$$

$$\Rightarrow 2\ln|X| + \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\,u\right) + \ln(1+2u^2) = 2C\ ;\text{ multiplicando por 2}$$

$$\Rightarrow \ln|X^2| + \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\,u\right) + \ln(1+2u^2) = 2C\ ; aplicado\ propiedades\ de\ \ln x$$

$$\Rightarrow \ln|X^2| + \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\,\frac{Y}{X}\right) + \ln\left(\frac{X^2+2Y^2}{X^2}\right) = C_0\ ;\ \text{ remplazando por } u = \frac{Y}{X}$$

$$\Rightarrow \ln\left[X^2\cdot\left(\frac{X^2+2Y^2}{X^2}\right)\right] + \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\,\frac{Y}{X}\right) = C_0\ ;\ \ simplificando$$

$$\Rightarrow \ln(X^2+2Y^2) + \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\,\frac{Y}{X}\right) = C_0;\ finalmente\ paa\ X = x-1\ y\ \ Y = y-2$$

$$\Rightarrow \ln[(x-1)^2 + 2(y-2)^2] + \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\,\frac{y-2}{x-1}\right) = C_0$$

<u>Ejercicios propuestos (4)</u>: Resolver los siguientes ejercicios por el método de las cuasihomogéneas.

1. $(x-y+1)\,dx+(x+2y-5)\,dy=0$
2. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$
   (**Rta.:** $(x+y+1)^3=C^2(y-x+3)$)
3. $(x-2y+4)\,dx+(2x-y+2)\,dy=0$
   (**Rta.:** $(x+y-2)^3=C^2(x-y+2)$)
4. $(x+y+1)^2\,dx+(x+y-1)^2\,dy=0$
   (**Rta.:** $4x=-\frac{1}{2}(x+y)^2+2(x+y)-\ln|x+y|+C$)
5. $(x+y+1)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0$
   (**Rta.:** $4-x-2y=3\ln|2-x-y|+C$)
6. $(x+y-2)\,dx+(x-y+4)\,dy=0$
   (**Rta.:** $C^{-2}=2(x+1)(y-3)+(x+1)^2-(y-3)^2$)
7. $(x-y-5)\,dx-(x+y-1)\,dy=0$
   (**Rta.:** $C^{-2}=(x-3)^2-2(y+2)(x-3)-(y+2)^2$)
8. $(2x+y)\,dx-(4x+2y-1)\,dy=0$
   (**Rta.:** $x=\frac{2}{5}(2x+y)-\frac{4}{25}-\ln|5(2x+y)-2|+C$)

## 1.4. Ecuaciones diferenciales Exactas:

Concepto de exactitud

Si $z = f(x, y)$, entonces

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

es la diferencial total de y $f$; pero si consideramos $z = c = f(x, y)$ (la familia de curvas uniparamétricas en el plano $XY$), entonces

$$dz = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

**Definición**: La forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una diferencial exacta en una región R del plano $XY$, si corresponde a la diferencial total de alguna función $f(x, y)$.

La ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, es exacta si es la diferencial total de alguna función $f(x, y) = c$.

**Teorema: (Criterio para ecuaciones diferenciales exactas)**

Si $M(x, y)$ $y$ $N(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una región R del plano XY, entonces la condición necesaria y suficiente para que la forma diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

sea un diferencial exacta es que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

**Demostración:**

En efecto, como $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta, entonces existe una función $f(x,y)$ tal que:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = df(x,y)$$

luego, igualando términos

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad y \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Si derivamos en ambos lados una de las expresiones, por ejemplo $M(x,y)$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

La igualdad entre las derivadas cruzadas se produce porque $M \; y \; N$ son continuas con respecto a las derivadas de primer orden.

**Método de Solucion de las ecuaciones diferenciales exactas**

i. Comprobaremos en primer lugar que:
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$
ii. Esto implica que existe una función $f(x,y) = c$ tal que

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad y \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

iii. Consideremos una de las dos expresiones para determinar nuestra función $f(x,y) = c$, integrando respecto a $x$ ó bien respecto a $y$ según sea la igualdad que escojamos. Usemos la primera para determinar la función $f(x,y) = c$

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\int \partial f = \int M \partial x$$

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$

iv. Derivamos con respecto a $y$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y)$$

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx)$$

v. Finalmente integramos con respecto a $y$

Ejemplo (8): Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(2xy^2 + ye^x)dx + (2x^2y + e^x - 1)dy = 0$$

Solución: verifiquemos la condición de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy + e^x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Entonces existe una función $f(x,y) = c$ tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) = \int (2xy^2 + ye^x)dx + g(y)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = 2y^2\int x\,dx + y\int e^x\,dx + g(y) = x^2y^2 + ye^x + g(y)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x^2y^2 + ye^x + g(y) = c$$

Luego para determinar la función $g(y)$ , derivamos con respecto a $y$ e igualamos a la función $N(x,y)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x^2y + e^x + g'(y) = 2x^2y + e^x - 1$$

De esto tenemos que:

$$g'(y) = -1$$

Integrando:

$$g(y) = -\int dx = -x + c_0$$

Finalmente remplazamos y sumamos las constantes $c + c_0 = c_1$

$$f(x, y) = x^2y^2 + ye^x - x = c_1$$

<u>Ejemplo (9)</u> Determine el valor de $b$ para que la ecuación diferencial

$(xy^2 + bx^2y)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$ sea exacta y resuelva dicha ecuación.

<u>Solución:</u> para que sea exacta debe cumplir,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(xy^2 + bx^2y)}{\partial y} = 2xy + bx^2 = \frac{\partial(x^3 + x^2y)}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$$

$$\Rightarrow b = 3$$

Comprobemos al resolver $(xy^2 + 3x^2y)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$

$$f(x, y) = \int (x^3 + x^2y)\, dy + h(x) = x^3 \int dy + x^2 \int y\, dy + h(x)$$

$$f(x, y) = x^3y + \tfrac{1}{2}x^2y^2 + h(x) = c$$

Derivando la función respecto a $x$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2y + xy^2 + h'(x) = xy^2 + 3x^2y$$

$$\Rightarrow h'(x) = 0 \quad \Rightarrow h(x) = c_1$$

$\Longrightarrow f(x,y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c_0$

Ejercicios propuestos (5): Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de las exactas.

**Ejercicio 1.** Resolver la siguiente E.D. por el método de las exactas :

$$(\tan x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\, dx + \cos x \cos y\, dy = 0.$$

(**Rta.:** $f(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y - \ln|\cos x| = C$)

**Ejercicio 2.** Resolver la siguiente E.D. por el método de las exactas:

$$(y^2 \cos x - 3x^2 y - 2x)\, dx + (2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)\, dy = 0, \text{ con } y(0) = e.$$

(**Rta.:** $f(x,y) = y^2 \operatorname{sen} x - x^3 y - x^2 + y(\ln y - 1) = 0$)

**Ejercicio 3.** Determinar la función $M(x,y)$ de tal manera que la siguente E.D.O sea exacta:

$$M(x,y)\, dx + \left(xe^x y + 2xy + \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

(**Rta.:** $M(x,y) = \frac{1}{2}y^2 e^x(x+1) + y^2 - \frac{y}{x^2} + g(x)$)

**Ejercicio 4.** Determinar la función $N(x,y)$ para que la siguiente E.D. sea exacta:

$$\left(y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{x}{x^2+y}\right) dx + N(x,y)\, dy = 0$$

(**Rta.:** $N(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x^2+y)^{-1} + g(y)$)

**Ejercicio 5.** Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(2xy^2 + ye^x)\, dx + (2x^2 y + e^x - 1)\, dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x,y) = y(x^2 y + e^x - 1) = C$)

**Ejercicio 6.** Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(2x - y \operatorname{sen} xy - 5y^4)\, dx - (20xy^3 + x \operatorname{sen} xy)\, dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x, y) = x^2 + \cos(xy) - 5y^4 x = C$)

**Ejercicio 7.** Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(\operatorname{sen} xy + xy \cos xy)\, dx + (x^2 \cos xy)\, dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x, y) = x \operatorname{sen}(xy) = C$)

**Ejercicio 8.** Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(ye^{xy} + 4y^3)\, dx + (xe^{xy} + 12xy^2 - 2y)\, dy = 0, \text{ con } y(0) = 2$$

(**Rta.:** $f(x, y) = e^{xy} + 4xy^3 - y^2 = -3$)

**Ejercicio 9.** Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(1 - \operatorname{sen} x \tan y)\, dx + \cos x \sec^2 y\, dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x, y) = \cos x \tan y + x = C$)

## 1.5. Factor Integrante:

En ocasiones las ecuaciones diferenciales $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ no son exactas, pero podemos multiplicarla por una función $\mu(x,y)$ de forma tal que se transforma en exacta.

A esta función la denominamos "**factor integrante**"

**<u>Teorema</u>**

Sea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ y $\mu(x,y)$ un factor integrante, con $M(x,y), N(x,y)$

y $\mu(x,y)$ continuas y con primeras derivadas parciales continuas, entonces

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{d\mu}{dx} = -M\frac{d\mu}{dy}$$

**Demostración**

Sea $\mu(x,y)$ tal que $\mu\, M\, dx + \mu\, N\, dy = 0$ es exacta y $\mu,\ M, N$ tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$\frac{\mu \cdot \partial M}{\partial y} + \frac{M \cdot \partial\mu}{\partial y} = \frac{\mu \cdot \partial N}{\partial x} + \frac{N \cdot \partial\mu}{\partial x}$$

$$\frac{\mu \cdot \partial M}{\partial y} - \frac{\mu \cdot \partial N}{\partial x} = \frac{N \cdot \partial\mu}{\partial x} - \frac{M \cdot \partial\mu}{\partial y}$$

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \left[\frac{N \cdot \partial\mu}{\partial x} - \frac{M \cdot \partial\mu}{\partial y}\right]$$

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\left[\frac{\partial\mu}{\partial x} - \frac{M}{N}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}\right] \quad y\ como$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\left[\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}\right] = N\frac{d\mu}{dx} = -M\frac{d\mu}{dy}$$

Ahora si consideramos determinar la función $\mu(x,y)$, cuando depende solo de la variable $x$

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=N\frac{d\mu}{dx}$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]}{N}\,dx$$

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]}{N}dx$$

$$\ln\mu=\int\frac{\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]}{N}dx$$

$$\mu(x)=e^{\int\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}dx}$$

En forma análoga obtenemos para cuando solo dependen de la variable $y$

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=-M\frac{d\mu}{dy}$$

$$\mu(y)=e^{\int\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{-M}dy}$$

Ejemplo (10) Resuelva la siguiente ecuación diferencial por factor integrante.

$$(2xy^2-2y)dx+(3x^2y-4x)dy=0$$

Solución:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(2xy^2-2y)}{\partial y}=4xy-2\,;\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(3x^2y-4x)}{\partial x}=6xy-4$$

no es exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=4xy-2-(6xy-4)=-2xy+2=2(-xy+1)$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{-M} dy} = e^{\int \frac{2(-xy+1)}{-(2xy^2-2y)} dy} = e^{\int \frac{2(-xy+1)}{2y(-xy+1)} dy}$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{dy}{y}} = e^{\ln y} = y$$

Luego multiplicamos por este factor nuestra ecuación

$$y(2xy^2 - 2y)dx + y(3x^2y - 4x)dy = 0$$

$$(2xy^3 - 2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4xy)dy = 0$$

Verificamos su exactitud

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(2xy^3 - 2y^2)}{\partial y} = 6xy^2 - 4y = \frac{\partial(3x^2y^2 - 4xy)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \int (2xy^3 - 2y^2)dx + h(y) = c$$

$$\Rightarrow f(x,y) = 2y^3 \int x dx - 2y^2 \int dx + h(y) = c$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x^2y^3 - 2xy^2 + h(y) = c$$

Derivando respecto a $y$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4xy + h'(y) = N(x,y) = 3x^2y^2 - 4xy$$

De esto tenemos que $h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$ y finalmente

$$\Rightarrow f(x,y) = x^2y^3 - 2xy^2 = c_0$$

## Ejercicios propuestos (6):

En los siguientes ejercicios, hallar el factor integrante y resolver por el método de las exactas:

**Ejercicio 1.** $(\cos(2y) - \operatorname{sen} x)\, dx - 2\tan x \operatorname{sen}(2y)\, dy = 0$.
**(Rta.:** $\operatorname{sen} x \cos(2y) + \frac{1}{2}\cos^2 x = C$)

**Ejercicio 2.** $(3xy^3 + 4y)\, dx + (3x^2y^2 + 2x)\, dy = 0$.
**(Rta.:** $f(x, y) = x^3y^3 + 2x^2y = C$)

**Ejercicio 3.** $2xy \ln y\, dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1})\, dy = 0$.
**(Rta.:** $f(x, y) = x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = C$)

**Ejercicio 4.** $(2wz^2 - 2z)\, dw + (3w^2z - 4w)\, dz = 0$.
**(Rta.:** $w^2z^3 - 2z^2w = C$)

**Ejercicio 5.** $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)dy = 0$
**(Rta.:** $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + y^2 = C$)

**Ejercicio 6.** $x\, dy + y\, dx = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(dx + dy)$.
**(Rta.:** $xy = \frac{1}{4}(x + y)^4 + C$)

**Ejercicio 7.** $x\, dy - y\, dx = (2x^2 + 3y^2)^3(2xdx + 3ydy)$.
**(Rta.:** $\sqrt{\frac{2}{3}}\tan^{-1}(\sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{y}{x}) = \frac{1}{3}(2x^2 + 3y^2)^3 + C$)

**Ejercicio 8.** $y\, dx + (2x - ye^y)\, dy = 0$.
**(Rta.:** $y^2x - y^2e^y + 2ye^y - 2e^y = C$)

**Ejercicio 9.** $(xy - 1)dx + (x^2 - xy)dy = 0$.
**(Rta.:** $f(x, y) = xy - \ln|x| - \frac{y^2}{2} = C$)

**Ejercicio 10.** $ydx + (x^2y - x)dy = 0$.
**(Rta.:** $f(x, y) = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = C$)

## 1.6. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Definición Una ecuación de la forma $a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$ se dice lineal de primer orden, donde $a_i\,;i=0,1$, son funciones de la variable independiente.

Esta ecuación puede presentarse también en forma estándar como:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)\ \ donde\ \ P(x)=\frac{a_0(x)}{a_1(x)}\quad y\quad f(x)=\frac{g(x)}{a_1(x)}$$

**Factor integrante para las ecuaciones lineales de primer orden**

Consideremos la ecuación $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$ y la escribimos de la forma

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, es decir:

$\Rightarrow -[f(x)-P(x)y]dx+dy=0$

$\Rightarrow [P(x)y-f(x)]dx+dy=0$ , calculemos el factor integrante

$$\frac{\partial M}{\partial y}=P(x)\,;\ \frac{\partial N}{\partial x}=0$$

$$\mu(x)=e^{\int\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}dx}=e^{\int P(x)dx}\quad (F.I.)$$

Multiplicando por este factor nuestra ecuación original

$$\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)y=e^{\int P(x)dx}f(x)$$

Notemos que el miembro izquierdo es la derivada del producto de la variable $y$ por el factor integrante $(F.I.)$.

$$\overbrace{e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)y}^{\frac{d\left(y\cdot e^{\int P(x)dx}\right)}{dx}}=e^{\int P(x)dx}f(x)$$

$$\frac{d\left(y\cdot e^{\int P(x)dx}\right)}{dx}=e^{\int P(x)dx}f(x)$$

$$d\left(y\cdot e^{\int P(x)dx}\right)=e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx$$

Integrando en ambos lados

$$\int d\left(y \cdot e^{\int P(x)dx}\right) = \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx + c$$

$$y \cdot e^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} f(x)\, dx + c$$

Es la solución general de las ecuaciones lineales respecto a la variable $x$, pero pueden ser también dadas con respecto a la variable $y$, es decir

$$x \cdot e^{\int P(y)dy} = \int e^{\int P(y)dy} f(y)\, dy + c$$

Ejemplo (11) Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal

$$(6 - 2xy)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

Solución: llevemos a la ecuación en su forma estándar es decir $\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{(6-2xy)} = 0$ notemos que no es lineal con respecto a la variable $x$, pero si con respecto a la variable $y$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{6 - 2xy}{y^2} = 0$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{6}{y^2} - \frac{2xy}{y^2} = 0 \;\Longrightarrow\; \frac{dx}{dy} + \frac{6}{y^2} - \frac{2x}{y} = 0 \;\Longrightarrow\; \frac{dx}{dy} - \frac{2x}{y} = -\frac{6}{y^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = -6y^{-2} \quad luego\ como\ P(y) = -\frac{2}{y} \;\; ; \;\; f(y) = -6y^{-2}$$

Entonces $x \cdot e^{\int P(y)dy} = \int e^{\int P(y)dy} f(y)\, dy + c$

$$x \cdot e^{-2\int \frac{dy}{y}} = \int e^{-2\int \frac{dy}{y}} (-6y^{-2})dy + c$$

$$x \cdot e^{-2\ln y} = -6\int e^{-2\ln y}\, (y^{-2})dy + c$$

$$x \cdot \frac{1}{y^2} = -6\int \frac{1}{y^2}(y^{-2})dy + c$$

$$x \cdot \frac{1}{y^2} = -6\int y^{-4}\, dy + c$$

$$x \cdot \frac{1}{y^2} = -6\left(\frac{1}{-3y^3}\right) + c$$

$$x \cdot \frac{1}{y^2} = 2\left(\frac{1}{y^3}\right) + c$$

$$x = \frac{2}{y} + c\,y^2$$

que es la solución general.

Ejercicios propuestos (7): resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

**Ejercicio 1.** Hallar una solución continua de la E.D.:

$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$

donde $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ -x, & x \ge 1 \end{cases}$

con $y(0) = 0$.

(**Rta.:** $y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2(1+x^2)}, & \text{si } 0 \le x < 1 \\ -\frac{x^2}{2(1+x^2)} + \frac{1}{1+x^2}, & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ )

**Ejercicio 2.** Hallar la solución de la E.D.: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}$ con $y(5) = 2$

(**Rta.:** $xy = \frac{y^2}{2} + 8$)

**Ejercicio 3.** Resolver para $\varphi(x)$ la ecuación $\int_0^1 \varphi(\alpha x)\, d\alpha = n\varphi(x)$

(Ayuda: con un cambio de variable adecuado transforme la ecuación en una E.D. lineal de primer orden.)

(**Rta.:** $\varphi(x) = Cx^{(\frac{1-n}{n})}$)

**Ejercicio 4.** Hallar la solución de la E.D.: $y' - 2xy = \cos x - 2x \operatorname{sen} x$ donde $y$ es acotada cuando $x \to \infty$.

(**Rta.:** $y = \operatorname{sen} x$)

**Ejercicio 5.** Hallar la solución de la E.D.: $2\sqrt{x}\, y' - y = -\operatorname{sen}\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}$ donde $y$ es acotada cuando $x \to \infty$.

(**Rta.:** $y = \cos\sqrt{x}$)

**Ejercicio 6.** Resolver la E.D.: $(x+2)^2 \frac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$.

(**Rta.:** $y(2+x)^4 = \frac{5}{3}(2+x)^3 + C$)

**Ejercicio 7.** Resolver la E.D.: $y - x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} y^2 e^y$.

(**Rta.:** $\frac{x}{y} - xy = C$)

## 1.7. Ecuaciones diferenciales de Bernoullí

Definición: Una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ ; $n \neq 0$ y $n \neq 1$, se le llama una ecuación diferencial de Bernoullí. (no es lineal)

Esta ecuación con la sustitución $z = y^{1-n}$ se transforma a una ecuación diferencial línea.

Teorema: Dada la ecuación $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ ; $n \neq 0$ y $n \neq 1$ entonces la solución de la ecuación diferencial de Bernoullí es:

$$y^{(1-n)}e^{(1-n)\int P(x)dx} = (1-n)\int Q(x)\, e^{(1-n)\int P(x)dx}dx + c$$

Demostración:

Sea $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ ; $n \neq 0$ y $n \neq 1$ y hagamos la sustitución $z = y^{1-n}$

$\Longrightarrow y = z^{\frac{1}{(1-n)}}$

Conjuntamente con la derivación con respecto a $x$

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \;\Longrightarrow\; \frac{dy}{dx} = y^n\,\frac{1}{(1-n)}\,\frac{dz}{dx}$$

$$y^n\,\frac{1}{(1-n)}\,\frac{dz}{dx} + P(x)z^{\frac{1}{(1-n)}} = Q(x)z^{\frac{n}{(1-n)}}$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\,P(x)z^{\frac{1}{(1-n)}}\frac{1}{y^n} = (1-n)\,Q(x)\,\frac{1}{y^n}\,z^{\frac{n}{(1-n)}}$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\,P(x)\frac{z^{\frac{1}{(1-n)}}}{z^{\frac{n}{(1-n)}}} = (1-n)\,Q(x)\,\frac{1}{z^{\frac{n}{(1-n)}}}z^{\frac{n}{(1-n)}}$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\,P(x)\,z = (1-n)\,Q(x)$$

Esta es una ecuación lineal con variable dependiente $z$ , con esto usamos la solución de las ecuaciones diferenciales lineales expuesta anteriormente

Tenemos que:

$$z\,e^{(1-n)\int P(x)dx} = (1-n)\int Q(x)\,e^{(1-n)\int P(x)dx}dx + c$$

Y como $z = y^{(1-n)}$ remplazamos

$$y^{(1-n)}\, e^{(1-n)\int P(x)dx} = (1-n)\int Q(x)\, e^{(1-n)\int P(x)dx} dx + c$$

Que es lo que deseamos demostrar.

**<u>Observación</u>**: para la ecuaciones de Bernoullí al igual que las lineales, existe relatividad con respecto a las variables $x$ e $y$, es decir puede ser Bernoullí respecto a $x$.

$$x^{(1-n)}\, e^{(1-n)\int P(y)dy} = (1-n)\int Q(y)\, e^{(1-n)\int P(y)dy} dy + c \qquad (*)$$

<u>Ejemplo (12)</u> Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy(1+xy^2)}$

Notemos que esta no es Bernoullí con respecto a $y$, sin embargo si lo es respecto a $x$

Ordenando $\frac{dx}{dy} = \frac{xy(1+xy^2)}{1} = xy + x^2y^3$

$$\frac{dx}{dy} - xy = x^2y^3$$

Observemos que $P(y) = -y$ ; $Q(y) = y^3$ ; $n = 2$ y remplazamos en (*)

$$x^{(1-2)} e^{(1-2)\int -ydy} = (1-2)\int y^3 e^{(1-2)\int -ydy}\, dy + c$$

$$x^{-1} e^{-\int -ydy} = -\int y^3 e^{-\int -ydy}\, dy + c$$

$$x^{-1} e^{\int ydy} = -\int y^3 e^{\int ydy}\, dy + c$$

$$x^{-1} e^{\frac{1}{2}y^2} = -\int y^3 e^{\frac{1}{2}y^2}\, dy + c$$

Integrando por parte la expresión derecha, tomando

$$u = y^2\,;\quad dv = ye^{\frac{y^2}{2}} \Longrightarrow du = 2y\,dy\;;\; v = \int ye^{\frac{y^2}{2}} dy = e^{\frac{y^2}{2}}$$

$$-\int y^3 e^{\frac{1}{2}y^2}\, dy = -\left[y^2 e^{\frac{y^2}{2}} - 2\int ye^{\frac{y^2}{2}} dy\right] = -y^2 e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}}$$

Finalmente tenemos

$x^{-1}e^{\frac{1}{2}y^2} = -y^2 e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}} + c$

$\frac{1}{x} = -y^2 + 2 + ce^{-\frac{y^2}{2}}$

Ejercicios propuestos (8): Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoullí

**Ejercicio 1.** $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}$ con $y(1) = 1$.
(**Rta.:** $y^3 x^{-\frac{3}{2}} = -3x^{\frac{1}{2}} + 4$)

**Ejercicio 2.** $y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$.
(**Rta.:** $x^3 = -y - 2 + Ce^y$)

**Ejercicio 3.** $tx^2\frac{dx}{dt} + x^3 = t\cos t$.
(**Rta.:** $x^3t^3 = 3(3(t^2-2)\cos t + t(t^2-6)\operatorname{sen} t) + C$)

**Ejercicio 4.** $y' = \frac{x}{x^2y+y^3}$.
(**Rta.:** $x^2 + y^2 + 1 = Ce^{y^2}$)

**Ejercicio 5.** $xy' + y = x^4y^3$.
(**Rta.:** $y^{-2} = -x^4 + cx^2$)

**Ejercicio 6.** $xy^2y' + y^3 = \frac{\cos x}{x}$.
(**Rta.:** $x^3y^3 = 3x\operatorname{sen} x + 3\cos x + C$)

**Ejercicio 7.** $x^2y' - y^3 + 2xy = 0$.
(**Rta.:** $y^{-2} = \frac{2}{5x} + Cx^4$)

**Ejercicio 8.** Hallar la solución particular de la E.D.

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = \sqrt{y}\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

tal que $y(1) = 1$
(**Rta.:** $y^3 = x$)

**Ejercicio 9.** Hallar la solución particular de la E.D.

$$(1 - 2xy^2)dy = y^3dx$$

tal que $y(0) = 1$
(**Rta.:** $xy^2 = \ln|y|$)

## 1.8. Ecuaciones de Ricatti

Definición: Una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ se llama ecuación de Ricatti. En la solución de esta ecuación se supone una solución particular conocida $y_1$ y se hace la sustitución $y = y_1 + \frac{1}{v}$ la cual transforma la ecuación en una lineal respecto a $v$.

Demostración:

Sea $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ y $y_1$ una solución particular de esta ecuación, por tanto se tiene que $y_1$ la satisface, es decir:

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx} = P(x){y_1}^2 + Q(x)y_1 + R(x)$$

Derivamos $y = y_1 + \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y_1' - v^{-2}\frac{dv}{dx}$ remplazamos en la ecuación

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

$$\Rightarrow y_1' - v^{-2}\frac{dv}{dx} = P(x)\left(y_1 + \frac{1}{v}\right)^2 + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + R(x)$$

$$\Rightarrow y_1' - v^{-2}\frac{dv}{dx} = P(x)\left({y_1}^2 + 2\frac{y_1}{v} + \frac{1}{v^2}\right) + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + R(x)$$

$$\Rightarrow y_1' - v^{-2}\frac{dv}{dx} = P(x){y_1}^2 + 2P(x)\frac{y_1}{v} + P(x)\frac{1}{v^2} + Q(x)y_1 + Q(x)\frac{1}{v} + R(x)$$

$$\Rightarrow y_1' - v^{-2}\frac{dv}{dx} = \left[\overbrace{P(x){y_1}^2 + Q(x)y_1 + R(x)}^{y_1'}\right] + 2P(x)\frac{y_1}{v} + P(x)\frac{1}{v^2} + Q(x)\frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow y_1' - v^{-2}\frac{dv}{dx} = [y_1'] + 2P(x)\frac{y_1}{v} + P(x)\frac{1}{v^2} + Q(x)\frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow -v^{-2}\frac{dv}{dx} = 2P(x)\frac{y_1}{v} + P(x)\frac{1}{v^2} + +Q(x)\frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow -\frac{dv}{dx} = 2P(x)y_1v + P(x) + Q(x)v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} + [2P(x)y_1 + Q(x)]v = -P(x)$$

Cuya solución la podemos obtener de las formas lineales anteriores, es decir

$$ve^{\int(2P(x)y_1+Q(x))dx} = -\int P(x)\, e^{\int(2P(x)y_1+Q(x))dx}dx + c \qquad (**)$$

con $v = \frac{1}{y-y_1}$

Ejemplo (13) Resuelva la siguiente ecuación diferencial de Ricatti

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} \qquad con \;\; y_1 = \frac{1}{x}$$

Es claro que $P(x) = 1$ ; $Q(x) = -\frac{1}{x}$ ; $R(x) = -\frac{1}{x^2}$, remplazamos en (**)

$$ve^{\int(2\frac{1}{x}-\frac{1}{x})dx} = -\int e^{\int(2\frac{1}{x}-\frac{1}{x})dx}\, dx + c$$

$$ve^{\int\frac{dx}{x}} = -\int e^{\int\frac{dx}{x}}\, dx + c$$

$$vx = -\int x\, dx + c$$

$$vx = -\tfrac{1}{2}x^2 + c \;\Rightarrow v = -\tfrac{1}{2}x + \frac{c}{x} \;\Rightarrow \frac{1}{y-\frac{1}{x}} = -\tfrac{1}{2}x + \frac{c}{x}$$

$$\frac{x}{xy-1} = \frac{c-x^2}{2x} \;\Rightarrow\; \frac{xy-1}{x} = \frac{2x}{c-x^2} \;\Rightarrow\; xy-1 = \frac{2x^2}{c-x^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{x^2+c}{x(c-x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{c-x^2}$$

## Ejercicios propuestos (9)

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Ricatti, utilizando la solución particular $y_1$ indicada.

1) $\frac{dy}{dx} = -y^2 + xy + 1$ ; $y_1 = x$ $\qquad R: \frac{1}{y-x} = e^{\frac{x^2}{2}}\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx + ce^{\frac{x^2}{2}}$

2) $\frac{dy}{dx} = e^{2x} + (1-2e^x)y + y^2$ ; $y_1 = e^x$ $\qquad R: y = \frac{1-e^x+c}{ce^{-x}-1}$

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$; $y_1 = \frac{2}{x}$ $\qquad R: y = \frac{2x^4+8c}{4xc-x^5}$

## 1.9. Ecuaciones de Lagrange

La ecuación de Lagrange tiene la forma $y = x\varphi(y') + \Psi(y')$

Haciendo $y' = p$, diferenciando y sustituyendo $dy$ por $p\,dx$, reducimos esta ecuación a otra que considerada en $x$ como función de $p$ es lineal. Resolviendo esta última $x = r(p,c)$ , obtenemos la solución general de la ecuación inicial en forma paramétrica:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(p,C) \\ y &= r(p,C)\varphi(p) + \Psi(p) \end{aligned}\right\} \text{($p$ es un parámetro)}$$

Además la ecuación de Lagrange puede tener soluciones singulares de la forma $y = \varphi(C)x + \Psi(C)$ donde $C$ es una raíz de la ecuación $C = \varphi(C)$.

Ejemplo (14): Resolver: $y = 2xy' + \ln y'$

Solución:

Sea $y' = p$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = p \implies dy = p\,dx$$

Luego derivamos respecto a $x$ y agrupando términos

$$\frac{dy}{dx} = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + \frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dx}$$

$$dy = 2p\,dx + 2xdp + \frac{dp}{p}$$

$$p\,dx = 2p\,dx + 2xdp + \frac{dp}{p}$$

$$-p\,dx = +2xdp + \frac{dp}{p}$$

$$dx = -\frac{2}{p}xdp - \frac{dp}{p^2}$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - \frac{1}{p^2}$$

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dp}} = -\frac{2}{\mathrm{p}}\mathrm{x} - \frac{1}{\mathrm{p}^2}$$

es lineal

$$\Rightarrow \quad x e^{\int \frac{2}{p} dp} = -\int \frac{1}{p^2} e^{\int \frac{2}{p} dp} dp + c$$

$$\Rightarrow \quad xp^2 = -\int \frac{1}{p^2} p^2 + c$$

$$\Rightarrow \quad xp^2 = -p + c$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{p} + \frac{c}{p^2}$$

$remplazando\ en\ la\ ecución\ y = 2xy' + \ln y \quad el\ valor\ de\ x\ y\ el\ parámetro\ p$

$$\Rightarrow y = \ln p + \frac{2c}{p} - 2$$

Entonces la solución e:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{c}{p^2} - \frac{1}{p} \\ y &= \ln p + \frac{2c}{p} - 2 \end{aligned}\right\}$$

## 1.10. Ecuaciones de Clairaut

El método de resolución es el mismo que para las ecuaciones de Lagrange. La solución general de la ecuación de Clairaut tiene la forma:

$$y = Cx + \Psi(C)$$

Esta puede tener también solución singular, que se obtiene eliminando $p$ entre las ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} y = xp + \Psi(p) \\ x + \psi'(p) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Ejemplo (15): Resolver: $y = xy' + \frac{a}{2y'} \qquad (a\ constante)$

Solución: Haciendo $y' = p$ entonces

$$y = xp + \frac{a}{2p} \quad derivando$$

$$y' = p + xp' - \frac{a}{2p^2}$$

$$p = p + xp' - \frac{a}{2p^2}p'$$

$$0 = xp' - \frac{a}{2p^2}p'$$

$$0 = p'\left(x - \frac{a}{2p^2}\right)$$

$$\Longrightarrow p' = 0 \;\; ; \; x - \frac{a}{2p^2} = 0$$

Para $\;p' = 0$

$dp = 0 \;\Longrightarrow p = C \quad \Longrightarrow \quad y = Cx + \dfrac{a}{2C}$

$\Longrightarrow \quad y = Cx + \dfrac{a}{2C} \quad \textit{es la solución general en término del parámetro } C$

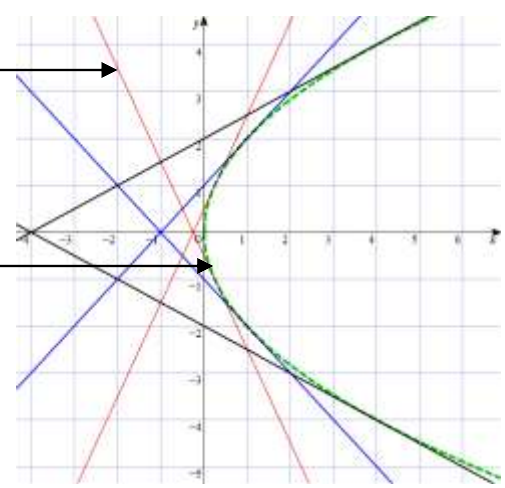
Para $\;x - \frac{a}{2p^2} = 0$

$\Longrightarrow \;\; x = \frac{a}{2p^2}$ eliminando el parámetro $p$ entre las dos ecuaciones

$$\begin{cases} y = xp + \dfrac{a}{2p} \\ \\ \quad x = \dfrac{a}{2p^2} \end{cases} \Longrightarrow \;\; y^2 = 2ax$$

Esta es también una solución de la ecuación considerada singular. Geométricamente la parábola $y^2 = 2ax$ obtenida es la envolvente del haz de rectas

$y = Cx + \frac{a}{2C}$



Familia de curvas (sol. General)

Envolvente (sol. Singular)

Ejercicios propuestos (10): Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $2y = xy' + y' \ln y'$

R: $\begin{cases} x = 2Cp - \ln p - 2 \\ y = Cp^2 - p \end{cases}$

2) $y = 2xy' + \ln y'$

R: $\begin{cases} x = \frac{2C}{p^2} - \frac{1}{p} \\ y = \frac{2C}{p} + \ln p - 2 \end{cases}$

3) $y = x(1 + y') + (y')^2$

R: $\begin{cases} x = 2(1-p) + Ce^{-p} \\ y = [2(1-p) + Ce^{-p}](1+p) + p^2 \end{cases}$

4) $y = 2xy' + \sin y'$

R: $\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{\cos p}{p^2} - \frac{\sin p}{p} \\ y = \frac{2C}{p} - \frac{2\cos p}{p} - \sin p \end{cases}$

5) $y = x(y')^2 - \frac{1}{y'}$

R: $\begin{cases} x = \frac{Cp^2+2p-1}{2p^2(p-1)^2} \\ y = \frac{Cp^2+2p-1}{2(p-1)^2} - \frac{1}{p} \end{cases}$

## 1.11. Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales de primer orden.

### 1.11.1. Trayectorias Isogonales y ortogonales:

*a).* Dada una familia de curvas $f(x, y, c) = 0$, existe otra familia $g(x, y, c) = 0$ que corta a la familia $f$ bajo un mismo ángulo $\gamma$. A la familia $g$ se le llama la familia de trayectorias isogonales de $f$ y $g(x, y, c) = 0$ es solución de la E.D.:

$$\tan\gamma = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{f'(x)-g'(x)}{1+f'(x)g'(x)} = \frac{f'(x)-y'}{1+f'(x)y'}$$

*b).* En particular, cuando $\gamma = 90^0$, a $g$ se le llama la familia de trayectorias ortogonales de $f$ y en este caso $g$ es solución de la E.D.:

$$\tan\alpha\tan\beta = f'(x)g'(x) = -1 = f'(x)y'$$

**Ejemplo 1.** Hallar las trayectorias isogonales a $45^o$ de la familia $y(x+c) = 1$.

Solución:

$$\tan 45^0 = \frac{f'(x)-y'}{1+f'(x)y'} = 1$$

por derivación implícita:

$$\frac{d}{dx}\left(y(x+c)\right) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$y + (x+c)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+c}$$

En la E.D.:

$$1 = \frac{-\frac{y}{x+c}-y'}{1+\left(-\frac{y}{x+c}\right)y'} = \frac{\frac{-y}{\frac{1}{y}}-y'}{1+\left(-\frac{y}{\frac{1}{y}}\right)y'} = \frac{-y^2-y'}{1-y^2y'}$$

$$1 - y^2y' = -y^2 - y' \Rightarrow y'(y^2 - 1) = 1 + y^2$$

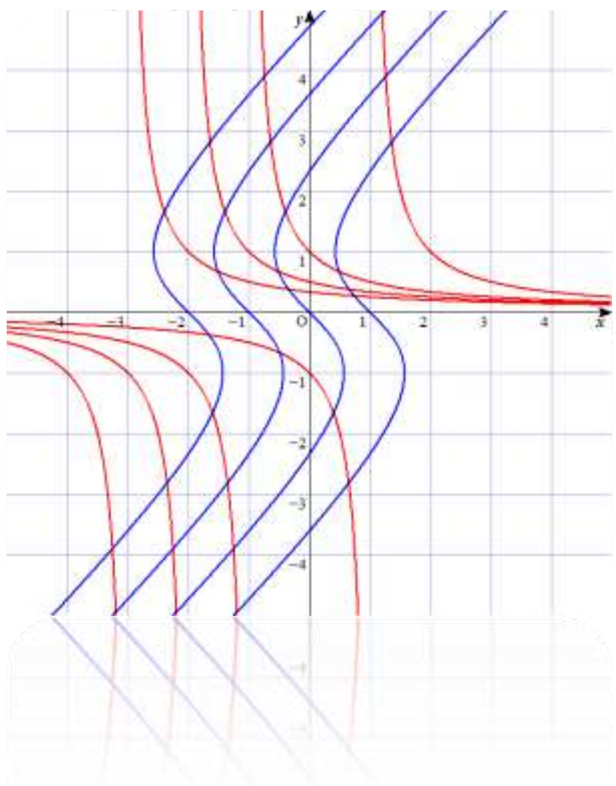
$$y' = \frac{y^2+1}{y^2-1} \Rightarrow \frac{y^2-1}{y^2+1}\,dy = dx$$

$$\left(1 - \frac{2}{1+y^2}\right) dy = dx$$

$$y - 2\tan^{-1} y = x + K$$

$$g(x, y, K) = 0 = y - 2\tan^{-1} y - x - K$$

Gráficamente:



## Ejercicios propuestos (11)

**Ejercicio 1.** Hallar las trayectorias isogonales a $45^o$ de la familia $y = ce^{ax}$, donde $c$ y $a$ son constantes.
(**Rta.:** $y + \frac{2}{a} \ln |ay - 1| = x + c$)

**Ejercicio 2.** Hallar las trayectorias ortogonales de la familia $y^2 = cx^3$.
(**Rta.:** $2x^2 + 3y^2 = C_2$)

**Ejercicio 3.** Hallar las trayectorias ortogonales de la familiade hiperbolas equiláteras $xy = c$.
(**Rta.:** $x^2 - y^2 = C$)

**Ejercicio 4.** Determinar la curva que pasa por $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ y corta a cada miembro de la familia $x^2 + y^2 = c^2$ formando un ángulo de $60^o$.
(**Rta.:** $\sqrt{3} \tan^{-1} \frac{x}{y} = \pm\frac{1}{2} \ln |x^2 + y^2| + \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$)

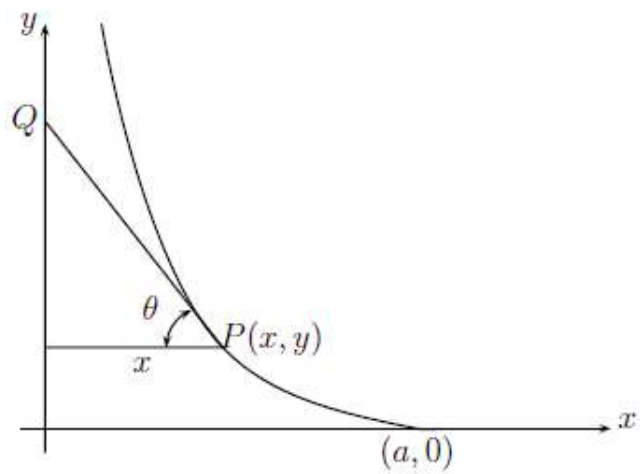
**Ejercicio 5.** Hallar la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = C_1x^2$.
(**Rta.:** $\frac{x^2}{2} + y^2 = C$)

**Ejercicio 6.** Hallar la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = C_1e^{-x}$.
(**Rta.:** $\frac{y^2}{2} = x + C$)

**Ejercicio 7.** Encuentre la curva que pertenece a la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x + y = C_1e^y$ que pasa por $(0, 5)$.
(**Rta.:** $y = 2 - x + 3e^{-x}$)

### 1.11.2. Problemas de Persecución

**Ejemplo 2.** Un esquiador acuático $P$ localizado en el punto $(a, 0)$ es remolcado por un bote de motor $Q$ localizado en el orígen y viaja hacia arriba a lo largo del eje $Y$. Hallar la trayectoria del esquiador si este se dirije en todo momento hacia el bote.




**Solución:** del concepto geométrico de derivada se tiene que:

$$y' = \tan\theta = -\sqrt{\sec^2\theta - 1},$$

pero de la figura 3.2 se tiene que

$$\sec\theta = -\frac{a}{x}$$

por lo tanto,

$$y' = -\sqrt{\sec^2 - 1} = -\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}, \quad \text{donde } x > 0,$$

separando variables:

$$dy = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}dx,$$

por medio de la sustitución trigonométrica $x = \operatorname{sen}\alpha$ en el lado derecho de la E.D., se llega a que:

$$y = a\ln\left[\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right] - \sqrt{a^2 - x^2} + C;$$

como el esquiador arranca desde el punto $(a, 0)$, entonces las condiciones iniciales son $x = a$, $y = 0$, sustituyendo en la solución general, se obtiene que $C = 0$.
Luego la solución particular es:

$$y = a \ln \left[ \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right] - \sqrt{a^2 - x^2}$$

## Ejercicios propuestos (12)

**Ejercicio 1.** Suponga que un halcón $P$ situado en $(a, 0)$ descubre una paloma $Q$ en el orígen, la cual vuela a lo largo del eje $Y$ a una velocidad $v$; el halcón emprende vuelo inmediatamente hacia la paloma con velocidad $w$. ¿Cual es el camino seguido por el halcón en su vuelo persecutorio?
(**Rta.:** $y = \frac{a}{2} \left[ \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{v}{w}}}{1+\frac{v}{w}} - \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{v}{w}}}{1-\frac{v}{w}} + c \right]$, donde $c = \frac{avw}{w^2-v^2}$)

**Ejercicio 2.** Un destructor esta en medio de una niebla muy densa que se levanta por un momento y deja ver un submarino enemigo en la superficie a cuatro kilómetros de distancia. Suponga:
i) que el submarino se sumerge inmediatamente y avanza a toda máquina en una en una dirección desconocida.
ii) que el destructor viaja tres kilómetros en línea recta hacia el submarino.
Que trayectoria debería seguir el destructor para estar seguro que pasará directamente sobre el submarino, si su velocidad $v$ es tres veces la del submarino?
(**Rta.:** $r = e^{\frac{\theta}{\sqrt{8}}}$)

### 1.11.3. Aplicaciones a la Geometría Analítica

**Ejemplo 3.** Hallar la ecuación de todas las curvas que tienen la propiedad de que el punto de tangencia es punto medio del segmento tangente entre los ejes coordenados.

Solución:

$\tan\alpha = f'(x) = -\frac{2y}{2x}$

$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|$

$\ln|y| = -\ln\left|\frac{c}{x}\right| \Rightarrow y = \frac{c}{x} \Rightarrow xy = c$

## Ejercicios propuestos (13)

**Ejercicio 1.** Empleando coordenadas rectangulares hallar la forma del espejo curvado tal que la luz de una fuente situada en el origen se refleje en él como un haz de rayos paralelos al eje $X$.
(**Rta.:** $y^2 = 2cx + c^2$)

**Ejercicio 2.** Una curva pasa por el origen en el plano $XY$, al primer cuadrante. El área bajo la curva de $(0, 0)$ a $(x, y)$ es un tercio del área del rectángulo que tiene esos puntos como vértices opuestos. Encuentre la ecuación de la curva.
(**Rta.:** $y = cx^2$)

**Ejercicio 3.** Encontrar las curvas para las cuales la tangente en un punto $P(x, y)$ tiene interceptos sobre los ejes $X$ y $Y$ cuya suma es $2(x + y)$
(**Rta.:** $xy = c$)

**Ejercicio 4.** Hallar la ecuación de todas las curvas que tienen la propiedad de que la distancia de cualquier punto al origen, es igual a la longitud del segmento de normal entre el punto y el intercepto con el eje $X$.
(**Rta.:** $y^2 = \pm x^2 + c$)

**Ejercicio 5.** Hallar la ecuación de todas las curvas del plano $XY$ que tienen la propiedad de que el triángulo formado por la tangente a la curva, el eje $X$ y la recta vertical que pasa por el punto de tangencia siempre tiene un área igual a la suma de los cuadrados de las coordenadas del punto de tangencia.
(**Rta.:** $\ln|y| = \frac{2}{\sqrt{15}}\tan^{-1}(\frac{4y+x}{\sqrt{15}x})$)

**Ejercicio 6.** Hallar la ecuación de todas las curvas del plano $XY$ que tienen la propiedad de que la porción de la tangente entre $(x, y)$ y el eje $X$ queda partida por la mitad por el eje $Y$.
(**Rta.:** $y^2 = Cx$)

**Ejercicio 7.** Hallar la ecuación de todas las curvas del plano $XY$ que tienen la propiedad de que la longitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente es igual a la abscisa del punto de contacto.
(**Rta.:** $x^2 + y^2 = Cx$)

### 1.11.4. Ley de enfriamiento de Newton

Si se tiene un cuerpo a una temperatura $T$, sumergido en un medio de tamaño infinito de temperatura $T_m$ ($T_m$ no varía apreciablemente con el tiempo). El enfriamiento de este cuerpo se comporta de acuerdo a la siguiente E.D.: $\frac{d\theta}{dt} = -k\theta$ donde $\theta = T - T_m$.

**Ejercicio** Un cuerpo se calienta a $110^0\,C$ y se expone al aire libre a una temperatura de $10^0\,C$. Si al cabo de una hora su temperatura es de $60^0\,C$. ¿Cuanto tiempo adicional debe transcurrir para que se enfrie a $30^0\,C$?

### 1.11.5. Ley de Absorción de Lamber

Esta ley dice que la tasa de absorción de luz con respecto a una profundidad $x$ de un material translúcido es proporcional a la intensidad de la luz a una profundidad $x$; es decir, si $I$ es la intensidad de la luz a una profundidad $x$, entonces $\frac{dI}{dx} = -kI$.

**Ejemplo 4.** En agua limpia la intensidad $I$ a 3 pies bajo la superficie es de un 25 % de la intensidad $I_0$ en la superficie. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie?

Solución:

$$x = 0 \Rightarrow I = I_0$$

$$\frac{dI}{dx} = -kI \quad \Rightarrow \quad I = Ce^{-kx}$$

Cuando $x = 0$, $I = I_0 = C$

Luego

$$I = I_0\, e^{-kx}$$

Cuando

$$x = 3 \Rightarrow I = 0{,}25\, I_0$$

luego,

$$0{,}25\, I_0 = I_0\, e^{-3k}$$

$$\Rightarrow e^{-k} = (0{,}25)^{\frac{1}{3}}$$

$$I = I_0(e^{-k})^x = I_0((0{,}25)^{\frac{1}{3}})^x = I_0(0{,}25)^{\frac{x}{3}}$$

para

$$x = 15 \Rightarrow I = I_0(0{,}25)^{\frac{15}{3}}$$

por tanto

$$I = I_0(0{,}25)^5$$

**Ejercicio** Si $I$ a una profundidad de 30 pies es $\frac{4}{9}$ de la intensidad en la superficie; encontrar la intensidad a 60 pies y a 120 pies.

## Ejercicios misceláneos

1) Un objeto de masa de 100g se lanza verticalmente hacia arriba desde un punto que se encuentra 60 cm. arriba de la superficie terrestre con una velocidad inicial de 150m/s. El objeto asciende brevemente y después cae verticalmente hacia la Tierra, durante todo el tiempo actúa sobre ella la resistencia del aire que es numéricamente igual a 200v (en dinas). Donde v es la velocidad en m/s.
   a. Calcule la velocidad 0.1 segundo después, de que el objeto se lanza.
   b. Calcule la velocidad 0.1 segundo después de que el objeto se detiene en su ascenso y empieza su caída.
      i. R: $v(t) = -4.9 + 154.9e^{-2t}$ y $v(0.1) = 121.92\frac{m}{seg}$
      ii. R: $t_s = \frac{\ln\left(\frac{4.9}{154.9}\right)}{-2} \approx 1.73\ seg$ ; $v(1.73 + 0.1) \approx -0.91\frac{m}{seg}$

2) El peso combinado de un paracaidista y su paracaídas es W. El paracaidista cae desde el reposo, verticalmente hacia abajo. Asumiendo que el paracaídas está abierto cuando el salto ocurre y que sobre él actúa una fuerza debida a la resistencia del aire, la cual es proporcional a la velocidad en cualquier instante durante la caída, encuentre la velocidad y posición del paracaidista en función del tiempo. ¿Cuál es la velocidad máxima que puede alcanzar el paracaidista?
      i. R: $v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left[1 - e^{-\alpha t/m}\right]$ y $x(t) = \frac{mg}{\alpha}\left[t + \frac{m}{\alpha}\ e^{-\alpha t/m} - \frac{m}{\alpha}\right]$
      ii. R: velocidad máxima o velocidad limite $\lim_{t\to\infty} v(t) = v_l = \frac{W}{\alpha}$

3) *La tasa de crecimiento de una población es proporcional, en el tiempo, a la cantidad de habitantes que está presente*.
   a. La población de una pequeña ciudad crece en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes presente en dicho instante. Si la población inicial es de 500 habitantes y si ésta aumenta en un 15% en 10 años, determine:
      i. La población dentro de 30 años R: 760 habitantes
      ii. El intervalo de tiempo que debe transcurrir para que la población aumente en un 60%.
      R: $\approx 34$ *años*

4) En cualquier momento dado, la cantidad de bacterias en un cultivo crece a una razón proporcional a las bacterias presentes. Al cabo de 3 horas se observa que hay 400 individuos. Si pasadas 10 horas, hay 2000 especímenes, ¿cuál era la cantidad inicial de bacterias? R:$\approx$ 201 especímenes

5) Un tanque contiene inicialmente 100 galones de una solución salina que contiene1libra de sal. Otra solución salina que contiene 1 libra de sal por galón, se agrega al tanque a razón de 3 gal/min. Si la mezcla sale a la misma tasa, hallar: (a) la cantidad de sal en el tanque como función del tiempo, (b) el momento en el cual la mezcla que está en el tanque contiene 2 libras de sal.
   R.1 (a) $Q(t) = 100 - 99e^{-\frac{3t}{100}}$;

   R.2 (b) La mezcla que está en el tanque tendrá 2 lb de sal en aproximadamente 0.34 min

6) Un tanque contiene inicialmente 10 galones de agua pura. Una solución de agua salada que contiene ½ libra de sal por galón, se vierte en el tanque a una tasa de 2 gal/min. Si la solución mezclada sale a la misma tasa, hallar la cantidad y la concentración de sal que hay en el tanque en cualquier instante.

R.3 $Q(t) = 5\left[1 - e^{-\frac{t}{5}}\right]$ Cantidad de sal en función del tiempo;

R.4 $C(t) = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-\frac{t}{5}}\right]$ Concentración de sal

7) Un depósito cilíndrico con capacidad para 200 galones, contiene 100 galones con 100 libras de sal disuelta. Hacia el depósito fluye agua salada que contiene 2 libras de sal por galón a razón de 4 gal/min y la mezcla fluye hacia afuera a razón de 3 gal/min. Determine la cantidad de sal que contiene el depósito cuando se llene y su concentración en ese mismo instante.

R.5 Cuando el depósito está lleno, contiene 387.5 lb de sal y una concentración aproximada de 1.94 lb de sal por galón.

(**Nota:** $V(t) = 200 \iff t = 100\ y\ Q(t) = 2(100 + t) - (100)^4(100 + t)^{-3}, 0 \le t \le 100$)

8) Un depósito de tiene 40 galones de agua pura. Una solución de agua azucarada con 1 libra de azúcar por galón entra a 2 gal/min y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa. (a) ¿Cuánta azúcar hay en el tanque en cualquier tiempo? (b) ¿Cuándo el agua que sale tendrá ½ libra de azúcar por galón?

R.6 (a) Cantidad de azúcar en función del tiempo: $Q(t) = 40\left[1 - e^{-\frac{t}{20}}\right]$

R.7 (b) El agua de salida tendrá la concentración de azúcar de ½ libra por galón, aproximadamente en 13.86 min.

9) La temperatura máxima que puede leerse en cierto termómetro es de 110 ºF. Cuando el termómetro marca 36 ºF, se coloca en un horno. Se observa que, después de 1 y 2 minutos, el termómetro marca 60 ºF y 82 ºF, respectivamente. ¿Cuál es la temperatura del horno?

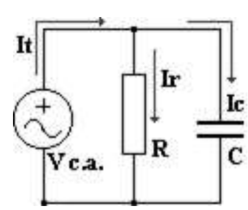
R.8 La temperatura del horno (temperatura del medio ambiente) es de 324 ºF.

R.9 $T(t) = 324 - 288e^{-0.087t}$

10) Un capacitor de $5 \times 10^{-3}$ faradios está en serie con una resistencia de 25 ohmios y una fem de $50\cos(6t)$ **voltios**. El interruptor se cierra en t = 0. Asumiendo que la carga inicial en el capacitor es cero, determine la carga y la corriente en cualquier tiempo.

R.10 $Q(t) = \frac{1}{25}[4\cos(6t) + 3sen(6t) - 4e^{-8t}]$

R.11 $I(t) = \frac{2}{25}[-12sen(6t) + 9\cos(6t) + 16e^{-8t}]$




11) Un resistor de 20 Ω está conectado en serie con un condensador de 0.01 faradios y una fem dada por $E(t) = 40e^{-3t} + 20e^{-6t}$ voltios. Si $Q(0) = 0$. Determine la carga máxima en el condensador.

i. R: $Q\left(\frac{\ln 2}{3}\right) = \frac{1}{4}\ culombios.$

12) Una tensión $E(t) = \begin{cases} 120\ si & 0 \leq t \leq 20 \\ 0\ \ si & t > 20 \end{cases}$ se aplica a un circuito RL, en el que la inductancia es de 20 henrios y al resistencia es de 2 ohmios. Determine la corriente en cualquier instante sabiendo que la corriente inicial es cero.

   i. R: $I(t) = 60[1 - e^{-t/10}],\ si \quad 0 \leq t \leq 20 \quad I(t) = 0,\ si\, t > 20$

13) Un capacitor de $5 \times 10^{-3}$ faradios está en serie con una resistencia de 25 ohmios y una fen de 50 voltios. El interruptor se cierra en $t = 0$. Asumiendo que la carga inicial en el capacitor es cero, determine:

   i. La carga y la corriente en cualquier instante $t$ R:$Q(t) = \frac{1}{4}[1 - e^{-8t}]$ y $I(t) = 2e^{-8t}$
   ii. La carga transitoria y estacionaria R: $\frac{1}{4}e^{-8t}$ $y$ $\lim_{t\to\infty} Q(t) = \frac{1}{4}$

# BIBLIOGRAFÍA

1. Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones con modelado. **(Texto recomendado)**
   - Dennis G. Zill, Editorial: Thomson
2. Ecuaciones Diferenciales aplicadas.
   - Murray R. Spiegel, Editorial: Prentice / Hall Internacional (P.H.I)
3. Ecuaciones Diferenciales Modernas.
   - Richard Bronson, Editorial: McGraw – Hill
4. Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
   - A. Kiseliov
   - M. Krasnov
   - G. Makarenko, Editorial: Mir (Moscú)