Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

NÚMEROS REALES

NÚMEROS NATURALES Y NÚMEROS ENTEROS

Los números naturales surgen como respuesta a la necesidad de nuestros antepasados de contar los elementos de un conjunto (por ejemplo los animales de un rebaño) y de asignar un símbolo a una determinada cantidad de objetos.

A lo largo de la historia, cada cultura ha utilizado diferentes símbolos para representar un número y ha usado distintas reglas para escribirlos y trabajar con ellos. En otras palabras, se han utilizado diferentes *sistemas de numeración*: sistema egipcio, sistema romano, sistema chino, sistema decimal, sistema binario (utilizado como lenguaje interno de los ordenadores), … .

El primer conjunto numérico que se considera es el de los **números naturales** representado por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Hay que señalar que no existe acuerdo sobre si el 0 es o no es un número natural. En esta unidad didáctica se considera que no lo es.

Ejemplo 1: Son números naturales 3, 8, 104 …

No son números naturales -3, 0, $\frac{4}{5}$, $\sqrt[3]{7}$ …

En este conjunto la **suma** y el **producto** son operaciones internas, es decir, dados dos números naturales, a y b, su suma, $a + b$, es otro número natural y su producto, $a.b$, también lo es.

La operación producto también se puede representar con el símbolo "×", es decir, $a.b = a\times b$. Incluso, es habitual no poner ningún símbolo, representando el producto de a y b simplemente por ab.

En el conjunto de los números naturales se pueden realizar otras dos operaciones, la **resta** y la **división**, pero ninguna de las dos es una operación interna, ya que el resultado de restar o dividir dos números naturales no siempre es un número natural. Esta es precisamente una de las razones por la que este conjunto numérico resulta insuficiente a la hora de resolver ciertos problemas.

Ejemplo 2:

a) En el conjunto de los números naturales se puede realizar la operación 11-4 ya que 11-4 = 7 es un número natural. Sin embargo, la operación 4-10 no se puede realizar en $\mathbb{N}$ ya que 4-10 = -6 no es un número natural.

   En el conjunto de los números naturales se puede realizar la operación 12:3 ya que 12:3 = 4 es un número natural. Sin embargo, la operación 6:4 no se puede realizar en $\mathbb{N}$ ya que $6:4 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ no es un número natural.

b) La ecuación $x + 3 = 1$ no se puede resolver en $\mathbb{N}$ ya que despejando x queda $x = 1-3 = -2$ que no es un número natural.

La ampliación del conjunto de los números naturales al de los números enteros hace que la resta sea una operación interna en el nuevo conjunto, de manera que tienen solución en él algunas ecuaciones que en $\mathbb{N}$ no se pueden resolver. Así, por ejemplo, la ecuación $7 + x = 3$ tiene como solución $x = 3 - 7 = -4$ que no es un número natural pero sí es un número del nuevo conjunto.

El conjunto de los **números enteros** es $\mathbb{Z} = \{ \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Así pues, el conjunto de los números enteros surge al añadir a N el 0 y todos los números que aparecen al cambiar el signo a los naturales. Por tanto, es claro que $N \subset Z$.

Ejemplo 3: Son números enteros 15, -15, 0, 4 …
No son números enteros $\frac{-8}{3}$, π, $2\sqrt{5}$, e+1 …

En Z, la **suma**, la **resta** y el **producto** son operaciones internas, pero no lo es la **división**.

Ejemplo 4:

a) 4 – 9 = -5

b) (15-3):(2+1) = 12:3 = 4

c) La operación 7:5 no se puede realizar en Z ya que 7:5 = $\frac{7}{5}$ no es un número entero.

d) La ecuación 5 + x = 1 se puede resolver en Z, siendo su solución x = 1 – 5 = -4.

e) La ecuación 3x = -4 no se puede resolver en Z ya que su solución x = -4:3 = $\frac{-4}{3}$ no es un número entero.

Para realizar el producto o la división de dos números enteros es necesario tener en cuenta las siguientes *reglas de signos*.

Si a, $b \in Z$, se verifica:

1. $a > 0$ y $b > 0 \Rightarrow a.b > 0$ y $a:b > 0$
2. $a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow a.b > 0$ y $a:b > 0$
3. $a > 0$ y $b < 0 \Rightarrow a.b < 0$ y $a:b < 0$
4. $a < 0$ y $b > 0 \Rightarrow a.b < 0$ y $a:b < 0$

Simbólicamente estas reglas se pueden expresar de la siguiente forma:

1. (+).(+) = (+)   (+):(+) = (+)
2. (-).(-) = (+)   (-):(-) = (+)
3. (+).(-) = (-)   (+):(-) = (-)
4. (-).(+) = (-)   (-):(+) = (-)

Ejemplo 5:

a) 4.(-3) = -12;   (-5).(-2) = 10;   8:(-2) = -4

b) 3.(-2) – 5.(-7) = -6 – (-35) = -6 + 35 = 29

c) -5.3.(-4).(-2) = -120

d) (-10).(-3):(-6) = 30:(-6) = -5

NÚMEROS RACIONALES Y NÚMEROS IRRACIONALES

La ampliación del conjunto de los números enteros al de los racionales, hace que la división de cualquier número entre otro no nulo se pueda realizar en el nuevo conjunto. Así, por ejemplo, en el conjunto de los números enteros, la ecuación $4x = 7$ no tiene solución; sin embargo, en el conjunto de los números racionales sí que se puede resolver, siendo su solución $x = \frac{7}{4}$.

El conjunto de **números racionales** es $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\right\}$.

Así pues el conjunto de los números racionales surge al añadir al de los enteros las llamadas **fracciones**.

Es inmediato que cualquier número entero, $a \in \mathbb{Z}$, es también racional, ya que $a = \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$, es decir, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Notar que un número racional puede ser representado por diferentes fracciones, las cuales son *equivalentes* entre sí. Esto se deduce de la propiedad que dice que si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican o dividen por el mismo número entero no nulo, la fracción obtenida es equivalente a la primera. Normalmente, para representar un número racional se utiliza una fracción irreducible, que es aquella cuyo numerador y denominador son números primos entre sí (Ver Unidad Didáctica 1).

Ejemplo 6:

a) Son números racionales 4, -7, $\frac{5}{3}$, $\frac{-4}{7}$ ... .

b) El número racional $\frac{1}{8}$ admite diferentes representaciones en forma de fracción, $\frac{1}{8} = \frac{-5}{-40} = \frac{3}{24} = \ldots$. Todas estas fracciones son equivalentes entre sí y $\frac{1}{8}$ es la fracción irreducible.

c) Puede resultar conveniente simplificar, si es posible, la fracción que representa un número racional para encontrar otra equivalente más sencilla, por ejemplo, $\frac{735}{315} = \frac{105}{45} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$.

d) $\sqrt{5}$ no es un número racional puesto que no se puede representar por una fracción cuyo numerador y denominador sean números enteros. Por la misma razón, $\frac{-\sqrt{2}}{6}$, $\sqrt{3}+1$ y $5e$ tampoco son números racionales.

Representación decimal de los números racionales

Cualquier número racional se puede expresar como un número entero o decimal sin más que hacer la división entre el numerador y el denominador de cualquiera de las fracciones que lo representan. Según el tipo de expresión decimal obtenida los números racionales se clasifican como sigue:

- **Número entero**: no tiene ninguna cifra decimal, es decir, la división entera (sin sacar cifras decimales) entre el numerador y el denominador de cualquiera de las fracciones que lo representan es exacta.

- **Número decimal**: tiene alguna cifra decimal, es decir, la división entera entre el numerador y el denominador de cualquiera de las fracciones que lo representan no es exacta. Según el número de cifras decimales se distinguen:
    - **Número decimal finito o exacto**: tiene un número finito de cifras decimales, es decir, al realizar la división entre el numerador y el denominador se obtiene resto cero.
    - **Número decimal periódico**: tiene un número infinito de cifras decimales, pero hay un bloque de ellas llamado **periodo** que se repite indefinidamente y que se representa bajo el símbolo "$\overset{\frown}{\ }$"; es decir, al realizar la división entre el numerador y el denominador nunca se obtiene resto cero y, por tanto, la división no termina nunca. Pueden ser:
        - **Número decimal periódico puro**: el periodo aparece inmediatamente después de la coma decimal.
        - **Número decimal periódico mixto**: el periodo no aparece inmediatamente después de la coma decimal. En este caso se llama **anteperiodo** a la parte decimal anterior al periodo, es decir, a los números que hay entre la coma decimal y el periodo.

Ejemplo 7:

a) $\frac{-20}{5} = -4$ es un número entero.

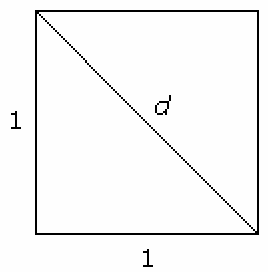
b) $\frac{-3}{50} = -0'06$ y $\frac{4}{5} = 0'8$ son número decimales finitos o exactos.

c) $\frac{13}{3} = 4'33333\ldots = 4'\overset{\frown}{3}$ es un número decimal periódico puro cuyo periodo es 3.

d) $-1'1666\ldots = -1'1\overset{\frown}{6}$ es un número decimal periódico mixto cuyo periodo es 6 y cuyo anteperiodo es 1. En forma de fracción es $-1'1\overset{\frown}{6} = -\frac{116-11}{90} = -\frac{105}{90} = -\frac{7}{6}$.

e) $\frac{937}{330} = 3'0212121\ldots = 3'0\overset{\frown}{21}$ es un número decimal periódico mixto cuyo periodo es 21 y cuyo anteperiodo es 0.

Los números irracionales surgen por la imposibilidad de resolver en $\mathbb{Q}$ ciertos problemas. Por ejemplo, si se quiere calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, esto no es posible hacerlo en el conjunto de los números racionales, ya que por el Teorema de Pitágoras, llamando d a la longitud buscada, se ha de cumplir que $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, de donde, $d = \sqrt{2}$ que no es un número racional puesto que no se puede expresar como una fracción, en otras palabras, la expresión decimal de $\sqrt{2}$ tiene infinitas cifras decimales.



El conjunto de **números irracionales** se representa por I y está formado por todos los números decimales cuya parte decimal tienen infinitas cifras no periódicas, es decir, por todos los números que no se pueden representar por el cociente de dos números enteros.

Es inmediato que no existe ningún número que sea racional e irracional, es decir, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

Ejemplo 8:

a) Son números irracionales $\sqrt{3}$ = 1'7320508... , 1 - $\sqrt{5}$ y $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ entre otros.

b) Otro número irracional es π = 3'14159265... que es la proporción entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

c) Otro número irracional es $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = 2'71828182845905... .

NÚMEROS REALES

Como se ha señalado anteriormente la necesidad de resolver diversos problemas de origen aritmético y geométrico lleva a ir ampliando sucesivamente los conjuntos numéricos, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, y a definir el conjunto de los números irracionales, I, cuya intersección con los otros es vacía. A partir de los números racionales y los irracionales se define un nuevo conjunto al que se denomina conjunto de números reales.

El **conjunto de los números reales**, $\mathbb{R}$, es la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales, es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Es inmediato que dado un número real cualquiera o bien es racional o bien es irracional ya que la intersección de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ es vacía.

Ejemplo 9: Los siguientes números son números reales: 504, -13, $\frac{7}{5}$, $1'4\overset{\frown}{32}$, $5+2\sqrt[5]{3}$, $\frac{-4}{\sqrt{3}+5}$, $1-e$, π^2

Operaciones en el conjunto de números reales

La **suma** es una operación interna en $\mathbb{R}$ y sus propiedades se enumeran a continuación. Dados a, b y $c \in \mathbb{R}$ se verifica:

1. *Asociativa*: $(a+b) + c = a + (b+c)$
2. *Elemento neutro*: es el número 0, ya que $a + 0 = 0 + a = a$
3. *Elemento simétrico*: Dado a, su elemento simétrico, llamado *opuesto*, es $-a$, ya que se cumple $a + (-a) = (-a) + a = 0$
4. *Conmutativa*: $a+b = b+a$

Con estas propiedades se puede decir que el conjunto de los números reales con la operación suma es un **grupo conmutativo**.

El hecho de que dado cualquier número real exista su elemento opuesto permite que la **resta** en $\mathbb{R}$, definida por $a - b = a + (-b)$, sea una operación interna.

El **producto** es una operación interna en R y sus propiedades se enumeran a continuación. Dados a, b y $c \in$ R se verifica:

1. *Asociativa*: $(a.b).c = a.(b.c)$
2. *Elemento neutro*: es el número 1, ya que $1.a = a.1 = a$
3. *Elemento simétrico*: Dado $a \neq 0$, su elemento simétrico, llamado *inverso,* es $a^{-1} = \frac{1}{a}$, ya que se cumple $a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1$.
4. *Conmutativa*: $a.b = b.a$
5. *Distributiva respecto de la suma*: $a.(b+c) = a.b + a.c$

Con estas propiedades y las enumeradas para la suma se puede decir que el conjunto de los números reales con las operaciones suma y producto es un **cuerpo conmutativo**.

El hecho de que dado cualquier número real no nulo exista su elemento inverso permite que la **división** en R, definida por $a:b = a.b^{-1} = a.\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$, exista siempre que b sea no nulo.

Ejemplo 10:

a) Teniendo en cuenta la propiedad asociativa, el producto $-8.\frac{1}{2}.25$ se puede calcular de las dos formas siguientes:

$$\left(-8.\frac{1}{2}\right).25 = -4.25 = -100$$

$$-8.\left(\frac{1}{2}.25\right) = -8.\frac{25}{2} = \frac{-200}{2} = -100$$

b) $(10+4).6 = 14.6 = 84$

Por la propiedad distributiva también se podía haber operado como sigue: $(10+4).6 = 10.6 + 4.6 = 60 + 24 = 84$

c) $375.11 - 425.11 = 4125 - 4675 = -550$

Por la propiedad distributiva también se podía haber operado como sigue:

$$375.11 - 425.11 = (375-425).11 = -50.11 = -550$$

En este caso, aplicar la propiedad distributiva equivale a *sacar factor común* el número 11.

d) Aplicando la propiedad distributiva en las dos expresiones siguientes se tiene:

$$5.(a+3) = 5a + 15$$

$$-3.\left(5+\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -15 - \sqrt{2}$$

e) El elemento inverso de $\frac{3}{2}$ es $\frac{2}{3}$, ya que $\frac{3}{2}.\frac{2}{3} = \frac{3.2}{2.3} = \frac{6}{6} = 1$

f) El elemento inverso de $\frac{-4}{3}$ es $\frac{1}{\frac{-4}{3}} = \frac{-3}{4}$

Notar que para realizar operaciones combinadas hay que tener en cuenta la prioridad entre las operaciones. Si hay paréntesis, estos se calculan en primer lugar y si no los hay los productos y divisiones tienen prioridad a las sumas y restas.

Ejemplo 11:

a) -8+5.3 = -8+15 = 7. Esta operación no da el mismo resultado que (-8+5).3 = -3.3 = -9

b) En el caso en que se sucedan multiplicaciones y divisiones sin paréntesis, se tiene que comenzar a efectuarlas por la izquierda. Así, la operación 6:3.2 se debe realizar como sigue: 6:3.2 = 2.2 = 4 y no es correcto realizar en primer lugar el producto 3.2

Orden en el conjunto de números reales. Intervalos

En el conjunto de los números reales existe una ordenación "natural" que se puede definir a partir de las relaciones de orden "menor" o "menor o igual".

Dados dos números reales distintos, a y b, se dice que ***a* es menor que *b*** y se escribe ***a* < *b*** si b-a es un número positivo. Se dice que ***a* es menor o igual que *b*** y se escribe ***a* ≤ *b*** si b-a es un número positivo o cero.

Si $a < b$ también se dice que ***b* es mayor que *a*** y se escribe ***b* > *a***. Análogamente, si $a \le b$ también se dice que ***b* es mayor o igual que *a*** y se escribe ***b* ≥ *a***.

A continuación, se enumeran algunas propiedades que relacionan las desigualdades con las operaciones entre números reales. Dados a, b y $c \in R$ se verifica:

1. $a \le b \;\Rightarrow\; a + c \le b + c$

2. $a \le b \;\Rightarrow\; \begin{cases} a.c \le b.c & \text{si } c \ge 0 \\ a.c \ge b.c & \text{si } c \le 0 \end{cases}$

3. Si $a \le b$ y ambos tienen el mismo signo, entonces $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

   Como caso particular, al tomar inversos se cumple:

   $a \ge 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} \le 1$

   $0 < a \le 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} \ge 1$

   $-1 \le a < 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} \le -1$

   $a \le -1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} \ge -1$

Similares propiedades se verifican con la desigualdad < en lugar de la desigualdad ≤.

Ejemplo 12:

a) $-2 < 1 \;\Rightarrow\; -2+3 < 1+3 \;\Rightarrow\; 1 < 4$

b) $3 < 4 \;\Rightarrow\; -2.3 > -2.4 \;\Rightarrow\; -6 > -8$

c) $1 < \sqrt{2} \;\Rightarrow\; 1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $-6 < -5 \;\Rightarrow\; \frac{1}{-6} > \frac{1}{-5} \;\Rightarrow\; \frac{-1}{6} > \frac{-1}{5}$

Las propiedades anteriores son muy útiles a la hora de resolver inecuaciones (Ver Unidad Didáctica 2).

Ejemplo 13:

a) $3+x \leq 8 \Rightarrow -3+3+x \leq -3+8 \Rightarrow x \leq 5$

b) $-5x > 10 \Rightarrow \frac{-1}{5}(-5x) < \frac{-1}{5}.10 \Rightarrow x < -2$

La ordenación existente en el conjunto de los números reales permite definir un tipo de conjuntos en R que van a ser muy útiles: los **intervalos**. Se distinguen los siguientes tipos de intervalos:

- **Intervalo abierto**: $(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$
- **Intervalo cerrado**: $[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$
- **Intervalo semiabierto o semicerrado**:

$$(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\} \quad \text{o} \quad [a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$$

Los números a y b que determinan cada uno de los conjuntos anteriores se denominan **extremos** del correspondiente intervalo.

Los intervalos que se han definido son intervalos finitos. Si se consideran los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ como determinantes de uno de los dos extremos surgen los intervalos infinitos:

- **Intervalo infinito abierto**: $(a, +\infty) = \{x \in R \mid a < x\}$ o $(-\infty, b) = \{x \in R \mid x < b\}$
- **Intervalo infinito cerrado**: $[a,+\infty) = \{x \in R \mid a \leq x\}$ o $(-\infty, b] = \{x \in R \mid x \leq b\}$

Notar que $(-\infty,+\infty) = R$.

A partir del concepto de intervalo, se define **entorno simétrico** de centro $a \in R$ y radio $r > 0$ como el intervalo abierto $(a-r, a+r) = \{x \in R \mid a-r < x < a+r\}$.

Ejemplo 14:

a) $(-5, -8)$ y $\left(\frac{-3}{10}, \frac{7}{5}\right)$ son intervalos finitos abiertos; $\left(\frac{8}{5}, +\infty\right)$ es un intervalo infinito abierto.

b) $[5, 3e]$ y $[1, 2]$ son intervalos finitos cerrados; $(-\infty, 1'123]$ y $[0, +\infty)$ son intervalos infinitos cerrados.

c) $(-\sqrt[3]{7}, 0]$ y $[3, 10)$ son intervalos semiabiertos o semicerrados.

d) El entorno simétrico de centro 0 y radio 1 es el intervalo $(0-1, 0+1) = (-1, 1)$.

e) El entorno simétrico de centro -2 y radio 0'1 es el intervalo $(-2-0'1, -2+0'1) = (-2'1, -1'9)$.

Los intervalos se pueden utilizar para expresar la solución de las inecuaciones (Ver Unidad Didáctica 2).

Ejemplo 15:

a) El conjunto de valores de x que verifican $3x + 2 < 8$ es el intervalo que se calcula a continuación:

$3x + 2 < 8 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < \frac{6}{3} = 2$, es decir, la solución de la inecuación es el intervalo infinito abierto $(-\infty, 2)$

b) El conjunto de valores de x que verifican $x^2 - 1 \leq 3$ es el intervalo que se calcula a continuación:

$x^2 - 1 \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$, es decir, la solución de la inecuación es el intervalo cerrado $[-2, 2]$

c) El conjunto de valores de x que verifican $5x^2 > 10$ se calcula a continuación:

$5x^2 > 10 \Rightarrow x^2 > \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow x > \sqrt{2}$ o $x < -\sqrt{2}$, es decir, la solución de la inecuación es el conjunto $(-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

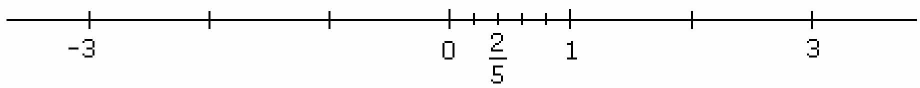
Representación gráfica de los números reales

Los números reales se representan en una recta llamada **recta real**. Para ello, se coloca el número 0 en un determinado punto de la recta que se denomina origen. El número 1 se coloca en un punto de la recta a la derecha del origen y a una determinada distancia del mismo que se denomina unidad. Así, cualquier número real positivo se representa por un punto de la recta a la derecha del origen y de manera que la distancia de dicho punto al origen viene dada por el valor de dicho número; por ejemplo, el 3 se representa por el punto cuya distancia al origen sea tres veces la unidad. Para representar los números reales negativos se procede de la misma forma pero considerando un punto de la recta a la izquierda del origen. De esta manera, los puntos que representan a un número real y a su opuesto son puntos de la recta simétricos respecto del origen.

Según esta representación, los números enteros están representados por puntos de la recta entre los cuales quedan huecos sin cubrir. Los números racionales cubren parte de estos huecos, por ejemplo, para representar el número racional $\frac{2}{5}$, como $0 < \frac{2}{5} < 1$, se considera la distancia que separa los puntos de la recta que representan el 0 y el 1, es decir, la unidad y se divide ésta en 5 partes iguales, entonces el punto que representa el número $\frac{2}{5}$ corresponde al punto determinado por las dos primeras partes de la anterior división.

Dados dos números racionales cualesquiera existen infinitos números racionales comprendidos entre ellos, sin embargo, a pesar de esto, todavía quedan huecos en la recta sin cubrir. Los puntos de estos huecos representan los números irracionales.

De esta manera, al representar los números racionales y los irracionales se cubre toda la recta, es decir, todo punto de la recta representa un número real que además es único y, al revés, todo número real es representado por un único punto de la recta. Es por esto que a la recta en la que se representan los números reales se le llama recta real.



Es fácil ver que según las definiciones dadas, la representación geométrica de un intervalo es un segmento (con sus extremos si es cerrado y sin sus extremos si es abierto) y la representación geométrica de un intervalo infinito es una semirrecta (con el extremo si el intervalo es cerrado y sin el extremo si es abierto).

Valor absoluto de un número real

Dado un número real cualquiera, a, se define su **valor absoluto** como $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Este valor se conoce también como **módulo** de a y representa la distancia del origen de la recta real al punto que representa al número a.

Si a, $b \in \mathbb{R}$ y $k \geq 0$ se verifican las siguientes propiedades:

1. $|a| \geq 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad triangular)
4. $|a.b| = |a|.|b|$
5. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, con $b \neq 0$
6. $\sqrt{a^2} = |a|$
7. $|a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k$
8. $|a| \geq k \Leftrightarrow a \leq -k$ o $a \geq k$

Ejemplo 16:

a) $|-3| = |3| = 3$

b) $|7-x| = \begin{cases} 7-x & \text{si } 7-x \geq 0 \\ -(7-x) & \text{si } 7-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 7-x & \text{si } x \leq 7 \\ x-7 & \text{si } x > 7 \end{cases}$

c) $|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 2x+1 \geq 0 \\ -(2x+1) & \text{si } 2x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq \frac{-1}{2} \\ -2x-1 & \text{si } x < \frac{-1}{2} \end{cases}$

d) $|x^2-2x+1| = |(x-1)^2| = (x-1)^2$ ya que el cuadrado de cualquier número es siempre positivo o cero.

e) $|x^2+5x+6| = \begin{cases} x^2+5x+6 & \text{si } x^2+5x+6 \geq 0 \\ -x^2-5x-6 & \text{si } x^2+5x+6 < 0 \end{cases}$

Para determinar cuando x^2+5x+6 es mayor o igual que cero o menor que cero se calculan las raíces del polinomio que son -2 y -3 y, por tanto, $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$. Así, el signo del polinomio dependerá de los valores de x como se muestra en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, +\infty)$
$x + 2$	-	-	+
$x + 3$	-	+	+
$(x + 2)(x + 3)$	+	-	+

En conclusión, $|x^2+5x+6| = \begin{cases} x^2+5x+6 & \text{si } x \leq -3 \text{ o } x \geq -2 \\ -x^2-5x-6 & \text{si } -3 < x < -2 \end{cases}$

f) $|-x^2-8x| = |x^2+8x| = \begin{cases} x^2+8x & \text{si } x^2+8x \geq 0 \\ -x^2-8x & \text{si } x^2+8x < 0 \end{cases}$

Para determinar cuando x^2+8x es mayor o igual que cero o menor que cero se calculan las raíces del polinomio que son 0 y -8, por tanto, $x^2+8x = x(x+8)$. Así, el signo del polinomio dependerá de los valores de x como se muestra en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -8)$	$(-8, 0)$	$(0, +\infty)$
x	-	-	-
$x + 8$	-	+	+
$x(x + 8)$	+	-	+

En conclusión, $|-x^2-8x| = \begin{cases} x^2+8x & \text{si } x \leq -8 \text{ o } x \geq 0 \\ -x^2-8x & \text{si } -8 < x < 0 \end{cases}$