22. $\left(\frac{8}{9t} \div \frac{1}{3st}\right) \cdot \frac{s}{4}$

23. $\left(\frac{3}{4xy} \div \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{2xy}{9}$

24. $\left(\frac{2}{x} \div \frac{z}{2}\right) \div \frac{4}{z}$

25. $\left(\frac{2xt}{3} \div \frac{x}{4t}\right) \div \frac{2t}{3}$

26. $\frac{2}{z} \div \left(\frac{z}{2} \div \frac{4}{z}\right)$

27. $\frac{2xt}{3} \div \left(\frac{x}{4t} \div \frac{2t}{3}\right)$

28. $\frac{1}{6} - \frac{1}{2}$

29. $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$

30. $\frac{4x}{5} - \frac{x}{10}$

31. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$

32. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

33. $\frac{y}{2x} + \frac{1}{3x}$

34. $\frac{a}{6b} - \frac{a}{2b}$

35. $\frac{a}{6b} + \frac{2a}{9b}$

36. $\frac{7}{6x} + \frac{3}{4x^2}$

37. $\frac{3y}{10x^2} - \frac{1}{6x}$

38. $\frac{x}{p^2} + \frac{y}{pq}$

39. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

40. $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

41. $\frac{x^2}{3y} + 4y$

42. $\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)$

43. $\frac{1}{6} - \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)$

44. $\frac{a}{3b} - 2\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{2a}\right)$

45. $\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \div \left(\frac{6}{x}\right)$

46. $\left(\frac{x}{9y} + \frac{1}{6xy}\right) \div \left(\frac{1}{3xy}\right)$

47. $\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$

48. $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{12}\right) \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{4}\right)$

49. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}$

50. $\dfrac{\frac{8}{5} + \frac{2}{3}}{2 + \frac{4}{7}}$

51. $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}$

52. $\dfrac{2 - \frac{3}{4}}{3 + \frac{1}{8}}$

53. $\dfrac{7x - \dfrac{2x}{3}}{15y - \dfrac{y}{3}}$

54. $\dfrac{\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3x}}{\dfrac{1}{4y} - \dfrac{1}{5y}}$

55. $\dfrac{\left(\dfrac{2a}{3b}\right)\left(\dfrac{4b}{5}\right) + a}{2b + \dfrac{b}{15}}$

56. $\dfrac{\left(\dfrac{5p}{2q}\right)\left(\dfrac{p}{3}\right) + \dfrac{p^2}{8q}}{4p + \dfrac{p}{12}}$

57. $\left(\frac{a}{b} + \frac{2a}{3b}\right) \div \left[\left(\frac{3x}{8}\right) \div \left(\frac{x}{9}\right) + \frac{1}{4}\right]$

58. $\left(\frac{xy}{6}\right) \div \left[\left(\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{x}{6}\right) - \frac{3x}{4}\right]$

■ 1-3 EXPONENTES

Si m es un *entero positivo*, entonces a^m (léase a a la *potencia m* o la *m-ésima potencia de a*) se define como el producto de m factores a multiplicados a la vez. Por lo que

$$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$$

En este producto, el factor a aparece m veces. Por ejemplo,

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ (cuatro factores de 2)
$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ (cinco factores de 3)

En la expresión a^m, m se llama la **potencia** o **exponente** y a la **base**. Así en 2^4 (la cuarta potencia de 2), 2 es la base y 4 es la potencia o exponente; en 3^5, 3 es la base y 5 el exponente. Esta definición de a^m cuando el exponente es un entero positivo es válida para todos los valores reales de a.

Observe el patrón en la tabla 1, en la cual se dan varias potencias de 5 en orden decreciente. Tratemos de completar la tabla. Notemos que cada vez que el exponente disminuye en 1, el número de la derecha se *divide* entre 5.

Esto sugiere que la tabla se completaría continuando la división entre 5 con cada reducción del exponente. De esta manera, llegamos a las igualdades siguientes:

TABLA 1

5^4	625
5^3	125
5^2	25
5^1	5
5^0	?
5^{-1}	?
5^{-2}	?
5^{-3}	?
5^{-4}	?

$$5^1 = 5 \qquad 5^0 = 1 \qquad 5^{-1} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5^1}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} \qquad 5^{-3} = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} \qquad 5^{-4} = \frac{1}{625} = \frac{1}{5^4}$$

Este patrón en forma natural nos conduce a la definición siguiente de a^m en el caso de que el exponente m sea cero o un número negativo.

DEFINICIÓN Si $a \neq 0$, entonces $a^0 = 1$ y si m es un entero *positivo* cualquiera (de modo que $-m$ es un entero *negativo*),

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Por ejemplo, $4^0 = 1$, $\left(\frac{3}{7}\right)^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$, etc. Asimismo,

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \quad \text{y} \quad (2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$ ☛ **10**

☛ **10.** Evalúe

a) $(-\frac{1}{5})^0$; *b*) $(-\frac{1}{2})^{-3}$

De estas definiciones, es posible establecer una serie de propiedades denominadas las **leyes de los exponentes**, las cuales se enuncian a continuación.

Propiedad 1

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Esto es, *cuando dos potencias de una base común se multiplican, el resultado es igual a la base elevada a la suma de los dos exponentes*. Este resultado vale para cualquier número real a, excepto en el caso de que m o n sea negativo, requerimos que $a \neq 0$.

EJEMPLO 1

a) $5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$

Podemos verificar que esto sea correcto desarrollando las dos potencias del producto.

$$5^2 \cdot 5^3 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$$

Respuesta *a*) 1; *b*) $-2^3 = -8$

☛ **11.** Simplifique
a) $4^3 \cdot 4^{-5}$; *b*) $x^4 \cdot x^{-6} \cdot x^2$

Respuesta *a*) $\frac{1}{16}$; *b*) 1

b) $x^5 \cdot x^{-3} = x^{5+(-3)} = x^2$

De nuevo, podemos verificar este resultado desarrollando las dos potencias.

$$x^5 \cdot x^{-3} = (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x)\left(\frac{1}{x \cdot x \cdot x}\right) = x \cdot x = x^2 \quad ☛ \ 11$$

Propiedad 2

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \neq 0)$$

Esto es, *cuando una potencia se divide entre otra con la misma base, el resultado es igual a la base elevada a un exponente que es la diferencia del exponente que está en el numerador y el exponente del denominador*.

EJEMPLO 2

☛ **12.** Simplifique
a) $3^3 \div 3^{-2}$; *b*) $x^4 \div (x^{-6} \cdot x^2)$

Respuesta *a*) $3^5 = 243$; *b*) x^8

a) $\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4$

b) $\frac{4^3}{4^{-2}} = 4^{3-(-2)} = 4^{3+2} = 4^5$

c) $\frac{3^{-2}}{3} = \frac{3^{-2}}{3^1} = 3^{-2-1} = 3^{-3}$

d) $\frac{x^2 \cdot x^{-4}}{x^{-3}} = \frac{x^{2-4}}{x^{-3}} = x^{2-4-(-3)} = x^1 = x$ ☛ 12

Propiedad 3

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (a \neq 0 \text{ si } m \text{ o } n \text{ es negativo o cero})$$

Es decir, *una potencia elevada a una potencia es igual a la base elevada al producto de los dos exponentes*.

EJEMPLO 3

a) $(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$

Podemos comprobar que esto es correcto, dado que

$$(3^3)^2 = 3^3 \cdot 3^3 = 3^{3+3} = 3^6$$

☛ **13.** Simplifique
a) $3^3 \cdot (3^2)^{-2}$; *b*) $(x^4)^4 \div (x^{-3})^{-3}$

Respuesta *a*) $3^{-1} = \frac{1}{3}$; *b*) x^7

b) $(4^{-2})^{-4} = 4^{(-2)(-4)} = 4^8$

c) $x^5(x^{-2})^{-1} = x^5 \cdot x^{(-2)(-1)} = x^5 \cdot x^2 = x^{5+2} = x^7$

d) $\frac{(x^2)^{-2}}{(x^{-2})^{-2}} = \frac{x^{(2)(-2)}}{x^{(-2)(-2)}} = \frac{x^{-4}}{x^4} = x^{-4-4} = x^{-8}$

e) $\frac{1}{x^{-p}} = (x^{-p})^{-1} = x^{(-p)(-1)} = x^p$ ☛ 13

En una expresión, tal como $3c^5$, la base es c, no $3c$. Si necesitamos que la base sea $3c$, debemos encerrarla entre paréntesis y escribir $(3c)^5$. Por ejemplo $3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$, no es lo mismo que $(3 \cdot 2)^3 = 6^3 = 216$. Para el caso de que la base es un producto, tenemos la propiedad siguiente.

Propiedad 4

$$(ab)^m = a^m b^m \qquad (ab \neq 0 \text{ si } m \leq 0)$$

☛ **14.** Evalúe
a) $2 \cdot 2^3$ y $(2 \cdot 2)^3$
b) $3 \cdot 2^{-2}$ y $(3 \cdot 2)^{-2}$

Esto es, *el producto de dos números elevados a la m-ésima potencia es igual al producto de las m-ésimas potencias de los dos números.* ☛ **14**

EJEMPLO 4

a) $6^4 = (2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$

b) $(x^2y)^4 = (x^2)^4y^4 = x^8y^4$

c) $(3a^2b^{-3})^2 = 3^2(a^2)^2(b^{-3})^2 = 9a^4b^{-6}$

d) $\dfrac{(xy^3)^{-2}}{(x^2y)^{-4}} = \dfrac{x^{-2}(y^3)^{-2}}{(x^2)^{-4}y^{-4}} = \dfrac{x^{-2}y^{-6}}{x^{-8}y^{-4}} = \dfrac{x^{-2}}{x^{-8}} \cdot \dfrac{y^{-6}}{y^{-4}} = x^{-2-(-8)}y^{-6-(4)} = x^6y^{-2}$

Respuesta *a*) 16 y 64; *b*) $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{36}$

Propiedad 5

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad (b \neq 0 \text{ y } a \neq 0 \text{ si } m \leq 0)$$

Es decir, *el cociente de dos números elevados a la m-ésima potencia es igual al cociente de las m-ésimas potencias de tales números.*

EJEMPLO 5

☛ **15.** Simplifique
a) $3^3 \cdot (3x)^{-2}$
b) $\left(\dfrac{x^4}{2}\right)^2 \div (4x^{-2})^{-2}$

a) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{3^4}{2^4}$ *b*) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^5 = \dfrac{x^5}{y^5} = x^5y^{-5}$

c) $x^3\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^{-2} = x^3\dfrac{y^{-2}}{(x^2)^{-2}} = x^3\dfrac{y^{-2}}{x^{-4}} = x^{3-(-4)}y^{-2} = x^7y^{-2}$ ☛ **15**

EJEMPLO 6 Simplifique las expresiones siguientes, eliminando paréntesis y exponentes negativos.

a) $\dfrac{(ax)^5}{x^{-7}}$ *b*) $\dfrac{(x^{-2})^2}{(x^2z^3)^3}$ *c*) $x^4(2x - 3x^{-2})$

d) $(x^{-1} + y^{-1})^{-1}$ *e*) $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}}$

Respuesta *a*) $\dfrac{3}{x^2}$; *b*) $4x^4$

Solución

a) $\dfrac{(ax)^5}{x^{-7}} = \dfrac{a^5x^5}{x^{-7}} = a^5x^{5-(-7)} = a^5x^{12}$

☛ **16.** Sería *incorrecto por completo* en el ejemplo 6*d*) si hubiésemos escrito $(x^{-1} + y^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} + (y^{-1})^{-1} = x + y$. ¿Puede ver por qué esto es incorrecto? Pruebe dando dos valores para x y y, tales como 2 y 4.

b) $$\frac{(x^{-2})^2}{(x^2z^3)^3} = \frac{x^{(-2)(2)}}{(x^2)^3(z^3)^3} = \frac{x^{-4}}{x^6z^9} = \frac{1}{x^{10}z^9}$$

Note que si deseamos evitar exponentes negativos, ambos factores deben dejarse en el denominador.

c) $$\begin{aligned} x^4(2x - 3x^{-2}) &= x^4(2x) - x^4(3x^{-2}) \\ &= 2x^{4+1} - 3x^{4-2} \\ &= 2x^5 - 3x^2 \end{aligned}$$

d) Primero debemos simplificar la expresión dentro de los paréntesis. El denominador común es xy.

$$x^{-1} + y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{y + x}{xy}$$

Ahora recordando que el recíproco de una fracción se obtiene intercambiando el numerador y el denominador. De modo que

$$(x^{-1} + y^{-1})^{-1} = \left(\frac{y + x}{xy}\right)^{-1} = \frac{xy}{y + x}$$

e) $$\frac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}} = \frac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}} = \frac{x^{-1}}{x^{-1}y^{-1}} + \frac{y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}} = \frac{1}{y^{-1}} + \frac{1}{x^{-1}} = y + x$$

Solución alterna

$$\begin{aligned} \frac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}} &= (x^{-1} + y^{-1}) \cdot xy \\ &= x^{-1} \cdot xy + y^{-1} \cdot xy \qquad \text{(propiedad distributiva)} \\ &= 1 \cdot y + 1 \cdot x = y + x \end{aligned}$$

☛ **16**

EJERCICIOS 1-3

(1-61) Simplifique las expresiones siguientes. No use paréntesis ni exponentes negativos en la respuesta final.

1. $(2^5)^2$

2. $(3^4)^3$

3. $(a^3)^7$

4. $(x^4)^5$

5. $(-x^2)^5$

6. $(-x^5)^2$

7. $y^2 \cdot y^5$

8. $x^7 \cdot x^4$

9. $a^3 \cdot a^{-5}$

10. $b^{-2} \cdot b^6$

11. $(3x)^2x^{-7}$

12. $(4x)^{-2}x^4$

13. $(2x)^2(2x^{-1})^3$

14. $\dfrac{x^3}{2}(4x^{-1})^2$

15. $(x^2yz)^3(xy)^4$

16. $(3yz^2)^2(y^3z)^3$

17. $(x^{-2}y)^{-2}$

18. $(ab^{-3})^{-1}$

19. $(xy^2z^3)^{-1}(xyz)^3$

20. $(x^2pq^2)^2(xp^2)^{-1}$

21. $\dfrac{(2^4)^2}{4^2}$

22. $\dfrac{(3^3)^2}{3^5}$

23. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} \div 3^{-4}$

24. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3} \div 5^{-2}$

25. $\dfrac{x^5}{x^{-2}}$

26. $\dfrac{y^{-3}}{y^{-7}}$

27. $\dfrac{(x^2)^3}{x^4}$

28. $\dfrac{z^{-8}}{(z^2)^4}$

29. $\dfrac{(a^{-2})^6}{(a^4)^{-3}}$

30. $\dfrac{(b^{-7})^2}{(b^3)^3}$

31. $\dfrac{(-x^3)^2}{(-x)^{-3}}$

32. $\dfrac{(-y^{-1})^{-3}}{(-y^2)^{-2}}$

33. $\dfrac{(x^2y)^{-3}}{(xy)^2}$

34. $\dfrac{(ab^{-2})^{-1}}{a^{-2}b^{-1}}$

35. $\dfrac{(-2xy)^3}{x^3y}$

36. $\dfrac{(-ab^2c)^{-1}}{a^{-2}bc^{-1}}$

37. $\dfrac{(-3x)^2}{-3x^2}$

38. $\dfrac{(2x^2y)^{-1}}{(-2x^2y^3)^2}$

39. $\dfrac{(2a^{-1}b^2)^2}{(a^3b)^3}$

40. $\dfrac{(x^{-3}y^4)^3}{(-3x^2y^{-2})^2}$

41. $x^2(x^4 - 2x)$

42. $x^3(x^{-1} - x)$

43. $2x(x^5 + 3x^{-1})$

44. $3x^2(x^4 + 2x^{-3})$

45. $x^4(2x^2 - x - 3x^{-2})$

46. $2x^{-3}(x^5 - 3x^4 + x)$

47. $(2^{-1} + x^{-1})^{-1}$

48. $[(2x)^{-1} + (2y)^{-1}]^{-1}$

49. $(xy)^{-1}(x^{-1} + y^{-1})^{-1}$

50. $(a^{-2} + b^{-2})^{-1}$

51. $\left(\dfrac{7}{x}\right)\left(\dfrac{3}{14x}\right) + \left(\dfrac{3}{2x}\right)^2$

52. $x^{-3}\left(\dfrac{6}{5x}\right)^{-1} - \left(-\dfrac{1}{2x}\right)^2$

53. $\dfrac{3y}{10x^3} + \dfrac{2}{15xy}$

54. $\dfrac{5}{12x^{-3}} - \dfrac{2}{15x^{-2}}$

55. $\dfrac{1}{2x^{-2}} + \dfrac{1}{3x^{-2}}$

56. $\dfrac{1}{4y^{-4}} - \dfrac{1}{3y^{-4}}$

57. $\left(\dfrac{x^3y}{4}\right) \div \left(\dfrac{4}{x} \div \dfrac{6}{y^3}\right)$

58. $\dfrac{x^{-3}}{4x} - \dfrac{x}{6x^5}$

59. $y^{-5}\left(2xy \div \dfrac{x}{3y^2}\right)$

60. $\left(\dfrac{2}{x} + x^{-1}\right) \div \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{5x^{-2}}\right)$

61. $x^{-1} \div (x + x^{-1})^{-1}$

■ 1-4 EXPONENTES FRACCIONARIOS

Hemos definido a^m cuando m es cualquier entero, ahora extenderemos la definición al caso en que m es un número racional arbitrario. Nos gustaría hacer esta extensión en tal forma que las propiedades 1 a 5 de la sección 1-3 continúen siendo válidas, aun en el caso de que m y n no sean enteros.

En primer término, consideraremos la definición de $a^{1/n}$ cuando n es un entero distinto de cero. Para que la propiedad 3 continúe vigente cuando $m = 1/n$, debe ser válido que

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

De este modo, si hacemos $b = a^{1/n}$, es necesario que $b^n = a$.

EJEMPLO 1

a) $8^{1/3} = 2$ ya que $2^3 = 8$

b) $(-243)^{1/5} = -3$ ya que $(-3)^5 = -243$

En el caso de que n sea un entero par, surgen dos dificultades con esta definición de $a^{1/n}$. Por ejemplo, sea $n = 2$ y $a = 4$. Entonces, $b = 4^{1/2}$ si $b^2 = 4$. Pero hay *dos* números cuyo cuadrado es igual a 4, es decir, $b = 2$ y $b = -2$. De modo que necesitamos decidir qué entenderemos cuando escribamos $b = 4^{1/2}$. En realidad, *definiremos* $4^{1/2}$ como $+2$.

En segundo lugar, suponga que a es negativo. En tal caso, $b = a^{1/2}$ si $b^2 = a$. Sin embargo, el cuadrado de cualquier número negativo (positivo, negativo o cero) nunca es negativo. Por ejemplo, $4^2 = 16$ y $(-3)^2 = 9$, y ambos son positivos. En consecuencia b^2 nunca es negativo para cualquier número real b, de modo que cuando $a < 0$, $a^{1/2}$ no existe en los números reales. Así, $(-1)^{1/2}$ o $(-\frac{4}{3})^{1/2}$ carecen de sentido como números reales. Adoptaremos la siguiente definición.

☛ **17.** Evalúe lo siguiente, si existen: *a*) $(-27)^{1/3}$ *b*) $(64)^{1/6}$ *c*) $\sqrt[5]{-32}$ *d*) $(-\frac{1}{16})^{1/4}$ *e*) $\sqrt[6]{-729}$ *f*) $\sqrt[101]{-1}$

DEFINICIÓN Si n es un entero positivo par (tal como 2, 4 o 6) y si a es un número real *no negativo*, entonces se dice que b es la ***n*-ésima raíz principal de *a*** si $b^n = a$ y $b \geq 0$. Así, la n-ésima raíz de a es el número *no negativo* el cual, al elevarse a la n-ésima potencia, da el número a. Denotamos la n-ésima raíz principal por $b = a^{1/n}$.

Si n es un entero positivo *impar* (tal como 1, 3 o 5) y si a es un número real *cualquiera*, entonces b es la *n-ésima raíz de a* si $b^n = a$, expresada una vez más como $a^{1/n}$. Es decir,

$$b = a^{1/n} \text{ si } b^n = a; \quad b \geq 0 \text{ si } n \text{ es par.}$$

Las raíces impares están definidas para todos los números reales a, pero las raíces pares sólo están definidas cuando a no es negativo.

EJEMPLO 2

a) $32^{1/5} = 2$ porque $2^5 = 32$

b) $(-216)^{1/3} = -6$ ya que $(-6)^3 = -216$

c) $16^{1/4} = 2$ porque $2^4 = 16$ y $2 > 0$

d) $(729)^{1/6} = 3$ ya que $3^6 = 729$ y $3 > 0$

e) $1^{1/n} = 1$ para todo entero positivo n, porque $1^n = 1$

f) $(-1)^{1/n} = -1$ para todo entero positivo impar n, debido a que $(-1)^n = -1$ cuando n es impar.

g) $(-81)^{1/4}$ no existe, porque los números negativos sólo tienen raíces n-ésimas cuando n es impar.

El símbolo $\sqrt[n]{a}$ también se utiliza en vez de $a^{1/n}$. El símbolo $\sqrt{\ }$ se denomina **signo radical** y $\sqrt[n]{a}$ a menudo se llama **radical**. Cuando $n = 2$, $a^{1/2}$ se denota simplemente por $\sqrt{a}$ más bien que por $\sqrt[2]{a}$: se llama la **raíz cuadrada** de a. También, $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$ es la tercera raíz de a, por lo regular se le llama **raíz cúbica**, $\sqrt[4]{a} = a^{1/4}$ es la raíz cuarta de a, etc. Los resultados en el ejemplo 2 pueden volverse a formular utilizando esta notación:

a) $\sqrt[5]{32} = 2$; *b*) $\sqrt[3]{-216} = -6$; *c*) $\sqrt[4]{16} = 2$

d) $\sqrt[6]{729} = 3$; *e*) $\sqrt[n]{1} = 1$ para n un entero positivo

f) $\sqrt[n]{-1} = -1$ para n un entero positivo impar

g) $\sqrt[4]{-81}$ no existe ☛ **17**

Respuesta *a*) –3; *b*) 2; *c*) –2; *d*) y *e*) no existen; *f*) –1

Ahora estamos en posición de definir $a^{m/n}$ para un exponente racional m/n.

DEFINICIÓN Sea n un enero positivo, m un entero distinto de cero y a un número real. Entonces,

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m$$

Es decir, *la* (m/n)*-ésima potencia de a es la m-ésima potencia de la raíz n-ésima de a*.

Observación Si n es par, a no debe ser negativo. Si m es negativo, a no debe ser cero.

EJEMPLO 3

a) $9^{3/2} = (9^{1/2})^3 = 3^3 = 27$

b) $4^{-1/2} = (4^{1/2})^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

c) $16^{-3/4} = (16^{1/4})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

De la parte *b*) del ejemplo 3, podemos generalizar el resultado siguiente:

$$a^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

Esto se sigue dado que

$$a^{-1/n} = (a^{1/n})^{-1} = \frac{1}{a^{1/n}}$$

TEOREMA Si $a^{m/n}$ existe, entonces,

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n}$$

Es decir, *la* (m/n)*-ésima potencia de a es igual a la raíz n-ésima de la m-ésima potencia de a.*

Este teorema, el cual no probaremos, ofrece un método alternativo de calcular cualquier potencia fraccionaria.

EJEMPLO 4

a) $16^{3/4} = (16^{1/4})^3 = 2^3 = 8$, o $16^{3/4} = (16^3)^{1/4} = (4096)^{1/4} = 8$

b) $36^{3/2} = (36^{1/2})^3 = 6^3 = 216$, o $36^{3/2} = (36^3)^{1/2} = (46{,}656)^{1/2} = 216$

Observación Si m/n no está en su mínima expresión, entonces $(a^m)^{1/n}$ puede existir mientras que $a^{m/n}$ no. Por ejemplo, sea $m = 2$, $n = 4$ y $a = -9$. Entonces,

$$(a^m)^{1/n} = [(-9)^2]^{1/4} = 81^{1/4} = 3$$

pero $a^{m/n} = (-9)^{2/4} = [(-9)^{1/4}]^2$ no existe.

Según los ejemplos 3 y 4, es claro que cuando evaluamos $a^{m/n}$, es más fácil extraer la raíz n-ésima primero y después elevar a la m-ésima potencia; de esa manera

☛ **18.** Simplifique *a*) $3^{1/3} \cdot 3^{2/3}$
b) $3^{1/3} \cdot (3^{2/3})^{-2}$; *c*) $(x^{1/2})^3 \cdot \sqrt{x}$
d) $(x^{1/3})^{1/2} \div x^{7/6}$
e) $(8x)^{2/5} \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^{3/5}$

trabajamos con números más pequeños. En otras palabras, en la práctica calculamos $a^{m/n}$ usando la definición $(a^{1/n})$ en vez de $(a^m)^{1/n}$.

Con estas definiciones, es posible demostrar que las leyes de los exponentes, que se establecieron en la sección 1-3, también son válidas para exponentes fraccionarios. Las volvemos a escribir y las ilustramos con algunos ejemplos. Reenunciemos estas leyes, ya que son muy importantes.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	**2.** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	**3.** $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^m = a^m b^m$	**5.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$	

Al utilizar estas leyes, debemos recordar que tienen algunas restricciones: en cualquier potencia, si el exponente es negativo, la base no debe ser cero; y si el exponente contiene una raíz par, la base no debe ser negativa.

EJEMPLO 5

a) $5^3 \cdot 5^{7/2} = 5^{3+7/2} = 5^{13/2}$

b) $4^{-2} \cdot 4^{7/3} = 4^{-2+7/3} = 4^{1/3}$

c) $\dfrac{4^{7/2}}{(4)^{3/2}} = 4^{7/2-3/2} = 4^2 = 16$

d) $\dfrac{9^{1/2}}{9^{-2}} = 9^{1/2-(-2)} = 9^{5/2} = (9^{1/2})^5 = 3^5 = 243$

e) $\dfrac{x^{9/4}}{x^4} = x^{9/4-4} = x^{-7/4}$

f) $(5^3)^{7/6} = 5^{3(7/6)} = 5^{7/2}$

g) $(3^{-4/3})^{-6/5} = 3^{(-4/3)(-6/5)} = 3^{8/5}$

h) $a^{-m} = (a^m)^{-1} = \dfrac{1}{a^m}$ para cualquier número racional m

i) $(36)^{1/2} = (4 \cdot 9)^{1/2} = 4^{1/2} \cdot 9^{1/2} = 2 \cdot 3 = 6$

j) $(x^2y)^{1/2} = (x^2)^{1/2}y^{1/2} = x^{2(1/2)}y^{1/2} = xy^{1/2}$

k) $(3a^{2/5}b^{-4})^{-1/2} = 3^{-1/2}(a^{2/5})^{-1/2}(b^{-4})^{-1/2} = 3^{-1/2}a^{-1/5}b^2$

l) $\sqrt[4]{ab} = (ab)^{1/4} = a^{1/4}b^{1/4} = \sqrt[4]{a}\,\sqrt[4]{b}$

m) $\sqrt{x/y} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/2} = \dfrac{x^{1/2}}{y^{1/2}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

n) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-2/3} = \dfrac{8^{-2/3}}{27^{-2/3}} = \dfrac{(8^{1/3})^{-2}}{(27^{1/3})^{-2}} = \dfrac{2^{-2}}{3^{-2}} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \left(\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{9}{1}\right) = \dfrac{9}{4}$ ☛ **18**

Respuesta *a*) 3; *b*) 3^{-1}; *c*) x^2
d) x^{-1}; *e*) x

EJEMPLO 6 Encuentre m tal que $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{27} = 3^m$.

Solución Expresamos ambos lados como potencia de 3.

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{27} = \frac{9^{1/3}}{3^3} = \frac{(3^2)^{1/3}}{3^3} = \frac{3^{2/3}}{3^3} = 3^{(2/3)-3} = 3^{-7/3}$$

Por tanto, $m = -\dfrac{7}{3}$

EJEMPLO 7 Evalúe: $a)\left(1\,\dfrac{64}{225}\right)^{1/2}$; $b)\left(\dfrac{64x^3}{7}\right)^{-2/3}$

Solución

$$a)\quad \left(1\,\frac{64}{225}\right)^{1/2} = \left(\frac{289}{225}\right)^{1/2} = \left(\frac{17^2}{15^2}\right)^{1/2}$$

$$= \left[\left(\frac{17}{15}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \text{(por la ley 5)}$$

$$= \left(\frac{17}{15}\right)^{2\cdot(1/2)} \qquad \text{(por la ley 3)}$$

$$= \left(\frac{17}{15}\right)^1 = 1\,\frac{2}{15}$$

$$b)\quad \left(\frac{64x^3}{27}\right)^{-2/3} = \left(\frac{4^3x^3}{3^3}\right)^{-2/3} = \left[\left(\frac{4x}{3}\right)^3\right]^{-2/3} \qquad \text{(por la ley 5)}$$

$$= \left(\frac{4x}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{(4x/3)^2} \qquad \text{(por la ley 3)}$$

$$= \frac{1}{16x^2/9} = \frac{9}{16x^2}$$

EJEMPLO 8 Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{4^p \cdot 27^{p/3} \cdot 125^p \cdot 6^{2p}}{8^{p/3} \cdot 9^{3p/2} \cdot 10^{3p}}$$

Solución En expresiones tales como ésta, por lo general conviene escribir todas las bases en términos de sus factores primos.

$$\frac{4^p \cdot 27^{p/3} \cdot 125^p \cdot 6^{2p}}{8^{p/3} \cdot 9^{3p/2} \cdot 10^{3p}} = \frac{(2^2)^p \cdot (3^3)^{p/3} \cdot (5^3)^p \cdot (2\cdot 3)^{2p}}{(2^3)^{p/3} \cdot (3^2)^{3p/2} \cdot (2\cdot 5)^{3p}}$$

$$= \frac{2^{2p} \cdot 3^{3p/3} \cdot 5^{3p} \cdot 2^{2p} \cdot 3^{2p}}{2^{3\cdot(p/3)} \cdot 3^{2\cdot(3p/2)} \cdot 2^{3p} \cdot 5^{3p}} \qquad \text{(por las leyes 3 y 5)}$$

$$= \frac{(2^{2p} \cdot 2^{2p})(3^p \cdot 3^{2p}) \cdot 5^{3p}}{(2^p \cdot 2^{3p})(3^{3p}) \cdot 5^{3p}} \qquad \text{(combinando términos con bases iguales)}$$

$$= \frac{2^{4p} \cdot 3^{3p} \cdot 5^{3p}}{2^{4p} \cdot 3^{3p} \cdot 5^{3p}} = 1$$

EJEMPLO 9 Simplifique $(\sqrt{27} + \sqrt{75})/2\sqrt{12}$.

Solución Observemos que los tres radicales en esta expresión pueden simplificarse factorizando un cuadrado perfecto en cada uno de los números.

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$
$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$
$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Por tanto,

$$\frac{\sqrt{27} + \sqrt{75}}{2\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{2(2\sqrt{3})} = \frac{8\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{8}{4} = 2.$$

☛ **19.** Simplifique *a)* $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$
b) $\sqrt[3]{3} \div (\sqrt[3]{9})^2$
c) $\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt{\sqrt{x}}$
d) $\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x})$

EJEMPLO 10 Simplifique: *a)* $\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2})$; *b)* $\dfrac{\sqrt{x} + 2x}{\sqrt[3]{x}}$

Solución Exprese los radicales en términos de exponentes fraccionarios y luego utilice las propiedades distributivas y las leyes de los exponentes.

$$a)\quad \sqrt{x}(\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}) = x^{1/2}(x^{3/2} + x^{2/3})$$
$$= x^{1/2} \cdot x^{3/2} + x^{1/2} \cdot x^{2/3}$$
$$= x^2 + x^{7/6}$$

$$b)\quad \frac{\sqrt{x} + 2x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{1/2} + 2x}{x^{1/3}}$$
$$= (x^{1/2} + 2x)x^{-1/3}$$
$$= x^{1/2} \cdot x^{-1/3} + 2x^1 \cdot x^{-1/3}$$
$$= x^{1/6} + 2x^{2/3} \quad ☛ \ \mathbf{19}$$

Respuesta *a)* 4; *b)* 3^{-1}; *c)* x
d) $x^2 + 3x$

EJERCICIOS 1-4

(1-6) Encuentre m tal que las proposiciones siguientes sean verdaderas.

1. $8\sqrt[3]{2} = 2^m$ **2.** $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{8} = 2^m$

3. $\sqrt[3]{\dfrac{2}{8}} = 2^m$ **4.** $3\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3^m$

5. $\sqrt{\sqrt{2}} = 4^m$ **6.** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = 2^m$

(7-26) Evalúe las expresiones siguientes.

7. $\sqrt{81}$ **8.** $\sqrt[3]{27}$

9. $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ **10.** $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

11. $\sqrt[5]{-32}$ **12.** $\sqrt[3]{-0.125}$

13. $\sqrt{(-3)^2}$ **14.** $\sqrt{(-\frac{2}{5})^2}$

15. $(81)^{-3/4}$ **16.** $(\frac{8}{27})^{-4/3}$

17. $(0.16)^{-1/2}$ **18.** $(-0.16)^{3/4}$

19. $0.125^{-2/3}$ **20.** $0.0016^{3/4}$

21. $(9^{-3} \cdot 16^{3/2})^{1/6}$ **22.** $9^{3/4} \cdot 3^{-1/2}$

23. $16^{4/5} \cdot 8^{-2/5}$ **24.** $25^{1/3}(\frac{1}{5})^{-4/3}$

25. $(27)^{-2/3} \div (16)^{1/4}$ **26.** $-(\frac{1}{36})^{1/8} \div (6)^{-5/4}$

(27-56) Simplifique las expresiones siguientes.

27. $(16x^4)^{3/4}$ **28.** $\left(\dfrac{27x^3}{64}\right)^{2/3}$

29. $(32x^5y^{-10})^{1/5}$ **30.** $\sqrt[3]{\dfrac{8a^3}{27b^3}}$

31. $\sqrt[4]{x^{3/2} \cdot 16x^{1/2}}$ **32.** $(x^{1/3} \cdot x^{-2/5})^3$

33. $(x^{1/2} \cdot x^{-1/3})^2$ **34.** $(16x^{-4})^{-1/2} \div (8x^6)^{1/3}$

35. $\dfrac{x^{3/7}\,y^{2/5}}{x^{-1/7}\,y^{1/5}}$

36. $\dfrac{a^{4/9}b^{-3/4}}{a^{2/9}b^{-1/2}}$

37. $\left(\dfrac{p^{-1/5}q^{2/5}}{p^{-3/5}q^{-2/5}}\right)^{10}$

38. $\dfrac{(x^2y)^{-1/3}(xy)^{1/4}}{(xy^{-2})^{1/12}}$

39. $\dfrac{2x^{5/2}}{y^{3/4}} \div \dfrac{x^{2/3}}{3y^{2/5}}$

40. $(-2x^2y)^{1/5}(4^{-1}xy^{-2})^{-2/5}$

41. $3\sqrt{45} + \sqrt{20}$

42. $2\sqrt{24} - \sqrt{54}$

43. $2\sqrt{18} - \sqrt{32}$

44. ´$8\sqrt{2}$ –
$4\sqrt{8}$

45. $\sqrt{63} - \sqrt{175} + 4\sqrt{112}$

46. $\sqrt{112} - \sqrt{63} + \dfrac{224}{\sqrt{28}}$

47. $\dfrac{20}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{20} + \dfrac{50}{\sqrt{125}}$

48. $2\sqrt[3]{-16} - \sqrt[3]{-54}$

49. $a^{2/3} \cdot a^{-3/4} \cdot (a^2)^{-1/6} \cdot \dfrac{1}{(a^{1/12})^5}$

50. $a^{2/3} \cdot b^{-5/7} \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{7/8} \cdot \dfrac{a^{11/24}}{b^{23/56}}$

51. $\dfrac{2^{3m} \cdot 3^{2m} \cdot 5^m \cdot 6^m}{8^m \cdot 9^{3m/2} \cdot 10^m}$

52. $\dfrac{(x^{a+b})^2(y^{a+b})^2}{(xy)^{2a-b}}$

53. $\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^c \cdot \left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^a \cdot \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^b$

54. $\left(\dfrac{x^{a+b}}{x^{2b}}\right)\left(\dfrac{x^{b+c}}{x^{2c}}\right)\left(\dfrac{x^{c+a}}{x^{2a}}\right)$

55. $\dfrac{(27)^{2n/3} \cdot (8)^{-n/6}}{(18)^{-n/2}}$

56. $\dfrac{28^m \cdot 35^m \cdot 10^{3m}}{8^{5m/3} \cdot 49^m \cdot 25^{2m}}$

57. Establezca si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas.

a) $\sqrt{5} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$

c) $\sqrt{21} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$

d) $\sqrt{(-3)^2} = 3$

e) $\sqrt{-9} = -3$

f) $\sqrt{a^2} = a$ para todo real a

g) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ si $a > 0$ y $b > 0$

h) $a^m \cdot a^n = a^{mn}$

i) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m/n}$

j) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}} = a^{1/6}$

k) $\sqrt{a^2} = a$ si $a > 0$

■ 1-5 OPERACIONES ALGEBRAICAS

Cantidades del tipo $2x^2 - 3x + 7$, $5y^3 - y^2 + 6y + 2$ y $2x - 3/y + 4$ se denominan **expresiones algebraicas**. Los bloques de construcción de una expresión algebraica se llaman **términos**. Por ejemplo, la expresión $2x^2 - 3x + 7$ tiene tres términos, $2x^2$, $-3x$ y 7. La expresión $x^2y/3 - y/x$ tiene dos términos, $x^2y/3$ y y/x.

En el término $2x^2$, el factor 2 se denomina el **coeficiente numérico** (o simplemente el **coeficiente**). El factor x^2 se denomina la **parte literal** del término. En el término $-3x$, el coeficiente es -3 y la parte literal x. En el término $x^2y/3$, el coeficiente es $\frac{1}{3}$ y la parte literal es x^2y. El término 7 no tiene parte literal y se llama **término constante**. El coeficiente es 7.

Una expresión algebraica que contiene un solo término se denomina **monomio**. Una expresión que contiene exactamente dos términos se llama **binomio** y la que contiene precisamente tres términos se denomina **trinomio**. Los siguientes son unos cuantos ejemplos de expresiones de estos tipos.

Monomios: $2x^3$, $-5y^2$, $7/t$, 3, $2xy/z$

Binomios: $2x + 3$, $3x^2 - 5/y$, $6x^2y - 5zt$

Trinomios: $5x^2 + 7x - 1$, $2x^3 + 4x - 3/x$, $6y^2 - 5x + t$

En general una expresión que contiene más de un término se denomina **multinomio**.