

23. (*Zoología*) El peso promedio W de la cornamenta de un ciervo está relacionada con la edad del ciervo aproximadamente por la ecuación $W = mA + c$. Para ciertas especies se ha encontrado que cuando $A = 30$ meses, $W = 0.15$ kilogramos; mientras que cuando $A = 54$ meses, $W = 0.36$ kilogramos; Encuentre m y c y calcule la edad en la cual W alcanza 0.5 kilogramos.
24. (*Agricultura*) En los últimos 40 años el rendimiento promedio y (en bushels por acre) de maíz en Estados Unidos se ha incrementado con el tiempo t aproximadamente mediante la ecuación $y = mt + c$. En 1950 el rendimiento promedio era de 38 bushels por acre, mientras que en 1965 fue de 73. Calcule m y c . (Tome $t = 0$ en 1950.) Estime cuál será el rendimiento promedio en 1990 suponiendo que la misma ecuación sigue siendo válida.
25. (*Planeación dietética*) En un hospital un paciente que está a dieta de líquidos tiene que escoger jugo de ciruela o jugo de naranja para satisfacer su requerimiento de tiamina que es de 1 miligramo diario. Una onza de jugo de ciruela contiene 0.05 miligramos de tiamina y 1 onza de jugo de naranja contiene 0.08 miligramos de tiamina. Si consume x onzas de jugo de ciruela y y onzas de jugo de naranja diariamente. ¿Cuál es la relación entre x y y que satisface exactamente el requerimiento de tiamina?
26. (*Planeación dietética*) Un individuo que está bajo una dieta estricta planea desayunar cereal, leche y un huevo cocido. Después del huevo, su dieta le permite 300 calorías para esa comida. Una onza de leche contiene 20 calorías y 1 onza (alrededor de una taza llena) de cereal (más azúcar) contiene 160 calorías. ¿Cuál es la relación entre el número de onzas de leche y el de cereal que puede consumir?

■ 4-4 SISTEMAS DE ECUACIONES

Una gran cantidad de problemas en negocios y economía desembocan en los denominados *sistemas de ecuaciones lineales*. Por ejemplo, consideremos la siguiente situación.

El propietario de una tienda de televisores desea expandir su negocio comprando y poniendo a la venta dos nuevos modelos de televisores que acaban de salir al mercado. Cada televisor del primer tipo cuesta \$300 y cada televisor del segundo tipo \$400. Cada televisor del primer tipo ocupa un espacio de 4 pies cuadrados, mientras que cada uno del segundo tipo ocupa 5 pies cuadrados. Si el propietario sólo tiene disponibles \$2000 para su expansión y 26 pies cuadrados de espacio, ¿cuántos modelos de cada tipo deberá comprar y poner a la venta haciendo uso completo del capital disponible y del espacio?

Supóngase que el propietario compra x televisores del primer modelo y y del segundo. Entonces, le cuesta $300x$ comprar el primer modelo y $400y$ comprar el segundo tipo de televisores. Dado que la cantidad total que ha de gastar es de \$2000, es necesario que

$$300x + 400y = 2000 \quad (\text{i})$$

Asimismo, la cantidad de espacio ocupada por los dos tipos de televisores es de $4x$ pies cuadrados y $5y$ pies cuadrados, respectivamente. El espacio total disponible para los dos modelos es de 26 pies cuadrados. Por tanto

$$4x + 5y = 26 \quad (\text{ii})$$

Para encontrar el número de televisores de cada modelo que deberá comprar y poner a la venta, debemos resolver las ecuaciones (i) y (ii) para x y y . Es decir, debemos encontrar los valores de x y y que satisfagan a la vez las ecuaciones (i) y (ii). Obsérvese que cada una de ellas es una ecuación lineal en x y y .

DEFINICIÓN Un sistema de ecuaciones lineales con dos variables x y y consta de dos ecuaciones del tipo

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad (2)$$

de donde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 y c_2 son seis constantes. La **solución** del sistema definido por las ecuaciones (1) y (2) es el conjunto de los valores de x y y que satisfacen ambas ecuaciones.

Las ecuaciones (i) y (ii) forman uno de tales sistemas de ecuaciones lineales. Si identificamos la ecuación (i) con la ecuación (1) y la ecuación (ii) con la ecuación (2), las seis constantes tienen los valores $a_1 = 300, b_1 = 400, c_1 = 2000, a_2 = 4, b_2 = 5$ y $c_2 = 26$.

Nuestro principal interés en esta sección es resolver sistemas de ecuaciones lineales en forma algebraica. La solución por el uso de métodos algebraicos requiere la eliminación de una de las variables, x o y , de las dos ecuaciones; esto nos permite determinar el valor de la otra variable. La eliminación de una de las variables puede lograrse por sustitución o sumando un múltiplo apropiado de una ecuación a la otra. Los dos procedimientos se ilustran en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Resuelva las dos ecuaciones que resultan del problema formulado al inicio de esta sección.

$$300x + 400y = 2000 \quad (i)$$

$$4x + 5y = 26 \quad (ii)$$

Solución (Método de sustitución) En este caso, despejamos x o y (lo que sea más sencillo) de una de las ecuaciones y sustituimos el valor de esta variable en la otra ecuación. De la ecuación (ii) (despejando x), tenemos

$$\begin{aligned} 4x &= 26 - 5y \\ x &= \frac{26 - 5y}{4} \end{aligned} \quad (iii)$$

Sustituimos este valor de x en la ecuación (i) y despejamos y .

$$\begin{aligned} 300\left(\frac{26 - 5y}{4}\right) + 400y &= 2000 \\ 75(26 - 5y) + 400y &= 2000 \\ 1950 - 375y + 400y &= 2000 \\ 25y &= 200 - 1950 = 50 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo $y = 2$ en la ecuación (iii) tenemos que

$$x = \frac{1}{4}(26 - 10) = 4$$

- ☛ 16. Resuelva el sistema siguiente usando la primer ecuación para sustituir y en la segunda:
 $3x - y = 7$; $2x + 4y = 14$

Respuesta Sustituya $y = 3x - 7$
 La solución es $x = 3$, $y = 2$

- ☛ 17. Resuelva el sistema siguiente eliminando x por medio del método de suma:
 $x + y = 3$; $2x + 3y = 11$

Respuesta Multiplique la primera ecuación por -2 , luego súmela a la segunda. La solución es $x = -2$, $y = 5$

En consecuencia, la solución del sistema de ecuaciones (i) y (ii) es $x = 4$ y $y = 2$. En otras palabras, el comerciante deberá comprar 4 televisores del primer tipo y 2 del segundo, si emplea todo el espacio disponible y utiliza todo su capital.
 ☛ 16

Solución alternativa (Método de eliminación)

$$300x + 400y = 2000 \tag{i}$$

$$4x + 5y = 26 \tag{ii}$$

De acuerdo con este método, hacemos que los coeficientes de x o y en las dos ecuaciones tengan exactamente la misma magnitud y signos opuestos; luego sumamos las dos ecuaciones para eliminar una de las variables. Obsérvese que si multiplicamos ambos lados de la ecuación (ii) por -80 , hacemos que el coeficiente de y tenga la misma magnitud que el de la ecuación (i), pero con el signo opuesto. La ecuación se transforma en

$$-320x - 400y = -2080 \tag{iv}$$

Recordemos que la ecuación (i) es

$$300x + 400y = 2000$$

Cuando sumamos estas dos ecuaciones; los términos en y se cancelan y obtenemos

$$(-320x - 400y) + (300x + 400y) = -2080 + 2000 \tag{v}$$

o bien

$$-20x = -80$$

$$x = 4$$

Sustituyendo $x = 4$ en una de las ecuaciones [usamos la ecuación (ii)], tenemos que

$$16 + 5y = 26$$

$$5y = 26 - 16 = 10$$

$$y = 2$$

Así que, la solución es $x = 4$ y $y = 2$, la misma que se obtuvo por el primer método.
 ☛ 17

Observación Las operaciones requeridas en estos dos métodos no alteran las soluciones. Por ejemplo, cualesquiera x y y que satisfagan la ecuación (ii) también satisfarán la ecuación (iv); cualesquiera x y y que satisfagan a la vez la ecuaciones (i) y (iv) también satisfarán la ecuación (v), etc. En consecuencia, los métodos producen valores de x y y que son soluciones de la pareja original de ecuaciones.

EJEMPLO 2 Resuelva el sistema siguiente:

$$\frac{x - y}{3} = \frac{y - 1}{4}$$

$$\frac{4x - 5y}{7} = x - 7$$

Solución La primera etapa consiste en eliminar las fracciones de las dos ecuaciones. Multiplicamos ambos lados de la primera ecuación por 12, el denominador común y simplificamos.

$$\begin{aligned}4(x - y) &= 3(y - 1) \\4x - 4y &= 3y - 3 \\4x - 7y &= -3\end{aligned}$$

Multiplicamos ambos lados de la segunda ecuación por 7 y simplificamos, obteniendo

$$\begin{aligned}4x - 5y &= 7(x - 7) = 7x - 49 \\-3x - 5y &= -49\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación completa por -1 , resulta

$$3x + 5y = 49$$

De manera que el sistema de ecuaciones es equivalente al sistema de ecuaciones lineales siguientes:

$$4x - 7y = -3 \quad (\text{i})$$

$$3x + 5y = 49 \quad (\text{ii})$$

Usamos el método de sustitución. Despejamos x en la ecuación (i).

$$4x = 7y - 3 \quad \text{o bien} \quad x = \frac{1}{4}(7y - 3) \quad (\text{iii})$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación (ii), obtenemos

$$\frac{3}{4}(7y - 3) + 5y = 49$$

Multiplicamos ambos lados por 4 y despejamos y .

$$\begin{aligned}3(7y - 3) + 20y &= 196 \\21y - 9 + 20y &= 196 \\41y &= 196 + 9 = 205 \\y &= \frac{205}{41} = 5\end{aligned}$$

Haciendo $y = 5$ en la ecuación (iii), resulta

$$x = \frac{1}{4}(35 - 3) = 8$$

En consecuencia la solución requerida es $x = 8$ y $y = 5$

Un sistema de ecuaciones lineales y su solución tienen una interpretación geométrica importante. Por ejemplo, consideremos el sistema siguiente.

$$x + y = 3 \quad (3)$$

$$3x - y = 1 \quad (4)$$

Usando alguno de los métodos de solución anteriores, fácilmente nos damos cuenta de que la solución es $x = 1$ y $y = 2$.

Cada una de las ecuaciones (3) y (4) es lineal en x y y , por lo que tiene como gráfica una línea recta en el plano xy . En el caso de la ecuación (3), determinamos el punto en que corta el eje x haciendo $y = 0$. Esto da $x = 3$, de modo que la línea pasa por el punto $(3, 0)$. De manera similar, haciendo $x = 0$, encontramos que $y = 3$, por lo que la línea corta al eje y en el punto $(0, 3)$. Estos dos puntos aparecen en la figura 23 y la gráfica de la ecuación (3) se obtiene uniendo con una línea recta los puntos.

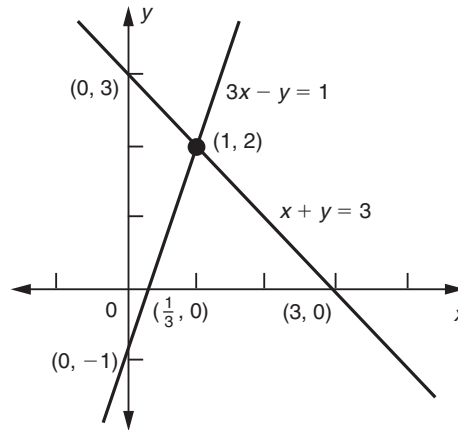


FIGURA 23

18. Dibuje las gráficas y encuentre el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones sean

$$3y - 2x = 6 \text{ y } 4y + 3x = 24$$

En forma análoga, encontramos los puntos $(0, -1)$ y $(\frac{1}{3}, 0)$ que pertenecen a la ecuación (4) y están sobre los ejes de coordenadas.

Cualquier pareja de valores x y y que satisfaga la ecuación (3) corresponde a un punto sobre la primera línea recta. Cualquier pareja de valores que satisfaga la ecuación (4) corresponde a un punto (x, y) en la segunda línea recta. En consecuencia, si x y y satisfacen *a la vez* las dos ecuaciones, el punto (x, y) debe estar situado en *ambas* líneas. En otras palabras, (x, y) debe ser el punto en que las líneas se intersectan. En la figura 23, advertimos que este punto es $(1, 2)$, de modo que la solución en este caso es $x = 1$ y $y = 2$, como ya se había establecido. 18

Ahora regresamos al sistema general de ecuaciones lineales.

$$a_1x + b_1y = c_1 \tag{1}$$

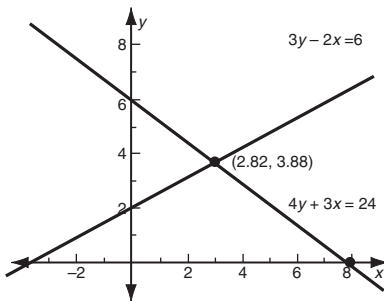
$$a_2x + b_2y = c_2 \tag{2}$$

Las gráficas de estas dos ecuaciones constan de dos líneas rectas en el plano xy , dado que cualquier ecuación lineal siempre representa una línea recta, como vimos en la sección 4-2. Cualquier pareja de valores x y y que satisfacen a la vez las ecuaciones (1) y (2) deben corresponder a un punto (x, y) que esté situado en ambas líneas.

Denotemos las rectas por L y M , respectivamente. Surgen entonces tres posibilidades.

1. Las líneas L y M se intersectan. Ya que el punto de intersección (x_0, y_0) , está situado en ambas, las coordenadas (x_0, y_0) satisfacen las ecuaciones de ambas

Respuesta $x = \frac{48}{17} \approx 2.82$
 $y = \frac{66}{17} \approx 3.88$



líneas, y de aquí, dan una solución al sistema dado. *Esta solución es única*, porque si las dos líneas se intersecan, lo hacen en un solo punto. (Véase la parte *a*) de la figura 24).

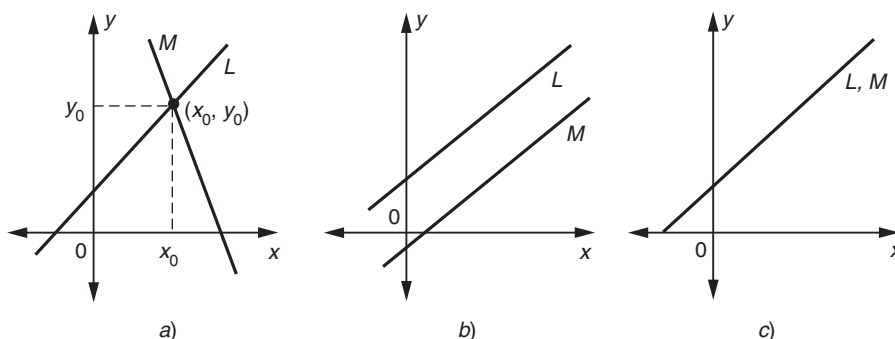


FIGURA 24

2. Las líneas L y M son paralelas. En este caso, las líneas no se cortan y no hay ningún punto sobre ambas. Por lo que no habrá valores de x y de y que satisfagan ambas ecuaciones. En otras palabras, en este caso las ecuaciones *no tienen solución*. (Véase la parte *b*) de la figura 24).
3. Las líneas L y M coinciden. En tal caso, cada punto sobre la línea L también está sobre la línea M . En esta situación, el sistema tiene *un número infinito de soluciones*; es decir, cada pareja ordenada (x, y) sobre $L (= M)$. (Véase la parte *c*) de la figura 24).

EJEMPLO 3 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}x + 2y &= 4 \\3x + 6y - 8 &= 0\end{aligned}$$

Solución Resolvamos la primera ecuación para x :

$$x = 4 - 2y$$

Luego, sustituyamos este valor de x en la segunda ecuación y simplifiquemos.

$$\begin{aligned}3(4 - 2y) + 6y - 8 &= 0 \\12 - 6y + 6y - 8 &= 0 \\4 &= 0\end{aligned}$$

Esto es imposible. Por tanto, las ecuaciones *no tienen solución*. Esto se ilustra gráficamente en la figura 25. En este caso las dos líneas rectas son paralelas y no se intersectan. Podemos ver esto de inmediato escribiendo las ecuaciones dadas en la forma pendiente-ordenada al origen.

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{2}x + 2 \\y &= -\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}\end{aligned}$$

☛ 19. ¿Cuántas soluciones tiene cada uno de los sistemas siguientes?

a) $x - 3y = 1, y = \frac{1}{3}x - 1$

b) $3y = 5x - 2$
 $x + y + 2 = 4(y - x + 1)$

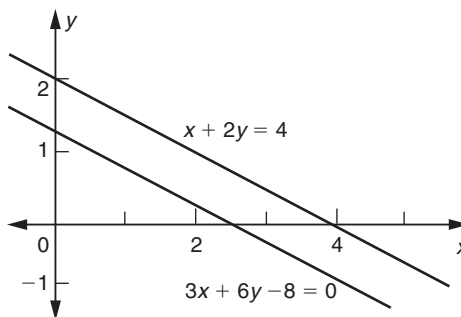


FIGURA 25

Las dos líneas tienen *la misma pendiente* ($-\frac{1}{2}$) pero distintas ordenadas al origen. En consecuencia, las dos líneas son paralelas, sin punto de intersección común.

EJEMPLO 4 Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$2x - 3y = 6 \quad (i)$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \quad (ii)$$

Solución Multiplicamos ambos lados de la segunda ecuación por -6 , y obtenemos

$$-2x + 3y = -6$$

Sumando esta ecuación con la primera, resulta

$$0 = 0$$

una ecuación que siempre es válida.

Escribiendo las dos ecuaciones en la forma pendiente-ordenada al origen, encontramos que se reducen a la ecuación:

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

Dado que las dos ecuaciones son idénticas, las dos líneas coinciden en este caso y las dos ecuaciones dadas son equivalentes. En realidad, la ecuación (ii) puede obtenerse de la ecuación (i) multiplicando la última por $\frac{1}{6}$. En este caso, tenemos un número infinito de soluciones: cualquier pareja de valores (x, y) que satisfaga la ecuación (i) dará una solución. Por ejemplo, una de tales parejas es $(6, 2)$, otra es $(0, -2)$. ☛ 19, 20

Respuesta a) Ninguna solución;
 b) un número infinito de soluciones.

☛ 20. ¿Para qué valores de c el sistema siguiente no tiene solución y para cuáles tiene un número infinito de soluciones?

$$2y + x + 6 = 0, y = c - \frac{1}{2}x$$

El método de sustitución a menudo es útil cuando tenemos un sistema de ecuaciones donde una ecuación es lineal y la otra no.

EJEMPLO 5 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente:

$$2x - y = 3$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

Respuesta Si $c \neq -3$, no tiene solución; si $c = -3$ tiene un número infinito de soluciones.

Solución En este sistema, una de las ecuaciones no es lineal. El método de solución consiste en la eliminación de una de las dos variables, x o y , de las dos ecuaciones. De la primera ecuación, tenemos

$$y = 2x - 3$$

Sustituimos este valor de y en la segunda ecuación y simplificamos.

$$\begin{aligned}x^2 + (2x - 3)^2 &= 5 \\x^2 + 4x^2 - 12x + 9 &= 5 \\5x^2 - 12x + 4 &= 0\end{aligned}$$

La factorización que resulta es

$$(x - 2)(5x - 2) = 0$$

Por tanto, tenemos las posibilidades

$$\begin{array}{ll}x - 2 = 0 & \text{o bien} \quad 5x - 2 = 0 \\x = 2 & \quad \quad \quad x = \frac{2}{5}\end{array}$$

Ahora, sustituimos estos valores en la ecuación que usamos al principio para sustituir por y , a saber* $y = 2x - 3$.

$$\begin{array}{l|l}y = 2x - 3 & y = 2x - 3 \\= 2(2) - 3 & = 2\left(\frac{2}{5}\right) - 3 \\= 1 & = -\frac{11}{5}\end{array}$$

☛ **21.** Utilice sustitución para resolver el sistema
 $x + 2y = 8$, $xy = 6$

En consecuencia, hay dos soluciones:

$$x = 2, y = 1 \quad \text{y} \quad x = \frac{2}{5}, y = -\frac{11}{5}. \quad \text{☛ 21}$$

Continuamos con la resolución de un problema aplicado que requiere ecuaciones simultáneas.

EJEMPLO 6 (Mezclas) La tienda El Sol, que se especializa en todo tipo de frituras, vende cacahuates a \$0.70 la libra y almendras a \$1.60 la libra. Al final de un mes, el propietario se entera de que los cacahuates no se venden bien y decide mezclar cacahuates con almendras para producir una mezcla de 45 libras, que venderá a \$1.00 la libra. ¿Cuántas libras de cacahuates y de almendras deberá mezclar para mantener los mismos ingresos?

Solución Sea x las libras de cacahuates que la mezcla contiene y y las libras correspondientes de almendras. Dado que el peso total de la mezcla es de 45 libras,

$$x + y = 45$$

El ingreso de x libras de cacahuates a \$0.70 la libra es de $0.7x$ dólares y el ingreso

Respuesta Dos soluciones:

$$x = 2, y = 3 \quad \text{y} \quad x = 6, y = 1$$

*Sería incorrecto sustituir los valores de x en la ecuación no lineal.

de y libras de almendras a \$1.60 la libra es de $1.6y$ dólares. El ingreso obtenido de la mezcla de 45 libras a \$1.00 por libra será de \$45. Dado que el ingreso de la mezcla deberá ser el mismo que el de las frutas separadas, tenemos la siguiente ecuación:

Ingreso de los cacahuates + Ingreso de las almendras = Ingreso de la mezcla

$$0.7x + 1.6y = 45$$

$$7x + 16y = 450$$

De esta manera, llegamos al sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$x + y = 45$$

$$7x + 16y = 450$$

De la primera ecuación, obtenemos que $x = 45 - y$. Luego sustituimos este valor de x en la ecuación de abajo y despejamos y .

$$7(45 - y) + 16y = 450$$

$$315 - 7y + 16y = 450$$

$$9y = 450 - 315 = 135$$

$$y = 15$$

☛ **22.** En el ejemplo 6, encuentre las cantidades que deben mezclarse para obtener 40 libras de una mezcla que cueste \$1.15 por libra

Por tanto, $x = 45 - y = 45 - 15 = 30$.

En consecuencia, 30 libras de cacahuates deberán mezclarse con 15 libras de almendras para formar la mezcla. ☛ **22**

El método de sustitución también puede utilizarse con frecuencia para resolver sistemas de ecuaciones con tres o más variables. Tales sistemas se estudian con detalle en la sección 9-3, pero mientras tanto hagamos un ejemplo.

EJEMPLO 7 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente para x , y y z .

$$x - y - z = 1$$

$$2x + y + 3z = 6$$

$$-4x - 2y + 3z = 6$$

Solución Resolvemos la primera ecuación para x en términos de y y z .

$$x = 1 + y + z$$

Enseguida sustituimos esta expresión para x en las dos ecuaciones restantes:

$$2(1 + y + z) + y + 3z = 6$$

$$-4(1 + y + z) - 2y + 3z = 6$$

Después de simplificar, obtenemos

$$3y + 5z = 4$$

$$-6y - z = 10$$

Respuesta $x = 20$, $y = 20$

Ahora tenemos que resolver dos ecuaciones en y y z . De la última de éstas tenemos que $z = -6y - 10$ y sustituyendo esto en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 3y + 5(-6y - 10) &= 4 \\ -27y &= 54 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Con la finalidad de completar la solución calculamos z y por último x .

$$\begin{aligned} z &= -6y - 10 = -6(-2) - 10 = 2 \\ x &= 1 + y + z = 1 + (-2) + 2 = 1 \end{aligned}$$

La solución es, por tanto, $x = 1, y = -2$ y $z = 2$.

Observación El método de suma también puede utilizarse para eliminar una de las variables, dejando un sistema de dos ecuaciones para las dos variables restantes.

EJERCICIOS 4-4

(1-24) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $x - y = 1$ y $2x + 3y + 8 = 0$

2. $2x - 3y = 1$ y $5x + 4y = 14$

3. $4x - y = -2$ y $3x + 4y = 27$

4. $3u + 2v = 9$ y $u + 3v = 10$

5. $3x + 5t = 12$ y $4x - 3t = -13$

6. $2p - q = 3$ y $p = 5 - 3q$

7. $7x - 8y = 4$ y $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3$

8. $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8$ y $\frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 11$

9. $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + 1 = \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 23$

10. $\frac{x-2y}{3} = 2 + \frac{2x+3y}{4}$ y

$$\frac{3x-2y}{2} = \frac{-y+5x+11}{4}$$

11. $5x - 7y + 2 = 0$ y $15x - 21y = 7$

12. $2u - 3v = 12$ y $-\frac{u}{3} + \frac{v}{2} = 4$

13. $x + 2y = 4$ y $3x + 6y = 12$

14. $2p + q = 3$ y $\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}q = 1$

15. $x + y = 3$

$y + z = 5$

$x + z = 4$

16. $x + 2y = 1$

$3y + 5z = 7$

$2x - y = 7$

17. $x + y + z = 6$

$2x - y + 3z = 9$

$-x + 2y + z = 6$

18. $x + 2y - z = -3$

$+ 3y + 4z = 5$

$2x - y + 3z = 9$

19. $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

$2x_1 - x_2 + 4x_3 = -4$

$x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$

20. $2u - 2v - 4w = 13$

$u + v + w = 6$

$-3u + 2v - w + 1 = 0$

21. $x + 3y + 4z = 1,$

$2x + 7y + z = -7$

$3x + 10y + 8z = -3$

22. $3x - 2y + 4z = 3$

$4x + 3y = 9$

$2x + 4y + z = 0$

23. $x + y = 3$ y $x^2 + y^2 = 29$

24. $2x + y = 5$ y $xy = 2$

25. (*Purificación de minerales*) Dos metales, X y Y , pueden extraerse de dos tipos de mineral, I y II. Cien libras de mineral I producen 3 onzas de X y 5 onzas de Y , por otro lado, 100 libras del mineral II producen 4 onzas de X y 2.5 onzas de Y . ¿Cuántas libras de los minerales I y II se requerirán para producir 72 onzas de X y 95 onzas de Y ?

26. (*Asignación de máquinas*) Una empresa fabrica dos productos, *A* y *B*. Cada producto tiene que ser procesado por dos máquinas, I y II. Cada unidad del tipo *A* requiere 1 hora de procesamiento de la máquina I y 1.5 horas por la máquina II y cada unidad del tipo *B* requiere de 3 horas en la máquina I y 2 horas en la máquina II. Si la máquina I está disponible 300 horas al mes y la máquina II 350 horas, ¿cuántas unidades de cada tipo podrá fabricar al mes si utiliza el tiempo total que dispone en las dos máquinas?
27. (*Decisiones de adquisición*) Una compañía trata de adquirir y almacenar dos tipos de artículos, *X* y *Y*. Cada artículo *X* cuesta \$3 y cada artículo *Y* cuesta \$2.50. Cada artículo *X* ocupa 2 pies cuadrados del espacio del piso y cada artículo *Y* ocupa un espacio de 1 pie cuadrado del piso. ¿Cuántas unidades de cada tipo pueden adquirirse y almacenarse si se dispone de \$400 para la adquisición y 240 pies cuadrados de espacio para almacenar estos artículos?
28. (*Mezcla de cafés*) Una tienda vende dos tipos de café, uno a \$2.00 el kilo y el otro a \$1.50 por la misma cantidad. El propietario de la tienda produce 50 kilos de un nuevo producto de café mezclando estos dos tipos y vendiéndolo a \$1.60 el kilo. ¿Cuántos kilos de café de cada tipo deberá mezclar para no alterar los ingresos?
29. (*Mezclas*) Un almacén de productos químicos tiene dos tipos de soluciones ácidas. Una de ellas contiene 25% de ácido y la otra contiene 15%. ¿Cuántos galones de cada tipo deberá mezclar para obtener 200 galones de una mezcla que contenga 18% de ácido?
30. (*Política tributaria de los ingresos*) La Secretaría de Hacienda fija cierta tasa de impuestos a los primeros \$5000 de ingresos gravables, y una tasa diferente sobre los ingresos gravables por encima de los \$5000 pero menores que \$10,000. El gobierno desea fijar las tasas de impuestos en tal forma que una persona con un ingreso gravable de \$7000 tenga que pagar \$950 en impuestos; mientras que otra con un ingreso gravable de \$9000 deba pagar \$1400 de impuestos. Encuentre las dos tasas.
31. (*Plantilla de personal*) Cierta compañía emplea 53 personas en dos sucursales. De esta gente, 21 son universitarios graduados. Si una tercera parte de las personas que laboran en la primera sucursal; y tres séptimos de los que se encuentran en la segunda sucursal, son universitarios graduados, ¿cuántos empleados tiene cada oficina?
32. (*Inversiones*) Una persona invierte un total de \$25,000 en tres diferentes inversiones al 8, 10 y 12%. Los intereses totales al cabo de un año fueron de \$2440 y los intereses por las inversiones al 8 y 12% fueron iguales. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?
33. (*Decisiones de producción*) Una planta de fertilizantes produce tres tipos de fertilizantes. El tipo *A* contiene 25% de potasio, 45% de nitrato y 30% de fosfato. El tipo *B* contiene 15% de potasio, 50% de nitrato y 35% de fosfato. El tipo *C* no contiene potasio, tiene 75% de nitrato y 25% de fosfato. La planta tiene suministros de 1.5 toneladas diarias de potasio, 5 toneladas al día de nitrato y de 3 toneladas al día de fosfato. ¿Qué cantidad de cada tipo de fertilizante deberá producir de modo que agote los suministros de ingredientes?
34. (*Ecología*) Un pez de la especie 1 consume por día 10 gramos de comida 1 y 5 gramos de comida 2. Un pez de la especie 2 consume por día 6 gramos de comida 1 y 4 gramos de comida 2. Si un medio ambiente dado tiene 2.2 kilogramos de comida 1 y 1.3 kilogramos de comida 2 disponible diariamente, ¿qué tamaño de población de las dos especies consumirá toda la comida disponible?
35. (*Ecología*) Tres especies distintas de pájaros comen pulgones de diferentes partes de los árboles. La especie 1 se alimenta la mitad del tiempo en los niveles altos y la otra mitad del tiempo en los niveles medios de los árboles. La especie 2 se alimenta la mitad en los niveles medios y la mitad en los niveles bajos. La especie 3 se alimenta sólo en los niveles bajos. Hay igual cantidad de pulgones aprovechables en los niveles medios y bajos, pero solamente la mitad correspondiente en los niveles superiores. ¿Qué tamaño relativo deben tener las poblaciones de las tres especies de manera que el suministro de pulgones se consuma por completo?

■ 4-5 APLICACIONES A ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA

En esta sección analizaremos algunas aplicaciones importantes de los sistemas de ecuaciones.

Análisis del punto de equilibrio

Si el costo total y_c de producción excede al de los ingresos y_i obtenidos por las ventas, entonces el negocio sufre una pérdida. Por otra parte, si los ingresos sobrepasan los costos, existe una utilidad. Si el costo de producción es igual a los ingresos obtenidos

por las ventas, no hay utilidad ni pérdida, de modo que el negocio está en el punto de equilibrio. El número de unidades producidas y vendidas en este caso se denomina **punto de equilibrio**.

EJEMPLO 1 (Análisis del punto de equilibrio) Para un fabricante de relojes, el costo de mano de obra y de los materiales por reloj es de \$15 y los costos fijos son de \$2000 al día. Si vende cada reloj a \$20, ¿cuántos relojes deberá producir y vender cada día con objeto de garantizar que el negocio se mantenga en el punto de equilibrio?

Solución Sea x el número de relojes producidos y vendidos cada día. El costo total de producir x relojes es

$$y_c = \text{Costos variables totales} + \text{Costos fijos} = 15x + 2000$$

Dado que cada reloj se vende a \$20, el ingreso y_l obtenido por vender x relojes es

$$y_l = 20x$$

El punto de equilibrio se obtiene cuando los ingresos son iguales a los costos, es decir,

$$20x = 15x + 2000$$

Obtenemos que $5x = 2000$ o $x = 400$.

De modo que deberá producir y vender al día 400 relojes para garantizar que no haya utilidades ni pérdidas. La figura 26 da una interpretación gráfica del punto de equilibrio. Cuando $x < 400$, el costo y_c excede a los ingresos y_l y hay pérdidas. Cuando $x > 400$, los ingresos y_l exceden los costos y_c de modo que se obtiene una utilidad.

Obsérvese que gráficamente, el punto de equilibrio corresponde a la intersección de las dos líneas rectas. Una de las líneas tiene la ecuación $y = 15x + 2000$, la que corresponde al costo de producción, y la otra tiene la ecuación $y = 20x$, la que corresponde a los ingresos. ■ 23

■ 23. Si los costos fijos son \$5000 semanales, los costos variables son \$21 por unidad y el precio de venta es \$46 por unidad, determine el punto de equilibrio

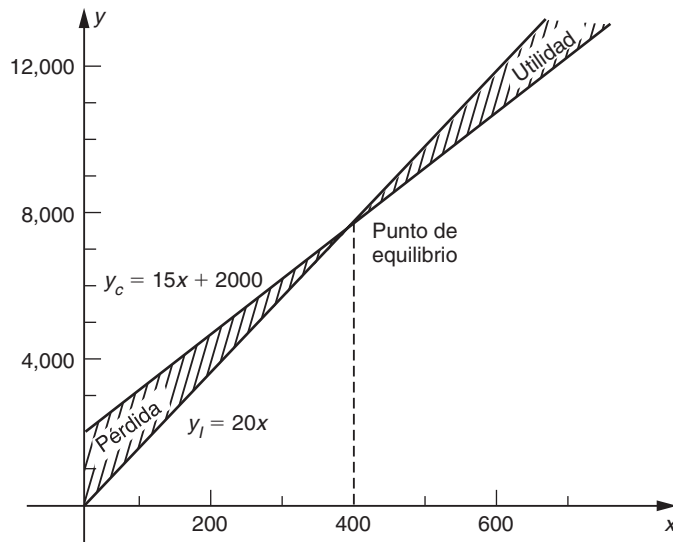


FIGURA 26

Respuesta 200 unidades semanales

EJEMPLO 2 (Análisis del punto de equilibrio) Supóngase que el costo total diario (en dólares) de producir x sillas está dado por

$$y_c = 2.5x + 300$$

- a) Si cada silla se vende a \$4, ¿cuál es el punto de equilibrio?
- b) Si el precio de venta se incrementa a \$5 por silla, ¿cuál es el nuevo punto de equilibrio?
- c) Si se sabe que al menos 150 sillas pueden venderse al día, ¿qué precio deberá fijarse con el objeto de garantizar que no haya pérdidas?

Solución El costo está dado por

$$y_c = 2.5x + 300$$

a) Si cada silla se vende a \$4, el ingreso (en dólares) obtenido por la venta de x sillas es

$$y_l = 4x$$

En el punto de equilibrio tenemos que $y_c = y_l$; es decir,

$$4x = 2.5x + 300$$

Así, $1.5x = 300$ o $x = 200$. El punto de equilibrio está en 200 sillas.

b) Si el precio de venta se incrementa a \$5 por silla, el ingreso en este caso es

$$y_l = 5x$$

En el punto de equilibrio $y_l = y_c$, de modo que

$$5x = 2.5x + 300$$

En consecuencia, $2.5x = 300$ o $x = 120$. Con el nuevo precio de venta, el punto de equilibrio es de 120 sillas.

c) Sea p dólares el precio fijado a cada silla. Entonces, los ingresos obtenidos por la venta de 150 sillas es $y_l = 150p$ y el costo de producir 150 sillas es $y_c = 2.5(150) + 300 = 675$. Con la finalidad de garantizar una situación de equilibrio debemos tener que $y_l = y_c$; es decir,

$$150p = 675 \quad \text{o} \quad p = 4.50$$

Por tanto, el precio fijado a cada silla debe ser \$4.50 con el propósito de garantizar que no haya ganancias ni pérdidas (en el peor de los casos), si al menos se venden al día 150 sillas.

Debe señalarse que cuando un economista utiliza una relación lineal para describir la dependencia entre dos variables, no se puede afirmar que la verdadera relación pueda ser lineal, sino más bien, que una relación lineal es una buena aproximación de los datos observados sobre el rango que nos interesa. Si los datos observados se encuentran sobre o cerca de una línea recta, podemos usar una

relación lineal como una representación aproximada de los datos. La manera en que esto puede realizarse se describirá en la sección 18-6.

Si bien, los datos observados pueden estar cerca de una línea recta, en muchos casos no es así y en tales situaciones no es razonable emplear una ecuación lineal para aproximar la relación entre las dos variables. Por ejemplo, el costo de fabricar x artículos de cierto tipo puede no estar dado por un modelo de costo lineal, $y_c = mx + b$, si no que puede depender de x en una forma más complicada. En principio, un análisis del punto de equilibrio puede quedar sin alteración en tales casos, pero el álgebra requerida para encontrar el punto de equilibrio se complica.

EJEMPLO 3 (Análisis no lineal del punto de equilibrio) Una compañía de dulces vende sus cajas de chocolates a \$2 cada una. Si x es el número de cajas producidas a la semana (en miles), entonces el administrador sabe que los costos de producción están dados, en dólares, por

$$y_c = 1000 + 1300x + 100x^2$$

Determine el nivel de producción en que la compañía no obtiene utilidades ni pérdidas (punto de equilibrio).

Solución Los ingresos por vender x miles de cajas a \$2 cada una están dados por

$$y_I = 2000x$$

Con el objeto de quedar en el punto de equilibrio, los ingresos deben ser iguales a los costos; de modo que

$$1000 + 1300x + 100x^2 = 2000x$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre 100 y pasando todos los términos a la izquierda, tenemos que

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Si factorizamos esta expresión, obtenemos

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

y así $x = 2$ y $x = 5$.

Por tanto, encontramos que hay dos puntos de equilibrio en este problema. La compañía puede decidir fabricar 2000 cajas a la semana ($x = 2$), con ingresos y costos iguales a \$4000. O puede fabricar 5000 cajas a la semana ($x = 5$), cuando los ingresos y los costos estén otra vez en un equilibrio de \$10,000.

En este ejemplo es conveniente considerar las utilidades de la compañía. La utilidad mensual U está dada por los ingresos menos los costos.

$$\begin{aligned} U &= y_I - y_c \\ &= 2000x - (1000 + 1300x + 100x^2) \\ &= -1000 + 700x - 100x^2 \\ &= -100(x - 2)(x - 5) \end{aligned}$$

☛ 24. Si los costos diarios de una compañía son $20,000 + 200x - x^2$, cuando se producen x unidades en un día, y el precio de venta es \$100 por unidad, determine el punto de equilibrio.

Cuando $x = 2$ o 5 , la utilidad es cero y éstos son los puntos de equilibrio. Cuando $2 < x < 5$, tenemos que $x - 2 > 0$ y $x - 5 < 0$. Dado que el producto contiene dos signos negativos, U es positiva en este caso. En consecuencia, la compañía obtiene una utilidad positiva cuando $2 < x < 5$; es decir, cuando fabrica y vende entre 2000 y 5000 cajas a la semana. ☛ 24

Punto de equilibrio del mercado

Si el precio de cierto artículo es demasiado alto, los consumidores no lo adquirirán, mientras que si es demasiado bajo, los proveedores no lo venderán. En un mercado competitivo, cuando el precio por unidad depende sólo de la cantidad demandada y de la oferta, siempre existe una tendencia del precio a ajustarse por sí mismo, de modo que la cantidad demandada por los consumidores iguale la cantidad que los productores están dispuestos a ofrecer. Se dice que el **punto de equilibrio del mercado** ocurre en un precio cuando la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida. Esto corresponde al punto de intersección de las curvas de la oferta y la demanda. (Véase la figura 27).*

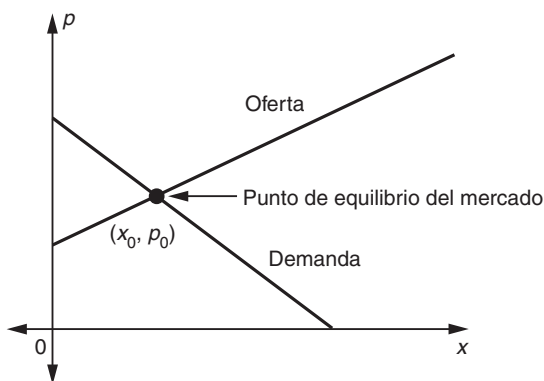


FIGURA 27

Algebraicamente, el precio de equilibrio del mercado p_0 y la cantidad de equilibrio x_0 se determina resolviendo las ecuaciones de la oferta y la demanda simultáneamente para p y x . Nótese que el precio y la cantidad de equilibrio sólo tienen sentido cuando no son negativas.

EJEMPLO 4 Determine el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio de las leyes de la oferta y la demanda siguientes:

$$D: p = 25 - 2x \quad (1)$$

$$S: p = 3x + 5 \quad (2)$$

Solución Igualando los dos valores de p en las ecuaciones (1) y (2), tenemos que

$$3x + 5 = 25 - 2x$$

Respuesta 200 unidades diarias.

*Algunos modelos sencillos de la forma en que un mercado se autoajusta al equilibrio se describen en la sección 17-6.

25. Si la ley de la demanda es $2p + 3x = 36$ y la ley de la oferta es $2p = x + 12$, grafique las curvas de la oferta y la demanda y determine el punto de equilibrio del mercado.

Fácilmente se ve que la solución es $x = 4$. Sustituyendo $x = 4$ en la ecuación (1), resulta

$$p = 25 - 8 = 17$$

En consecuencia, el precio de equilibrio es 17 y la cantidad de equilibrio es de 4 unidades. Las gráficas de las curvas de la oferta y la demanda aparecen en la siguiente figura.

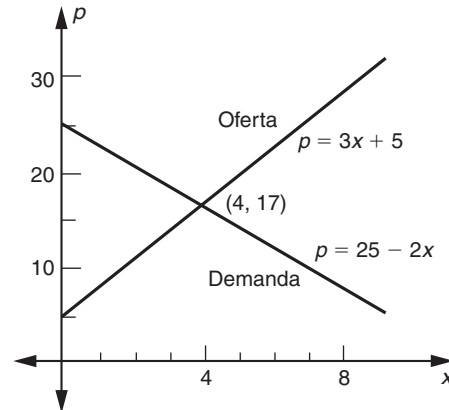


FIGURA 28

EJEMPLO 5 Si las ecuaciones de la demanda y la oferta son, respectivamente,

$$D: 3p + 5x = 22 \quad (3)$$

$$S: 2p - 3x = 2x \quad (4)$$

determine los valores de x y p en el punto de equilibrio del mercado.

Solución Las ecuaciones (3) y (4) forman un sistema de ecuaciones lineales en las variables x y p . Resolvamos este sistema por el método de eliminación. Multiplicando ambos lados de la ecuación (3) por 3 y los dos miembros de la ecuación (4) por 5, obtenemos

$$9p + 15x = 66$$

$$10p - 15x = 10$$

Enseguida sumamos estas dos ecuaciones y simplificamos.

$$9p + 15x + 10p - 15x = 66 + 10$$

$$19p = 76$$

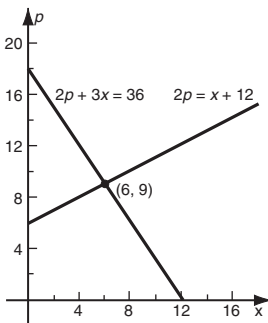
Así que, $p = 4$. Sustituyendo este valor de p en la ecuación (3), obtenemos

$$3(4) + 5x = 22$$

Por tanto, $x = 2$. El punto de equilibrio del mercado ocurre cuando $p = 4$ y $x = 2$.

25

Respuesta $x = 6, p = 9$



Como la mayoría de las relaciones lineales en economía, las ecuaciones lineales de demanda y oferta dan una representación aproximada de las relaciones exactas.

tas entre precio y cantidad, y surgen casos en que tales aproximaciones lineales no son adecuadas. La determinación del punto de equilibrio del mercado, cuando la ecuación de demanda o la ecuación de la oferta (o ambas) no son lineales, pueden requerir cálculos muy complicados.

EJEMPLO 6 (Punto de equilibrio del mercado) La demanda para los bienes producidos por una industria están dados por la ecuación $p^2 + x^2 = 169$, en donde p es el precio y x es la cantidad demandada. La oferta está dada por $p = x + 7$. ¿Cuáles son el precio y la cantidad del punto de equilibrio?

Solución El precio y la cantidad del punto de equilibrio son los valores positivos de p y x que satisfacen a la vez las ecuaciones de la oferta y la demanda.

$$p^2 + x^2 = 169 \quad (5)$$

$$p = x + 7 \quad (6)$$

Sustituyendo el valor de p de la ecuación (6) en la ecuación (5) y simplificando, resulta:

$$(x + 7)^2 + x^2 = 169$$

$$2x^2 + 14x + 49 = 169$$

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

Factorizando, encontramos que

$$(x + 12)(x - 5) = 0$$

lo cual da $x = -12$ o 5 . El valor negativo de x es inadmisibles, de modo que $x = 5$. Sustituyendo $x = 5$ en la ecuación (6),

$$p = 5 + 7 = 12$$

En consecuencia, el precio de equilibrio es 12 y la cantidad de equilibrio es 5.

Impuestos especiales y punto de equilibrio del mercado

Con frecuencia, el gobierno grava con impuestos adicionales ciertos artículos con el propósito de obtener más ingresos o dar más subsidios a los productores, para que hagan accesibles estos artículos a los consumidores a precios razonables. Consideraremos el efecto de un impuesto adicional o subsidio sobre el punto de equilibrio del mercado con las suposiciones siguientes:

1. La cantidad demandada por los consumidores sólo depende del precio de mercado. Denote este precio pagado por los consumidores mediante p_c .
2. La cantidad ofrecida por los proveedores está determinada por el precio recibido por ellos. Denote este precio por medio de p_s .
3. El precio pagado por los consumidores iguala al precio recibido por los proveedores más el impuesto t por unidad: $p_c = p_s + t$. Si, en lugar de eso, se da un subsidio de s por unidad, entonces $p_c = p_s - s$.

EJEMPLO 7 (Subsidio y punto de equilibrio del mercado) La ley de la demanda para cierto artículo es $5p + 2x = 200$ y la ley de la oferta es $p = \frac{4}{5}x + 10$.

a) Determine el precio y cantidad de equilibrio.

b) Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio después de que se ha fijado un impuesto de 6 por unidad. Determine el incremento en el precio y la disminución en la cantidad demandada.

c) ¿Qué subsidio provocará que la cantidad demandada se incremente en 2 unidades?

Solución Las ecuaciones de demanda y de oferta son las siguientes:

$$D: 5p + 2x = 200 \quad (7)$$

$$S: p = \frac{4}{5}x + 10 \quad (8)$$

a) Sustituyendo el valor de p de la ecuación (8) en la ecuación (7) y simplificando obtenemos las ecuaciones:

$$5\left(\frac{4}{5}x + 10\right) + 2x = 200$$

$$4x + 50 + 2x = 200$$

$$6x = 150$$

$$x = 25$$

Por tanto, de la ecuación (8),

$$p = \frac{4}{5}(25) + 10 = 20 + 10 = 30$$

En consecuencia, el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio antes del gravamen son

$$p = 30 \quad y \quad x = 25$$

b) Sea p_c el precio pagado por los consumidores y p_s el precio recibido por los proveedores. Entonces las ecuaciones (7) y (8) se transforman en

$$D: 5p_c + 2x = 200 \quad (9)$$

$$S: p_s = \frac{4}{5}x + 10 \quad (10)$$

Si se cobra un impuesto de 6 por unidad, entonces $p_c = p_s + 6$, de modo que la ecuación de oferta puede escribirse como

$$S: p_c - 6 = \frac{4}{5}x + 10$$

o

$$p_c = \frac{4}{5}x + 16 \quad (11)$$

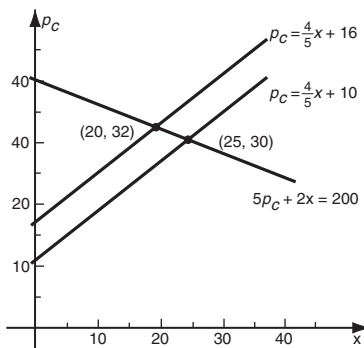
Sustituyendo el valor de p_c de la ecuación (11) en la ecuación (9), obtenemos

$$5\left(\frac{4}{5}x + 16\right) + 2x = 200$$

La solución es $x = 20$. Por tanto, de la ecuación (11),

$$p_c = \frac{4}{5}(20) + 16 = 32$$

Respuesta En el plano de x y precio del consumidor, p_c , el efecto de los impuestos, es mover la curva de la oferta hacia arriba.



☛ 26. En el ejemplo 7, grafique las ecuaciones de la oferta y demandas originales (7) y (8) y las ecuaciones de la oferta y la demanda modificadas (9) y (11) en los mismos ejes. Muestre los dos puntos de equilibrio. Geométricamente, ¿cuál es el efecto de los impuestos a las ventas?

☛ 27. Vuelva a resolver las partes a) y b) del ejercicio 7, si la ecuación de la oferta se cambia a $p = x + 12$ y si, en la parte b), se cobra un impuesto a las ventas de 7 por unidad.

Respuesta a) $x = 20, p = 32$
b) $x = 15, p_c = 34$

Comparando con la parte a), vemos que el efecto de los impuestos es aumentar el precio del mercado en 2 (de 30 a 32) y disminuir la demanda del mercado en 5 (de 25 a 20). ☛ 26, 27

c) Nuevamente sea p_c el precio pagado por los consumidores y p_s el precio recibido por los proveedores, de modo que las ecuaciones de demanda y oferta aún están dadas por las ecuaciones (9) y (10). Esta vez, $p_c = p_s - s$, en donde s es el subsidio por unidad.

Deseamos tener demanda de 2 más que la demanda de equilibrio de 25, esto es $x = 27$. Entonces, de la ecuación (9),

$$p_c = \frac{1}{5}(200 - 2x) = \frac{1}{5}(200 - 54) = 29.2$$

y de la ecuación (10),

$$p_s = 10 + \frac{4}{5}x = 10 + \frac{4}{5}(27) = 31.6$$

Por tanto, $s = p_s - p_c = 31.6 - 29.2 = 2.4$. Un subsidio de 2.4 por unidad aumentará la demanda en 2 unidades.

EJERCICIOS 4-5

- (Análisis del punto de equilibrio)* El costo variable de producir cierto artículo es de 90¢ por unidad y los costos fijos son de \$240 al día. El artículo se vende por \$1.20 cada uno. ¿Cuántos artículos deberá producir y vender para garantizar que no haya ganancias ni pérdidas?
- (Análisis del punto de equilibrio)* Los costos fijos por producir cierto artículo son de \$5000 al mes y los costos variables son de \$3.50 por unidad. Si el productor vende cada uno a \$6.00, responda a cada uno de los incisos siguientes.
 - Encuentre el punto de equilibrio.
 - Determine el número de unidades que deben producirse y venderse al mes para obtener una utilidad de \$1000 mensuales.
 - Obtenga la pérdida cuando sólo 1500 unidades se producen y venden cada mes.
- (Análisis del punto de equilibrio)* El costo de producir x artículos está dado por $y_c = 2.8x + 600$ y cada artículo se vende a \$4.00.
 - Encuentre el punto de equilibrio.
 - Si se sabe que al menos 450 unidades se venderán, ¿cuál debería ser el precio fijado a cada artículo para garantizar que no haya pérdidas?
- (Análisis del punto de equilibrio)* Un fabricante produce artículos a un costo variable de 85¢ cada uno y los costos fijos son de \$280 al día. Si cada artículo puede venderse a \$1.10, determine el punto de equilibrio
- (Análisis del punto de equilibrio)* En el ejercicio 4, si el fabricante puede reducir el costo variable a 70¢ por artículo incrementando los costos diarios a \$350, ¿es ventajoso hacerlo así? (Tal reducción sería posible; por ejemplo, adquiriendo una nueva máquina que bajara los costos de producción pero que incrementara el cargo por intereses).
- (Análisis del punto de equilibrio)* El costo de producir x artículos a la semana está dado por $y_c = 1000 + 5x$. Si cada artículo puede venderse a \$7, determine el punto de equilibrio. Si el fabricante puede reducir los costos variables a \$4 por artículo incrementando los costos fijos a \$1200 a la semana, ¿le convendría hacerlo?
- (Análisis no lineal del punto de equilibrio)* El costo de producir x artículos al día está dado en dólares por $y_c = 80 + 4x + 0.1x^2$. Si cada artículo puede venderse a \$10, determine el punto de equilibrio.
- (Análisis no lineal del punto de equilibrio)* El costo de producir x artículos al día está dado en dólares por $y_c = 2000 + 100\sqrt{x}$. Si cada artículo puede venderse a \$10, encuentre el punto de equilibrio.

(9-14) (Equilibrio del mercado) Determine el precio y cantidad de equilibrio para las curvas de demanda y oferta siguientes:

9. D: $2p + 3x = 100$ **10. D:** $3p + 5x = 200$

S: $p = \frac{1}{10}x + 2$ **S:** $7p - 3x = 56$

11. D: $4p + x = 50$ **12. D:** $5p + 8x = 80$

S: $6p - 5x = 10$ **S:** $3x = 2p - 1$

13. D: $p^2 + x^2 = 25$ **14. D:** $p^2 + 2x^2 = 114$

S: $p = x + 1$ **S:** $p = x + 3$

15. (Equilibrio de mercado) Un comerciante puede vender diariamente 200 unidades de cierto bien en \$30 por unidad y 250 unidades en \$27 por unidad. La ecuación de oferta para ese bien es $6p = x + 48$.

a) Determine la ecuación de demanda para el bien, suponga que es lineal.

b) Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio.

c) Determine el precio y la cantidad de equilibrio, si se cobra un impuesto de \$3.40 por unidad del bien. ¿Cuál es el aumento en el precio y cuál la disminución en la cantidad demandada?

d) ¿Qué subsidio por unidad aumentará la demanda en 24 unidades?

e) ¿Qué impuesto aditivo por unidad debe cobrarse en el bien, de modo que el precio de equilibrio por unidad aumente en \$1.08?

16. (Equilibrio de mercado) A un precio de \$2400, la oferta de cierto bien es de 120 unidades; mientras que su demanda es 560 unidades. Si el precio aumenta a \$2700 por unidad, la oferta y la demanda serán de 160 y 380 unidades, respectivamente.

a) Determine las ecuaciones de demanda y oferta, suponiendo que son lineales.

b) Determine el precio y la cantidad de equilibrio.

c) Si se cobra un impuesto al bien de \$110 por unidad, ¿cuáles son los nuevos precio y cantidad de equilibrio? ¿Cuál es el aumento en el precio y la disminución en la cantidad?

d) ¿Qué subsidio por unidad disminuirá el precio de mercado en \$15?

(17-18) (Demanda insuficiente) Resuelva las siguientes ecuaciones de oferta y demanda. Explique en dónde estaría el equilibrio del mercado.

17. S: $p = x + 5$ **18. S:** $2p - 3x = 8$

D: $3p + 4x = 12$ **D:** $3p + 6x = 9$

19. (Equilibrio de mercado) Para cierto producto, si el precio es \$4 por unidad, los consumidores comprarán 10,000 unidades mensuales. Si el precio es \$5 por unidad, los consumidores comprarán 9000 unidades mensuales.

a) Suponiendo que la curva de la demanda es una línea recta, determine su ecuación.

b) La ecuación de oferta para este producto es

$$p = \begin{cases} 3.2 + \left(\frac{q}{2000}\right) & \text{si } 0 \leq q \leq 6000 \\ 5 + \left(\frac{q}{5000}\right) & \text{si } 6000 \leq q \end{cases}$$

Determine el punto de equilibrio y la cantidad total gastada por los consumidores en este producto en el precio de equilibrio.

20. (Múltiples puntos de equilibrio del mercado) Un proveedor monopolizador de cierto bien está contento con suministrar una cantidad suficiente para garantizar un ingreso constante. Así, la relación de la oferta tiene la forma $xp = \text{constante}$. Si la relación de la oferta es $xp = 3$ y la relación de demanda es $x + p = 4$, encuentre los puntos de equilibrio del mercado.

21. (Múltiples puntos de equilibrio del mercado) En el ejercicio anterior encuentre los puntos de equilibrio del mercado para la relación de oferta $xp = 5$ y la relación de demanda $3x + 4p = 30$.

22. (Múltiples puntos de equilibrio del mercado) Para un bien en particular la relación de la oferta es

$$x = \begin{cases} 6p & \text{si } 0 \leq p < 1 \\ \frac{6}{p} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

y la relación de la demanda es $x + 2p = 7$. Determine los puntos de equilibrio del mercado.

***23. (Estabilidad del mercado)** Un punto de equilibrio del mercado es estable si, cuando el precio del mercado se mueve ligeramente de su valor de equilibrio, existe una tendencia para que el precio se dirija de regreso hacia el equilibrio. Sea p_0 el precio de equilibrio. Supóngase que para $p > p_0$ la cantidad suministrada, x_p , excede a la cantidad demandada, x_D . Entonces habrá una tendencia a que el precio caiga. Esto es el mercado será estable bajo aumento de precios si $x_s > x_D$ siempre que $p > p_0$. De manera análoga, si $x_s < x_D$ siempre que $p < p_0$, el mercado estará estable bajo disminución de precios. Demuestre que todos los puntos de equilibrio del mercado en los ejercicios 9 a 14 son estables. Discuta la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio múltiples de los ejercicios 20 a 22.

REPASO DEL CAPÍTULO 4

Términos, símbolos y conceptos importantes

- 4.1** Plano cartesiano o plano xy , ejes de coordenadas, eje x , eje y , origen.
Coordenadas cartesianas, abscisa o coordenada x , ordenada o coordenada y .
Primero, segundo, tercero y cuarto cuadrantes.
Gráfica de una ecuación.
- 4.2** Elevación y desplazamiento (recorrido) de P a Q . Pendiente de una recta.
Fórmula punto pendiente. Fórmula pendiente ordenada al origen. Ecuación lineal general.
Rectas horizontal y vertical.
Rectas paralelas y perpendiculares.
Graficación de una ecuación lineal utilizando las intercepciones o usando un punto y la pendiente.
- 4.3** Modelo lineal de costos, costos fijos, costos variables.
Depreciación lineal. Tasa de sustitución.
Ley de la demanda, curva de demanda. Ley de la oferta, curva de oferta.
- 4.4** Sistema de ecuaciones lineales. Solución de un sistema de ecuaciones.

Método de sustitución. Método de la suma.
Interpretación geométrica de un sistema y su solución.

- 4.5** Punto de equilibrio.
Equilibrio del mercado, precio y cantidad de equilibrio.
Impuesto a las ventas, subsidio.

Fórmulas

La fórmula de distancia: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Pendiente de una recta: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Fórmula punto pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Fórmula pendiente ordenada al origen: $y = mx + b$

Recta horizontal: $y = b$. Recta vertical: $x = a$

Ecuación lineal general: $Ax + By + C = 0$

Rectas paralelas: $m_1 = m_2$

Rectas perpendiculares: $m_1 \cdot m_2 = -1$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

- Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las proposiciones siguientes. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.
 - Cada punto en el eje x tiene abscisa igual a cero.
 - Cada punto en el eje y tiene coordenada y igual a cero.
 - Si un punto está en el tercer cuadrante, entonces $x \leq 0$ y $y \leq 0$.
 - Una recta horizontal tiene pendiente igual a cero.
 - La pendiente de la recta que pasa por los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tiene pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, para cualesquiera valores x_1, x_2, y_1, y_2 .
 - La ecuación $y = k$, con k una constante representa una recta vertical.
 - La distancia del punto (a, b) al origen $(0, 0)$ está dada por $a^2 + b^2$.
 - Si $x \cdot y < 0$, entonces el punto (x, y) está en el segundo o tercer cuadrante.
 - Si $x \cdot y > 0$, entonces el punto (x, y) está en el primero o tercer cuadrante.
 - Si una recta asciende cuando avanza de izquierda a derecha, entonces la pendiente de la recta es positiva.
 - La ecuación de cualquier recta vertical es de la forma $x = k$, con k una constante.
 - Si el costo variable por unidad por producir cierto artículo es constante, entonces el artículo sigue un modelo de costo lineal.
 - La ecuación $Ax + By + C = 0$ representa una línea recta para cualesquiera valores de A, B y C .
- (2-12)** Determine una ecuación para la recta que cumple con las condiciones dadas.
- Pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(-5, 10)$
 - Pasa por los puntos $(7, 3)$ y $(5, 4)$
 - Pasa por los puntos $(2, 0)$ y $(0, -7)$
 - Pasa por los puntos $(3, 0)$ y $(5, 0)$

6. Pasa por los puntos (0, 0) y (7, 6)
7. Pasa por los puntos (0, 6) y tiene pendiente 3
8. Pasa por el punto (-2, 3) y tiene pendiente $\frac{1}{2}$
9. Pasa por el punto (-2, 5) y tiene pendiente 0
10. Pasa por el punto (-3, 8) y su pendiente no está definida.
11. Pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 2y - 6 = 0$ y $3x - 5y - 8 = 0$ y es paralela a la recta $x - 3y + 1 = 0$
12. Pasa por el punto de intersección de las rectas $3x + 4y - 10 = 0$ y $7x + 9y - 12 = 0$ y es perpendicular a la recta $2x + 5y + 10 = 0$
13. Determine las coordenadas de las intersecciones de la recta $7x - 2y + 42 = 0$ con los ejes de coordenadas.
14. Determine las intersecciones con los ejes de coordenadas de la recta que pasa por (2, -1) y es perpendicular a la recta $5x + 2y - 5 = 0$

(15-30) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

15. $x - 2y = 6$; $3x - 5y = 8$
16. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2$; $\frac{3x}{2} + \frac{5y}{3} = 14$
17. $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{31}{14}$; $\frac{3}{2x} - \frac{5}{3y} = \frac{43}{84}$
18. $3a - b = 1$; $a + 2b = 5$
19. $2x + 3y = -1$; $2x + y = 5$
20. $3p + q = 4$; $12p + 4q = 10$
21. $6x + 15y = 3$; $2x + 5y = 1$
22. $2x - 5y = 12$; $6x - 15y = 24$

23.

$$\begin{aligned} 2u + 3v - 8w &= -47 \\ u + v + w &= 3 \\ 5u + 2v + w &= 4 \end{aligned}$$

*24.

$$\begin{aligned} 2p - 3q - 2r &= 1 \\ 5p + 6q + r &= 1 \\ -17p + 3q + 6r &= 1 \end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} - \frac{3}{y} - \frac{2}{z} &= 1 \\ \frac{5}{x} + \frac{6}{y} + \frac{1}{z} &= 1 \\ -\frac{17}{x} + \frac{3}{y} + \frac{6}{z} &= 1 \end{aligned}$$

(Sugerencia: Haga $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{1}{y}$ y $r = \frac{1}{z}$)

26.

$$\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 11 \\ -3x + 2y - 7z &= -26 \\ 8x - y + z &= 3 \end{aligned}$$

*27. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{6}$; $xy = 6$

*28. $2x + 3y = 4$; $6xy = -21$

*29. $2u + 3v = 3$; $\frac{2}{u} - \frac{5}{v} = -\frac{7}{3}$

*30. $pq = 3$; $14p - 6q = -9$

(31-50)

31. (*Distribución de materia prima*) Una empresa fabrica sillas y mesas, para cada silla utiliza 2 tablones de caoba y para cada mesa 5 tablones de caoba. Si se disponen de 400 tablones de caoba en la bodega, encuentre una relación entre el número de sillas y mesas que pueden fabricarse si se utilizan todos los tablones de caoba.
32. (*Modelo lineal de costo*) Jonathan Chávez produce juguetes didácticos, para la fabricación de estos juguetes tiene costos fijos mensuales de \$2000 y el costo de producir cada unidad es \$25. Determine una ecuación que relacione los costos. ¿Cuál es el costo de producir 200 juguetes?
33. (*Inversiones*) Ana Jimena recibió \$2800 por concepto de intereses por dos inversiones, con la primera ganó 5% y con la segunda 6%. Si este año las tasas de interés se cambian y los ingresos serán de \$2700, ¿cuál es el monto de cada inversión?
34. (*Mezcla de nueces*) Verónica Pérez mezcló 10 kilogramos de nueces con 20 kilogramos de pistaches para obtener una mezcla de 30 kg con un valor de \$420. Después elaboró otra mezcla de 23 kilogramos con un valor de total de \$300, ésta la obtuvo mezclando 15 kilogramos de nueces con 8 kilogramos de pistaches. ¿Cuál es el precio por kilogramo de las nueces y de los pistaches?
35. (*Modelo lineal de costo*) Francisco González en su negocio tiene costos fijos de \$2500 y costos variables de \$20 por unidad. Determine una ecuación que relacione los costos con la producción. ¿Cuál es el costo de producir 150 unidades?
36. (*Modelo lineal de costo*) Christian Jiménez determina que si produce 100 artículos el costo total es de \$500, mientras que si produce 150 artículos el costo total es de \$600. Si supone que el modelo de costo-producción es lineal, determine el costo fijo y los costos variables. ¿Cuál será el costo de producir 200 artículos?
37. (*Inversiones*) Paloma Verónica tiene dos inversiones en la primera obtiene una tasa de interés de 6%, en la segunda la tasa es de 8% y el total de intereses que obtuvo por las dos inversiones fue \$220. Si el monto que invirtió en la prime-

ra fue el doble de lo que invirtió en la segunda, ¿cuánto invirtió en cada una de ellas?

38. (*Decisiones sobre fabricación*) Gustavo Maldonado fabrica relojes los entrega en un estuche de madera. Cada estuche lo compra en \$5. Él está considerando fabricarlos estuches con costos fijos de \$2500 al año y un costo variable de \$2.50 por estuche. ¿Cuántos estuches debe requerir Gustavo al año para justificar que ellos produzca?
39. (*Mezclas*) Atenea Acosta, profesora de química, en el laboratorio tiene dos soluciones de ácido sulfúrico una al 10% y otra al 5%. ¿Cuántos litros de cada solución debe mezclar para obtener una solución de ácido al 8%?
40. (*Mezclas*) En su dulcería Gustavo Olivas vende caramelos y chocolates. Los caramelos los vende a \$0.50 cada 100 gramos y los chocolates a \$0.80 los 100 gramos. Si Gustavo hará 30 bolsitas, con una mezcla de chocolates y caramelos, cada una con 100 gramos, ¿cuántos gramos de chocolates y cuántos gramos de caramelos debe mezclar para que el costo de la mezcla sea de \$0.70 por cada 100 gramos?
41. (*Punto de equilibrio*) Áurea y Manuel Ortuño determinan que el punto de equilibrio del mercado para su producto ocurre cuando el volumen de ventas alcanza \$70,000. Los costos fijos son \$30,000 y cada unidad se vende en \$140. Determine el costo variable por unidad.
42. (*Punto de equilibrio, ingresos y pérdidas*) Carolina Leticia vende collares en \$9 cada uno, y vende todos los que pueda producir. Si los costos fijos al año son \$4500 y los costos variables son \$6 por collar.
- a) ¿Cuántos collares debe producir y vender Carolina Leticia para que llegue al equilibrio?
- b) Determine el ingreso total recibido por la venta de collares en el punto de equilibrio.
- c) ¿Cuántos collares debe producir y vender para tener una ganancia de \$30,000?
- d) ¿Cuántos collares debe producir y vender para tener una pérdida de \$900?
43. (*Punto de equilibrio del mercado*) Si las leyes de la demanda y la oferta de un producto son las siguientes:

$$D: p = 30 - 2x$$

$$S: p = 5x + 2$$

determine el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio.

44. (*Punto de equilibrio del mercado*) Una compañía que produce fósforos vende sus cajas de cerillas a \$0.50 cada una. Si x es el número de cajas producidas a la semana (en miles), entonces Samantha Omaña, la administradora, sabe que los costos de producción están dados por

$$yc = 20x^2 + 240x + 800$$

Determine el nivel de producción en el que la compañía llega al punto de equilibrio.

45. (*Utilidades y pérdidas*) Con respecto al problema anterior,

- a) Determine el nivel de producción para obtener una ganancia de \$6080 semanales.
- b) Si en una semana se tienen pérdidas por \$45, ¿cuál fue el nivel de producción?

46. (*Impuesto y punto de equilibrio del mercado*) La ley de la demanda para cierto artículo es $20 + 8x = 1600$ y la ley de la oferta es $3x - 4p = 140$.

- a) Determine el precio y la cantidad de equilibrio.
- b) Determine el precio y la cantidad de equilibrio después de que se ha fijado un impuesto de \$4 por unidad.
- c) Determine el incremento en el precio y la disminución en la cantidad demandada.

47. (*Inversiones*) Gerardo Villaseñor invierte un total de \$10,000 en papel comercial, bonos y depósito a plazo fijo, que le producen intereses a tasas de interés de 6%, 5% y 8%, respectivamente. Si el total que recibe por los intereses es \$660 y recibe la misma cantidad de intereses por las inversiones en bonos y papel comercial, determine la cantidad que invirtió Gerardo en cada tipo de inversión.

48. (*Decisiones sobre producción*) Para la producción mensual de mochilas para viaje, Blanca Azucena puede hacerlo fabricándolas por completo en su taller, o bien encargar parte del proceso a una empresa y realizar la terminación en su taller. El costo de producir x unidades por el primer método es $(8x + 3500)$ dólares, mientras que por el segundo método cuestan $(13x + 700)$ dólares. Blanca Azucena puede vender todas las mochilas que produzca a \$25 cada una. ¿Cuál método de producción deberá utilizar si las ventas proyectadas en un mes son de:

- a) 200 mochilas?
- b) 400 mochilas?
- c) 800 mochilas?

49. (*Relación de demanda*) Un súbito aumento en el costo de la plata obligó a una compañía fabricante de rollos fotográficos a incrementar el precio del rollo para 20 exposiciones de \$2.25 a \$2.50. Como resultado de esta decisión, las ventas mensuales cayeron de 3 a 2.6 millones de rollos.

- a) Determine la relación lineal (en la forma pendiente-ordenada al origen) que describa el precio p en dólares en términos de las ventas mensuales x expresadas en millones de rollos.
- b) Suponiendo que la relación lineal deducida se sigue cumpliendo, ¿qué hubiese sucedido con las ventas si la compañía baja su precio a \$2.00 por rollo?

50. (*Decisiones sobre fabricación o maquilación*) Camas *El Sueño Tranquilo* compra las cabeceras para la cama al precio de \$250 cada una. Cecilio Shamir, el administrador, está considerando fabricar sus propias cabeceras con costos fijos de \$50,000 al año y un costo variable de \$130 por cada cabecera. ¿Cuántas cabeceras debe requerir al año para justificar su fabricación por la empresa misma?