Capítulo

3

VECTORES EN $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$

En la sección 1.5 se definieron los vectores columna y vectores renglón como conjuntos ordenados de n números reales o escalares. En el siguiente capítulo se definirán otros tipos de conjuntos de vectores, denominados *espacios vectoriales.*

En principio, el estudio de los espacios vectoriales arbitrarios es un tema abstracto. Por esta razón es útil poder contar con un grupo de vectores que se pueden visualizar fácilmente para usarlos como ejemplos.

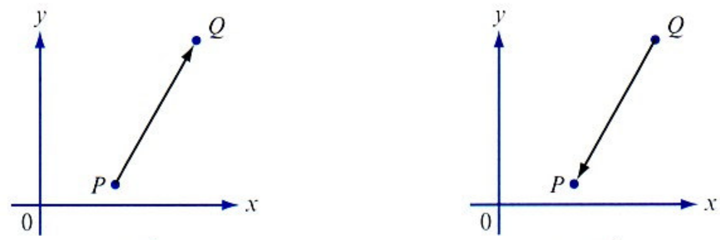
En el presente capítulo se discutirán las propiedades básicas de los vectores en el plano xy y en el espacio real de tres dimensiones. Los estudiantes que conocen el cálculo de varias variables ya habrán conocido este material, en cuyo caso se podrá cubrir rápidamente, a manera de repaso. Para los que no, el estudio de este capítulo proporcionará ejemplos que harán mucho más comprensible el material de los capítulos 4 y 5.

3.1 VECTORES EN EL PLANO

Como se definió en la sección 1.5, $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de vectores (x_1, x_2) con x_1 y x_2 números reales. Como cualquier punto en el plano se puede escribir en la forma (x, y) es evidente que se puede pensar que cualquier punto en el plano es un vector en $\mathbb{R}^2$, y viceversa. De este modo, los términos "el plano" y "$\mathbb{R}^2$" con frecuencia son intercambiables. Sin embargo, para muchas aplicaciones físicas (incluyendo las nociones de fuerza, velocidad, aceleración y momento) es importante pensar en un vector no como un punto sino como una entidad que tiene "longitud" y "dirección". Ahora se verá cómo se lleva a cabo esto.

SEGMENTO DE RECTA DIRIGIDO

Sean P y Q dos puntos en el plano. Entonces el **segmento de recta dirigido** de P a Q, denotado por $\overrightarrow{PQ}$, es el segmento de recta que va de P a Q (vea la figura 3.1a). Observe que los segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ son diferentes puesto que tienen direcciones opuestas (figura 3.1b).



a) $\overrightarrow{PQ}$ *b*) $\overrightarrow{QP}$

Figura 3.1

Los segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ apuntan hacia direcciones opuestas

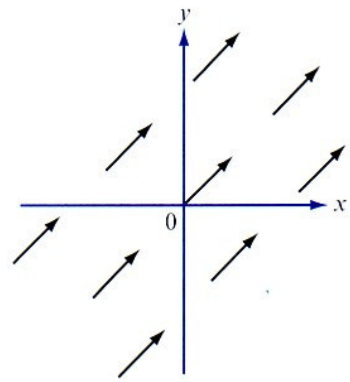


Figura 3.2

Un conjunto de segmentos de recta dirigidos equivalentes

PUNTO INICIAL

PUNTO TERMINAL

SEGMENTOS DE RECTA DIRIGIDOS EQUIVALENTES

El punto P en el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ se denomina **punto inicial** del segmento y el punto Q se denomina **punto terminal**. Las dos propiedades más importantes de un segmento de recta dirigido son su magnitud (longitud) y su dirección. Si dos segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma magnitud y dirección, se dice que son **equivalentes** sin importar en dónde se localizan respecto al origen. Los segmentos de recta dirigidos de la figura 3.2 son todos equivalentes.

DEFINICIÓN **1**

Definición geométrica de un vector

El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama **vector**. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina una **representación** del vector.

Observación. Los segmentos de recta dirigidos en la figura 3.2 son todos representaciones del mismo vector.

De la definición 1 se observa que un vector dado **v** se puede representar de múltiples formas. Sea $\overrightarrow{PQ}$ una representación de **v**. Entonces, sin cambiar magnitud ni dirección, se puede mover $\overrightarrow{PQ}$ en forma paralela de manera que su punto inicial se traslada al origen. Después se obtiene el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{0R}$, que es otra representación del vector **v** (vea la figura 3.3). Ahora suponga que la R tiene las coordenadas cartesianas (a, b). Entonces se puede describir el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{0R}$ por las coordenadas (a, b). Es decir, $\overrightarrow{0R}$ es el segmento de recta dirigido con punto inicial $(0, 0)$ y punto terminal (a, b). Puesto que una representación de un vector es tan buena como cualquier otra, se puede escribir el vector **v** como (a, b).

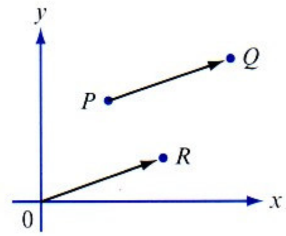


Figura 3.3

Se puede mover $\overrightarrow{PQ}$ para obtener un segmento de recta dirigido equivalente con su punto inicial en el origen. Observe que $\overrightarrow{0R}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son paralelos y tienen la misma longitud

DEFINICIÓN 2

Definición algebraica de un vector

Un **vector v** en el plano xy es un par ordenado de números reales (a, b). Los números a y b se denominan **elementos** o **componentes** del vector **v**. El **vector cero** es el vector (0, 0).

Observación 1. Con esta definición es posible pensar en un punto en el plano xy con coordenadas (a, b) como un vector que comienza del origen y termina en (a, b).

Observación 2. El vector cero tiene magnitud cero. Por lo tanto, puesto que los puntos inicial y terminal coinciden, se dice que el vector cero *no tiene dirección.*

Observación 3. Se hace hincapié en que las definiciones 1 y 2 describen, precisamente, los mismos objetos. Cada punto de vista (geométrico o algebraico) tiene sus ventajas. La definición 2 es la definición de un 2-vector que se ha estado utilizando.

MAGNITUD O LONGITUD DE UN VECTOR

Puesto que en realidad un vector es un conjunto de segmentos de recta equivalentes, se define la **magnitud** o **longitud de un vector** como la longitud de cualquiera de sus representaciones y su **dirección** como la dirección de cualquiera de sus representaciones. Haciendo uso de la representación $\overrightarrow{0R}$ y escribiendo el vector $\mathbf{v} = (a, b)$ se encuentra que

$$\boxed{|\mathbf{v}| = \text{magnitud de } \mathbf{v} = \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \textbf{(1)}$$

Esto se deduce del teorema de Pitágoras (vea la figura 3.4). Se ha usado la notación $|\mathbf{v}|$ para denotar a la magnitud de **v**. Observe que $|\mathbf{v}|$ es un *escalar.*

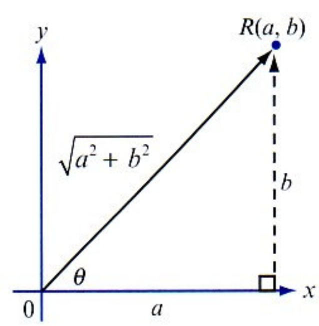


Figura 3.4

La magnitud de un vector con coordenada x igual a a y coordenada y igual a b es $\sqrt{a^2 + b^2}$

EJEMPLO 1 **Cálculo de la magnitud de seis vectores**

Calcule las magnitudes de los vectores *i*) $\mathbf{v} = (2, 2)$; *ii*) $\mathbf{v} = (2, 2\sqrt{3})$; *iii*) $\mathbf{v} = (-2\sqrt{3}, 2)$; *iv*) $\mathbf{v} = (-3, -3)$; *v*) $\mathbf{v} = (6, -6)$; *vi*) $\mathbf{v} = (0, 3)$.

Solución

i. $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ii. $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

iii. $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

iv. $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

v. $|\mathbf{v}| = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

vi. $|\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$

DIRECCIÓN DE UN VECTOR

Se define la **dirección** del vector $\mathbf{v} = (a, b)$ como el ángulo θ, medido en radianes, que forma el vector con el lado positivo del eje x. Por convención, se escoge θ tal que $0 \leq \theta < 2\pi$. De la figura 3.4 se deduce que si $a \neq 0$, entonces

$$\boxed{\tan\theta = \frac{b}{a}} \qquad (2)$$

Nota. $\tan\theta$ es periódica con periodo π, entonces si $a \neq 0$ siempre existen *dos* números en $[0, 2\pi)$ tales que $\tan\theta = \frac{b}{a}$. Por ejemplo, $\tan\frac{\pi}{4} = \tan\frac{5\pi}{4} = 1$. Para determinar θ de manera única es necesario determinar el cuadrante de $\mathbf{v}$, como se apreciará en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Cálculo de las direcciones de seis vectores

Calcule las direcciones de los vectores en el ejemplo 1.

Solución

Estos seis vectores están dibujados en la figura 3.5.

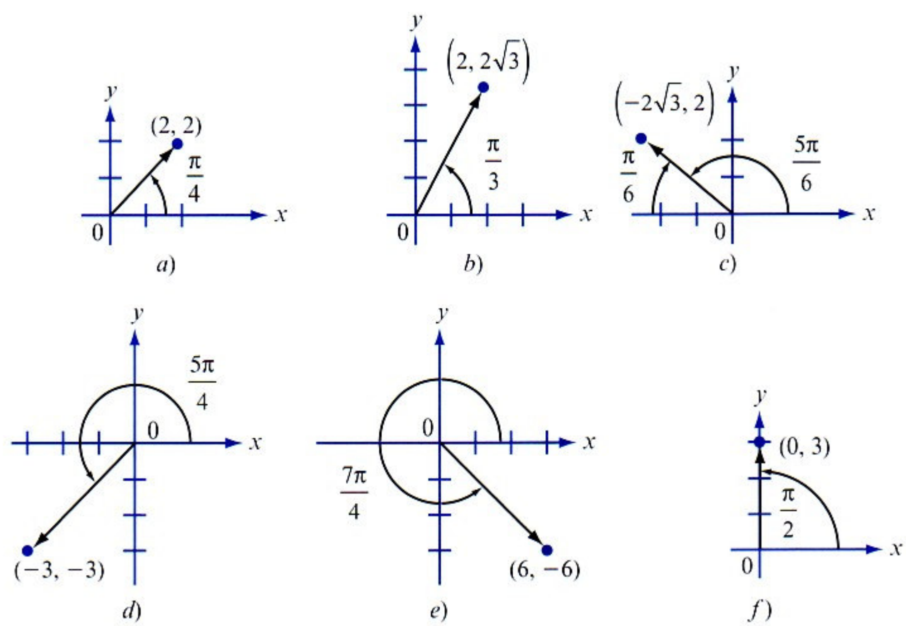


Figura 3.5
Direcciones de seis vectores

i. $\mathbf{v}$ se encuentra en el primer cuadrante y como $\tan\theta = 2/2 = 1, \theta = \pi/4$.

ii. $\theta = \tan^{-1} 2\sqrt{3}/2 = \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi/3$ (ya que $\mathbf{v}$ está en el primer cuadrante).

iii. $\mathbf{v}$ está en el segundo cuadrante y como $\tan^{-1} 2/2\sqrt{3} = \tan^{-1} 1/\sqrt{3} = \pi/6$, y de la figura 3.5*c* que $\theta = \pi - (\pi/6) = 5\pi/6$.

iv. $\mathbf{v}$ está en el tercer cuadrante, y como $\tan^{-1} 1 = \pi/4$, se encuentra que $\theta = \pi + (\pi/4) = 5\pi/4$.

v. Como $\mathbf{v}$ está en el cuarto cuadrante y $\tan^{-1}(-1) = -\pi/4$, se obtiene $\theta = 2\pi - (\pi/4) = 7\pi/4$.

vi. No se puede usar la ecuación (2) porque b/a no está definido. No obstante, en la figura 3.5*f* se ve que $\theta = \pi/2$.

En general, si $b > 0$

$$\text{Dirección de } (0, b) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \text{dirección de } (0, -b) = \frac{3\pi}{2} \qquad b > 0$$

En la sección 1.5 se definió la suma de vectores y la multiplicación por un escalar. ¿Qué significan en términos geométricos estos conceptos? Se comienza con la multiplicación por un escalar. Si $\mathbf{v} = (a, b)$, entonces $\alpha\mathbf{v} = (\alpha a, \alpha b)$. Se encuentra que

$$|\alpha\mathbf{v}| = \sqrt{\alpha^2 a^2 + \alpha^2 b^2} = |\alpha|\sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha||\mathbf{v}| \qquad \textbf{(3)}$$

es decir,

Magnitud de $\alpha\,\mathbf{v}$

Multiplicar un vector por un escalar diferente de cero tiene el efecto de multiplicar la longitud del vector por el valor absoluto de ese escalar.

■

Más aún, si $\alpha > 0$, entonces $\alpha\mathbf{v}$ está en el mismo cuadrante que $\mathbf{v}$ y, por lo tanto, la dirección de $\alpha\mathbf{v}$ es la *misma* que la dirección de $\mathbf{v}$ ya que $\tan^{-1}(\alpha b/\alpha a) = \tan^{-1}(b/a)$. Si $\alpha < 0$, entonces $\alpha\mathbf{v}$ tiene dirección opuesta a la de $\mathbf{v}$. En otras palabras,

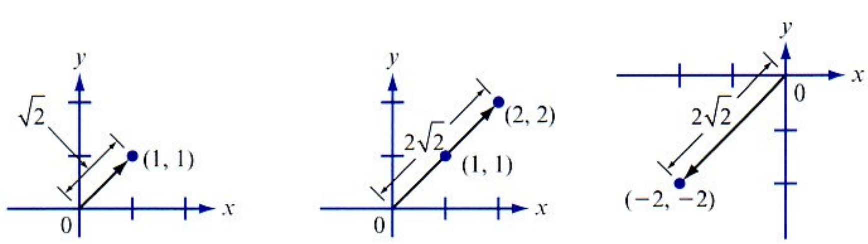
Dirección de $\alpha\,\mathbf{v}$

Dirección de $\alpha\mathbf{v}$ = dirección de $\mathbf{v}$, si $\alpha > 0$ **(4)**
Dirección de $\alpha\mathbf{v}$ = (dirección de $\mathbf{v}$) + π si $\alpha < 0$

■

Figura 3.6

El vector $2\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ y el doble de su magnitud. El vector $-2\mathbf{v}$ tiene dirección opuesta a $\mathbf{v}$ y el doble de su magnitud



a) El vector original $\mathbf{v}$ *b*) $2\mathbf{v}$ *c*) $-2\mathbf{v}$

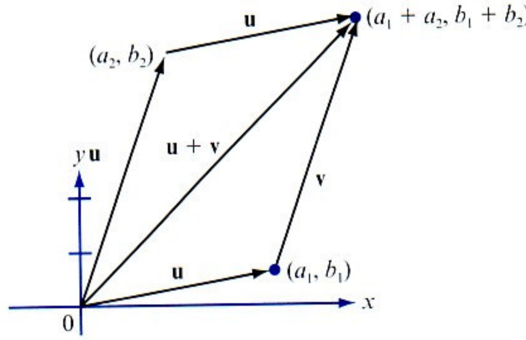


Figura 3.7
La regla del paralelogramo para sumar vectores

EJEMPLO 3 Multiplicación de un vector por un escalar

Sea $\mathbf{v} = (1,1)$. Entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ y $|2\mathbf{v}| = |(2,2)| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2|\mathbf{v}|$. Todavía más, $|-2\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2} = 2|\mathbf{v}|$. Así, la dirección de $2\mathbf{v}$ es $\pi/4$, mientras que la dirección de $-2\mathbf{v}$ es $5\pi/4$ (vea la figura 3.6).

Ahora suponga que se suman dos vectores: $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$ como en la figura 3.7. De la figura se puede apreciar que el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ se puede obtener trasladando la representación del vector $\mathbf{v}$ de manera que su punto inicial coincida el punto terminal (a_1, b_1) del vector $\mathbf{u}$. Por lo tanto, se puede obtener el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ dibujando un paralelogramo con un vértice en el origen y lados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector que va del origen a lo largo de la diagonal del paralelogramo.

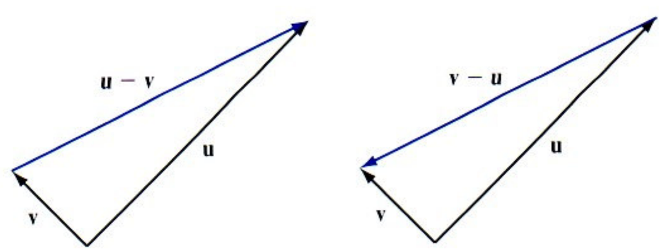
Nota. Al igual que un segmento de recta es la distancia más corta entre dos puntos, se deduce de inmediato, de la figura 3.7, que

Desigualdad del triángulo

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \tag{5}$$

Por razones que resultan obvias en la figura 3.7, la desigualdad (5) se denomina **desigualdad del triángulo.**

También se puede utilizar la figura 3.7 para obtener una representación geométrica del vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Como $\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{v}$, el vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es el vector que se debe sumar a $\mathbf{v}$ para obtener $\mathbf{u}$. Este hecho se ilustra en la figura 3.8*a*. Un hecho similar se ilustra en la figura 3.8*b*.



a) *b*)

Figura 3.8
Los vectores u − v y v − u tienen la misma magnitud pero direcciones opuestas

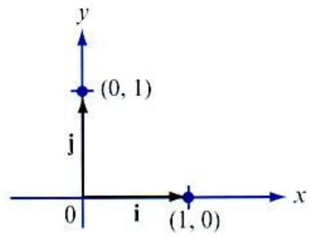


Figura 3.9
Los vectores i y j

Existen dos vectores especiales en $\mathbb{R}^2$ que nos permiten representar otros vectores en el plano de una forma conveniente. Se denota el vector (1, 0) por el símbolo **i** y el vector (0, 1) por el símbolo **j** (vea la figura 3.9). Si $\mathbf{v} = (a, b)$ es cualquier vector en el plano, entonces como $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$, se puede escribir

$$\boxed{\mathbf{v} = (a, b) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}} \tag{6}$$

Con esta representación se dice que **v** está *expresado en sus componentes horizontal y vertical.* Los vectores **i** y **j** tienen dos propiedades:

i. Ninguno de ellos es múltiplo del otro. (En la terminología del capítulo 4, son *linealmente independientes*.)

ii. Cualquier vector **v** se puede escribir en términos de **i** y **j** como en la ecuación (6).†

Nota histórica. Hamilton utilizó por primera vez los símbolos **i** y **j**. Definió su cuaternión como una cantidad de la forma $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, donde a es la "parte escalar" y $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ es la "parte vectorial". En la sección 3.3 se escribirán los vectores en el espacio en la forma $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

Bajo estas dos condiciones se dice que **i** y **j** forman una **base** en $\mathbb{R}^2$. En el capítulo 4 se estudiarán las bases en espacios vectoriales arbitrarios.

Ahora se definirá un tipo de vector que es muy útil en ciertas aplicaciones.

DEFINICIÓN 3 **Vector unitario**

Un **vector unitario** es un vector con longitud 1.

EJEMPLO 4 Un vector unitario

El vector $\mathbf{u} = (1/2)\mathbf{i} + (\sqrt{3}/2)\mathbf{j}$ es un vector unitario ya que

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

† En la ecuación (6) se dice que **v** se puede escribir como una *combinación lineal* de **i** y **j**. Se estudiará el concepto de combinación lineal en la sección 4.5.

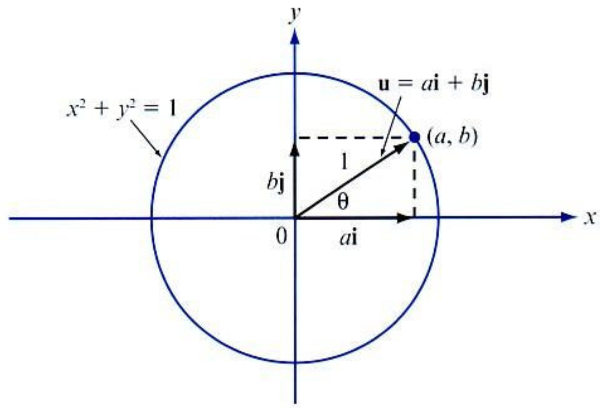


Figura 3.10
El punto terminal de un vector unitario que tiene su punto inicial en el origen se encuentra sobre el círculo unitario (círculo centrado en el origen con radio 1)

Sea $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ un vector unitario. Entonces $|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, de manera que $a^2 + b^2 = 1$ y $\mathbf{u}$ se puede representar por un punto en el círculo unitario (vea la figura 3.10). Si θ es la dirección de $\mathbf{u}$, es claro que $a = \cos\theta$ y $b = \operatorname{sen}\theta$. De este modo, cualquier vector unitario $\mathbf{u}$ se puede escribir en la forma

Representación de un vector unitario

$$\mathbf{u} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} \tag{7}$$

donde θ es la dirección de $\mathbf{u}$.

EJEMPLO 5 **Cómo escribir un vector unitario como $(\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$**

El vector unitario $\mathbf{u} = (1/2)\mathbf{i} + (\sqrt{3}/2)\mathbf{j}$ del ejemplo 4 se puede escribir en la forma de (7) con $\theta = \cos^{-1}(1/2) = \pi/3$.

También se tiene (vea el problema 23)

Sea $\mathbf{v}$ un vector diferente de cero. Entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$.

■

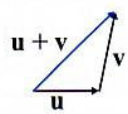
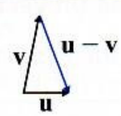
EJEMPLO 6 **Cómo encontrar un vector unitario con la misma dirección que un vector dado diferente de cero**

Encuentre un vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

Solución Aquí $|\mathbf{v}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, por lo que $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}| = (2/\sqrt{13})\mathbf{i} - (3/\sqrt{13}\,\mathbf{j})$ es el vector que se busca.

Se concluye esta sección con un resumen de las propiedades de los vectores.

Tabla 3.1

Objeto	Definición intuitiva	Expresión en términos de componentes si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$, y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$
Vector $\mathbf{v}$	Un objeto que tiene magnitud y dirección	$v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ o (v_1, v_2)
$\lvert\mathbf{v}\rvert$	Magnitud (o longitud) de $\mathbf{v}$	$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
$\alpha\mathbf{v}$	$\nearrow \mathbf{v}$ $\nearrow \alpha\mathbf{v}$ (en este dibujo $\alpha = 2$)	$\alpha v_1\mathbf{i} + \alpha v_2\mathbf{j}$ o $(\alpha v_1, \alpha v_2)$
$-\mathbf{v}$	$\nearrow \mathbf{v}$ $\swarrow -\mathbf{v}$	$-v_1\mathbf{i} - v_2\mathbf{j}$ o $(-v_1, -v_2)$ o $-(v_1, v_2)$
$\mathbf{u} + \mathbf{v}$		$(u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\mathbf{j}$ o $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
$\mathbf{u} - \mathbf{v}$		$(u_1 - v_1)\mathbf{i} + (u_2 - v_2)\mathbf{j}$ o $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

Problemas 3.1

AUTOEVALUACIÓN

I. Un *vector* es__________.

a) dos puntos en el plano xy.

b) un segmento de recta entre dos puntos.

c) un segmento de recta dirigido de un punto a otro.

d) una colección de segmentos de recta dirigidos equivalentes.

II. Si $P = (3, -4)$ y $Q = (8, 6)$ el vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene longitud _______.

a) $\lvert 3\rvert + \lvert -4\rvert$ *b)* $(3)^2 + (-4)^2$ *c)* $(3-8)^2 + (-4-6)^2$ *d)* $\sqrt{(8-3)^2 + (6-(-4))^2}$

III. La dirección del vector $(4, 8)$ es ________.

a) π *b)* $\tan^{-1}(8-4)$ *c)* $\left(\frac{8}{4}\right)\pi$ *d)* $\tan^{-1}\left(\frac{8}{4}\right)$

IV. Si $\mathbf{u} = (3, 4)$ y $\mathbf{v} = (5, 8)$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ________.

a) $(7, 13)$ *b)* $(8, 12)$ *c)* $(2, 4)$ *d)* $(15, 32)$

V. Si $\mathbf{u} = (4, 3)$, entonces el vector unitario con la misma dirección es que $\mathbf{u}$ es _______.

a) $(0.4, 0.3)$ *b)* $(0.8, 0.6)$ *c)* $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ *d)* $\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$

De los problemas 1 al 16 encuentre la magnitud y dirección del vector dado.

1. $\mathbf{v} = (4, 4)$ **2.** $\mathbf{v} = (-4, 4)$ **3.** $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, -2)$ **4.** $\mathbf{v} = (4, -4)$

5. $\mathbf{v} = (-4, -4)$ **6.** $\mathbf{v} = (-\sqrt{3}, -2)$ **7.** $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, 1)$ **8.** $\mathbf{v} = (1, \sqrt{3})$

9. $\mathbf{v} = (-2, \sqrt{3})$ **10.** $\mathbf{v} = (-1, \sqrt{3})$ **11.** $\mathbf{v} = (1, -\sqrt{3})$ **12.** $\mathbf{v} = (3, 2)$

13. $\mathbf{v} = (-1, -\sqrt{3})$ **14.** $\mathbf{v} = (1, 2)$ **15.** $\mathbf{v} = (-5, 8)$ **16.** $\mathbf{v} = (11, -14)$

17. Sea $\mathbf{u} = (2, 3)$ y $\mathbf{v} = (-5, 4)$. Encuentre *a*) $3\mathbf{u}$; *b*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *c*) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$; *d*) $2\mathbf{u} - 7\mathbf{v}$. Bosqueje estos vectores.

18. Sea $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Encuentre: *a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *b*) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$; *c*) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$; *d*) $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$; *e*) $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; *f*) $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$. Bosqueje estos vectores.

19. Sea $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$. Encuentre *a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *b*) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$; *c*) $3\mathbf{u}$; *d*) $-7\mathbf{v}$; *e*) $8\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; *f*) $4\mathbf{v} - 6\mathbf{u}$. Bosqueje estos vectores.

20. Demuestre que el vector $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ es un vector unitario.

21. Muestre que los vectores **i** y **j** son vectores unitarios.

22. Demuestre que el vector $\left(1/\sqrt{2}\right)\mathbf{i} + \left(1/\sqrt{2}\right)\mathbf{j}$ es un vector unitario.

23. Demuestre que si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \neq 0$, entonces $\mathbf{u} = \left(a/\sqrt{a^2 + b^2}\right)\mathbf{i} + \left(b/\sqrt{a^2 + b^2}\right)\mathbf{j}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que **v**.

De los problemas 24 al 29 encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

24. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **25.** $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ **26.** $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ **27.** $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

28. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ **29.** $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$; $a \neq 0$

30. Si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ demuestre que $a/\sqrt{a^2 + b^2} = \cos\theta$ y $b/\sqrt{a^2 + b^2} = \operatorname{sen}\theta$, donde θ es la dirección de **v**.

31. Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ encuentre sen θ y cos θ.

32. Si $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ encuentre sen θ y cos θ.

Un vector **v** tiene dirección opuesta a la del vector **u** si dirección de **v** = dirección de **u** + π. De los problemas 33 al 38 encuentre un vector unitario **v** que tenga dirección opuesta a la dirección del vector dado **u**.

33. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ **34.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **35.** $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ **36.** $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

37. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **38.** $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

39. Sea $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que: *a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *b*) $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; *c*) $3\mathbf{u} + 8\mathbf{v}$.

40. Sea $P = (c, d)$ y $Q = (c + a, d + b)$. Muestre que la magnitud de $\overrightarrow{PQ}$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$.

41. Demuestre que la dirección de $\overrightarrow{PQ}$ en el problema 30 es la misma que la dirección del vector (a, b). [*Sugerencia:* si $R = (a, b)$, demuestre que la recta que pasa por los puntos P y Q es paralela a la recta que pasa por los puntos 0 y R.]

1. *a*) Utilice MATLAB para verificar los resultados obtenidos con lápiz y papel para la magnitud y dirección de los vectores de los problemas impares 1 al 12 de esta sección.

Nota. $\sqrt{3}$ se encuentra con **sqrt(3)**.

b) Utilice MATLAB para encontrar la magnitud y dirección de los vectores en los problemas pares 38 al 49 en esta sección.

2. Las combinaciones lineales de vectores serán importantes en el trabajo futuro. Este problema describe una manera de visualizar las combinaciones lineales de vectores en el plano (vea también el problema 3 siguiente).

a) Se quieren graficar varias combinaciones lineales de dos vectores dados en el mismo conjunto de ejes. Cada vector será representado por un recta de (0, 0) al punto terminal del vector. Sean **u** y **v** dos matrices (vectores) de 2×1 dadas. Se quieren graficar varios vectores **z**, donde $\mathbf{z} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ con $-1 \leq a, b \leq 1$ para ayudar a la comprensión de la geometría de una combinación lineal. Lea la nota sobre *gráficas* que se presentó antes de estos problemas de MATLAB.

Introduzca **u** y **v** como vectores columna, elegidos por usted tales que no sean paralelos. Dé lo siguiente:

```
w=u+v;ww=u-v;aa=[u',v',w',ww'];M=max(abs(aa))
axis('square');axis([-M M -M M])
plot([0 v(1)],[0,v(2)],[0,u(1)],[0,u(2)])
hold on
grid
```

Con esto verá **u** y **v** graficados. Los siguientes comandos de MATLAB grafican la combinación lineal entre los vectores **u** y **v**

```
a=1; b=1;
z=a*u1b*v;
plot([0 z(1)],[0 z(2)],'c','linewidth',5')
```

Repita cinco veces los tres renglones de comandos anteriores, pero modifique la elección de a y b con $0 \leq a, b \leq 1$ (recuerde que puede usar las flechas hacia arriba). Observe la geometría de cada combinación lineal conforme obtenga cada una de las gráficas.

¿Cómo se verá la pantalla de gráficas si se grafican múltiples casos de a y b?

Repita seis veces los últimos tres renglones de comandos con los siguientes cambios: cambie **'c'** a **'r'** y elija al menos otras seis a y b para $0 \leq a \leq 1$ y $-1 \leq b \leq 0$. Sea $a = 1$ y $b = -1$ la primera elección. Observe la geometría y conteste la pregunta anterior.

Repita los últimos tres renglones de comandos seis veces con los siguientes movimientos: cambie **'c'** a **'m'** y elija por lo menos otras seis a y b para $-1 \leq a \leq 0$ y $0 \leq b \leq 1$. Sean $a = -1$ y $b = 1$ los primeros valores. Observe la geometría y conteste la pregunta anterior.

Repita seis veces más los últimos tres renglones de comandos con los siguientes movimientos: cambie **'c'** a **'k'** y elija por lo menos otros seis valores de a y b para $-1 \leq a, b \leq 1$. Sean $a = -1$ y $b = -1$ los primeros valores. Observe la geometría y responda la pregunta, igual que antes.

¿Cómo se vería la pantalla de gráficas si se graficaran cada vez más combinaciones lineales?

Al terminar este problema dé el comando **hold off**.

b) Siguiendo las instrucciones anteriores, explore lo que ocurre si comienza con **u** y **v** paralelos.
Al terminar este problema, dé el comando **hold off**.

3. (*Este problema usa el archivo lincomb.m*) Dados dos vectores no paralelos en el plano, se puede escribir otro vector en el plano como una combinación lineal de estos dos vectores. El archivo *lincomb.m* se presenta a continuación.

M

```
function lincomb(u,v,w)
% LINCOMB funcion que grafica los vectores u,v,w y
%       se expresa w como la combinacion lineal del u,v es decir
%          w = a u + b v, con a,b reales
%
%     u: vector de 2x1
%     v: vector de 2x1
%     w: vector de 2x1

% define el origen
origen=[0;0];
% se encuentran los valores de las constantes de la combinacion
lineal
A=[u,v];
xx=A\w;
Ou=[origen,u];
Ov=[origen,v];
Ow=[origen,w];
PP1=[origen,xx(1)*u,xx(1)*u+xx(2)*v,xx(2)*v,origen];
%Grafica de vectores
plot(Ou(1,:),Ou(2,:),'-*b',Ov(1,:),Ov(2,:),'-
*b',Ow(1,:),Ow(2,:),'-*g')
text(u(1)/2,u(2)/2,'\bf u')
text(v(1)/2,v(2)/2,'\bf v')
text(w(1)/2,w(2)/2,'\bf w')
hold on
plot(PP1(1,:),PP1(2,:),':r')
grid on
%
title(['u=[',num2str(u(1)),';',num2str(u(2)),'], ',...
    'v=[',num2str(v(1)),';',num2str(v(2)),'], ',...
    'w=[',num2str(w(1)),';',num2str(w(2)),']'])
xlabel(['w = (',num2str(xx(1),2),') u + (',num2str(xx(2),2),
') v'])
%
```

```
axis square
a=axis;
axis([min(a([1,3])),max(a([2,4])),min(a([1,3])),max(a([2,4]))])
%
hold off
```

Una vez que se haya escrito la función en un archivo con nombre *lincomb.m*, dé el comando **doc lincomb** para tener una descripción de este archivo con extensión *m*.

Sean **u** y **v** dos vectores de 2×1 que no son paralelos. Sea **w = 5*(2*rand(2,1)−1)**. Dé **lincomb(u,v,w)**. Primero verá graficados **u**, **v** y **w**. Oprima cualquier tecla y aparecerá la geometría de **w** escrita como una combinación lineal de **u** y **v**. Repita para diferentes vectores **w**, **u** y **v**.

3.2 EL PRODUCTO ESCALAR Y LAS PROYECCIONES EN $\mathbb{R}^2$

En la sección 1.6 se definió el producto escalar de dos vectores. Si $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v}$ (a_2, b_2), entonces

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2} \qquad (1)$$

Ahora se verá la interpretación geométrica del producto escalar.

DEFINICIÓN 1 **Ángulo entre vectores**

Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Entonces el **ángulo** φ **entre u y v** está definido como el ángulo no negativo más pequeño† entre las representaciones de **u** y **v** que tienen el origen como punto inicial. Si $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ para algún escalar α, entonces $\varphi = 0$ si $\alpha > 0$ y $\varphi = \pi$ si $\alpha < 0$.

Esta definición se ilustra en la figura 3.11. Observe que φ siempre se puede elegir para que sea un ángulo no negativo en el intervalo $[0, \pi]$.

TEOREMA 1

Sea **v** un vector. Entonces

$$\boxed{|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \qquad (2)$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $\mathbf{v} = (a, b)$. Entonces

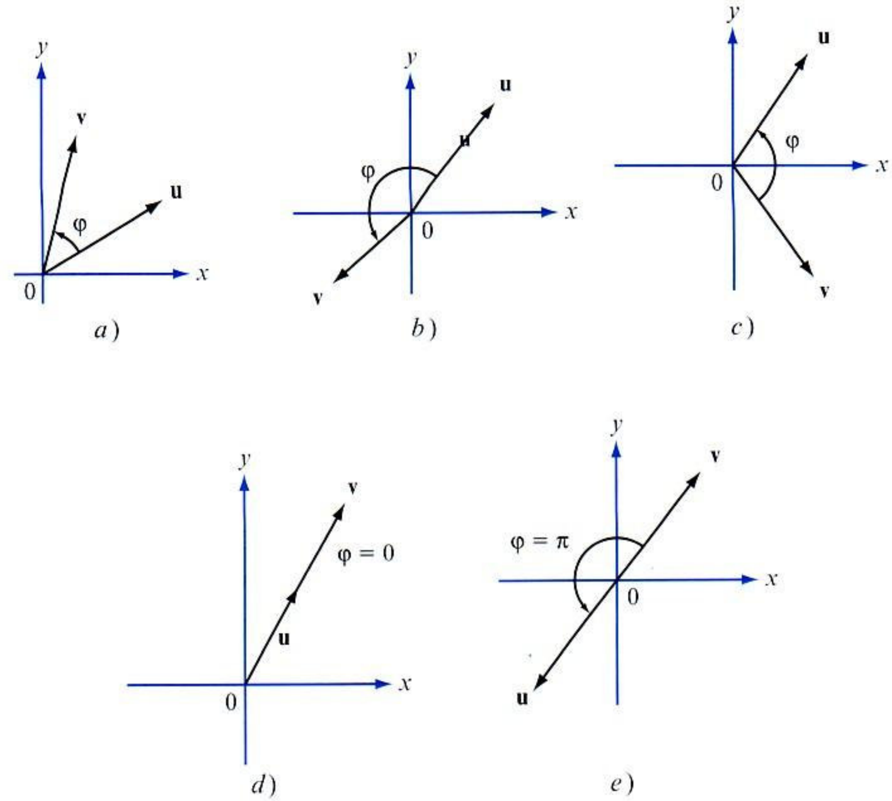
$$|\mathbf{v}|^2 = a^2 + b^2$$

y

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (a, b) \cdot (a, b) = a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 = |\mathbf{v}|^2$$

† Este ángulo estará en el intervalo $[0, \pi]$.

Figura 3.11
Ángulo φ entre dos vectores



Teorema 2 Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Si φ es el ángulo entre ellos, entonces

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}} \tag{3}$$

Demostración La ley de los cosenos (vea el problema 2.5.10, página 215) establece que en el triángulo de la figura 3.12

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

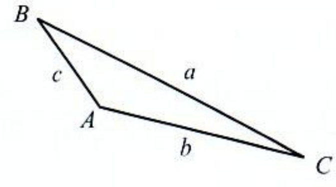


Figura 3.12
Triángulo con lados a, b y c

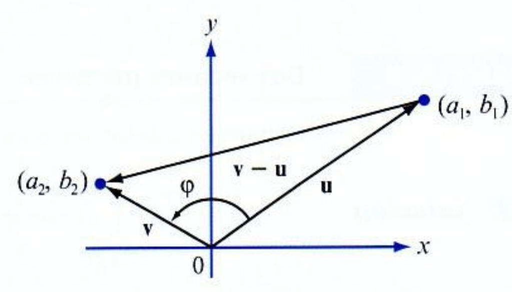


Figura 3.13
Triángulo con lados $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ y $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|$

Ahora se colocan las representaciones de **u** y **v** con los puntos iniciales en el origen de manera que $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$ (vea la figura 3.13). Entonces de la ley de los cosenos, $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \varphi$. Pero

$$|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 \overset{\text{de (2)}}{=} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \overset{\text{teorema 1 } iii\text{), pág. 59}}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$
$$= |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{u}|^2$$

Así, después de restar $|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2$ en ambos lados de la igualdad, se obtiene $-2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \varphi$, y el teorema queda demostrado.

Observación. Haciendo uso del teorema 1 se puede definir el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ como

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \varphi}$$

EJEMPLO 1 Cálculo del ángulo entre dos vectores

Encuentre el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Solución

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -14 + 3 = -11$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$. Así

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{50}} = \frac{-11}{\sqrt{650}} \approx -0.431455497^{\dagger}$$

de manera que

$$\varphi = \cos^{-1}(-0.431455497) \approx 2.0169^{\ddagger} \quad (\approx 115.6^{\circ})$$

Nota. Como $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\cos^{-1}(\cos \varphi) = \varphi$.

DEFINICIÓN 2 Vectores paralelos

Dos vectores diferentes de cero **u** y **v** son **paralelos** si el ángulo entre ellos es cero o π. Observe que los vectores paralelos tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

EJEMPLO 2 Dos vectores paralelos

Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = (2, -3)$ y $\mathbf{v} = (-4, 6)$ son paralelos.

Solución

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{-8 - 18}{\sqrt{13}\sqrt{52}} = \frac{-26}{\sqrt{13}(2\sqrt{13})} = \frac{-26}{2(13)} = -1$$

Por lo tanto, $\varphi = \pi$ (de manera que **u** y **v** tienen direcciones opuestas).

† Estos números, al igual que otros en el libro, se obtuvieron con una calculadora.

‡ Al hacer este cálculo, asegúrese de que su calculadora esté en modo de radianes.

TEOREMA 3 Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para alguna constante α si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.

DEMOSTRACIÓN La prueba se deja como ejercicio (vea el problema 44).

DEFINICIÓN 3 **Vectores ortogonales**

Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ diferentes de cero son **ortogonales** (o **perpendiculares**) si el ángulo entre ellos es $\pi/2$.

EJEMPLO 3 Dos vectores ortogonales

Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ son ortogonales.

Solución $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 0$. Esto implica que $\cos \varphi = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|) = 0$ y como φ está en el intervalo $[0, \pi]$, $\varphi = \pi/2$.

TEOREMA 4 Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ diferentes de cero son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

DEMOSTRACIÓN Esta prueba también se deja como ejercicio (vea el problema 45).

Muchos problemas interesantes se refieren a la noción de la proyección de un vector sobre otro. Antes de definir esto se demuestra el siguiente teorema.

TEOREMA 5 Sea $\mathbf{v}$ un vector diferente de cero. Entonces para cualquier otro vector $\mathbf{u}$ el vector

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$

es ortogonal a $\mathbf{v}$.

DEMOSTRACIÓN

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \left[\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}$$

$$= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se ilustran en la figura 3.14.

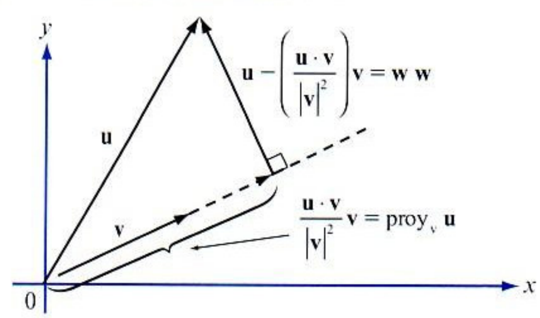


Figura 3.14

El vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$

DEFINICIÓN 4 **Proyección**

Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Entonces la **proyección** de **u** sobre **v** es un vector denotado por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, que se define por

$$\boxed{\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v}} \tag{4}$$

La **componente** de **u** en la dirección de **v** es $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, y es un escalar. **(5)**

Observe que $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector unitario en la dirección de **v**.

Observación 1. De las figuras 3.14 y 3.15 y del hecho de que $\cos\varphi = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|)$. Se encuentra que

v y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tienen:
i. la misma dirección si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$ y
ii. direcciones opuestas si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$. ■

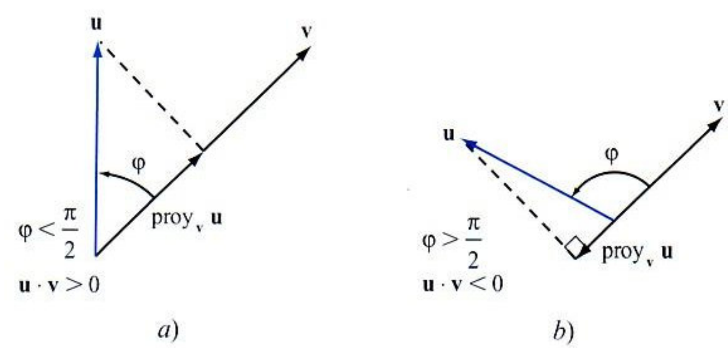


Figura 3.15
a) **v** y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tienen la misma dirección si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$, *b)* **v** y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tienen direcciones opuestas si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$

Observación 2. Se puede pensar en la $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ como la "**v**-componente" del vector **u**.

Observación 3. Si **u** y **v** son ortogonales, entonces $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ de manera que $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = 0$.

Observación 4. Una definición alternativa de la proyección es: si **u** y **v** son vectores diferentes de cero, entonces $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es el único vector con las siguientes propiedades:

i. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es paralelo a **v**.
ii. $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es ortogonal a **v**. ■

EJEMPLO 4 **Cálculo de una proyección**

Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

Solución $\text{Proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}/|\mathbf{v}|^2 = [5/(\sqrt{2})^2]\,\mathbf{v} = (5/2)\mathbf{i} + (5/2)\mathbf{j}$ (vea la figura 3.16).

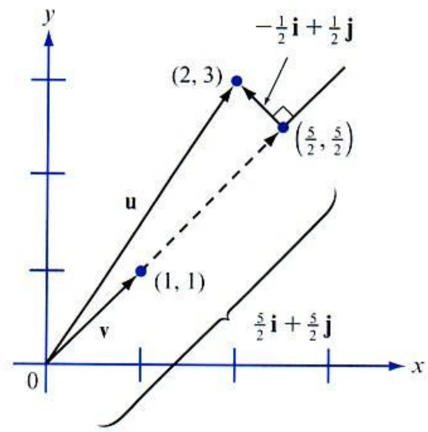


Figura 3.16

La proyección de (2, 3) sobre (1, 1) es $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$

EJEMPLO 5 **Cálculo de una proyección**

Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

Solución En este caso $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})/|\mathbf{v}|^2 = -\frac{1}{2}$; así, $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$ (vea la figura 3.17).

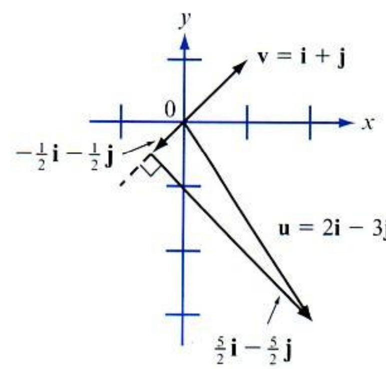


Figura 3.17

La proyección de $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ sobre $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es $-\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$

Problemas 3.2

Autoevaluación

I. $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$ = ________.

a) 1 *b)* $\sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2}$

c) 0 *d)* $\mathbf{i}+\mathbf{j}$

II. $(3, 4)\cdot(3, 2)$ = ________.

a) $(3 + 3)(4 + 2) = 36$ *b)* $(3)(3) + (4)(2) = 17$

c) $(3 - 3)(2 - 4) = 0$ *d)* $(3)(3) - (4)(2) = 1$

III. El coseno del ángulo entre $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ e $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ es ________.

a) $0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ *b)* 0 *c)* $\sqrt{2}$ *d)* $1/\sqrt{2+0}$

IV. Los vectores $2\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ y $3\mathbf{i} + (\frac{1}{2})\mathbf{j}$ son ________.

a) Ni paralelos ni ortogonales *b)* Paralelos

c) Ortogonales *d)* Idénticos

V. Diga cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema.

a) $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *b)* $\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *c)* $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *d)* $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{u}|}\dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

De los problemas 1 al 10 calcule el producto escalar de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos.

1. $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$ **2.** $\mathbf{u}=3\mathbf{i}$; $\mathbf{v}=-7\mathbf{j}$ **3.** $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

4. $\mathbf{u}=-5\mathbf{i}$; $\mathbf{v}=18\mathbf{j}$ **5.** $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{i}$; $\mathbf{v}=\beta\mathbf{j}$; α, β reales **6.** $\mathbf{u}=-4\mathbf{i}-2\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=5\mathbf{i}+7\mathbf{j}$

7. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ **8.** $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ **9.** $\mathbf{u}=-3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-2\mathbf{i}-7\mathbf{j}$

10. $\mathbf{u}=4\mathbf{i}+5\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=5\mathbf{i}-4\mathbf{j}$

11. Demuestre que para cualesquiera números reales α y β, los vectores $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}=\beta\mathbf{i}-\alpha\mathbf{j}$ son ortogonales.

12. Sean **u**, **v** y **w** tres vectores arbitrarios. Explique por qué el producto $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ *no está definido.*

De los problemas 13 al 19 determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Después esboce cada par.

13. $\mathbf{u}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-6\mathbf{i}-10\mathbf{j}$ **14.** $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=6\mathbf{i}-4\mathbf{j}$

15. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-9\mathbf{i}+6\mathbf{j}$ **16.** $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}$

17. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-6\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ **18.** $\mathbf{u}=7\mathbf{i}$; $\mathbf{v}=-23\mathbf{j}$

19. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

20. Sean $\mathbf{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}$. Determine α tal que:

a) **u** y **v** son ortogonales. *b)* **u** y **v** son paralelos.

c) El ángulo entre **u** y **v** es $\pi/4$. *d)* El ángulo entre **u** y **v** es $\pi/3$.

21. Sean $\mathbf{u}=-2\mathbf{i}+7\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{i}-2\mathbf{j}$. Determine α tal que:

a) **u** y **v** son ortogonales. *b)* **u** y **v** son paralelos.

c) El ángulo entre **u** y **v** es $2\pi/3$. *d)* El ángulo entre **u** y **v** es $\pi/3$.

22. En el problema 20 demuestre que no existe un valor de α para el que **u** y **v** tienen direcciones opuestas.

23. En el problema 21 demuestre que no existe valor de α para el que **u** y **v** tienen la misma dirección.

En los problemas 24 al 37 calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

24. $\mathbf{u}=3\mathbf{i}$; $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ **25.** $\mathbf{u}=-5\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$

26. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-9\mathbf{i}+6\mathbf{j}$ **27.** $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$

28. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=4\mathbf{i}+\mathbf{j}$ **29.** $\mathbf{u}=-\mathbf{i}-2\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=5\mathbf{i}+7\mathbf{j}$

30. $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ **31.** $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

32. $\mathbf{u}=4\mathbf{i}-\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

33. $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$; α y β reales positivos

34. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$; α y β reales positivos

35. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

36. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} - \beta\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; α y β reales positivos con $\alpha > \beta$

37. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} - \beta\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; α y β reales positivos con $\alpha < \beta$

38. Sean $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. Establezca una condición sobre a_1, b_1, a_2 y b_2 que asegure que $\mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tengan la misma dirección.

39. En el problema 31 establezca una condición que asegure que $\mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tengan direcciones opuestas.

40. Sean $P = (2, 3)$, $Q = (5, 7)$, $R = (2, -3)$ y $S = (1, 2)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\,\overrightarrow{RS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{RS}}\,\overrightarrow{PQ}$.

41. Sean $P = (-1, 3)$, $Q = (2, 4)$, $R = (-6, -2)$ y $S = (3, 0)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\,\overrightarrow{RS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{RS}}\,\overrightarrow{PQ}$.

42. Pruebe que los vectores diferentes de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para alguna constante α. [*Sugerencia:* Demuestre que $\cos\varphi = \pm 1$ si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$.]

43. Pruebe que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

44. Demuestre que el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es ortogonal a la recta $ax + by + c = 0$.

45. Demuestre que el vector $\mathbf{u} = b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ es paralelo a la recta $ax + by + c = 0$.

46. Un triángulo tiene vértices $(1, 3)$, $(4, -2)$ y $(-3, 6)$. Encuentre el coseno de cada ángulo.

47. Un triángulo tiene vértices (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3). Encuentre la fórmula para el coseno de cada ángulo.

***48.** La **desigualdad de Cauchy-Schwarz** establece que para cualesquiera números reales a_1, a_2, b_1 y b_2

$$\left|\sum_{k=1}^{2} a_k b_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{2} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{2} b_k^2\right)^{1/2}$$

Utilice el producto escalar para probar esta fórmula. ¿Bajo qué circunstancias se puede sustituir la desigualdad por una igualdad?

***49.** Pruebe que la distancia más corta entre un punto y una recta se mide por una línea que pasa por el punto y es perpendicular a la recta.

50. Encuentre la distancia entre $P = (2, 3)$ y la recta que pasa por los puntos $Q = (-1, 7)$ y $R = (3, 5)$.

51. Encuentre la distancia entre $(3, 7)$ y la recta que va a lo largo del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ que pasa por el origen.

52. Sea A una matriz de 2×2 tal que cada columna es un vector unitario y que las dos columnas son ortogonales. Demuestre que A es invertible y que $A^{-1} = A^t$ (A se conoce como matriz **ortogonal**).

Respuestas a la autoevaluación

I. *c*) **II.** *b*) **III.** *b*) **IV.** *c*) **V.** *c*)