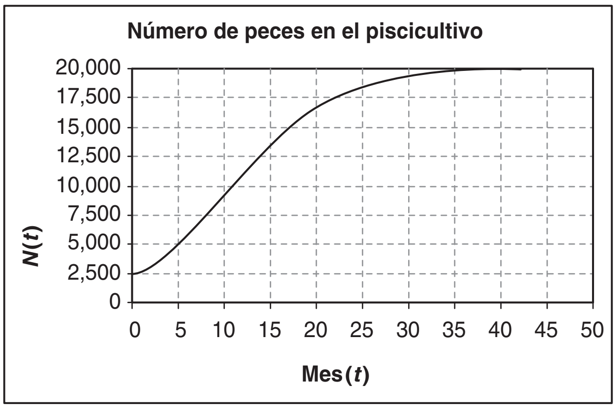
CAPÍTULO 5

Funciones y sus gráficas

¿Cuándo recolectar peces?

"Un dibujo dice más que mil palabras" reza un dicho popular. Y en matemáticas se podría decir "Una gráfica dice más que mil palabras" y, en efecto, en muchas ocasiones puede obtenerse valiosa información de las gráficas. Por ejemplo, observe la siguiente gráfica que representa el número de peces en un piscicultivo durante un periodo de 50 meses.



La gráfica nos "dice" que al inicio había 2500 peces, y que el número de éstos al principio aumentaba rápidamente y aunque seguían creciendo en número, este aumento de la población de peces era cada vez más lento. También se puede ver que a largo plazo el número de peces parece acercarse a 20,000. Al final del capítulo aparece la tabla de valores que se utilizó para crear esta gráfica.

Si el responsable de la "granja" de peces tiene que decidir el mes más adecuado para recolectar 2500 peces de esta granja, ¿cuál es el mes en que se debe realizar la recolección? El mejor mes para hacer la recolección es aquél en el que sea menor el tiempo necesario para que se recupere el número de peces que se retiren. Además de la gráfica, tome como referencia la tabla de valores que se encuentra la final del capítulo, pero antes de consultarla trate de dar una respuesta únicamente con base en la gráfica.

TEMARIO

■ 5-1 FUNCIONES

☛ **1.** ¿Lo siguiente define una función?

a) La regla que asigna a cada persona el número de sus hijos e hijas;

b) la regla que asigna a cada persona los nombres de sus hijos o hijas;

c) la regla que asigna a cada persona el nombre de su primogénito;

d) un diccionario francés-inglés.

El concepto de función es una de las ideas fundamentales en matemáticas. Casi cualquier estudio que se refiera a la aplicación de las matemáticas a problemas prácticos, o que requiera el análisis de datos empíricos, emplea este concepto matemático.

Una función expresa la idea de que una cantidad depende o está determinada por otra. Los ejemplos siguientes aclaran esta idea:

1. El área de un círculo depende de la longitud de su radio; si se conoce la longitud del radio, podemos determinar el área. Decimos que el área es una función del radio.
2. El costo semanal de producir cualquier artículo depende del número de artículos producidos. Decimos que el costo es una función del número de artículos.
3. Las prestaciones otorgadas por el sistema de seguridad social de un país depende de su tasa de desempleo.
4. La cantidad de cierto artículo que el fabricante ofrecerá depende del precio que pueda lograr. La cantidad es una función del precio.

Empezaremos dando la definición formal de una función.

DEFINICIÓN Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Una **función** de X en Y es una *regla* que se asigna a cada elemento $x \in X$ una única $y \in Y$. Si una función asigna y a un $x \in X$ particular, decimos que y es el **valor** de la función en x.

Por lo general, una función se denota por letras como f, g, F o G.

Denotemos con f una función determinada. El conjunto X para el cual f asigna una única $y \in Y$ se denomina el **dominio** de la función f. A menudo se indica mediante D_f. El conjunto de valores correspondiente $y \in Y$ se conoce como el **rango** de la función y por lo regular se denota por R_f.

EJEMPLO 1

a) Sea X el conjunto de estudiantes en una clase. Sea f la regla que asigna a cada estudiante su calificación final. Dado que cada estudiante tiene una sola calificación final, esta regla define una función. En este caso, el dominio es el conjunto de todos los estudiantes en la clase y el rango es el conjunto de todas las calificaciones concedidas. (Por ejemplo, R_f podría ser el conjunto $\{A, B, C, D, F\}$).

b) El valor de los activos de una empresa es una función del tiempo. Aquí el dominio es el conjunto de valores del tiempo, y el rango de la función es el conjunto de valores de los activos (digamos en dólares). ☛ **1**

Respuesta *a*) Sí; *b*) no; *c*) sí; *d*) no (por lo común más de una palabra en inglés corresponde a cada palabra en francés).

Si una función f asigna un valor y en el rango a cierta x en el dominio, escribimos

$$y = f(x)$$

Leemos $f(x)$ como "f de x"; se denomina el *valor de* f *en* x. Observe que $f(x)$ *no* es el producto de f y x.

Si una función f se expresa por una relación del tipo $y = f(x)$, entonces x se denomina la **variable independiente** o **argumento de f** y y se conoce como la **variable dependiente**.

En general, encontraremos funciones que se expresan estableciendo el valor de la función por medio de una fórmula algebraica en términos de la variable independiente de que se trate. Por ejemplo, $f(x) = 5x^2 - 7x + 2$ y $g(p) = 2p^3 + 7/(p + 1)$.

EJEMPLO 2 Dada $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, calcule el valor de f cuando $x = a$, $x = 3$, $x = -2$ y $x = -\frac{1}{4}$; es decir, determine $f(a)$, $f(3)$, $f(-2)$ y $f(-\frac{1}{4})$.

Solución Tenemos que

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 1 \tag{1}$$

Con objeto de calcular $f(a)$, reemplazamos a x por a en la ecuación (1).

$$f(a) = 2a^2 - 5a + 1$$

Para evaluar $f(3)$, sustituimos 3 en lugar de x en ambos lados de la ecuación (1).

$$f(3) = 2(3)^2 - 5(3) + 1 = 18 - 15 + 1 = 4$$

De manera similar,

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 5(-2) + 1 = 19$$

y también

$$f(-\tfrac{1}{4}) = 2(-\tfrac{1}{4})^2 - 5(-\tfrac{1}{4}) + 1 = \tfrac{19}{8} \quad ☛\ \mathbf{2}$$

☛ **2.** Si $f(x) = (x + 1)^{-1}$, evalúe $f(1)$, $f(0)$ y $f(-1)$

EJEMPLO 3 Dada $g(x) = 3x^2 - 2x + 5$, evalúe: (a) $g(1 + h)$; (*b*) $g(1) + g(h)$; (*c*) $[g(x + h) - g(x)]/h$.

Solución Tenemos

$$g(x) = 3x^2 - 2x + 5 \tag{2}$$

a) Con el propósito de evaluar $g(1 + h)$, debemos sustituir x en la ecuación (2) por $1 + h$.

$$\begin{aligned} g(1 + h) &= 3(1 + h)^2 - 2(1 + h) + 5 \\ &= 3(1 + 2h + h^2) - 2 - 2h + 5 \\ &= 3h^2 + 4h + 6 \end{aligned}$$

b) Reemplazando x por 1 y h, respectivamente, en la ecuación (2) obtenemos

$$g(1) = 3(1^2) - 2(1) + 5 = 3 - 2 + 5 = 6$$

y asimismo

$$g(h) = 3h^2 - 2h + 5$$

Respuesta $f(1) = 0.5$, $f(0) = 1$ y $f(-1)$ no existe.

Por tanto,

$$g(1) + g(h) = 6 + 3h^2 - 2h + 5 = 3h^2 - 2h + 11$$

c) Reemplazando el argumento x en la ecuación (2) por $x + h$, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} g(x + h) &= 3(x + h)^2 - 2(x + h) + 5 \\ &= 3(x^2 + 2xh + h^2) - 2x - 2h + 5 \\ &= 3x^2 + 2x - 5 + h(3h + 6x - 2) \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}[g(x + h) - g(x)] \\ &\qquad = \frac{1}{h}[3x^2 - 2x + 5 + h(3h + 6x - 2) - (3x^2 - 2x + 5)] \\ &\qquad = 3h + 6x - 2 \end{aligned}$$

☛ **3.** Si $f(x) = |x|$, evalúe $\dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h}$

La cantidad $[g(x + h) - g(x)]/h$ para una función dada g hará evidente su importancia cuando estudiemos cálculo en el capítulo 12. ☛ **3**

EJEMPLO 4 Evalúe $F(0)$, $F(1)$ y $F(4)$ para la función F definida por

$$F(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{2 - x}}$$

Solución Primero reemplace x por 0:

$$F(0) = \frac{0 - 4}{\sqrt{2 - 0}} = \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

Después, reemplace x por 1:

$$F(1) = \frac{1 - 4}{\sqrt{2 - 1}} = \frac{-3}{\sqrt{1}} = -3$$

Por último, reemplace x por 4:

$$F(4) = \frac{4 - 4}{\sqrt{2 - 4}} = \frac{0}{\sqrt{-2}} \qquad \text{no definido.}$$

$F(4)$ no existe; en otras palabras, 4 no está en el dominio de F.

Respuesta 1 si $h \geq -1$, $h \neq 0$; $\dfrac{-(2 + h)}{h}$, si $h < -1$

En gran parte de los casos considerados, los dominios y rangos de las funciones con las cuales estaremos interesados son subconjuntos de los números reales. En tales casos, la función por lo regular se representa por su *gráfica*. La gráfica de una función f se obtiene dibujando todos los puntos (x, y), en donde x pertenece al dominio de f y $y = f(x)$, manejando x y y como coordenadas cartesianas.

EJEMPLO 5 Consideremos $f(x) = 2 + 0.5x^2$. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales, ya que podemos evaluar $f(x)$ para cualquier valor real de x. Algunos de los valores de esta función aparecen en la tabla 1, en la cual algunos valores de x están listados en el renglón superior y los valores de $y = f(x)$ están debajo de los valores correspondientes de x. Los puntos correspondientes a los valores de x y y se graficaron como puntos en la figura l. La gráfica de la función $f(x) = 2 + 0.5x^2$ es una curva con forma de U que pasa por los puntos ya graficados.

TABLA 1

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
$y = f(x)$	2	2.5	4	6.5	10	2.5	4	6.5	10

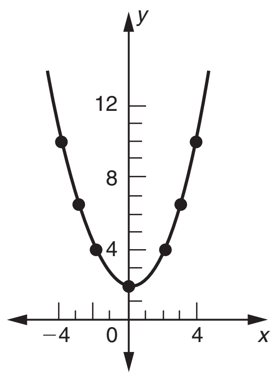


FIGURA 1

EJEMPLO 6 Los costos mensuales de un pequeño fabricante están dados, en miles de dólares, por $C = 10 + 2x$, en donde x es el número de empleados. El costo promedio por empleado está dado por

$$f(x) = \frac{10 + 2x}{x} = \frac{10}{x} + 2$$

Grafique la función f para $1 \le x \le 10$.

Solución En este caso x debe ser un número entero positivo, de modo que $D_f = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Determinamos los valores que se muestran en la tabla 2.

TABLA 2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	12	7	5.33	4.5	4	3.67	3.43	3.25	3.11	3

La gráfica se muestra en la figura 2. Observe que la gráfica consiste en puntos discretos, no en una curva continua. ☛ **4**

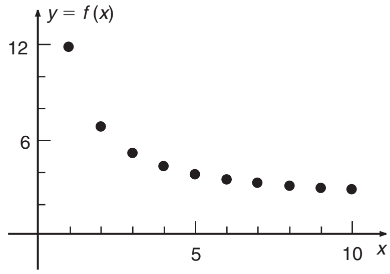
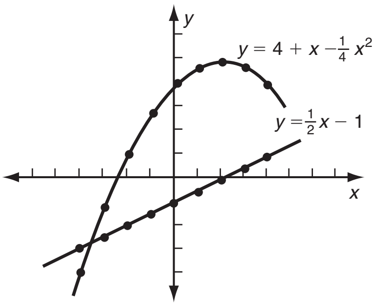


FIGURA 2

☛ **4.** Grafique las funciones $y = 4 + x - \frac{1}{4}x^2$ y $y = \frac{1}{2}x - 1$ para $-4 \leq x \leq 4$

Respuesta Utilizando la siguiente tabla de valores obtenemos las gráficas que se muestran abajo:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 4 + x - \frac{1}{4}x^2$	-4	-1.25	1	2.75	4	4.75	5	4.75	4
$y = \frac{1}{2}x - 1$	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1



Supóngase que nos dan una curva en el plano xy. ¿Cómo podemos decidir si es o no la gráfica de alguna función $y = f(x)$?

Prueba de la línea vertical:

Cualquier curva dada (o conjunto de puntos) en el plano xy es la gráfica de una función (en la cual y es la variable dependiente) con tal de que cualquier línea vertical corte a la gráfica en a lo más un punto.

Cualquier línea vertical corresponde a algún valor particular, digamos $x = x_0$, de la variable independiente, y el punto en que esta línea vertical corta la gráfica determina el valor de y que le corresponde a x_0. Es decir, la gráfica misma da la regla que relaciona cada valor de x con algún valor de y. Si la línea vertical $x = x_0$ no corta a la gráfica en ningún punto, esto significa que x_0 no pertenece al dominio.

Las gráficas de la figura 3 representan funciones. [Nótese que en la parte *c*), el dominio de la función es el conjunto de enteros $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ de modo que la gráfica sólo consta de cinco puntos en lugar de una curva].

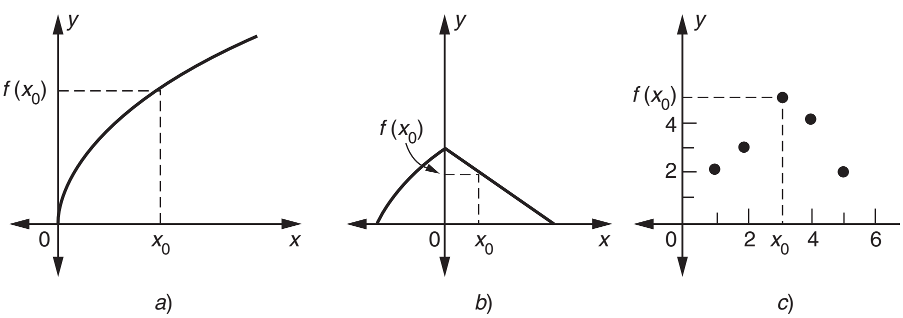


FIGURA 3

☛ **5.** Con respecto a las gráficas de las figuras 6 a la 17 del capítulo 4. ¿Alguna de ellas *no* son la gráfica de una función?

Por otra parte, las gráficas de la figura 4 no representan funciones. Éstas no son funciones porque existen líneas verticales que cortan las gráficas en más de un punto. Así, al valor $x = x_o$, en la primera gráfica, le corresponden dos valores y_1 y y_2 de y. En tal caso, el valor de x no determina un *valor único* de y. ☛ **5**

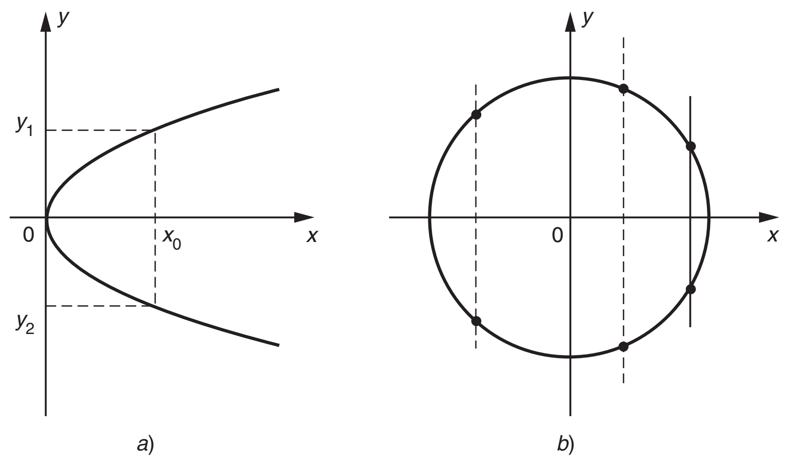


FIGURA 4

En la gráfica de una función, los valores a lo largo del eje x en que la gráfica está definida constituyen el dominio de la función. En forma análoga, los valores a lo largo del eje y en que la gráfica tiene puntos constituyen el rango de la función. Esto se ilustra en la figura 5. Aquí tenemos que

$$D_f = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\} \qquad \text{y} \qquad R_f = \{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$$

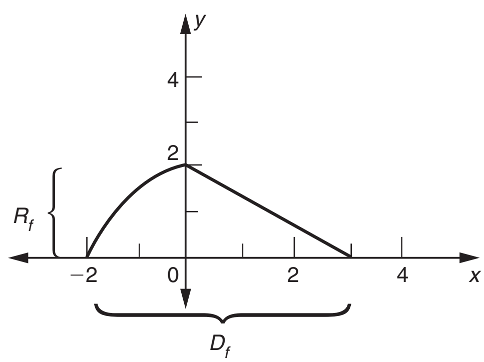


FIGURA 5

Respuesta Las rectas verticales de las figuras 11 y 15 no son. Todas las demás son gráficas de funciones.

A menudo el dominio de una función no se establece de manera explícita. En tales casos, se sobreentiende que es el conjunto de todos los valores del argumento para los cuales la regla dada tiene sentido. En el caso de una función f definida por una expresión algebraica, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $f(x)$ es un número real bien definido. Por ejemplo, el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es el conjunto de los números reales no negativos, dado que la raíz cuadrada sólo tiene sentido si $x \geq 0$. De manera similar, en el caso de la función $g(x) = x^2/(x - 3)$, el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto $x = 3$, puesto que cuando $x = 3$ el denominador se hace cero y $g(3)$ no está definido.

En general, al determinar el dominio de una función debemos tener en mente estas dos condiciones: *cualquier expresión dentro de una raíz cuadrada no puede ser negativa y el denominador de cualquier fracción no puede ser cero.* (Más generalmente, cualquier expresión dentro de un radical con índice par tal como $\sqrt[4]{}$ o $\sqrt[6]{}$ no puede ser negativa).

EJEMPLO 7 Determine el dominio de g, en donde

$$g(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$$

Solución Es claro que, $g(x)$ no es un número real bien definido si $x = 2$. Para cualquier otro valor de x, $g(x)$ es un número real bien definido. En consecuencia, el dominio de g es el conjunto de todos los reales excepto 2.

EJEMPLO 8 Encuentre el dominio de f si $f(x) = \sqrt{x - 4}$

Solución El dominio de f es el conjunto de todos los valores para los cuales la expresión dentro del radical no es negativa. Esto es,

$$x - 4 \geq 0 \quad \text{o} \quad x \geq 4$$

☛ **6.** ¿Cuál es el dominio de cada una de las funciones
a) $y = (x - 2)^2$
b) $y = \sqrt{x - 2}$?

Si $x < 4$, $f(x)$ no es un número real, dado que la cantidad a la que se extrae raíz cuadrada, $x - 4$, es negativa. La gráfica de f se aprecia en la figura 6, en la que se han graficado algunos puntos. ☛ **6**

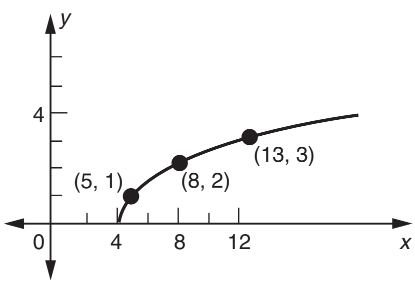


FIGURA 6

EJEMPLO 9 Determine el dominio de h, en donde

$$h(x) = \frac{x}{(x - 2)\sqrt{x - 1}}$$

Respuesta *a*) Todos los números reales
b) $\{x \mid x \geq 2\}$

Solución Aquí el radical sólo está definido para $x \geq 1$. Pero el denominador es cero si $x = 1$ o bien $x = 2$, de modo que estos dos puntos deben excluirse del dominio

☛ **7.** ¿En cada caso, cuál es el dominio?

a) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{(x+2)}$

b) $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{(x+2)}$

Respuesta *a*) $\{x \mid x \geq 1\}$
b) $\{x \mid x \leq 1, x \neq -2\}$

☛ **8.** ¿Cuál es el dominio de la función del ejemplo 10?

Respuesta Matemáticamente, esta función está definida para toda x. En la práctica, el dominio estaría limitado al intervalo $0 \leq x \leq 2$

Por tanto

$$D_h = \{x \mid x > 1, x \neq 2\}$$ ☛ **7**

En problemas prácticos, con frecuencia es necesario construir una función algebraica a partir de cierta información verbal.

EJEMPLO 10 ***(Costo de instalación de una línea telefónica)*** Una línea telefónica debe tenderse entre dos pueblos situados en orillas opuestas de un río en puntos A y B. El ancho del río es de 1 kilómetro y B está situado 2 kilómetros río abajo de A. Tiene un costo de c dólares por kilómetro tender la línea por tierra y $2c$ dólares por kilómetro bajo el agua. La línea telefónica deberá seguir la orilla del río empezando en A una distancia x (en kilómetros), y luego cruzar el río diagonalmente en línea recta hacia B. Determine el costo total de la línea como función de x.

Solución La figura 7 ilustra este problema. La línea telefónica se extiende de A a C, una distancia x a lo largo de la orilla y luego diagonalmente de C a B. El costo del segmento AC es cx mientras que el costo de CB es $2c(CB)$. El costo total (llamémosle y) está dado por

$$y = cx + 2c(CB)$$

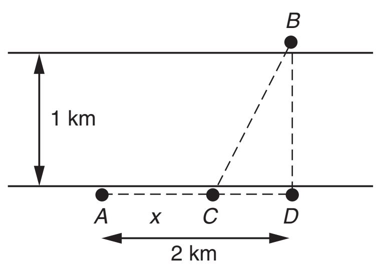


FIGURA 7

Con el propósito de terminar el problema, debemos expresar CB en términos de x. Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo BCD.

$$BC^2 = BD^2 + CD^2$$

Pero $BD = 1$ (el ancho del río) y

$$CD = AD - AC = 2 - x$$

Por tanto,

$$BC^2 = 1^2 + (2 - x)^2 = 1 + (4 - 4x + x^2) = x^2 - 4x + 5$$

En consecuencia, el costo está dado por

$$y = cx + 2c\sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

Ésta es la expresión requerida, que da y como función de x. ☛ **8**

En los ejemplos anteriores, hemos estado interesados en funciones que están definidas por una sola expresión algebraica para todos los valores de la variable independiente. Algunas veces sucede que debemos usar funciones que están definidas por más de una expresión.

EJEMPLO 11 ***(Función de costo de la electricidad)*** La electricidad se cobra a los consumidores a una tarifa de 10¢ por unidad para las primeras 50 unidades y a 3¢ por unidad para cantidades que excedan las 50 unidades. Determine la función $c(x)$ que da el costo de usar x unidades de electricidad.

Solución Si $x \leq 50$, cada unidad tiene un costo de 10¢, de modo que el costo total de x unidades es de $10x$ centavos. Así que, $c(x) = 10x$ para $x \leq 50$. Cuando $x = 50$, obtenemos $c(50) = 500$; el costo de las primeras 50 unidades es igual a 500¢. Si $x > 50$, el costo total es igual al de las primeras 50 unidades (esto es, 500¢) más el costo del resto de las unidades usadas. El número de estas unidades que sobrepasan a 50 es $x - 50$, y cuestan 3¢ cada una, por lo que su costo es de $3(x - 50)$ centavos. Así que la tarifa total cuando $x > 50$ es

$$c(x) = 500 + 3(x - 50) = 500 + 3x - 150 = 350 + 3x$$

☛ **9.** Para enviar un paquete desde Vancouver a París, Francia, un servicio de correo cobra \$50 por paquetes que pesen hasta 2 kilogramos y \$10 por cada kilogramo o fracción adicional. Grafique la función que expresa el costo de enviar un paquete de peso x kilogramos para $x \leq 8$.

Podemos escribir $c(x)$ en la forma

$$c(x) = \begin{cases} 10x & \text{si } x \leq 50 \\ 350 + 3x & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

La gráfica de $y = c(x)$ se aprecia en la figura 8. Obsérvese cómo cambia la naturaleza de la gráfica en $x = 50$, en donde una fórmula toma el lugar de la otra. ☛ **9**

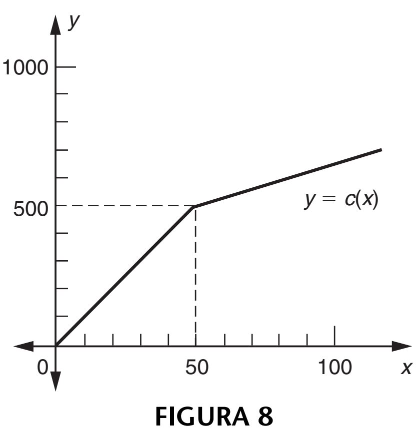
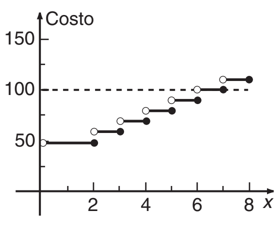


FIGURA 8

Respuesta



EJEMPLO 12 Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x - 4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales no negativos. En el caso de que $0 \leq x \leq 4$, la función está definida por la expresión algebraica

☛ **10.** Grafique la función f, en donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4 & \text{si } x < 2 \\ 8 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$f(x) = 4 - x$, mientras que si $x > 4$, está definida por la expresión $f(x) = \sqrt{x - 4}$. Algunos valores de $f(x)$ se dan en la tabla 3 y la gráfica de esta función aparece en la figura 9. Consta de dos segmentos: si x está entre 0 y 4, la gráfica está formada por el segmento de línea recta con ecuación $y = 4 - x$. ☛ **10**

TABLA 3

x	0	2	4	5	8	13
$y = f(x)$	4	2	0	1	2	3

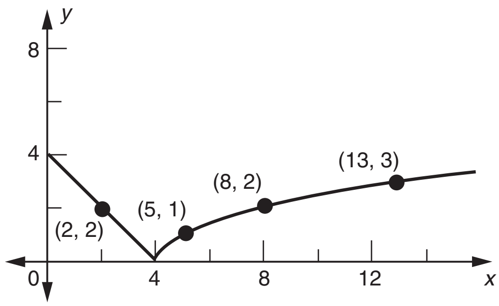


FIGURA 9

En estos ejemplos, la función considerada está definida por dos expresiones algebraicas. Algunas veces es necesario considerar funciones definidas por tres o más expresiones diferentes. (Por ejemplo, véase el ejercicio 50).

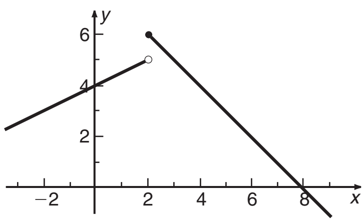
Concluimos esta sección estudiando algunas funciones simples. Una función de la forma

$$f(x) = b$$

en donde b es una constante, se denomina **función constante**. (Véase la figura 10). Ya hemos encontrado tales funciones en la sección 4-2. La gráfica de f es una línea recta paralela al eje x a una distancia $|b|$ por encima o por debajo del eje x dependiendo de que b sea positivo o negativo. En este caso,

$$D_f = \text{el conjunto de todos los números reales} \quad \text{y} \quad R_f = \{b\}$$

Respuesta



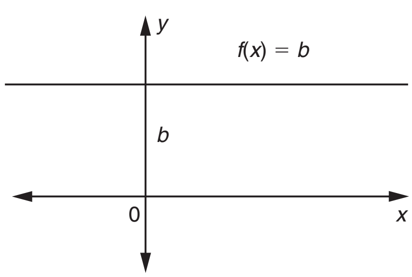


FIGURA 10

Una función f definida por la relación

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes y n un entero no negativo, se dice que es una **función polinomial de grado *n***. Por ejemplo, las funciones f y g definidas por

$$f(x) = 3x^7 - 5x^4 + 2x - 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 3$$

son funciones polinomiales de grado 7 y 3, respectivamente.

Si el grado de una función polinomial es 1, la llamaremos **función lineal**. La forma general de la función lineal está dada por

$$f(x) = mx + b \qquad (m \neq 0)$$

donde m y b son constantes. (Véase la figura 11). Como sabemos por lo expuesto en la sección 4-2, la gráfica de una función lineal es una línea recta con pendiente m y ordenada al origen b. Aquí D_f es igual a R_f que a su vez es igual al conjunto de todos los números reales.

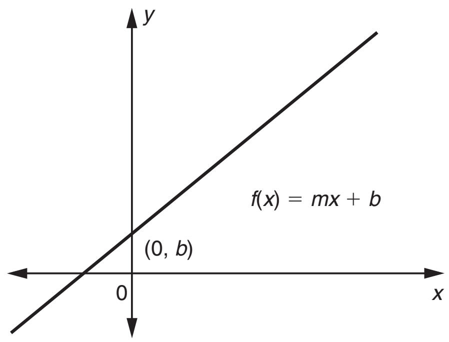


FIGURA 11

Si el grado de la función polinomial es 2, la denominaremos **función cuadrática**. La función cuadrática general puede definirse por

$$g(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

en donde a, b y c son constantes. Estudiaremos esta función con todo detalle en la sección siguiente.

En forma análoga, una función polinomial de grado 3 se conoce como **función cúbica**. Por ejemplo, la función definida por

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 1$$

es una función cúbica.

Si el grado de la función polinomial es cero, se reduce a una función constante.

Si una función puede expresarse como el cociente de dos funciones polinomiales, se denomina **función racional**. Ejemplos de funciones racionales son

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 4} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{2x^3 - 7x + 1}{5x^2 - 2}$$

En general, cualquier función racional tiene la forma $f(x) = p(x)/q(x)$, en donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios en x.

Si el valor $f(x)$ de una función f se encuentra por medio de un número finito de operaciones algebraicas, f se llama **función algebraica**. Las operaciones algebraicas son la adición, la sustracción, la multiplicación, la división, la elevación a potencias y la extracción de raíces. Por ejemplo, las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \frac{(2x+1)^2 - \sqrt{x^3+1}}{(x^2+1)^4} \quad \text{y} \quad g(x) = (2x^2-1)^{-1/7} + 5x^{3/4}$$

son funciones algebraicas.

Aparte de las funciones algebraicas, existen otras funciones llamadas **funciones trascendentes**. Ejemplos de funciones trascendentes son las funciones logarítmicas y las funciones exponenciales, que se expondrán en el capítulo 6.

EJERCICIOS 5-1

1. Dada $f(x) = 3x + 2$, calcule $f(1)$, $f(-2)$, $f(x^2)$ y $f(x + h)$

2. Dada $f(x) = 5 - 2x$, calcule $f(3)$, $f(-1)$, $f(x)$ y $f(x + h)$

3. Dada $f(t) = 5t + 7$, calcule $f(1)$, $f(-3)$, $f(c)$, $f(1 + c)$ y $f(1) + f(c)$

4. Dada $f(x) = 3 - 4x$, calcule $f(a)$, $f(a + 1)$ y $f(a) + f(1)$

5. Dada $f(x) = x^2$, calcule $f(3)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(\sqrt{x})$ y $f(x + h)$

6. Dada $f(x) = 3x^2 + 7$, calcule $f(c)$, $f(c + h)$ y $f(c + h) - f(c)$

7. Dada $f(x) = 3$, calcule $f(1/x)$, $f(x^2)$, $f(x + 2)$ y $f(x + h)$

8. Dada $f(y) = 5$, calcule $f(1/y)$, $f(y^2)$ $f(y + 3)$, $f(7)$ y $f(y + h)$

9. Dada $f(x) = \sqrt{x}$, calcule $f(4)$, $f(x^2)$ y $f(a^2 + h^2)$

10. Dada $f(x) = \sqrt{x - 16}$, calcule $f(25)$, $f(0)$ y $f(7)$

11. Dada $f(t) = 3t^2 - 5t + 7$, calcule $f(0)$, $f(1/t)$, $f(c) + f(h)$ y $f(c + h)$

12. Dada $f(u) = 2u^2 + 3u - 5$, calcule $f(0)$, $f(1/x)$, $f(x + h)$ y $f(x + h) - f(x)$

13. Dada

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \geq 5 \\ 6 - 3x & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

encuentre cada uno de los siguientes valores:

a) $f(0)$ *b)* $f(7)$ *c)* $f(-2)$

d) $f(5 + h)$ y $f(5 - h)$, con $h > 0$

14. Dada

$$g(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

evalúe cada uno de los siguientes valores:

a) $g(1)$ *b)* $g(3)$ *c)* $g(-1)$

d) $g(0)$ *e)* $g(-3)$

f) $g(2 + h)$ y $g(2 - h)$ si $2 > h > 0$

***15.** Si $F(t) = t/(1 + t)$ y $G(t) = t/(1 - t)$, demuestre que $F(t) - G(t) = -2G(t^2)$

***16.** Si $y = f(x) = (x + 1)/(x - 1)$, pruebe que $x = f(y)$

17. Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x - 1$, calcule $f[g(2)]$

18. Si $f(x) = g(x) + h(x)$, $g(x) = x^2 + 3$ y $f(x) = x^3$, calcule $h(2)$

(19-24) Evalúe $[f(x+h) - f(x)]/h$ en donde $f(x)$ está dada a continuación.

19. $f(x) = 2x + 5$

20. $f(x) = 3x - 7$

21. $f(x) = 7$

22. $f(x) = x^2$

23. $f(x) = x^2 - 3x + 5$

24. $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$

(25-42) Determine el dominio de cada función.

25. $f(x) = 2x + 3$

26. $f(t) = 2t^2 - 3t + 7$

27. $h(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

28. $D(p) = \dfrac{2p+3}{p-1}$

29. $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$

30. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

31. $F(u) = \dfrac{u+2}{u^2+1}$

32. $G(t) = \sqrt{t-2}$

33. $F(y) = -\sqrt{3y - 2}$

34. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2t-3}}$

35. $G(u) = \dfrac{2}{\sqrt{3-2u}}$

36. $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$

37. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x > 5 \\ 6 - 3x & \text{si } x < 5 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{si } -2 \le \mathrm{x} < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } 0 \le \mathrm{x} \le 2 \\ 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x < 3 \\ 3x + 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5-x} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x+5} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

41. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x-4} & \text{si } x \ge 1 \\ \dfrac{1}{1-2x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

42. $F(t) = \begin{cases} 5t - 7 & \text{si } t > 3 \\ \dfrac{1}{t-4} & \text{si } t < 3 \end{cases}$

(43-46) Trace las gráficas de las siguientes funciones:

43. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

45. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 1 \\ -x & \text{si } x < 1 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

47. *(Función de costo)* Una compañía ha determinado que el costo de producir x unidades de su producto por semana está dado por:

$$C(x) = 5000 + 6x + 0.002x^2$$

Evalúe el costo de producir:

a) 1000 unidades por semana.

b) 2500 unidades por semana.

c) Ninguna unidad.

48. *(Función de costo)* Para la función de costo

$$C(x) = 10^{-6}x^3 - (3 \times 10^{-3})x^2 + 36x + 2000$$

calcule el costo de producir:

a) 2000 unidades.

b) 500 unidades.

49. *(Fisiología)* En una prueba para metabolismo de azúcar en la sangre, llevada a cabo en un intervalo de tiempo, la cantidad de azúcar en la sangre era una función del tiempo t (medido en horas) y dada por:

$$A(t) = 3.9 + 0.2t - 0.1t^2$$

Encuentre la cantidad de azúcar en la sangre:

a) Al principio de la prueba.

b) 1 hora después.

c) $2\frac{1}{2}$ horas después de iniciada.

50. *(Contaminación atmosférica)* El índice de contaminación atmosférica en cierta ciudad varía durante el día de la siguiente manera:

$$p(t) = \begin{cases} 2 + 4t & \text{si } 0 \le t < 2 \\ 6 + 2t & \text{si } 2 \le t < 4 \\ 14 & \text{si } 4 \le t < 12 \\ 50 - 3t & \text{si } 12 \le t < 16 \end{cases}$$

Aquí t es el tiempo en horas, con $t = 0$ correspondiente a 6 a.m. y $t = 16$ a 10 p.m. Haga la gráfica de esta función. ¿Cuáles son los niveles de contaminación a las 8 a.m., 12 del día, 6 p.m. y 8 p.m.?

51. *(Función de costo)* Una empresa que fabrica radios tiene costos fijos de \$3000 y el costo de la mano de obra y del material es de \$15 por radio. Determine la función de costo, es decir, el costo total como una función del número de radios producidos. Si cada radio se vende por \$25, encuentre la función de ingresos y la función de utilidades.

52. *(Función de ingresos)* Un fabricante puede vender 300 unidades de su producto al mes a un costo de \$20 por unidad y 500 unidades a un costo de \$15 por unidad. Exprese la demanda del mercado x (el número de unidades que pueden venderse al mes) como una función del precio por unidad, suponiendo que es una función lineal. Exprese los ingresos como:

a) Una función del precio

b) Una función de x

53. *(Agricultura)* Un granjero tiene 200 yardas de cerca para delimitar un terreno rectangular. Exprese el área A del terreno como una función de la longitud de uno de sus lados.

54. *(Geometría)* Un rectángulo está inscrito en un círculo de radio igual a 3 centímetros. Exprese el área A del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados.

55. *(Función de costo)* Se construye una cisterna de modo que su capacidad sea de 300 pies cúbicos de agua. La cisterna tiene como base un cuadrado y cuatro caras verticales, todas hechas de concreto y una tapa cuadrada de acero. Si el concreto tiene un costo de \$1.50 por pie cuadrado y el acero cuesta \$4 por pie cuadrado, determine el costo total C como una función de la longitud del lado de la base cuadrada.

56. Repita el ejercicio 55 si la cisterna es un cilindro con base y tapa circulares. Exprese el costo C como una función del radio r de la base del cilindro.

57. *(Función de costo)* El azúcar tiene un costo de 25¢ para cantidades hasta de 50 libras y de 20¢ por libra en el caso de cantidades superiores a 50 libras. Si $C(x)$ denota el costo de x libras de azúcar, exprese $C(x)$ por medio de expresiones algebraicas apropiadas y bosqueje su gráfica.

58. *(Función de costo)* Un detallista puede comprar naranjas al mayorista a los precios siguientes: 20¢ por kilo si adquiere 20 kilos o menos; 15¢ por kilo en el caso de cantidades por encima de 20 kilos y hasta de 50 kilos y 12¢ por kilo para cantidades mayores de 50 kilos. Determine el costo $C(x)$ de adquisición de x kilos de naranjas.

59. *(Funciones de ingresos)* Un edificio de departamentos tiene 70 habitaciones que puede rentar en su totalidad si la renta se fija en \$200 al mes. Por cada incremento de \$5 en la renta, una habitación quedará vacía sin posibilidad alguna de rentarla. Exprese el ingreso mensual total R como una función de:

a) x, si x es el número de incrementos de 5 dólares en la renta

b) La renta mensual p

60. *(Función de utilidades)* La ecuación de demanda del producto de una compañía es $2p + 3x = 16$, en donde x unidades pueden venderse al precio de \$$p$ cada una. Si el costo de producir x unidades es de $(100 + 2x)$ dólares, exprese la utilidad U como función de

a) La demanda x

b) El precio p

61. *(Descuento)* Un agente de viajes ofrece un paquete vacacional de \$500 por persona para grupos de seis o más personas, con un descuento de 10% de este precio a partir de la persona número doce en el grupo. Construya la función $C(x)$ dando el costo promedio por persona en un grupo de tamaño x ($x \ge 6$).

62. *(Costo postal)* El costo de envío de una carta en primera clase es de 35 centavos por cada 10 gramos o fracción. Construya la función $C(W)$ que da el costo en centavos por enviar una carta cuyo peso sea W (que no exceda de 50 gramos).

63. Un rectángulo tiene un lado de x pulgadas. El perímetro del rectángulo es de 20 pulgadas. Exprese el área A como una función de x y establezca el dominio de esta función.

64. De un cuadrado de cartón de 18 pulgadas por lado se recortan cuadrados de lado x en cada esquina y luego se doblan hacia arriba para formar una caja abierta. Exprese el volumen V de la caja como función de x y determine el dominio de esta función.