Proyecto MaTEX

Logaritmos

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

13 de junio de 2004

Versin 1.00

MaTEX

LOGARITMOS

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Tabla de Contenido

1. Introducción

En los siglos XVI y XVII se vió la necesidad de establecer reglas que permitieran simplificar los laboriosos cálculos que tenían que realizar los astrónomos.

La invención de los logaritmos al comienzo del siglo XVII trajo consigo un enorme ahorro de tiempo. John Napier, o Neper en latín, presentó las primeras tablas de logaritmos en 1614, aunque por no estar en el sistema decimal no fueron de utilidad; Briggs las mejoró presentándolas en forma decimal. Muchas mejoras se hicieron después de estas tablas, aunque todas contenían como una parte esencial los logaritmos de las funciones goniométricas, como Neper lo hizo.

Los logaritmos fueron empleados durante muchos años en todas las ciencias, pero la Astronomía se benefició de ellos más que ninguna otra.

La invención de los ordenadores ha llevado consigo aumentar el tiempo de vida de los últimos astrónomos al no tener que utilizar tampoco las tablas de logaritmos. Pero ellos, los logaritmos, han hecho posibles muchas investigaciones que, por culpa de su inmenso trabajo computacional, no hubieran sido posibles sin su ayuda.

2. Logaritmo de un número

Definición 2.1 *Se denomina logaritmo en base $a > 0$ del número a^n al exponente n de la base a. Se escribe como*

$$\boxed{\log_a a^n = n}$$

Ejemplo 2.1. Veamos algunos ejemplos sencillos:

Solución:

$$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \qquad \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$$
$$\log_{16} 16 = \log_{16} 16^1 = 1 \qquad \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$
$$\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \qquad \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$$

□

Es decir para hallar el logaritmo de un número en base a expresamos el número como una potencia de la base a.

Veamos algunos ejemplos más. Para hallar $\log_2 \dfrac{1}{4}$ expresamos $\dfrac{1}{4}$ como una potencia de 2,

$$\frac{1}{4} = (2)^{-2} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{4} = -2$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Para hallar $\log_3 \dfrac{1}{81}$ expresamos $\dfrac{1}{81}$ como una potencia de 3,

$$\frac{1}{81} = (3)^{-4} \Rightarrow \log_3 \frac{1}{81} = -4$$

Ejemplo 2.2. Hallar el logaritmo de 1 en base a.

Solución: El logaritmo de 1 es cero en cualquier base.

$$\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$$

$\square$

Ejemplo 2.3. Hallar el logaritmo de 0 en base a.

Solución: El logaritmo de 0 no existe, pues 0 no se puede poner como una potencia de a $\square$

Ejemplo 2.4. Hallar el valor de $\log_{10} 5$.

Solución:
Como 5 no sabemos expresarlo como potencia de 10, no podemos hacerlo directamente. En estos casos acudimos a una calculadora.

Con su calculadora o la incorporada en el ordenador podemos hallarla

$$\log_{10} 5 \approx 0,69897$$

$\square$

Ejemplo 2.5. Expresa el número 6 como un logaritmo en base 2

Solución: Por la definición

$$6 = \log_2 2^6$$

$\square$

Ejemplo 2.6. Expresa el número 2 como un logaritmo en base 12

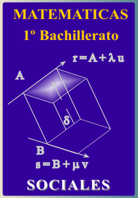
Solución: Por la definición

$$2 = \log_{12} 12^2$$

$\square$

Ejercicio 1. Completa en tu cuaderno la tabla siguiente:

n	1	2	4	$\frac{1}{16}$				
$\log_2 n$					8	$\frac{1}{2}$	-2	-3
$\log_{1/2} n$								



MaTEX

LOGARITMOS

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Test. Hallar los siguientes logaritmos:

1. $\log_2 32$ vale...

(a) 5 (b) 6 (c) 4

2. $\log_4 4$ vale...

(a) 4 (b) 0 (c) 1

3. $\log_2 1$ vale...

(a) 2 (b) 1 (c) 0

4. $\log_{25} 5$ vale...

(a) -1 (b) $1/2$ (c) 2

5. $\log_3 81$ vale...

(a) 3 (b) 4 (c) 5

6. $\log_5 \dfrac{1}{5}$ vale...

(a) -1 (b) $1/2$ (c) 1

7. $\log_{10} 1000$ vale...

(a) 2 (b) 3 (c) 4

2.1. Propiedades

- **Logaritmo de un producto**

  Si comparamos

$$\begin{aligned} \log_a a^x + \log_a a^y = & \qquad\qquad = x + y \\ \log_a (a^x \cdot a^y) = & \log_a (a^{x+y}) = x + y \end{aligned}$$

obtenemos la propiedad de que el logaritmo del producto de dos números es la suma de los logaritmos de dichos números.

$$\boxed{\log_a (m\, n) = \log_a m + \log_a n} \tag{1}$$

- **Logaritmo de un cociente**

  Si comparamos

$$\begin{aligned} \log_a a^x - \log_a a^y = & \qquad\qquad = x - y \\ \log_a \frac{a^x}{a^y} = & \log_a (a^{x-y}) = x - y \end{aligned}$$

obtenemos la propiedad de que el logaritmo del cociente de dos números es la resta de los logaritmos de dichos números.

$$\boxed{\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n} \tag{2}$$

- **Logaritmo de una potencia**

De la expresión

$$
\begin{aligned}
\log_a (M)^n &= \log_a (\overbrace{M \cdot M \cdot M \cdots M}^{n \text{ veces}}) && \text{regla del producto} \\
&= \log_a M + \log_a M + \cdots + \log_a M \\
&= n \cdot \log_a M
\end{aligned}
$$

obtenemos la propiedad de que el logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base.

$$
\boxed{\log_a M^n = n \cdot \log_a M} \qquad (3)
$$

- **Logaritmo de un radical**

La expresión anterior se aplica a los radicales

$$
\begin{aligned}
\log_a \sqrt[n]{M} &= \log_a (M)^{1/n} && \text{radical} \\
&= \frac{1}{n} \log_a M && \text{potencia}
\end{aligned}
$$

obtenemos la propiedad de que el logaritmo de una raiz es el índice por el logaritmo del radicando.

$$
\boxed{\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \cdot \log_a M} \qquad (4)
$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Propiedades del Logaritmo

$$\boxed{log(m \cdot n) = log(m) + log\,(n)}$$ *Producto*

$$\boxed{log\ \frac{m}{n} = log(m) - log\,(n)}$$ *Cociente*

$$\boxed{log\, m^n = n \cdot log\, m}$$ *Potencia*

Ejemplo 2.7. A partir de $\log_{10} 5 \approx 0,69897$ calcular $\log_{10} 125$

Solución:

$$\log_{10} 125 = \log_{10} 5^3 = 3 \log_{10} 5 = 3 \times 0,69897 \approx 2,0969$$

□

Ejemplo 2.8. A partir de $\log_{10} 5 \approx 0,69897$ calcular $\log_{10} \sqrt[3]{5}$

Solución:

$$\log_{10} \sqrt[3]{5} = \log_{10} 5^{1/3} = \frac{1}{3} \log_{10} 5 = \frac{1}{3} \times 0,69897 \approx 0,233$$

□

Ejemplo 2.9. Desarrollar la expresión $\log_a x^2\, 3y$

Solución:

$$\begin{aligned} \log_a x^2\, 3y &= \log_a x^2 + \log_a 3 + \log_a y \\ &= 2 \log_a x + \log_a 3 + \log_a y \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.10. Desarrollar la expresión $\log_a \dfrac{4\,x}{y^2}$

Solución:

$$\begin{aligned} \log_a \frac{4\,x}{y} &= \log_a 4\,x - \log_a y^2 \\ &= \log_a 4 + \log_a x - \log_a y^2 \\ &= \log_a 4 + \log_a x - 2 \log_a y \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.11. Desarrollar la expresión $\log_a \dfrac{x^3\,3y}{\sqrt{z}}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\log_a \frac{x^3\,3y}{\sqrt{z}} &= \log_a (x^3\,3y) - \log_a \sqrt{z} \\
&= \log_a x^3 + \log_a 3y - \log_a \sqrt{z} \\
&= 3\,\log_a x + \log_a 3 + \log_a y - \frac{1}{2}\log_a z
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.12. Agrupa en un solo logaritmo la expresión

$$\log_a b + 2\,\log_a c - \log_a d$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\log_a b + 2\,\log_a c - \log_a d &= \log_a b + \log_a c^2 - \log_a d \\
&= \log_a \frac{b\,c^2}{d}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.13. La siguiente fórmula expresa el capital final C obtenido en un banco a partir del capital inicial c_0 a un interés i en un tiempo t.Despejar la incógnita t aplicando logaritmos.

$$C = c_o(1+i)^t$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Solución:

$$\log C = \log c_o (1+i)^t$$
$$\log C = \log c_o + t\ \log(1+i)$$
$$\log C - \log c_o = t\ \log(1+i)$$
$$\frac{\log C - \log c_o}{\log(1+i)} = t$$

□

Ejemplo 2.14. Resuelve la ecuación siguiente $2^x = 5$

Solución: Aplicamos logaritmos

$$\log 2^x = \log 5 \Rightarrow x \log 2 = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2} = 2{,}3219$$

□

Ejemplo 2.15. Resuelve la ecuación siguiente $3^x = 7$

Solución: Aplicamos logaritmos

$$\log 3^x = \log 7 \Rightarrow x \log 3 = \log 7 \Rightarrow x = \frac{\log 7}{\log 3} = 1{,}7712$$

□

- **Ejercicios**

Ejercicio 2. Desarrolla los siguientes logaritmos:

a) $\log \dfrac{m\,n}{p}$ *b*) $\log \dfrac{c\,d^2}{n^3}$ *c*) $\log \dfrac{1}{x^3\,y^2}$

Ejercicio 3. Desarrolla los siguientes logaritmos:

a) $\log \sqrt[3]{a\,f^2}$ *b*) $\log \dfrac{1}{62\,\cdot\,8^{-x}}$ *c*) $\log \dfrac{m+n}{p}$

Ejercicio 4. Agrupar los siguientes logaritmos:

a) $\log x - \log y + \log z$

b) $\log 4 - 3\log x + \dfrac{1}{2}\log 5$

c) $3\log a - 4\log b$

Ejercicio 5. Agrupar los siguientes logaritmos:

a) $5\log_a x + 3\log_a y - 2\log_a z$

b) $\dfrac{1}{2}\log a + \dfrac{1}{3}\log b + \dfrac{3}{2}\log c$

c) $2 - 3\log y$

- **Cambio de base**

Si se conoce el logaritmo de un número en la base a , la pregunta es saber cuánto vale el el logaritmo del número en otra base b, es decir:

$$\log_a N = n \Longrightarrow \log_b N = x$$

Como

$$b^x = N \Longrightarrow \log_a b^x = \log_a N \Longrightarrow$$

$$x \log_a b = \log_a N \Longrightarrow x = \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

$$\boxed{\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}} \tag{5}$$

Es útil, pues en tu calculadora tienes el logaritmo en base 10. Si queremos calcular el logaritmo de 35 en base 3, procedemos de la forma:

$$\log_3 35 = \frac{\log_{10} 35}{\log_{10} 3} = \frac{1,5441}{0,4771} \approx 3,2362$$

Ejercicio 6. Aplica la expresión (5) para hallar con la calculadora:

$$\log_2 1500 \qquad \log_5 200 \qquad \log_{100} 200 \qquad \log_{100} 40$$

3. Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica es aquella en la que aparece el logaritmo de la incógnita, o de una expresión de ella. Por ejemplo

$$\log x = \log 7 \Longrightarrow x = 7 \qquad \blacktriangleleft \text{ unicidad}$$

La propiedad de la unicidad indica que dos números números distintos no pueden tener el mismo logaritmo, es decir

$$\text{Si } \log A = \log B \Longrightarrow A = B \qquad \text{unicidad}$$

Para resolver ecuaciones, como técnica general, se agrupa para obtener un solo logaritmo en cada miembro y se eliminan los logaritmos por la propiedad de unicidad. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 3.1. Resolver la ecuación $\log 2x + \log 5 = 1$

Solución: Agrupamos en ambos miembros, teniendo en cuenta que $1 = \log 10$

$$\begin{aligned}
\log 2x + \log 5 &= 1 \\
\log 2x + \log 5 &= \log 10 && \blacktriangleleft \text{ definición} \\
\log (2x \cdot 5) &= \log 10 && \blacktriangleleft \text{ producto} \\
10x &= 10 && \blacktriangleleft \text{ unicidad} \\
x &= \boxed{1}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 3.2. Resolver la ecuación $2\,\log x - \log(x+6) = 1$

Solución:

$$
\begin{aligned}
2\,\log x - \log(x+6) &= 1 \\
2\,\log x - \log(x+6) &= \log 10 && \blacktriangleleft \text{ definición} \\
\log \frac{x^2}{x+6} &= \log 10 && \blacktriangleleft \text{ cociente} \\
\frac{x^2}{x+6} &= 10 && \blacktriangleleft \text{ unicidad} \\
x^2 &= 10x + 60 && \blacktriangleleft \text{ operando}
\end{aligned}
$$

$$x^2 - 10x - 60 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{10+\sqrt{340}}{2}} \qquad \blacktriangleleft \text{ reolviendo}$$

La solución $x = \dfrac{10-\sqrt{340}}{2}$ no sirve, pues en la ecuación inicial quedaría el logaritmo de un número negativo que no existe. □

EJERCICIO 7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a) $\log_x 125 = 3$ (b) $\log x = 3\,\log 5$

(c) $\log x^2 = -2$ (d) $\log_x \dfrac{1}{9} = -2$

(e) $5\,\log 2x = 20$ (f) $\log_5 x = 4$

MATEMATICAS 1º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
LOGARITMOS
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a) $\log x = 3$

(b) $\log x + \log 4 = 0$

(c) $\log x = 4\ \log 2$

(d) $\log x - \log 2 = 2$

(e) $\log 2x + \log 5 = 6$

(f) $2\ \log x = \log(-6 + 5x)$

(g) $\log(x + 1) - 1 = \log x$

(h) $2\ \log x - \log(x + 6) = 1$

(i) $\log 3 + \log(x + 1) = 1$

(j) $\log_2(x^2 - 1) - \log_2(x + 1) = 1$

(k) $2 \log^2 x - 9 \log x = -10$

(l) $3 \log x - \log(2x^2 + x - 2) = 0$

Ejercicio 9. Resuelve los siguientes sistemas con logaritmos:

(a) $\left\{\begin{array}{ll} x + y & = 6 \\ \log x + \log y & = \log 8 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{ll} x + y & = 11 \\ \log x - \log y & = 1 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{ll} \log x + \log y & = \log 3 \\ x^2 + y^2 & = 10 \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{ll} 2\ \log x - 3\ \log y & = 7 \\ \log x + \log y & = 1 \end{array}\right.$

(e) $\left\{\begin{array}{ll} 4 \log x - 3 \log y & = -1 \\ \log(x\, y) & = 5 \end{array}\right.$

(f) $\left\{\begin{array}{ll} x^2 - y^2 & = 60 \\ \log_2 x - \log_2 y & = 2 \end{array}\right.$

(g) $\left\{\begin{array}{ll} \log_x(4 - y) & = \dfrac{1}{2} \\ \log_y(4 + x) & = 2 \end{array}\right.$

(h) $\left\{\begin{array}{ll} x\ y & = 1 \\ \log_7 x - \log_7 y & = 4 \end{array}\right.$

MATEMATICAS 1º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
LOGARITMOS
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

4. Unos cuantos acertijos..

Test. El $\log 125$ es igual a

(a) $100 \log 1{,}25$ (b) $5 \log 3$ (c) $3 \log 25$
(d) $3 - 3 \log 2$ (e) $\log 25 \log 5$

Test. Halla la expresión reducida de

$$\log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{d} - \log \frac{ay}{dx}$$

(a) $\log \dfrac{y}{x}$ (b) $\log \dfrac{x}{y}$ (c) 1 (d) 0 (e) $\log \dfrac{a^2 y}{d^2 x}$

Test. ¿Cuál es el valor de $[\log_{10}(5 \log_{10} 100)]^2$?

(a) $\log_{10} 50$ (b) 25 (c) 10 (d) 2 (e) 1

Test. Resolver la ecuación $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0$?

(a) 0 (b) 64 (c) 10 (d) 1 (e) 24

5. Aplicaciones

5.1. La intensidad del sonido

El sonido, como es una onda, transporta energía y esa energía llega al tímpano, que es una membrana que tiene una determinada superficie.

Al tímpano llega energía por cada cm^2 (lee centímetro cuadrado). Este concepto de energía por cm^2, recibe el nombre de potencia (y se mide en watt). Ahora, para que un sonido sea apenas audible la potencia deber ser 10^{-16} watt y el sonido más fuerte que puede oir el hombre, sin sentir dolor, corresponde a una potencia 10^{-4} watt.

Estos números son difíciles de comprender, por lo que se ha creado una escala para medir niveles del sonido en una unidad llamada decibelio (dB); decibelio se deriva del nombre del inventor Alexander Graham Bell.

El nivel de sonoridad L de un sonido medida en decibelios se define como

$$L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$$

donde I es la intensidad.

La siguiente tabla muestra el nivel de sonoridad en decibelios y la intensidad en watts de varios sonidos típicos.

Niveles Sonoros Típicos en decibelios

Tipo de sonido	Decibelios	Intensidad
Umbral de la audición	0	10^{-12}
Murmullo	20	10^{-10}
Conversación	60	10^{-6}
Tráfico	80	10^{-4}
Moto	100	10^{-2}
Discoteca	95	$10^{-2,5}$
Umbral de dolor	120	1
Despegue de un reactor	140	10^{2}

Por encima de 120 decibelios se produce dolor.

Ejemplo 5.1. Si por ejemplo tenemos al lado dos motos con una sonoridad de 100 decibelios cada una, ¿cuál es la sonoridad total?.

Solución: La respuesta no es 200, pues la sonoridad no es aditiva ya que es una suma de logaritmos. Se suman las intensidades. Como 100 dB corresponde a una intensidad de 10^{-2} watt

$$\begin{aligned} 10\log\frac{10^{-2}+10^{-2}}{10^{-12}} &= 10\log(2\times 10^{10}) \\ &= 10\times 10{,}301 \\ &= 103{,}01 \text{ decibelios} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.2. ¿Cuántas motos habría que poner juntas para superar los 120 decibelios, si por ejemplo cada moto tiene una sonoridad de 100 decibelios?.

Solución: Sea n el número de motos necesarias. Como 100 dB corresponde a una intensidad de 10^{-2} watt, la intensidad de las n motos corresponde a $n\,10^{-2}$ watt, luego

$$\begin{aligned} 10\log\frac{n\,10^{-2}}{10^{-12}} &= 120 \\ 10\log(n\,10^{10}) &= 120 \\ \log(n\,10^{10}) &= 12 = \log 10^{12} \\ n\,10^{10} &= 10^{12} \\ n &= 100 \text{ motos} \end{aligned}$$

□

¿A partir de que niveles el sonido es perjudicial?.
Es muy recomendable utilizar, siempre que sea posible, protectores para los oídos por encima de los 100 dB .
Si la exposición es prolongada, por ejemplo en puestos de trabajos, se considera necesario el utilizar protectores en ambientes con niveles de 85 dB.

Los daños producidos en el oído por exposiciones a ruidos muy fuertes son **acumulativos** e **irreversibles**, por lo que se deben de extremar las precauciones. De la exposición prolongada a ruidos se observan trastornos nerviosos, cardiacos y mentales.

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

n	1	2	4	$\frac{1}{16}$	256	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\log_2 n$	0	1	2	-4	8	$\frac{1}{2}$	-2	-3
$\log_{1/2} n$	0	-1	2	4	-8	$-\frac{1}{2}$	2	3

Ejercicio 1

MaTEX
LOGARITMOS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 2.

a)

$$\begin{aligned}\log\frac{m\,n}{p} &= \log(m\,n) - \log p && \blacktriangleleft \text{ cociente}\\ &= \log m + \log n - \log p && \blacktriangleleft \text{ producto}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\log\frac{c\,d^2}{n^3} &= \log(c\,d^2) - \log n^3 && \blacktriangleleft \text{ cociente}\\ &= \log c + \log d^2 - \log n^3 && \blacktriangleleft \text{ producto}\\ &= \log c + 2\,\log d - 3\,\log n && \blacktriangleleft \text{ potencia}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\log\frac{1}{x^3\,y^2} &= \log 1 - \log(x^3\,y^2) && \blacktriangleleft \text{ cociente}\\ &= 0 - \log x^3 - \log y^2 && \blacktriangleleft \text{ producto}\\ &= -\,3\,\log x - 2\,\log y && \blacktriangleleft \text{ potencia}\end{aligned}$$

Ejercicio 2

MATEMATICAS 1º Bachillerato r=A+λu A B δ s=B+μv SOCIALES
MaTEX
LOGARITMOS
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 3.

a)

$$\begin{aligned}
\log \sqrt[3]{a\, f^2} =& \frac{1}{3} \log(a\, f^2) && \blacktriangleleft \text{ potencia} \\
=& \frac{1}{3} \log a + \frac{1}{3} \log f^2 && \blacktriangleleft \text{ producto} \\
=& \frac{1}{3} \log a + \frac{2}{3} \log f && \blacktriangleleft \text{ potencia}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\log \frac{1}{62 \cdot 8^{-x}} =& \log 1 - \log(62 \cdot 8^{-x}) && \blacktriangleleft \text{ cociente} \\
=& 0 - \log 62 - \log 8^{-x} && \blacktriangleleft \text{ producto} \\
=& -\log 62 + x \log 8 && \blacktriangleleft \text{ potencia}
\end{aligned}$$

c)

$$\log \frac{m+n}{p} = \log(m+n) - \log p \qquad \blacktriangleleft \text{ cociente}$$

Nota.- $\log(m+n) \neq \log m + \log n$

Ejercicio 3

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4.

a)

$$\begin{aligned} \log x - \log y + \log z &= \log(x\,z) - \log y && \blacktriangleleft \text{ producto} \\ &= \log \frac{x\,z}{y} && \blacktriangleleft \text{ cociente} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \log 4 - 3\log x + \frac{1}{2}\log 5 &= \log 4 - \log x^3 + \log \sqrt{5} && \blacktriangleleft \text{ potencia} \\ &= \log(4\sqrt{5}) - \log x^3 && \blacktriangleleft \text{ producto} \\ &= \log \frac{4\sqrt{5}}{x^3} && \blacktriangleleft \text{ cociente} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 3\log a - 4\log b &= \log a^3 - \log b^4 && \blacktriangleleft \text{ potencia} \\ &= \log \frac{a^3}{b^4} && \blacktriangleleft \text{ cociente} \end{aligned}$$

Ejercicio 4

Ejercicio 5.

a)

$$5\log_a x + 3\log_a y - 2\log_a z = \log_a x^5 + \log_a y^3 - \log_a z^2 \qquad \blacktriangleleft \text{ potencia}$$

$$= \log \frac{x^5\, y^3}{z^2} \qquad \blacktriangleleft \text{ prod. y coc.}$$

b)

$$\frac{1}{2}\log a + \frac{1}{3}\log b + \frac{3}{2}\log c = \log\sqrt{a} + \log\sqrt[3]{b} + \log\sqrt{c^3} \qquad \blacktriangleleft \text{ potencia}$$

$$= \log(\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b}\sqrt{c^3}) \qquad \blacktriangleleft \text{ producto}$$

c)

$$2 - 3\log y = \log 10^2 - 3\log y \qquad \blacktriangleleft \text{ definición}$$

$$= \log 10^2 - \log y^3 \qquad \blacktriangleleft \text{ potencia}$$

$$= \log \frac{10^2}{y^3} \qquad \blacktriangleleft \text{ cociente}$$

Ejercicio 5

Ejercicio 6.

$$
\begin{aligned}
\log_2 1500 &= \frac{\log_{10} 1500}{\log_{10} 2} \approx 10{,}55 \\
\log_5 200 &= \frac{\log_{10} 200}{\log_{10} 5} \approx 3{,}29 \\
\log_{100} 200 &= \frac{\log_{10} 200}{\log_{10} 100} \approx 1{,}15 \\
\log_5 40 &= \frac{\log_{10} 40}{\log_{10} 5} \approx 2{,}29
\end{aligned}
$$

Ejercicio 6

Ejercicio 7(a)
Escribimos 3 como $\log_x x^3$, de esta forma

$$\begin{aligned} \log_x 125 =& 3 & \\ \log_x 125 =& \log_x x^3 & \blacktriangleleft \text{ definición} \\ 125 =& x^3 & \blacktriangleleft \text{ unicidad} \\ x =& \sqrt[3]{125} = 5 & \blacktriangleleft \text{ resolvemos} \end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 7(b)

$$\begin{aligned}
\log x &= 3 \log 5 \\
\log x &= \log 5^3 && \blacktriangleleft \text{ potencia} \\
x &= 5^3 && \blacktriangleleft \text{ unicidad} \\
x &= 125
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 7(c)

$$\begin{aligned}
\log x^2 &= -2 \\
\log x^2 &= \log 10^{-2} && \blacktriangleleft \text{ definición} \\
x^2 &= 10^{-2} && \blacktriangleleft \text{ unicidad} \\
x^2 &= \frac{1}{100} && \blacktriangleleft \text{ resolvemos} \\
x &= \pm \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 7(d)

$$\begin{aligned}
\log_x \frac{1}{9} &= -2 \\
\log_x \frac{1}{9} &= \log_x x^{-2} && \blacktriangleleft \text{ definición} \\
\frac{1}{9} &= x^{-2} && \blacktriangleleft \text{ unicidad} \\
\frac{1}{x^2} &= \frac{1}{9} && \blacktriangleleft \text{ resolvemos} \\
x &= \boxed{3}, -3
\end{aligned}$$

El valor -3 no es válido pues los logaritmos se toman de base positiva.

□

Ejercicio 7(e)

$$
\begin{aligned}
5\ \log 2x =& 20 \\
\log 2x =& 4 && \blacktriangleleft \text{ simplificar} \\
\log 2x =& \log 10^4 && \blacktriangleleft \text{ definición} \\
2x =& 10^4 && \blacktriangleleft \text{ unicidad} \\
x =& 5000
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejercicio 7(f)

$$\begin{aligned}
\log_5 x &= 4 \\
\log_5 x &= \log_5 5^4 && \blacktriangleleft \text{ definición} \\
x &= 5^4 && \blacktriangleleft \text{ unicidad} \\
x &= \boxed{625}
\end{aligned}$$

$\square$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8(a)
Para poder quitar logaritmos escribimos 3 como $\log 10^3$, de esta forma

$$\begin{aligned}\log x &= 3 \\ \log x &= \log 10^3 \\ x &= 10^3 = 1000\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 8(b)
Para poder quitar logaritmos escribimos 0 como $\log 1$, de esta forma

$$\begin{aligned}
\log x + \log 4 &= 0 \\
\log x + \log 4 &= \log 1 \\
\log 4\,x &= \log 1 \\
4\,x &= 1 \\
x &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 8(c)

$$\begin{aligned}\log x =& 4\,\log 2\\ \log x =& \log 2^4\\ x =& 2^4 = 16\end{aligned}$$

□

Ejercicio 8(d)

$$\begin{aligned}
\log x - \log 2 =& 2 \\
\log \frac{x}{2} =& \log 10^2 \\
\frac{x}{2} =& 10^2 \\
x =& 200
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 8(e)

$$\begin{aligned}\log 2x + \log 5 =& 6\\ \log(2x)\,(5) =& \log 10^6\\ x =& 10^5\end{aligned}$$

□

Ejercicio 8(f)

$$\begin{aligned} 2\ \log x =& \log(-6+5x) \\ \log x^2 =& \log(-6+5x) \\ x^2 =& (-6+5x) \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \Longrightarrow & x = 2 \vee 3 \end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 8(g)

$$\begin{aligned}
\log(x+1) - 1 &= \log x \\
\log(x+1) - \log 10 &= \log x \\
\log \frac{x+1}{10} &= \log x \\
\frac{x+1}{10} &= x \\
-9x &= -1 \\
x &= \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 8(h)

$$
\begin{aligned}
2\,\log x - \log(x+6) =& 1\\
2\,\log x - \log(x+6) =& \log 10\\
\log \frac{x^2}{x+6} =& \log 10\\
\frac{x^2}{x+6} =& 10\\
x^2 =& 10x + 60
\end{aligned}
$$

$$
x^2 - 10x - 60 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{10+\sqrt{340}}{2}}
$$

□

Ejercicio 8(i)

$$\begin{aligned}
\log 3 + \log(x+1) =& 1 \\
\log 3(x+1) =& \log 10 \\
3(x+1) =& 10 \\
x =& \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 8(j)

$$\begin{aligned}
\log_2(x^2-1)-\log_2(x+1) =& 1\\
\log_2\frac{x^2-1}{x+1} =& \log_2 2\\
\frac{x^2-1}{x+1} =& 2\\
x^2-2x-3=0 \Longrightarrow & x=\boxed{2}\vee -1
\end{aligned}$$

El valor -1 no es válido pues en la ecuación inicial quedaría $\log_2 0$ que no existe.

$\square$

Ejercicio 8(k)

$$\begin{aligned} 2\log^2 x - 9\log x &= -10 \\ 2\log^2 x - 9\log x + 10 &= 0 \end{aligned}$$

resolvemos la ecuación de segundo grado

$$\log x = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$\log x = \frac{5}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = 10^{5/2}}$$

$$\log x = 2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = 10^2}$$

$\square$

MATEMATICAS
1º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
LOGARITMOS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8(l)

$$
\begin{aligned}
3\log x - \log(2x^2 + x - 2) =& 0 \\
\log \frac{x^3}{2x^2 + x - 2} =& \log 1 \\
\frac{x^3}{2x^2 + x - 2} =& 1 \\
x^3 - 2x^2 - x + 2 =& 0
\end{aligned}
$$

resolvemos la ecuación de tercer grado por Ruffini

$$
\boxed{x = 1} \qquad x = -1 \qquad \boxed{x = 2}
$$

el valor $x = -1$ no es válido pues en la ecuación inicial quedaría logaritmo de un número negativo.

□

Ejercicio 9(a) Agrupamos y eliminamos logaritmos en la segunda ecuación:

$$\left.\begin{array}{ll} x+y & =6 \\ \log x+\log y & =\log 8 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{ll} x+y & =6 \\ \log x\cdot y & =\log 8 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{ll} x+y & =6 \\ x\cdot y & =8 \end{array}\right\} \qquad \text{Por sustitución}$$

$$y=6-x \qquad x(6-x)=8 \qquad \text{resolviendo}$$

$$x^2-6x+8=0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x=2 & y=4 \\ x=4 & y=2 \end{array}\right.$$

□

Ejercicio 9(b) Agrupamos y eliminamos logaritmos en la segunda ecuación:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 11 \\ \log x - \log y &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x+y &= 11 \\ \log \frac{x}{y} &= \log 10 \end{aligned}\left.\vphantom{\begin{aligned} x \\ \frac{x}{y} \end{aligned}}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} x+y &= 11 \\ \frac{x}{y} &= 10 \end{aligned}\right\} \quad \text{Por sustitución}$$

$$x = 10\,y \Longrightarrow 10\,y + y = 11 \qquad \text{resolviendo}$$

$$11\,y = 11 \Longrightarrow \left\{ \; x = 10 \quad y = 1 \right.$$

$\square$

Ejercicio 9(c) Agrupamos y eliminamos logaritmos en la primera ecuación:

$$\left.\begin{array}{ll}\log x + \log y & = \log 3 \\ x^2 + y^2 & = 10\end{array}\right\} \left.\begin{array}{ll}\log x \cdot y & = \log 3 \\ x^2 + y^2 & = 10\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{ll} x\,y & = 3 \\ x^2 + y^2 & = 10\end{array}\right\} \text{ Por sustitución}$$

$$y = 3/x \Longrightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} = 10 \qquad \text{resolviendo}$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = \pm 3 & y = \pm 1 \\ x = \pm 1 & y = \pm 3 \end{array}\right.$$

Las soluciones negativas no valen pues en las ecuaciones quedarían logaritmos de números negativos, que no existen.

□

Ejercicio 9(d) Agrupamos y eliminamos logaritmos en la ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} 2\ \log x - 3\ \log y & = 7 \\ \log x + \log y & = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{ll} \log \dfrac{x^2}{y^3} & = \log 10^7 \\ \log x\, y & = \log 10 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{y^3} & = 10^7 \\ x\, y & = 10 \end{array}\right\} \quad \text{Por sustitución}$$

$$y = 10/x \Longrightarrow \frac{x^2\ x^3}{10^3} = 10^7 \quad \text{resolviendo}$$

$$x^5 = 10^{10} \Longrightarrow x = 10^2 \quad y = \frac{1}{10}$$

□

Ejercicio 9(e) Agrupamos y eliminamos logaritmos en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 4\log x - 3\log y &= -1 \\ \log(x\,y) &= 5 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \log\frac{x^4}{y^3} &= \log 10^{-1} \\ \log(x\,y) &= \log 10^5 \end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} \frac{x^4}{y^3} &= 10^{-1} \\ x\,y &= 10^5 \end{aligned}\right\} \qquad \blacktriangleleft \text{ sustitución}$$

$$y = \frac{10^5}{x} \Longrightarrow \quad x^4 = 10^{-1}\left(\frac{10^5}{x}\right)^3 \qquad \blacktriangleleft \text{ operando}$$

$$x^7 = 10^{14} \Longrightarrow \boxed{x = 100 \quad y = 1000}$$

□

Ejercicio 9(f) Agrupamos y eliminamos logaritmos en la segunda ecuación:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 60 \\ \log_2 x - \log_2 y &= 2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 60 \\ \log_2 \frac{x}{y} &= \log_2 2^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 60 \\ \frac{x}{y} &= 4 \end{aligned}\right\} \qquad \blacktriangleleft \text{ sustitución}$$

$$x = 4y \Longrightarrow \quad 16\,y^2 - y^2 = 60 \qquad \blacktriangleleft \text{ resolviendo}$$

$$y^2 = 4 \Longrightarrow \boxed{y = 2 \quad x = 4}$$

□

Ejercicio 9(g) Agrupamos y eliminamos logaritmos en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \log_x(4-y) &= \frac{1}{2} \\ \log_y(4+x) &= 2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \log_x(4-y) &= \log_x x^{\frac{1}{2}} \\ \log_y(4+x) &= \log_y y^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} 4-y &= \sqrt{x} \\ 4+x &= y^2 \end{aligned}\right\} \qquad \blacktriangleleft \text{ sustitución}$$

$$y = 4-\sqrt{x} \Longrightarrow \quad 4+x = (4-\sqrt{x})^2 \qquad \blacktriangleleft \text{ operando}$$

$$8\sqrt{x} = 12 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{9}{4} \quad y = \frac{5}{2}}$$

□

Ejercicio 9(h) Agrupamos y eliminamos logaritmos en la segunda ecuación:

$$\left.\begin{array}{rl} x\ y & = 1 \\ \log_7 x - \log_7 y & = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} x\ y & = 1 \\ \log_7 \dfrac{x}{y} & = \log_7 7^4 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rl} x\ y & = 1 \\ \dfrac{x}{y} & = 7^4 \end{array}\right\}$$ ◀ sustitución

$$y = \frac{1}{x} \Longrightarrow \quad x^2 = 7^4$$ ◀ resolviendo

$$x^2 = 7^4 \Longrightarrow \boxed{x = 49 \quad y = 1/49}$$

□

Soluciones a los Tests

Solución al Test:

$$\log 125 = \log \frac{1000}{8} = \log 1000 - \log 2^3 = 3 - 3\ \log 2$$

Final del Test

Solución al Test:

$$[\log_{10}(5\ \log_{10} 100)]^2 = [\log_{10}(5 \cdot 2)]^2 = 1^2 = 1$$

Final del Test

Solución al Test:

$$\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0 \Longrightarrow$$
$$\log_3(\log_4 x) = 1 \Longrightarrow$$
$$\log_4 x = 3 \Longrightarrow$$
$$x = 4^3 = 64$$

Final del Test

Doc Doc
Volver Cerrar

Índice alfabético