22. $\left(\frac{8}{9t} \div \frac{1}{3st}\right) \cdot \frac{s}{4}$

23. $\left(\frac{3}{4xy} \div \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{2xy}{9}$

24. $\left(\frac{2}{x} \div \frac{z}{2}\right) \div \frac{4}{z}$

25. $\left(\frac{2xt}{3} \div \frac{x}{4t}\right) \div \frac{2t}{3}$

26. $\frac{2}{z} \div \left(\frac{z}{2} \div \frac{4}{z}\right)$

27. $\frac{2xt}{3} \div \left(\frac{x}{4t} \div \frac{2t}{3}\right)$

28. $\frac{1}{6} - \frac{1}{2}$

29. $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$

30. $\frac{4x}{5} - \frac{x}{10}$

31. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$

32. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

33. $\frac{y}{2x} + \frac{1}{3x}$

34. $\frac{a}{6b} - \frac{a}{2b}$

35. $\frac{a}{6b} + \frac{2a}{9b}$

36. $\frac{7}{6x} + \frac{3}{4x^2}$

37. $\frac{3y}{10x^2} - \frac{1}{6x}$

38. $\frac{x}{p^2} + \frac{y}{pq}$

39. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

40. $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

41. $\frac{x^2}{3y} + 4y$

42. $\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)$

43. $\frac{1}{6} - \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)$

44. $\frac{a}{3b} - 2\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{2a}\right)$

45. $\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \div \left(\frac{6}{x}\right)$

46. $\left(\frac{x}{9y} + \frac{1}{6xy}\right) \div \left(\frac{1}{3xy}\right)$

47. $\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$

48. $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{12}\right) \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{4}\right)$

49. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}$

50. $\dfrac{\frac{8}{5} + \frac{2}{3}}{2 + \frac{4}{7}}$

51. $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}$

52. $\dfrac{2 - \frac{3}{4}}{3 + \frac{1}{8}}$

53. $\dfrac{7x - \dfrac{2x}{3}}{15y - \dfrac{y}{3}}$

54. $\dfrac{\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3x}}{\dfrac{1}{4y} - \dfrac{1}{5y}}$

55. $\dfrac{\left(\dfrac{2a}{3b}\right)\left(\dfrac{4b}{5}\right) + a}{2b + \dfrac{b}{15}}$

56. $\dfrac{\left(\dfrac{5p}{2q}\right)\left(\dfrac{p}{3}\right) + \dfrac{p^2}{8q}}{4p + \dfrac{p}{12}}$

57. $\left(\frac{a}{b} + \frac{2a}{3b}\right) \div \left[\left(\frac{3x}{8}\right) \div \left(\frac{x}{9}\right) + \frac{1}{4}\right]$

58. $\left(\frac{xy}{6}\right) \div \left[\left(\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{x}{6}\right) - \frac{3x}{4}\right]$

■ 1-3 EXPONENTES

Si m es un *entero positivo*, entonces a^m (léase a a la *potencia* m o la *m-ésima potencia de a*) se define como el producto de m factores a multiplicados a la vez. Por lo que

$$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$$

En este producto, el factor a aparece m veces. Por ejemplo,

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \qquad \text{(cuatro factores de 2)}$$
$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243 \qquad \text{(cinco factores de 3)}$$

En la expresión a^m, m se llama la **potencia** o **exponente** y a la **base**. Así en 2^4 (la cuarta potencia de 2), 2 es la base y 4 es la potencia o exponente; en 3^5, 3 es la base y 5 el exponente. Esta definición de a^m cuando el exponente es un entero positivo es válida para todos los valores reales de a.

Observe el patrón en la tabla 1, en la cual se dan varias potencias de 5 en orden decreciente. Tratemos de completar la tabla. Notemos que cada vez que el exponente disminuye en 1, el número de la derecha se *divide* entre 5.

Esto sugiere que la tabla se completaría continuando la división entre 5 con cada reducción del exponente. De esta manera, llegamos a las igualdades siguientes:

TABLA 1

5^4	625
5^3	125
5^2	25
5^1	5
5^0	?
5^{-1}	?
5^{-2}	?
5^{-3}	?
5^{-4}	?

$$5^1 = 5 \qquad 5^0 = 1 \qquad 5^{-1} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5^1}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} \qquad 5^{-3} = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} \qquad 5^{-4} = \frac{1}{625} = \frac{1}{5^4}$$

Este patrón en forma natural nos conduce a la definición siguiente de a^m en el caso de que el exponente m sea cero o un número negativo.

DEFINICIÓN Si $a \neq 0$, entonces $a^0 = 1$ y si m es un entero *positivo* cualquiera (de modo que $-m$ es un entero *negativo*),

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Por ejemplo, $4^0 = 1$, $\left(\frac{3}{7}\right)^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$, etc. Asimismo,

☛ **10.** Evalúe

a) $(-\frac{1}{5})^0$; *b*) $(-\frac{1}{2})^{-3}$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \quad \text{y} \quad (2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$ ☛ **10**

De estas definiciones, es posible establecer una serie de propiedades denominadas las **leyes de los exponentes**, las cuales se enuncian a continuación.

Propiedad 1

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Esto es, *cuando dos potencias de una base común se multiplican, el resultado es igual a la base elevada a la suma de los dos exponentes*. Este resultado vale para cualquier número real a, excepto en el caso de que m o n sea negativo, requerimos que $a \neq 0$.

EJEMPLO 1

a) $5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$

Podemos verificar que esto sea correcto desarrollando las dos potencias del producto.

$$5^2 \cdot 5^3 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$$

Respuesta *a*) 1; *b*) $-2^3 = -8$

☛ **11.** Simplifique
a) $4^3 \cdot 4^{-5}$; *b*) $x^4 \cdot x^{-6} \cdot x^2$

Respuesta *a*) $\frac{1}{16}$; *b*) 1

b) $x^5 \cdot x^{-3} = x^{5+(-3)} = x^2$

De nuevo, podemos verificar este resultado desarrollando las dos potencias.

$$x^5 \cdot x^{-3} = (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x)\left(\frac{1}{x \cdot x \cdot x}\right) = x \cdot x = x^2 \quad ☛ \ \mathbf{11}$$

Propiedad 2

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \neq 0)$$

Esto es, *cuando una potencia se divide entre otra con la misma base, el resultado es igual a la base elevada a un exponente que es la diferencia del exponente que está en el numerador y el exponente del denominador*.

EJEMPLO 2

☛ **12.** Simplifique
a) $3^3 \div 3^{-2}$; *b*) $x^4 \div (x^{-6} \cdot x^2)$

Respuesta *a*) $3^5 = 243$; *b*) x^8

a) $\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4$

b) $\frac{4^3}{4^{-2}} = 4^{3-(-2)} = 4^{3+2} = 4^5$

c) $\frac{3^{-2}}{3} = \frac{3^{-2}}{3^1} = 3^{-2-1} = 3^{-3}$

d) $\frac{x^2 \cdot x^{-4}}{x^{-3}} = \frac{x^{2-4}}{x^{-3}} = x^{2-4-(-3)} = x^1 = x$ ☛ **12**

Propiedad 3

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (a \neq 0 \text{ si } m \text{ o } n \text{ es negativo o cero})$$

Es decir, *una potencia elevada a una potencia es igual a la base elevada al producto de los dos exponentes*.

EJEMPLO 3

a) $(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$

Podemos comprobar que esto es correcto, dado que

$$(3^3)^2 = 3^3 \cdot 3^3 = 3^{3+3} = 3^6$$

☛ **13.** Simplifique
a) $3^3 \cdot (3^2)^{-2}$; *b*) $(x^4)^4 \div (x^{-3})^{-3}$

Respuesta *a*) $3^{-1} = \frac{1}{3}$; *b*) x^7

b) $(4^{-2})^{-4} = 4^{(-2)(-4)} = 4^8$

c) $x^5(x^{-2})^{-1} = x^5 \cdot x^{(-2)(-1)} = x^5 \cdot x^2 = x^{5+2} = x^7$

d) $\frac{(x^2)^{-2}}{(x^{-2})^{-2}} = \frac{x^{(2)(-2)}}{x^{(-2)(-2)}} = \frac{x^{-4}}{x^4} = x^{-4-4} = x^{-8}$

e) $\frac{1}{x^{-p}} = (x^{-p})^{-1} = x^{(-p)(-1)} = x^p$ ☛ **13**

En una expresión, tal como $3c^5$, la base es c, no $3c$. Si necesitamos que la base sea $3c$, debemos encerrarla entre paréntesis y escribir $(3c)^5$. Por ejemplo $3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$, no es lo mismo que $(3 \cdot 2)^3 = 6^3 = 216$. Para el caso de que la base es un producto, tenemos la propiedad siguiente.

Propiedad 4

$$(ab)^m = a^m b^m \qquad (ab \neq 0 \text{ si } m \leq 0)$$

☛ **14.** Evalúe
a) $2 \cdot 2^3$ y $(2 \cdot 2)^3$
b) $3 \cdot 2^{-2}$ y $(3 \cdot 2)^{-2}$

Esto es, *el producto de dos números elevados a la m-ésima potencia es igual al producto de las m-ésimas potencias de los dos números.* ☛ **14**

EJEMPLO 4

a) $6^4 = (2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$

b) $(x^2y)^4 = (x^2)^4y^4 = x^8y^4$

c) $(3a^2b^{-3})^2 = 3^2(a^2)^2(b^{-3})^2 = 9a^4b^{-6}$

d) $\dfrac{(xy^3)^{-2}}{(x^2y)^{-4}} = \dfrac{x^{-2}(y^3)^{-2}}{(x^2)^{-4}y^{-4}} = \dfrac{x^{-2}y^{-6}}{x^{-8}y^{-4}} = \dfrac{x^{-2}}{x^{-8}} \cdot \dfrac{y^{-6}}{y^{-4}} = x^{-2-(-8)}y^{-6-(4)} = x^6y^{-2}$

Respuesta *a*) 16 y 64; *b*) $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{36}$

Propiedad 5

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad (b \neq 0 \text{ y } a \neq 0 \text{ si } m \leq 0)$$

Es decir, *el cociente de dos números elevados a la m-ésima potencia es igual al cociente de las m-ésimas potencias de tales números.*

EJEMPLO 5

☛ **15.** Simplifique
a) $3^3 \cdot (3x)^{-2}$
b) $\left(\dfrac{x^4}{2}\right)^2 \div (4x^{-2})^{-2}$

a) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{3^4}{2^4}$ *b*) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^5 = \dfrac{x^5}{y^5} = x^5y^{-5}$

c) $x^3\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^{-2} = x^3\dfrac{y^{-2}}{(x^2)^{-2}} = x^3\dfrac{y^{-2}}{x^{-4}} = x^{3-(-4)}y^{-2} = x^7y^{-2}$ ☛ **15**

EJEMPLO 6 Simplifique las expresiones siguientes, eliminando paréntesis y exponentes negativos.

a) $\dfrac{(ax)^5}{x^{-7}}$ *b*) $\dfrac{(x^{-2})^2}{(x^2z^3)^3}$ *c*) $x^4(2x - 3x^{-2})$

d) $(x^{-1} + y^{-1})^{-1}$ *e*) $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}}$

Respuesta *a*) $\dfrac{3}{x^2}$; *b*) $4x^4$

Solución

a) $\dfrac{(ax)^5}{x^{-7}} = \dfrac{a^5x^5}{x^{-7}} = a^5x^{5-(-7)} = a^5x^{12}$

☛ **16.** Sería *incorrecto por completo* en el ejemplo 6*d*) si hubiésemos escrito $(x^{-1} + y^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} + (y^{-1})^{-1} = x + y$. ¿Puede ver por qué esto es incorrecto? Pruebe dando dos valores para x y y, tales como 2 y 4.

b) $$\frac{(x^{-2})^2}{(x^2z^3)^3} = \frac{x^{(-2)(2)}}{(x^2)^3(z^3)^3} = \frac{x^{-4}}{x^6z^9} = \frac{1}{x^{10}z^9}$$

Note que si deseamos evitar exponentes negativos, ambos factores deben dejarse en el denominador.

c) $$\begin{aligned} x^4(2x - 3x^{-2}) &= x^4(2x) - x^4(3x^{-2}) \\ &= 2x^{4+1} - 3x^{4-2} \\ &= 2x^5 - 3x^2 \end{aligned}$$

d) Primero debemos simplificar la expresión dentro de los paréntesis. El denominador común es xy.

$$x^{-1} + y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{y + x}{xy}$$

Ahora recordando que el recíproco de una fracción se obtiene intercambiando el numerador y el denominador. De modo que

$$(x^{-1} + y^{-1})^{-1} = \left(\frac{y + x}{xy}\right)^{-1} = \frac{xy}{y + x}$$

e) $$\frac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}} = \frac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}} = \frac{x^{-1}}{x^{-1}y^{-1}} + \frac{y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}} = \frac{1}{y^{-1}} + \frac{1}{x^{-1}} = y + x$$

Solución alterna

$$\begin{aligned} \frac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}} &= (x^{-1} + y^{-1}) \cdot xy \\ &= x^{-1} \cdot xy + y^{-1} \cdot xy \qquad \text{(propiedad distributiva)} \\ &= 1 \cdot y + 1 \cdot x = y + x \end{aligned}$$ ☛ **16**

EJERCICIOS 1-3

(1-61) Simplifique las expresiones siguientes. No use paréntesis ni exponentes negativos en la respuesta final.

1. $(2^5)^2$

2. $(3^4)^3$

3. $(a^3)^7$

4. $(x^4)^5$

5. $(-x^2)^5$

6. $(-x^5)^2$

7. $y^2 \cdot y^5$

8. $x^7 \cdot x^4$

9. $a^3 \cdot a^{-5}$

10. $b^{-2} \cdot b^6$

11. $(3x)^2x^{-7}$

12. $(4x)^{-2}x^4$

13. $(2x)^2(2x^{-1})^3$

14. $\dfrac{x^3}{2}(4x^{-1})^2$

15. $(x^2yz)^3(xy)^4$

16. $(3yz^2)^2(y^3z)^3$

17. $(x^{-2}y)^{-2}$

18. $(ab^{-3})^{-1}$

19. $(xy^2z^3)^{-1}(xyz)^3$

20. $(x^2pq^2)^2(xp^2)^{-1}$

21. $\dfrac{(2^4)^2}{4^2}$

22. $\dfrac{(3^3)^2}{3^5}$

23. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} \div 3^{-4}$

24. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3} \div 5^{-2}$

25. $\dfrac{x^5}{x^{-2}}$

26. $\dfrac{y^{-3}}{y^{-7}}$

27. $\dfrac{(x^2)^3}{x^4}$

28. $\dfrac{z^{-8}}{(z^2)^4}$

29. $\dfrac{(a^{-2})^6}{(a^4)^{-3}}$

30. $\dfrac{(b^{-7})^2}{(b^3)^3}$

31. $\dfrac{(-x^3)^2}{(-x)^{-3}}$

32. $\dfrac{(-y^{-1})^{-3}}{(-y^2)^{-2}}$

33. $\dfrac{(x^2y)^{-3}}{(xy)^2}$

34. $\dfrac{(ab^{-2})^{-1}}{a^{-2}b^{-1}}$

35. $\dfrac{(-2xy)^3}{x^3y}$

36. $\dfrac{(-ab^2c)^{-1}}{a^{-2}bc^{-1}}$

37. $\dfrac{(-3x)^2}{-3x^2}$

38. $\dfrac{(2x^2y)^{-1}}{(-2x^2y^3)^2}$

39. $\dfrac{(2a^{-1}b^2)^2}{(a^3b)^3}$

40. $\dfrac{(x^{-3}y^4)^3}{(-3x^2y^{-2})^2}$

41. $x^2(x^4 - 2x)$

42. $x^3(x^{-1} - x)$

43. $2x(x^5 + 3x^{-1})$

44. $3x^2(x^4 + 2x^{-3})$

45. $x^4(2x^2 - x - 3x^{-2})$

46. $2x^{-3}(x^5 - 3x^4 + x)$

47. $(2^{-1} + x^{-1})^{-1}$

48. $[(2x)^{-1} + (2y)^{-1}]^{-1}$

49. $(xy)^{-1}(x^{-1} + y^{-1})^{-1}$

50. $(a^{-2} + b^{-2})^{-1}$

51. $\left(\dfrac{7}{x}\right)\left(\dfrac{3}{14x}\right) + \left(\dfrac{3}{2x}\right)^2$

52. $x^{-3}\left(\dfrac{6}{5x}\right)^{-1} - \left(-\dfrac{1}{2x}\right)^2$

53. $\dfrac{3y}{10x^3} + \dfrac{2}{15xy}$

54. $\dfrac{5}{12x^{-3}} - \dfrac{2}{15x^{-2}}$

55. $\dfrac{1}{2x^{-2}} + \dfrac{1}{3x^{-2}}$

56. $\dfrac{1}{4y^{-4}} - \dfrac{1}{3y^{-4}}$

57. $\left(\dfrac{x^3y}{4}\right) \div \left(\dfrac{4}{x} \div \dfrac{6}{y^3}\right)$

58. $\dfrac{x^{-3}}{4x} - \dfrac{x}{6x^5}$

59. $y^{-5}\left(2xy \div \dfrac{x}{3y^2}\right)$

60. $\left(\dfrac{2}{x} + x^{-1}\right) \div \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{5x^{-2}}\right)$

61. $x^{-1} \div (x + x^{-1})^{-1}$

■ 1-4 EXPONENTES FRACCIONARIOS

Hemos definido a^m cuando m es cualquier entero, ahora extenderemos la definición al caso en que m es un número racional arbitrario. Nos gustaría hacer esta extensión en tal forma que las propiedades 1 a 5 de la sección 1-3 continúen siendo válidas, aun en el caso de que m y n no sean enteros.

En primer término, consideraremos la definición de $a^{1/n}$ cuando n es un entero distinto de cero. Para que la propiedad 3 continúe vigente cuando $m = 1/n$, debe ser válido que

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

De este modo, si hacemos $b = a^{1/n}$, es necesario que $b^n = a$.

EJEMPLO 1

a) $8^{1/3} = 2$ ya que $2^3 = 8$

b) $(-243)^{1/5} = -3$ ya que $(-3)^5 = -243$

En el caso de que n sea un entero par, surgen dos dificultades con esta definición de $a^{1/n}$. Por ejemplo, sea $n = 2$ y $a = 4$. Entonces, $b = 4^{1/2}$ si $b^2 = 4$. Pero hay *dos* números cuyo cuadrado es igual a 4, es decir, $b = 2$ y $b = -2$. De modo que necesitamos decidir qué entenderemos cuando escribamos $b = 4^{1/2}$. En realidad, *definiremos* $4^{1/2}$ como $+2$.

En segundo lugar, suponga que a es negativo. En tal caso, $b = a^{1/2}$ si $b^2 = a$. Sin embargo, el cuadrado de cualquier número negativo (positivo, negativo o cero) nunca es negativo. Por ejemplo, $4^2 = 16$ y $(-3)^2 = 9$, y ambos son positivos. En consecuencia b^2 nunca es negativo para cualquier número real b, de modo que cuando $a < 0$, $a^{1/2}$ no existe en los números reales. Así, $(-1)^{1/2}$ o $(-\frac{4}{3})^{1/2}$ carecen de sentido como números reales. Adoptaremos la siguiente definición.