CAPÍTULO 10

Programación lineal

Costos mínimos

Cada día nos enfrentamos con la decisión de cómo distribuir un bien, con la finalidad de sacarle mayor provecho. Por ejemplo, cuánto tiempo destinar al estudio para obtener las calificaciones más altas, cómo invertir en diferentes proyectos para obtener un rendimiento máximo, o bien, cuál es la política de producción que minimiza los gastos. Muchas veces, un modelo que implica el uso de relaciones lineales es una buena aproximación al problema estudiado.

Considere el problema al que se enfrenta una empresa que se dedica a la fabricación de muebles, la cual planea producir dos productos: sillas y mesas. Esto con base en sus recursos disponibles, los cuales consisten en 800 pies de madera de caoba y 900 horas de mano de obra (HM). El administrador sabe que, para la fabricación de una silla, se requiere de 5 pies de madera y 10 HM, con lo que se obtiene una ganancia de $45. Mientras que en la fabricación de cada mesa se utilizan 20 pies de madera y 15 HM, con una ganancia de $80. El departamento de mercadotecnia informa que se pueden vender todas las mesas y sillas que sea posible producir.

Con base en la información anterior, responda las preguntas siguientes:

i. ¿Cuál es el plan de producción que maximiza las ganancias?
ii. ¿Cuál es la ganancia máxima?
iii. Debido a una escasez de sillas en el mercado, el departamento de mercadotecnia informa que éstas se pueden vender a un precio más elevado, lo que dejaría una ganancia de $55 por cada silla vendida. ¿Cuál es el plan de producción óptimo?

En este capítulo se dará una introducción a la programación lineal y al empleo del método símplex.

Este último fue desarrollado por George Dantzig (1914–2005) a quien se le considera el padre de la programación lineal.

TEMARIO

■ 10-1 DESIGUALDADES LINEALES

La desigualdad $y > 2x - 4$, que relaciona las variables x y y, es un ejemplo de lo que llamamos *desigualdades lineales.* Empecemos examinando este ejemplo particular en términos de una gráfica.

La ecuación $y = 2x - 4$ tiene como gráfica una línea recta cuya pendiente es 2 y ordenada al origen -4. Aparece como una línea a trazos en la figura 1. Como un ejemplo, cuando $x = 4$, $y = 2(4) - 4 = 4$, de modo que el punto (4, 4) está sobre la línea, como se advierte en la figura 1.

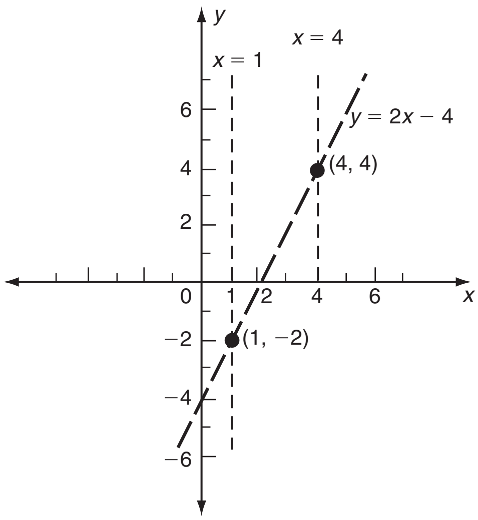


FIGURA 1

Consideremos ahora la desigualdad

$$y > 2x - 4$$

Cuando $x = 4$, adopta la forma $y > 2(4) - 4$, o $y > 4$. Así, todos los puntos de la forma $(4, y)$ en donde $y > 4$ satisfacen la desigualdad. En forma gráfica, esto significa que sobre la línea vertical $x = 4$, la desigualdad $y > 2x - 4$ se satisface para todos los puntos situados *arriba* del punto (4, 4).

De manera similar podemos considerar la línea vertical $x = 1$. Sobre esta línea, la desigualdad $y > 2x - 4$ se reduce a $y > -2$. Que es satisfecha por los puntos $(1, y)$ que están sobre esta línea vertical arriba del punto $(1, -2)$. (Véase la figura 1).

Puede advertirse en forma análoga que la desigualdad $y > 2x - 4$ es satisfecha por todos los puntos (x, y) situados por *arriba* de la línea recta $y = 2x - 4$. Esta región del plano xy se dice que es la **gráfica** de la desigualdad dada.

Una desigualdad lineal entre dos variables x y y es cualquier relación de la forma $Ax + By + C > 0$ (o < 0) o $Ax + By + C \geq 0$ (o ≤ 0). La gráfica de una desigualdad lineal consta de todos aquellos puntos (x, y) que satisfacen la desigualdad. Consiste de una región del plano xy, no sólo de una línea o curva.

La gráfica de la desigualdad $Ax + By + C > 0$ es un semiplano acotado por la línea recta cuya ecuación es $Ax + By + C = 0$. La figura 2 ilustra algunas desigualdades lineales. En cada caso, el semiplano que satisface la desigualdad se encuentra sombreado.

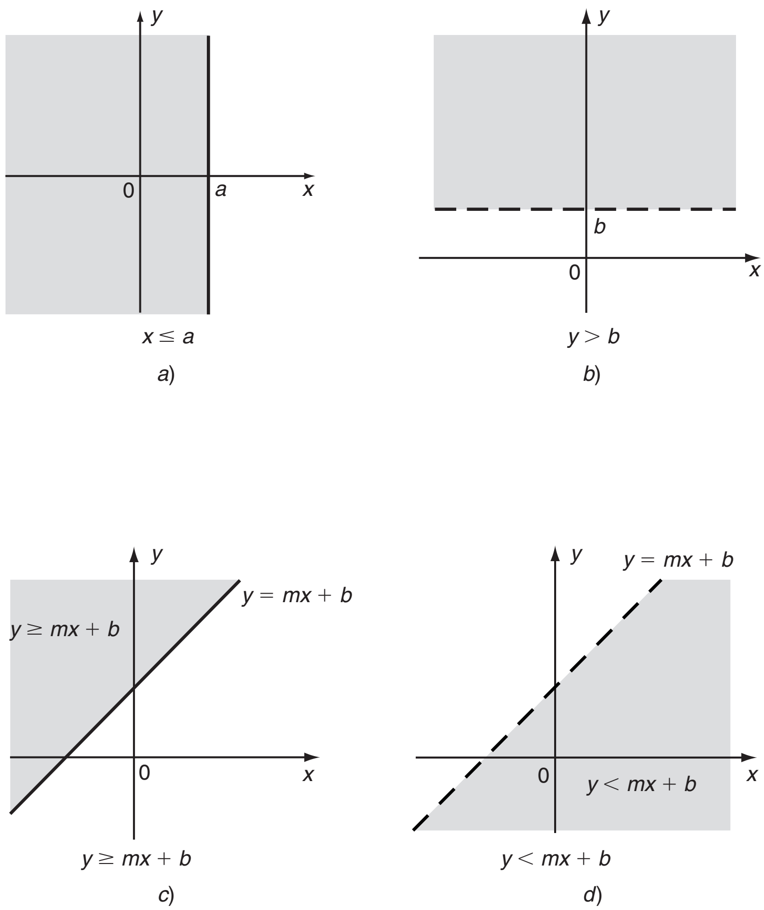


FIGURA 2

La gráfica de $y > mx + b$ es el semiplano por encima de la línea $y = mx + b$ y la gráfica de $y < mx + b$ es el semiplano debajo de la línea $y = mx + b$. Si la gráfica incluye a la línea, la indicamos con una línea continua; de otra forma usamos una línea a trazos. Este tipo de líneas siempre corresponde a una desigualdad estricta ($>$ o $<$) y una línea continua está asociada a una desigualdad débil ($\geq$ o $\leq$).

EJEMPLO 1 Bosqueje la gráfica de la desigualdad lineal $2x - 3y < 6$

Solución En primer término resolvemos en la desigualdad dada para y en términos de x (esto es, la expresamos en una de las formas $y > mx + b$ o $y < mx + b$).

$$2x - 3y < 6$$

$$-3y < -2x + 6$$

Dividimos ahora ambos lados entre -3. Recuerde que cuando dividimos los términos de una desigualdad entre un número negativo, el signo de la desigualdad se cambia. (Véase la sección 3-2).

$$y > \tfrac{2}{3}x - 2$$

Enseguida graficamos la línea $y = \frac{2}{3}x - 2$. Para $x = 0$, tenemos que $y = -2$. Así, $(0, -2)$ es un punto sobre la línea. De nuevo, cuando $y = 0$, tenemos que $\frac{2}{3}x - 2 = 0$ o $x = 3$. En consecuencia, $(3, 0)$ es otro punto sobre la línea. Graficamos estos puntos y los unimos mediante una línea a trazos (porque tenemos una desigualdad estricta). Puesto que la desigualdad dada, cuando la resolvemos para y, contiene el signo *mayor que,* la gráfica es el semiplano situado por *arriba* de la línea a trazos. (Véase la figura 3). ☛ **1**

☛ **1.** Grafique la desigualdad $x \geq 2y - 12$

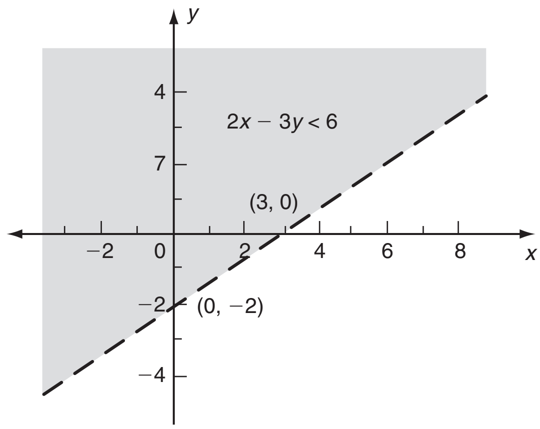


FIGURA 3

Las desigualdades lineales aparecen en muchos problemas de interés práctico. Esto se hará evidente en las secciones subsecuentes de este capítulo, en el cual estudiaremos una área de las matemáticas denominada *programación lineal.* Los ejemplos siguientes ilustrarán algunas situaciones comunes en que aparecen desigualdades lineales.

EJEMPLO 2 (***Inversiones***) Un accionista planea invertir \$30,000 en dos inversiones A y B. La acción A está valuada actualmente en \$165 y la acción B en \$90 por acción. Si el accionista compra x acciones de A y y acciones de B, grafique la región del plano xy que corresponda a las posibles estrategias de inversión.

Solución Las x acciones de la inversión A a \$165 por acción tienen un costo de $165x$ dólares. De manera similar, y acciones de la inversión B a \$90 tienen un costo de $90y$ dólares. La suma total invertida es, por tanto,

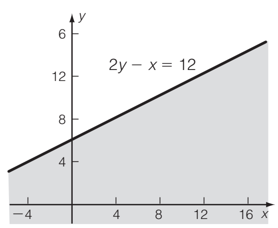
$$(165x + 90y) \text{ dólares}$$

y ésta no puede exceder \$30,000. En consecuencia,

$$165x + 90y \leq 30{,}000$$

Resolvemos para $y.$

Respuesta



$$90y \leq 30{,}000 - 165x$$

$$y \leq -\frac{165}{90}x + \frac{30{,}000}{90}$$

$$y \leq -\frac{11}{6}x + \frac{1000}{3}$$

La gráfica de esta desigualdad aparece en la figura 4. En este ejemplo, sólo tiene importancia la región para la cual $x \geq 0$ y $y \geq 0$, de modo que la región sombreada tiene forma triangular en lugar de semiplano.

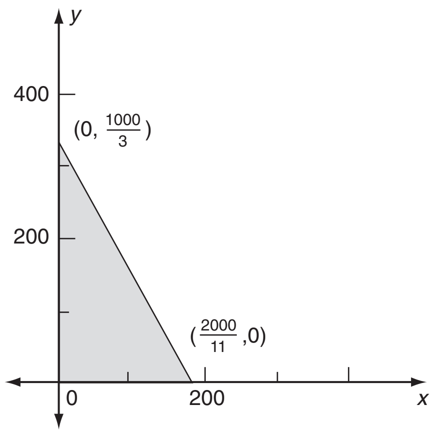


FIGURA 4

En muchas situaciones prácticas, surgen problemas que requieren más de una desigualdad lineal. El ejemplo 3 ilustra un caso en que ocurren dos de tales desigualdades.

EJEMPLO 3 (***Inversiones***) En el ejemplo anterior, la acción A actualmente paga un dividendo de \$6 por acción y la inversión B paga \$5 por acción. Si el accionista requiere que la inversión le pague más de \$1400 en dividendos, bosqueje la gráfica de la región permitida.

Solución Otra vez denotemos con x y y los números de acciones de las inversiones A y B, respectivamente. La desigualdad previa, $165x + 90y \leq 30{,}000$, aún se aplica. Además, los dividendos son de $6x$ dólares por la acción A y $5y$ dólares por la acción B, lo que da un total de $(6x + 5x)$ dólares. Puesto que esto debe exceder a \$1400, tenemos la segunda condición:

$$6x + 5y > 1400$$

Esto puede reescribirse como

$$y > -\tfrac{6}{5}x + 280$$

Esta desigualdad se satisface para los puntos por encima de la línea $6x + 5y = 1400$. Dado que ésta es una desigualdad estricta, la línea no está incluida y se dibuja como una línea a trazos en la figura 5.

☛ **2.** Grafique el siguiente conjunto de desigualdades:
$0 \le x \le 4$, $y \ge 0$, $x + 2y < 6$

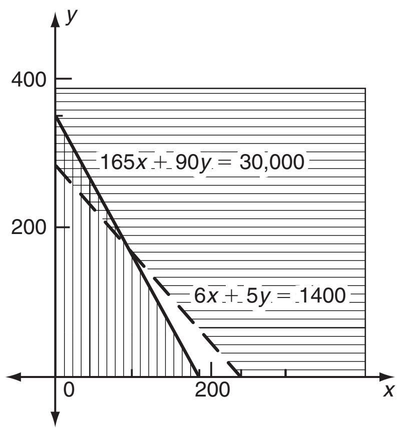
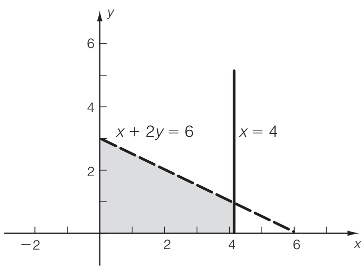


FIGURA 5

Respuesta



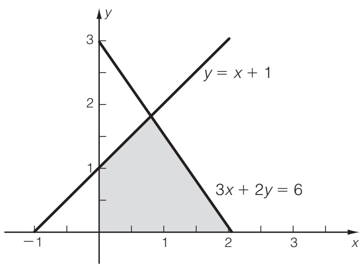
Los valores permitidos de x y y deben satisfacer ambas desigualdades $165x + 90y \le 30{,}000$ y $6x + 5y > 1400$. Así pues, cualquier punto permitido debe estar *sobre o por debajo* de la línea $165x + 90y = 30{,}000$ y al mismo tiempo por *arriba de* la línea $6x + 5y = 1400$. Estas dos regiones están sombreadas de manera distinta en la figura 5. La región permitida está sombreada de las dos formas. Otra vez, los valores negativos de x o de y no nos interesan. ☛ **2, 3**

☛ **3.** Grafique el siguiente conjunto de desigualdades:
$x \ge 0$, $y \ge 0$, $3x + 2y \le 6$,
$x - y \ge -1$

El procedimiento general para graficar varias desigualdades lineales es el siguiente. En primer término, graficamos cada desigualdad por separado y sombreamos cada región permitida de manera diferente. En la región permitida para todas las desigualdades se traslapan las regiones sombreadas.

Cuando en un sistema de desigualdades intervienen más de dos variables, las técnicas gráficas son de mucho menor utilidad. Con tres variables, aún podemos dibujar las gráficas, pero a menudo tiene inconvenientes; con cuatro o más variables, llega a ser imposible el uso de gráficas. El ejemplo 4 ilustra un problema simple que requiere tres variables.

Respuesta



EJEMPLO 4 ***(Distribución de televisores)*** Una compañía electrónica produce televisores en dos fábricas, F_1 y F_2. La fábrica F_1 puede producir 100 televisores a la semana y la fábrica F_2, 200. La compañía tiene tres centros de distribución, X, Y y Z. El centro X requiere 50 televisores a la semana, Y demanda 75 y Z requiere de 125 televisores por semana, con el propósito de satisfacer las demandas de sus áreas respectivas. Si la fábrica F_1 suministra x televisores a la semana a su centro de distribución X, y televisores a Y y z televisores a Z, escriba las desigualdades que deben satisfacer x, y y z.

☛ **4.** ¿Cómo se modifican las desigualdades del ejemplo 4 si *a*) la capacidad de la fábrica F_2 repentinamente se reduce a 150 televisores por semana; o *b*) las demandas de X, Y y Z aumentan a 100, 150 y 200 televisores por semana, respectivamente, y las capacidades de la planta se aumentan a 250 en F_1 y 200 en F_2?

Solución La situación se ilustra en la figura 6. Si la fábrica F_1 suministra x televisores al centro X, F_2 debe proveer $(50 - x)$ televisores dado que este centro de distribución requiere 50 televisores. De manera similar, F_2 debe suministrar $(75 - y)$ al centro Y y $(125 - z)$ televisores al centro Z.

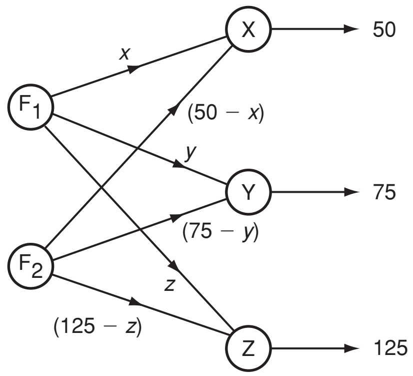


FIGURA 6

El número total de televisores que la fábrica F_1 provee a los tres centros de distribución es $x + y + z$; éste no puede exceder la capacidad productiva de esta fábrica, la cual es de 100 televisores a la semana. Así, llegamos a la condición

$$x + y + z \leq 100$$

En forma análoga, el número total de televisores suministrados por la fábrica F_2 es igual a

$$(50 - x) + (75 - y) + (125 - z) = 250 - x - y - z$$

Este número no puede exceder 200, que es lo más que produce esta fábrica.

$$250 - x - y - z \leq 200$$

esto es,

$$x + y + z \geq 50$$

Dado que el número de televisores suministrados por cualquier fábrica a cualquier centro de distribución no puede ser negativo, cada una de las seis cantidades x, y, z, $(50 - x)$, $(75 - y)$ y $(125 - z)$ debe ser mayor o igual que cero. Por ello, x, y y z deben satisfacer el siguiente sistema de desigualdades:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \geq 0 \quad x \leq 50 \quad y \leq 75 \quad z \leq 125$$
$$x + y + z \geq 50 \quad x + y + z \leq 100$$

Respuesta *a*) $x + y + z = 100$, de modo que z puede eliminarse del problema y nos quedamos con $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 75$ y $x + y \leq 100$
b) Otra vez, puede eliminarse z ya que $x + y + z = 250$, y nos quedamos con $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq y \leq 150$ y $50 \leq x + y \leq 250$

Para representar estas cantidades geométricamente, debemos usar coordenadas en tres dimensiones (x, y, z). Es posible bosquejar una figura apropiada, pero se requiere cierto grado de destreza para obtener una representación precisa. ☛ **4**

EJERCICIOS 10-1

(1-6) Bosqueje las gráficas de las desigualdades siguientes en el plano *xy*.

1. $x + y > 1$

2. $2x + 3y < 6$

3. $2x - y \leq 4$

4. $3x \geq y - 6$

5. $2x + 3 > 0$

6. $4 - 3y < 0$

(7-18) Bosqueje las gráficas de los siguientes conjuntos de desigualdad.

7. $x + y > 2, \quad 3x + y < 3$

8. $2x + y > 4, \quad x + 2y < 4, \quad 2x - 3y < 3$

9. $0 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 15, \quad 5 \leq x + y \leq 12$

10. $2 \leq x \leq 5, \quad 1 \leq y \leq 5, \quad x + y > 4, \quad 2x + y < 10$

11. $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + 3y \leq 4, \quad 2x + y \leq 6$

12. $1 \leq x + y \leq 4, \quad y - x \geq 0, \quad y - 2x \leq 1$

13. $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1, \quad 2x + 3y \leq 3$

14. $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \geq 1, \quad 2x + 3y \leq 3$

15. $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 4x + y \leq 4, \quad 2x + 3y \leq 3,$
$x + y \geq 3$

16. $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x - y \leq 2, \quad 2x + y \leq 2$

17. $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + 3y \leq 3, \quad 3x + y \leq 3,$
$x + 2y \leq 3$

18. $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y \geq 2x + 1, \quad y + 2x \leq 3,$
$3y + 2x \leq 3$

19. *(Distribución de materiales)* Una compañía tiene 100 toneladas de lámina de aluminio en cierta localidad y 120 toneladas en una segunda localidad. Parte de este material debe enviarse a dos obras en construcción. La primera requiere 70 toneladas y la segunda 90. Denotemos con x y y las cantidades enviadas por la primera bodega a las dos obras, respectivamente. Determine las desigualdades que x y y deben satisfacer y represéntelas gráficamente.

20. *(Costos de distribución)* En el ejercicio 19, suponga que los costos de enviar cada tonelada de aluminio de la primera bodega a la primera y segunda obras son, \$10 y \$15, respectivamente, y que \$15 y \$25 son los costos de enviar cada tonelada de la segunda bodega a cada una de las obras respectivas. Si la compañía requiere que el costo de envío no exceda \$2700, determine la condición adicional sobre x y y y represente en forma gráfica la región permitida.

21. *(Costos de distribución)* Repita el ejercicio 20 si los cuatro costos de envío son \$15 y \$ 10, respectivamente, desde la primera bodega y \$10 y \$20, respectivamente, desde la bodega situada en la segunda localidad.

22. *(Almacenamiento en bodega)* Una compañía desea almacenar 120 televisores en su bodega. Mantiene dos modelos almacenados, un modelo de mesa y otro con patas. El número de modelo de mesa no debe ser menor que 40 y el número de modelos con patas no debe ser menor que 30. Represente en forma gráfica los número posibles de modelos que pueden almacenarse.

23. *(Almacenamiento en bodega)* En el ejercicio 22, suponga que el modelo con patas requiere 12 pies cúbicos de espacio de almacenamiento y el modelo de mesa 8 pies cúbicos. Si la compañía dispone de 1200 pies cúbicos de espacio, represente los nuevos números permitidos de modelos en una gráfica.

24. *(Asignación a máquinas)* Una compañía elabora dos productos, A y B. Cada uno de estos productos requiere cierta cantidad de tiempo, en dos máquinas en su elaboración. Cada unidad del producto A requiere 1 hora en la máquina I y 2 horas en la máquina II; cada unidad del producto B demanda 3 horas en la máquina I y 2 horas en la máquina II. La compañía dispone de 100 horas a la semana en cada máquina. Si x unidades del producto A y y unidades del producto B se producen a la semana, dé las desigualdades que satisfacen x y y y represéntelas en forma gráfica.

25. *(Asignación y utilidades)* En el ejercicio 24, suponga que la compañía obtiene utilidades de \$20 por cada artículo A y \$30 por cada artículo B. Si se requiere que la utilidad semanal sea al menos de \$1100, represente los valores permitidos de x y y gráficamente.

26. *(Asignación y utilidades)* En el ejercicio 25, represente la región permitida en forma gráfica si al menos 15 unidades de cada tipo deben producirse, con la finalidad de cumplir con los contratos convenidos.

27. *(Planeación dietética)* El filete de lomo tiene un costo de 0.15 dólares por onza y cada onza contiene 110 calorías y 7 gramos de proteínas. El pollo rostizado tiene un costo de 0.08 dólares por onza, y cada onza contiene 83 calorías y 7 gramos de proteínas. Represente algebraicamente las combinaciones de x onzas de filete y y onzas de pollo que tienen un costo no mayor de \$1.00 y que contiene al menos 900 calorías y al menos 60 gramos de proteínas.

28. *(Planeación dietética)* El médico señaló a la señorita X que ella se sentiría menos deprimida si consumía al menos el requerimiento mínimo de tiamina para un adulto, esto es, 1 miligramo diario. Le sugirió, pues, que podía obtener la mitad de esta cantidad con el cereal del desayuno. El cereal A contiene 0.12 miligramos de tiamina por onza, y el cereal B 0.08 miligramos por onza. Determine las cantidades posibles de estos cereales para proveerla por lo menos con la mitad del requerimiento diario de tiamina para un adulto.

29. *(Espacio de almacenamiento)* La bodega de un departamento de química almacena, al menos, 300 vasos de un tamaño y 400 de un segundo tamaño. Se ha decidido que el número total de vasos almacenados no debe exceder de 1200. Determine las cantidades posibles de estos dos tipos de vasos que pueden almacenarse y muéstrelo con una gráfica.

30. *(Espacio de almacenamiento)* En el ejercicio 29, supongamos que los vasos del primer tamaño ocupan 9 pulgadas cuadradas del anaquel y los del segundo tamaño 6 pulgadas cuadradas. El área total de anaqueles disponible para almacenar es a lo sumo de 62.5 pies cuadrados. Determine las cantidades posibles de los dos vasos y muéstrelo con una gráfica.

31. *(Planeación dietética)* Una persona está considerando reemplazar en su dieta parte de la carne por frijoles de soya. Una onza de carne contiene en promedio casi 7 gramos de proteína; mientras que 1 onza de frijoles de soya (verde) contiene casi 3 gramos de proteína. Si requiere que su consumo de proteína diaria que obtiene de la carne y de los frijoles de soya combinados debe ser al menos 50 gramos, ¿qué combinación de estos dos nutrientes formarán una dieta aceptable?

32. *(Ecología)* Un estanque de peces lo abastecen cada primavera con dos especies de peces S y T. El peso promedio de los peces es de 3 libras para S y 2 para T. Hay dos tipos de comida F_1 y F_2 disponibles en el estanque. El requerimiento promedio diario para un pez de la especie S es 2 unidades de F_1 y 3 de F_2; mientras que para la especie T es 3 unidades de F_1 y 1 de F_2. Si a lo más hay 600 unidades de F_1 y 300 de F_2 disponibles diariamente, ¿cómo debe abastecerse el estanque, para que el peso total de los peces sea cuando menos de 400 libras?

■ 10-2 OPTIMIZACIÓN LINEAL (ENFOQUE GEOMÉTRICO)

En un problema de programación lineal se requiere encontrar el valor máximo o mínimo de alguna expresión algebraica, cuando las variables de esta expresión están sujetas a varias desigualdades lineales. El ejemplo sencillo siguiente es típico de tales problemas.

EJEMPLO 1 ***(Utilidad máxima)*** Una compañía fabrica dos productos, X y Y. Cada uno de estos productos requiere cierto tiempo en la línea de ensamblado y otro tiempo más en el departamento de acabado. Cada artículo del tipo X necesita 5 horas de ensamblado y 2 horas de acabado; mientras que cada artículo del tipo Y requiere 3 horas en ensamblado y 4 de acabado. En cualquier semana, la empresa dispone de 105 horas en la línea de ensamblado y 70 horas en el departamento de acabado. La empresa puede vender todos los artículos que produce y obtener una utilidad de \$200 por cada artículo de X y \$160 por cada artículo de Y. Calcule el número de artículo de cada tipo que deberían fabricarse a la semana con el objetivo de maximizar la utilidad total.

Solución Por lo regular, es conveniente al manejar problemas de este tipo resumir la información en una tabla. En la tabla 1 aparece la información del ejemplo 1.

TABLA 1

	Ensamblado	Acabado	Utilidad
X	5	2	200
Y	3	4	160
Disponibilidad	105	70	

Suponga que la empresa produce x artículos de tipo X y y artículos del tipo Y a la semana. Entonces, el tiempo necesario en la línea de ensamblado será de $5x$ horas en el caso del producto X y $3y$ horas para el producto Y, o $(5x + 3y)$ horas en total. Dado que sólo se puede disponer de 105 horas, debemos tener que $5x + 3y \leq 105$.

☛ **5.** En el ejemplo 1, escriba las desigualdades, si cada artículo del tipo X requiere de 3 horas de ensamblado y 2 para acabados y cada artículo de tipo Y requiere 4 y 3 horas de ensamblado y acabados, respectivamente.

Respuesta $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 4y \leq 105$, $2x + 3y \leq 70$

De manera similar, se requieren de $2x$ horas en el departamento de acabado por cada x artículos del producto X y $4y$ por cada y artículos del producto Y. El número total de horas, $2x + 4y$, no pueden exceder las 70 de que se dispone, de modo que tenemos la segunda condición, $2x + 4y \leq 70$. ☛ **5**

Cada artículo del tipo X genera una utilidad de $200, de modo que x artículos producen $200x$ dólares de utilidad. En forma análoga, y artículos de tipo Y producen $160y$ dólares de utilidad. Así, la utilidad semanal total P (en dólares) está dada por

$$P = 200x + 160y$$

Por consiguiente, podemos reestablecer el problema en los términos siguientes: encuentre los valores de x y y que maximicen la cantidad $P = 200x + 160y$ cuando x y y están sujetas a las condiciones

$$5x + 3y \leq 105, \quad 2x + 4y \leq 70, \quad x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0 \tag{1}$$

(Observe las condiciones de que x y y no deben ser negativas. Éstas se agregan por razones de completez).

Este ejemplo es un problema característico de programación lineal. Tenemos una expresión $P = 200x + 160y$, que es lineal en las variables x y y, y deseamos encontrar el valor máximo de P cuando x y y satisfacen las desigualdades (1). Un problema más general podría incluir más de dos variables y un número mayor de desigualdades que las cuatro de este ejemplo; pero de cualquier manera este ejemplo es bastante representativo de los problemas del área de programación lineal.

Al analizar cualquier problema de programación lineal, en especial cuando sólo intervienen dos variables, con frecuencia es útil un enfoque geométrico. Consideremos las desigualdades (1). El conjunto de puntos (x, y) que satisfacen todas las desigualdades aparece sombreado en la figura 7. Esta región sombreada representa el conjunto de *soluciones factibles,* esto es, el conjunto de valores de x y y que la empresa puede adoptar. No se puede tomar cualquier punto (x, y) situado afuera de esta región sombreada.

Por ejemplo, consideremos el punto $x = 12$, $y = 14$, el cual está fuera de la región factible. Con la finalidad de producir 12 artículos del tipo X y 14 artículos del Y se requerirían $12(5) + 14(3) = 102$ horas en la línea de ensamblado y $12(2) + 14(4) = 80$ horas en el departamento de acabado. Si bien esto no excedería las horas disponibles en la línea de ensamblado, sí sobrepasa aquellas disponibles en el departamento de acabado; de modo que no está dentro del programa de producción posible.

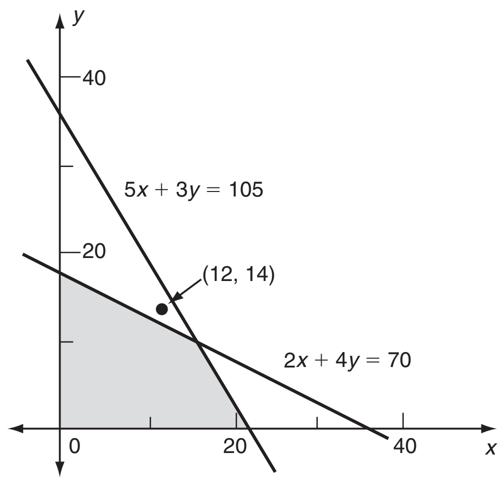


FIGURA 7

Consideremos ahora el conjunto de valores de x y y que conducen a alguna utilidad fija. Por ejemplo, dando a P el valor 4000, advertimos que x y y deben satisfacer la ecuación

$$200x + 160y = 4000 \tag{2}$$

Todos los valores de x y y que satisfacen esta ecuación producen una utilidad de \$4000 a la semana. Ésta es la ecuación de una línea recta que corta el eje x en el punto (20, 0) y el eje y en el punto (0, 25), como se aprecia en la figura 8. Parte de esta línea pasa por la región de soluciones factibles. Debido a esto, concluimos que le es posible a la empresa lograr una utilidad de 4000 dólares a la semana. Puede realizar esto eligiendo cualquier valor de (x, y) situado sobre el segmento AB que aparece en la figura 8.

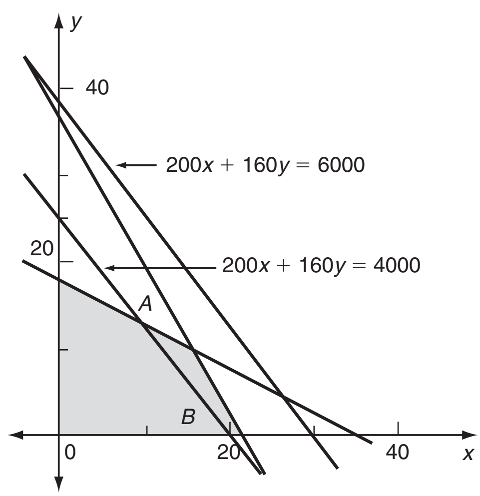


FIGURA 8

Por otra parte, consideremos $P = 6000$. Los valores correspondientes de x y y deben satisfacer $200x + 160y = 6000$, que otra vez es la ecuación de una línea recta, esta vez corta los ejes de coordenadas en los puntos (30, 0) y (0, 37.5). Esta línea recta no pasa por la región sombreada de soluciones factibles (véase la figura 8) y, por ello, no le es posible a la empresa obtener una utilidad tan grande como \$6000 a la semana. La utilidad máxima posible debe estar en algún lugar entre \$4000 y \$6000 a la semana.

☛ **6.** En las figuras 7 u 8, dibuje las rectas de indiferencia que correspondan a una utilidad de \$3000 y \$5000 semanales. ¿Estos niveles de utilidad son factibles?

El conjunto de puntos (x, y) que conducen a una utilidad dada P satisfacen la ecuación $200x + 160y = P$. Esta ecuación, para P fija, tiene como gráfica una línea recta en el plano xy llamada **línea de utilidad constante** o **recta de indiferencia**. Las dos líneas que aparecen en la figura 8 son líneas de utilidad constante que corresponden a los valores $P = 4000$ y $P = 6000$. ☛ **6**

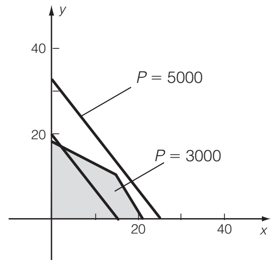
La ecuación de una línea de utilidad constante puede escribirse en la forma

$$160y = P - 200x \quad \text{o bien} \quad y = -\frac{5}{4}x + \frac{P}{160}$$

Por tanto, la línea tiene pendiente $-\frac{5}{4}$ y ordenada al origen $P/160$. Es una propiedad importante que la pendiente de cualquier línea de utilidad constante sea la misma sin importar el valor de P. Esto significa que todas las líneas de utilidad constante son paralelas entre sí. A medida que el valor de P se incrementa, la línea de utilidad máxima correspondiente se aparta del origen (la ordenada al origen aumenta), siempre con la misma pendiente.

Para obtener la utilidad máxima, debemos alejar la línea de utilidad constante, del origen hasta que sólo toque el extremo de la región de soluciones factibles. Es claro por la figura 9 que la línea de utilidad máxima es la que pasa por la esquina C situada en la frontera de la solución factible. Los valores de x y y en C dan los volúmenes de producción de los dos productos X y Y que conducen a la utilidad máxima.

Respuesta \$3000 es factible, pero la recta de \$5000 no interseca la región factible.



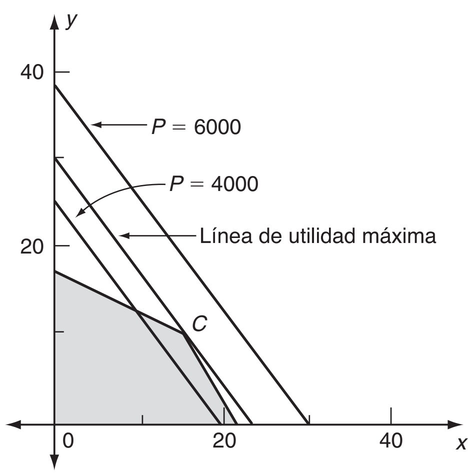
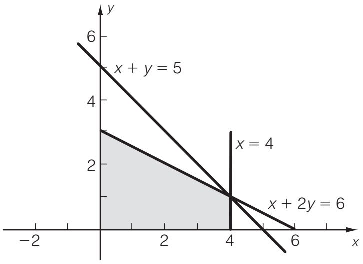


FIGURA 9

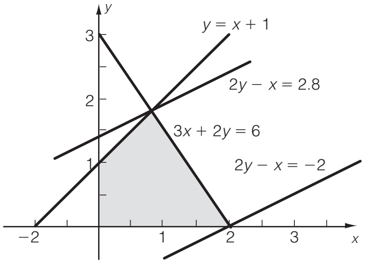
☛ **7.** Utilice el método gráfico para determinar el valor máximo de $Z = x + y$ cuando x y y están restringidas por las desigualdades $0 \leq x \leq 4$, $y \geq 0$, $x - 2y \leq 6$

Respuesta $Z_{\text{máx}} = 5$ en el vértice $x = 4$ y $y = 1$



☛ **8.** Determine los valores máximo y mínimo de $Z = 2y - x$, cuando x y y están restringidas por las condiciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 2y \leq 6$, $x - y \geq -1$

Respuesta $Z_{\text{máx}} = 2.8$ en $x = 0.8$, $y = 1.8$; $Z_{\text{mín}} = -2$ en $x = 2$, $y = 0$



El punto C es la intersección de las dos líneas rectas que acotan la región factible. Sus coordenadas se obtienen resolviendo las ecuaciones de estas dos líneas, $5x + 3y = 105$ y $2x + 4y = 70$. Resolviendo estas ecuaciones, encontramos que $x = 15$ y $y = 10$. Por consiguiente, la utilidad es máxima cuando la empresa produce 15 artículos del tipo X y 10 del tipo Y a la semana. La utilidad semanal máxima está dada por

$$P_{\text{máx}} = 200x + 160y = 200(15) + 160(10) = 4600$$

La utilidad máxima es por tanto \$4600.

El procedimiento usado en la resolución de este problema también puede emplearse cuando ocurre un número mayor de desigualdades. ☛ **7, 8**

EJEMPLO 2 Una empresa de productos químicos produce dos tipos de fertilizantes. Su marca regular contiene nitratos, fostatos y potasio en la razón 3 : 6 : 1 (en peso) y su marca super contiene estos tres ingredientes en la razón 4 : 3 : 3. Cada mes la empresa puede confiar en un suministro de 9 toneladas de nitratos, 13.5 toneladas de fosfatos y 6 toneladas de potasio. Su planta productora puede elaborar a lo más 25 toneladas de fertilizantes al mes. Si la empresa obtiene una utilidad de \$300 por cada tonelada de fertilizante regular y \$480 por cada tonelada del super, ¿qué cantidades de cada tipo deberá producir para obtener la máxima utilidad?

Solución La información dada se resume en la tabla 2.

TABLA 2

	Nitratos	Fosfatos	Potasio	Utilidad
Marca regular	0.3	0.6	0.1	300
Supermarca	0.4	0.3	0.3	480
Suministros disponibles	9	13.5	6	

Denotemos con x la producción de la empresa del tipo regular y con y las toneladas del fertilizante de tipo super al mes. Entonces, como cada tonelada del tipo regular contiene 0.3 toneladas de nitratos y cada tonelada del tipo super contiene 0.4 toneladas de nitratos, la cantidad total de nitratos usada es $0.3x + 0.4y$. Ésta no puede exceder el suministro disponible de 9 toneladas, de modo que tenemos la condición $0.3x + 0.4y \leq 9$.

Procediendo de manera similar con los fosfatos y el potasio, obtenemos las otras dos condiciones, $0.6x + 0.3y \leq 13.5$ y $0.1x + 0.3y \leq 6$.

Además de estas condiciones, existe también la condición de que la producción total del fertilizante, $x + y$, no puede exceder la capacidad de la planta de 25 toneladas, de modo que $x + y \leq 25$. Después de eliminar los decimales, obtenemos el siguiente sistema de desigualdades que x y y deben satisfacer.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &\leq 90 & \qquad 6x + 3y &\leq 135 \\ x + 3y &\leq 60 & x + y &\leq 25 \\ x &\geq 0 & y &\geq 0 \end{aligned}$$

La región factible satisface todas estas desigualdades como se aprecia en la figura 10. Es el interior del polígono *ABCDEO* que está sombreado.

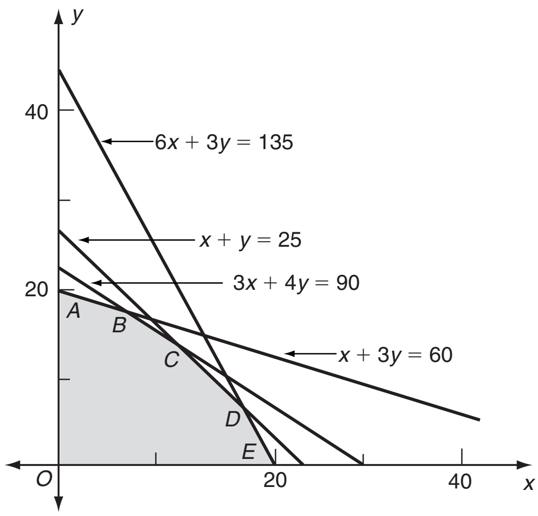


FIGURA 10

Cada tonelada de fertilizante produce una utilidad de \$300 por lo que se refiere al tipo regular y \$480 para el tipo super. Cuando los volúmenes de producción son de x y y toneladas al mes, respectivamente, la utilidad mensual total P es

$$P = 300x + 480y$$

Haciendo P igual a algún valor fijo, esta ecuación determina otra vez una línea recta en el plano xy, una línea de utilidad constante. Varias de estas líneas aparecen en la figura 11. Todos las líneas correspondientes a diferentes valores de P son paralelas entre sí y se alejan del origen a medida que el valor de P aumenta. Por ejemplo, observamos que la línea correspondiente a $P = 7200$ pasa a través de la región factible; mientras que la línea que corresponde a $P = 12{,}000$ no. Es geométricamen-

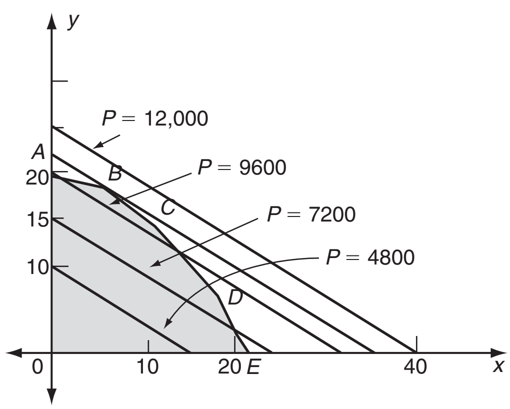


FIGURA 11

te evidente que la línea de utilidad constante con el valor más grande de P que intersecta la región factible es la que pasa por la esquina del punto B. Este punto es la intersección de las dos líneas rectas

$$x + 3y = 60 \quad \text{y} \quad 3x + 4y = 90$$

Sus coordenadas son $x = 6$ y $y = 18$.

Por tanto, concluimos que la utilidad máxima se obtiene fabricando 6 toneladas del tipo regular y 18 toneladas del tipo super de fertilizante al mes. La utilidad máxima está dada por

$$P_{\text{máx}} = 300x + 480y = 300(6) + 480(18) = 10{,}440 \text{ dólares}$$

Vale la pena notar que la producción que maximiza la utilidad usa todos los nitratos disponibles, así como el potasio; pero no emplea todos los fosfatos disponibles y además no utiliza toda la capacidad de la planta. ☛ **9**

☛ **9.** En el ejemplo 2, ¿cómo debe modificar la compañía su estrategia de producción si
a) tiene disponible más fosfato;
b) hay más potasio disponible?
(*Nota:* Responder a este tipo de preguntas (denominado análisis de sensibilidad) es útil para saber cómo cambian las fronteras de la región factible).

DEFINICIÓN Las desigualdades que deben satisfacer las variables de un problema de programación lineal se denominan **restricciones**. La función lineal que debe ser maximizada o minimizada se conoce como **función objetivo**.

En las aplicaciones a análisis de negocios, la función objetivo a menudo es una función de utilidad (que debe ser maximizada) o una función de costo (que debe minimizarse). Por lo regular, denotamos a la función objetivo con la letra Z, y lo haremos así de ahora en adelante.

El ejemplo siguiente ilustra un problema de programación lineal que requiere la minimización del costo.

EJEMPLO 3 ***(Decisiones sobre producción)*** Una compañía de productos químicos está diseñando una planta que producirá dos tipos de polímeros, P_1 y P_2. La planta debe tener la capacidad de producir al menos 100 unidades de P_1 y 420 unidades de P_2 al día. Hay dos diseños posibles para la cámara de reacción básica que tiene que incluirse en la planta: cada cámara del tipo A tiene un costo de \$600,000 con una capacidad de producción de 10 unidades de P_1 al día y 20 unidades de P_2 al día; el tipo B es un diseño más barato, pues tiene un costo de \$300,000 y una capacidad de producción de 4 unidades de P_1 y 30 unidades de P_2 al día. Debido a los costos de operación es necesario tener al menos 4 cámaras de cada tipo en la planta. ¿Cuántas cámaras de cada tipo deberían incluirse para minimizar el costo de construcción y aún cumplir con el programa de producción requerida?

Solución La información dada se resume en la tabla 3.

Respuesta *a*) La recta *DE* se mueve hacia la derecha. Esto no afecta el vértice *B*, de modo que la solución óptima permanece sin cambio.
b) La recta *AB* se mueve hacia arriba. El vértice *B* se mueve hacia arriba y hacia la izquierda, de modo que el valor óptimo de x disminuirá y el de y aumentará. La utilidad aumentará.

TABLA 3

	P_1	P_2	Costo
Cámara A	10	20	6
Cámara B	4	30	3
Requerimientos	100	420	

(Los costos están dados en cientos de miles de dólares). Supongamos que el diseño incluye x cámaras del tipo A y y cámaras del tipo B. Entonces deben satisfacerse las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} &x \geq 4, \qquad y \geq 4 \\ &10x + \;\; 4y \geq 100 \quad \text{(producción de } P_1\text{)} \\ &20x + 30y \geq 420 \quad \text{(producción de } P_2\text{)} \end{aligned}$$

El costo total de las cámaras está dado por

$$Z = 6x + 3y$$

y Z debe minimizarse sujeta a las restricciones anteriores. La región factible (esto es, la región que satisface las restricciones) aparece sombreada en la figura 12. Observe que en este ejemplo dicha región no está acotada.

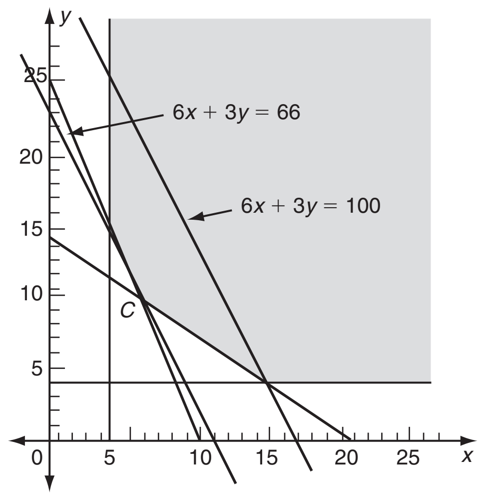


FIGURA 12

Las líneas de costo constante se obtienen haciendo Z igual a diferentes constantes. Dos de estas líneas se muestran en la figura. A medida que Z decrece, la línea correspondiente se acerca al origen, siempre manteniendo la misma pendiente; la línea de costo mínimo es la que pasa por el vértice C de la región factible.

En C tenemos las dos ecuaciones simultáneas

$$10x + 4y = 100 \quad \text{y} \quad 20x + 30y = 420$$

Su solución es $x = 6$ y $y = 10$. Por consiguiente, el diseño óptimo de la planta incluye 6 cámaras de reacción del tipo A y 10 del tipo B. El costo mínimo es

$$Z = 6x + 3y = 6(6) + 3(10) = 66$$

esto es \$6.6 millones.

Consideremos un problema de programación lineal general con dos variables *x* y *y*. La región factible, esto es, los puntos (*x, y*) que satisfacen el conjunto de desigualdades lineales dadas tendrá la forma de un polígono en el plano *xy*. La ecuación obtenida haciendo la función objetivo igual a una constante siempre representará una línea recta en el plano *xy* (por ejemplo, la línea de utilidad constante). Es intuitivamente evidente que el valor extremo (máximo o mínimo) de la función objetivo dentro de la región factible se obtendrá cuando esta línea recta pase por un vértice del polígono de factibilidad, puesto que al mover la línea recta en forma paralela a sí misma, en la dirección de crecimiento (o decrecimiento) de los valores de la función objetivo, el último punto de contacto con la región factible debe ocurrir en uno de los vértices.

Esto se ilustra en las partes *a*) y *b*) de la figura 13, en donde se advierte una serie de líneas con *Z* constante (*Z* denota a la función objetivo). A medida que *Z* crece, la línea se mueve a través de la región factible. Los valores más grandes y más pequeños de *Z* ocurren cuando las líneas hacen su primero y último contacto con la región factible.*

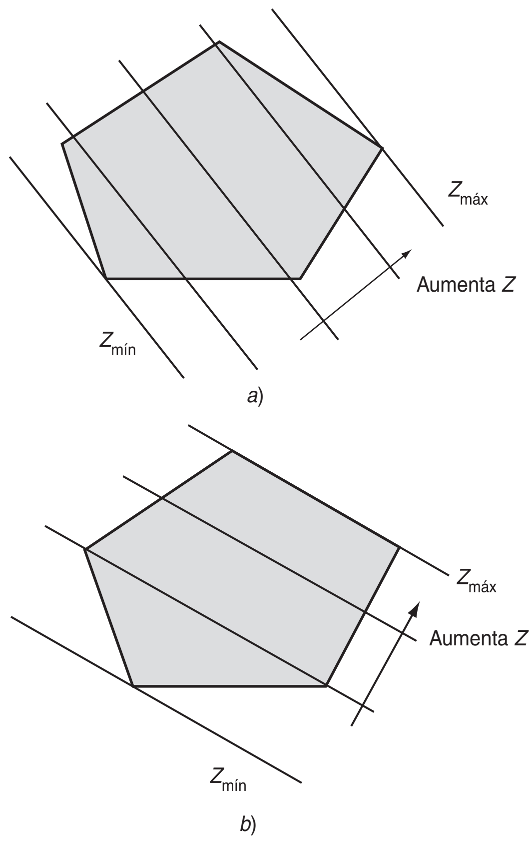


FIGURA 13

* Cuando la región factible no es acotada, *Z* podría no tener un valor máximo o mínimo finito.

En la parte *b*), las líneas con Z constante son paralelas a uno de los lados de la región factible. En este caso el valor más grande de Z ocurre cuando la línea con Z constante coincide con tal lado. Sin embargo, observe que aún es cierto que el valor máximo de Z ocurre cuando la línea pasa por un vértice del polígono de factibilidad. En realidad pasa por dos vértices.

Esto sugiere que en vez de usar una técnica gráfica de resolución de un problema de programación lineal, todo lo que necesitamos hacer es calcular el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible. El más grande de estos valores en los extremos dará el valor máximo de la función objetivo, y el más pequeño de ellos dará su valor mínimo. Este método de resolución de tales problemas es muy fácil de aplicar cuando sólo hay dos variables, si bien no tiene una ventaja computacional real sobre el método gráfico. Para más de dos variables, ninguno de estos métodos representa una herramienta práctica en optimización. Por fortuna, existe un método alterno denominado método símplex; dedicaremos el resto de este capítulo a su exposición.

EJERCICIOS 10-2

(1-8) Calcule el valor máximo de la función objetivo Z sujeta a las restricciones dadas.

1. $Z = 3x + 2y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 5$

2. $Z = 3x + 4y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \leq 3$

3. $Z = 3x + 2y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \leq 4$, $x + 2y \leq 5$

4. $Z = 2(x + y)$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $6x + 5y \leq 17$, $4x + 9y \leq 17$

5. $Z = 5x + y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + y \leq 7$, $x + y \leq 3$, $x + 2y \leq 5$

6. $Z = x + 3y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \leq 6$, $2x + y \leq 5$, $x + 4y \leq 6$

7. $Z = 2x - y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 4$, $y - x \geq 3$, $3x + y \geq 6$

8. $Z = x + 3y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq x + 1$ $x + y \geq 2$, $2y \geq x - 1$

(9-16) Determine los valores mínimos de la función objetivo Z sujeta a las restricciones dadas.

9. $Z = x + y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 3y \geq 6$, $2x + y \geq 7$

10. $Z = x + 2y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 5$, $x + 4y \geq 8$

11. $Z = x - 2y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq y + 1$, $x + y \geq 2$

12. $Z = x - 3y$; $0 \leq x \leq 3$, $y \geq 0$, $x + 2y \leq 6$, $x + y \geq 5$

13. $Z = x + 4y$; $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$, $5 \leq x + y \leq 7$

14. $Z = x - y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 4$, $x + 2y \leq 10$

15. $Z = x + 2y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \geq 7$, $2y - x \geq -1$, $2x - y \geq -3$

16. $Z = x + y$; $-\frac{1}{2} \leq y - x \leq 2$, $y + 2x \leq 8$, $y + 4x \geq 7$

17. *(Mezcla de whisky)* Una compañía destiladora tiene dos grados de whisky en bruto (sin mezclar), I y II, de los cuales produce dos marcas diferentes. La marca regular contiene 50% de cada uno de los grados I y II; mientras que la marca super consta de dos terceras partes del grado I y una tercera parte del grado II. La compañía dispone de 3000 galones del grado I y 2000 del grado II para mezcla. Cada galón de la marca regular produce una utilidad de \$5; mientras que cada galón del super produce una utilidad de \$6. ¿Cuántos galones de cada marca debería producir la compañía a fin de maximizar sus utilidades?

18. *(Mezclas)* Una compañía vende dos mezclas diferentes de nueces. La mezcla más barata contiene 80% de cacahuates y 20% de nueces; mientras que la más cara contiene 50% de cada tipo. Cada semana la compañía puede obtener hasta 1800 kilos de cacahuates y 1200 kilos de nueces de sus fuentes de suministros. ¿Cuántos kilos de cada mezcla deberían producir para maximizar las utilidades si las ganancias son de $10 por cada kilo de la mezcla más barata y de $15 por cada kilo de la mezcla más cara?

19. *(Decisiones sobre producción)* Una compañía produce dos productos, A y B. Cada unidad de A requiere 2 horas en una máquina y 5 en una segunda máquina. Cada unidad de B demanda 4 horas en la primera máquina y 3 en la segunda máquina. Se dispone de 100 a la semana en la primera máquina y de 110 en la segunda. Si la compañía obtiene una utilidad de $70 por cada unidad de A y $50 por cada unidad de B, ¿cuánto deberá de producirse de cada unidad con objeto de maximizar la utilidad total?

20. *(Decisiones sobre producción)* En el ejercicio 19, suponga que se recibe una orden por 16 unidades de A a la semana. Si la orden debe cumplirse, determine el nuevo valor de la utilidad máxima.

21. *(Decisiones sobre producción)* Un fabricante produce dos productos, A y B, cada uno de los cuales requiere tiempo en tres máquinas. Cada unidad de A demanda 2 horas en la primera máquina, 4 en la segunda y tres horas en la tercera. Los números correspondientes a cada unidad de B son 5, 1 y 2, respectivamente. La compañía obtiene utilidades de $250 y $300 por cada unidad de A y B, en ese orden. Si los números de horas disponibles en las máquinas al mes son 200, 240 y 190 en el caso de la primera, segunda y tercera máquinas, respectivamente, determine cuántas unidades de cada producto deben producirse para maximizar la utilidad total.

22. *(Decisiones sobre producción)* En el ejercicio 21, suponga que una repentina baja en la demanda del mercado del producto A obliga a la compañía a incrementar su precio. Si la utilidad por cada unidad de A se incrementa a $600, determine el nuevo programa de producción que maximice la utilidad total.

***23.** *(Decisiones sobre producción)* En el ejercicio 21, suponga que el fabricante se ve forzado por la competencia a reducir el margen de utilidad del producto B. ¿Cuánto puede bajar la utilidad por unidad de B antes de que el fabricante deba cambiar el programa de producción? (El programa de producción siempre debe elegirse de modo que maximice la utilidad total).

24. *(Decisiones sobre inversión)* Un gerente de finanzas tiene $1 millón de un fondo de pensiones, todo o parte del cual debe invertirse. El gerente tiene dos inversiones en mente, unos bonos conservadores que producen 6% anual y unos bonos hipotecarios más riesgoso que producen 10% anual. De acuerdo con las regulaciones del gobierno, no más del 25% de la cantidad invertida puede estar en bonos hipotecarios. Mas aún, lo mínimo que puede ponerse en bonos hipotecarios es de $100,000. Determine las cantidades de las dos inversiones que maximizarían la inversión total.

25. *(Decisiones sobre plantación de cultivos)* Un granjero tiene 100 acres en los cuales sembrar dos cultivos. El costo de plantar el primer cultivo es de $20 por acre y el del segundo es de $40 por acre y dispone de a lo más $3000 para cubrir el costo del sembrado. La recolección de cada acre del primer cultivo demanda de 5 horas-hombre y cada acre del segundo cultivo 20 horas-hombre. El granjero puede confiar en un total de 1350 horas-hombre destinadas a la recolección de los dos cultivos. Si la utilidad es de $100 por acre en el caso del primer cultivo y de $300 por acre para el segundo, determine la porción del terreno que deberá plantarse con cada cultivo para maximizar la utilidad total.

26. *(Decisiones sobre plantación de cultivos)* En el ejercicio 25, determine la porción del terreno que deberá plantarse con cada cultivo, si la utilidad por concepto del segundo cultivo sube a $450 por acre.

27. *(Planeación dietética)* La dietista de un hospital debe encontrar la combinación más barata de dos productos, A y B, que contienen al menos 0.5 miligramos de tiamina y al menos 600 calorías. Cada onza de A contiene 0.12 miligramos de tiamina y 100 calorías; mientras que cada onza de B contiene 0.08 miligramos de tiamina y 150 calorías. Si el costo de cada alimento es de $10 por onza, ¿cuántas onzas de cada uno deberán combinarse?

28. *(Purificación del mineral)* Una compañía posee dos minas, P y Q. Cada tonelada de mineral de la primera mina produce 50 libras de cobre, 4 de cinc y 1 de molibdeno. Cada tonelada de mineral procedente de Q produce 25 libras de cobre, 8 de cinc y 3 de molibdeno. La compañía debe producir al menos 87,500, 16,000 y 5000 libras a la semana de estos tres metales, respectivamente. Si tiene un costo de $50 por tonelada obtener mineral de P y $60 por tonelada extraerlo de la mina Q, ¿cuánto mineral deberá obtenerse de cada mina con objeto de cumplir los requerimientos de producción a un costo mínimo?

29. *(Costos de distribución)* Un fabricante de automóviles posee dos plantas localizadas en D y C con capacidades de 5000 y 4000 automóviles por día. Estas dos plantas surten a tres centros de distribución, O, E y N, que requieren de 3000, 4000 y 2000 automóviles por día, respectivamente. Los costos de enviar cada automóvil desde cada planta a cada centro de distribución están dados en la tabla 4. Denotemos con x y y los números de automóviles enviados al día desde la planta D a O y E, respectivamente; determine los valores de x y y que minimizan el costo total de fletes.

TABLA 4

	O	E	N
D	45	15	25
C	60	10	50

■ 10-3 TABLA SÍMPLEX

El método geométrico y el método de inspección de vértices llegan a ser imprácticos como métodos de solución de problemas de programación lineal, cuando el número de variables es mayor de dos, y en especial cuando el número de desigualdades es grande. En el caso de estos problemas más complejos, existe una alternativa, denominado el **método símplex**, que representa una manera natural y económica de calcular los extremos. Describiremos el método símplex en la sección 10-4; en esta sección, esbozaremos ciertas construcciones y operaciones que son básicas en el método.

Suponga que tenemos la desigualdad $x + 3y \leq 2$ que las dos variables x y y deben satisfacer. Podemos escribir la desigualdad en la forma

$$2 - x - 3y \geq 0$$

Si definimos una nueva variable t mediante la ecuación

$$t = 2 - x - 3y$$

entonces la desigualdad adopta la forma $t \geq 0$. De esta manera, la desigualdad original $x + 3y \leq 2$ es reemplazada por la ecuación y desigualdad siguientes:

$$x + 3y + t = 2, \quad t \geq 0$$

La variable t introducida en esta forma se denomina **variable de holgura**. La razón de este nombre es que t es igual a la cantidad por la cual $x + 3y$ es menor que 2, esto es, t mide el *grado de laxitud* de la desigualdad dada $x + 3y \leq 2$. Las variables originales en un problema de programación lineal, tal como x, y se denominan **variables estructurales** o **variables de decisión**.

La primera etapa al usar el método símplex es introducir variables de holgura, de modo que cada desigualdad en el problema se cambie a una igualdad de tal manera que todas las variables de holgura sean no negativas.

EJEMPLO 1 Suponga que un problema de programación lineal conduce al sistema de desigualdades

$$x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1.5, \quad 2x + 3y \leq 6, \quad x + y \leq 2.5$$

Introducimos las variables de holgura

$$t = 1.5 - y, \quad u = 6 - 2x - 3y, \quad v = 2.5 - x - y$$

Se sigue que las cinco variables (x, y, t, u y v) satisfacen las desigualdades

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad t \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0$$

y las ecuaciones lineales

$$y + t = 1.5, \quad 2x + 3y + u = 6, \quad x + y + v = 2.5$$

☛ **10.** Introduzca variables de holgura para los siguientes conjuntos de desigualdades
a) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 3y \geq 3$, $2x + y \leq 2$
b) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z \leq 30$, $2x + 3y + 2z \leq 12$

Observe que en este ejemplo, el conjunto de desigualdades originales se reemplazó por tres ecuaciones lineales junto con la condición de que las cinco variables que aparecen en estas ecuaciones no sean negativas. Decimos que el problema de programación lineal se ha reducido a la **forma estándar**. En general un problema de programación lineal se dice que está en *forma estándar si consiste en encontrar el valor máximo de una función objetivo Z que es una función lineal en un número de variables tales como* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *en donde* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *no son negativas y satisfacen cierto número de desigualdades lineales.* ☛ **10**

Cuando un problema de programación lineal se cambia a su forma estándar, la solución permanece sin cambio. Esto es, los valores de las variables que optimizan la función objetivo para el nuevo problema son los mismos que optimizan la función objetivo en el problema original. (Por supuesto, el nuevo problema también tiene variables extra).

EJEMPLO 2 Reduzca el problema dado en el ejemplo 2 de la sección 10-2 a su forma estándar.

Solución El problema dado se refiere a un productor de fertilizantes que elabora x toneladas de fertilizante del tipo regular y y toneladas del tipo super. La función de utilidad $Z = 300x + 480y$ debe maximizarse sujeta a las siguientes condiciones:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 0.3x + 0.4y \leq 9$$
$$0.6x + 0.3y \leq 13.5, \quad 0.1x + 0.3y \leq 6, \quad x + y \leq 25$$

Definimos variables de holgura t, u, v y w de tal manera que las últimas cuatro desigualdades se conviertan en igualdades:

$$\begin{aligned} 0.3x + 0.4y + t &= 9 \quad & 0.6x + 0.3y + u &= 13.5 \\ 0.1x + 0.3y + v &= 6 \quad & x + y + w &= 25 \end{aligned} \tag{1}$$

Así, el problema de programación lineal puede establecerse en la forma estándar de la siguiente manera: maximizar la función lineal

$$Z = 300x + 480y$$

en donde x, y, t, u, v y w son las variables no negativas que satisfacen las ecuaciones (1).

Consideremos el significado de las variables de holgura en el contexto de este ejemplo. La elaboración de x toneladas de fertilizantes del tipo regular y de y toneladas del tipo super emplean $0.3x + 0.4y$ toneladas de nitratos. La condición $0.3x + 0.4y \leq 9$ establece que esta cantidad no puede exceder el suministro disponible de 9 toneladas. La variable de holgura $t = 9 - (0.3x + 0.4y)$ es igual a la cantidad de nitratos que sobran o están sin usar. La condición $t \geq 0$ tiene la interpretación simple de que la cantidad de nitratos sobrantes puede ser cero o positiva pero nunca negativa.

Respuesta *a*) $x + 3y + t = 3$, $2x + y + u = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$
b) $x + y + z + t = 30$, $2x + 3y + 2z + u = 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$

De manera similar, las variables de holgura u y v representan, respectivamente, las cantidades de fosfatos y potasio sobrantes cuando se producen x toneladas de fertilizante del tipo regular y y toneladas del tipo super. La variable w representa la capacidad no utilizada de la planta, esto es, el número de toneladas de fertilizante adicionales que podrían producirse si la planta trabajara a toda su capacidad. Como mencionamos antes, las variables de holgura miden el grado de laxitud en las desigualdades correspondientes.

En los ejemplos estudiados hasta ahora, todas las desigualdades contenían el símbolo $\leq$ (con excepción de aquellas que establecían que las variables x y y mismas no son negativas). La introducción de las variables de holgura también puede realizarse cuando ocurre el tipo de desigualdades $\geq$.

EJEMPLO 3 Defina variables de holgura en el sistema de desigualdades

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad 3 \leq x + y \leq 9, \qquad 2y - x \geq -6, \qquad y - x \leq 6$$

Solución Definamos $t = x + y - 3$ y $u = 9 - x - y$. Así, la condición $3 \leq x + y \leq 9$ implica que $t \geq 0$ y $u \geq 0$.

En forma análoga, si definimos $v = 2y - x + 6$, la condición $2y - x \geq -6$ implica que $v \geq 0$. Por último, haciendo $w = 6 + x - y$, también tenemos que $w \geq 0$.

Se sigue que las seis variables x, y, t, u, v y w son no negativas y satisfacen las cuatro ecuaciones lineales siguientes.

$$x + y - t = 3 \qquad x + y + u = 9$$

$$x - 2y + v = 6 \qquad -x + y + w = 6$$

Obsérvese que las variables de holgura siempre se introducen en las desigualdades de modo tal que no sean negativas. *Esto se realiza definiendo cada variable de holgura como el lado de mayor valor de la desigualdad asociada menos el lado de menor valor.*

El número de variables de holgura que deben introducirse es igual al número de desigualdades en el problema original (sin contar las condiciones de que las variables de decisión deben ser no negativas). Por ejemplo, considere el sistema de desigualdades en el ejemplo 1 anterior. Existen dos variables de decisión x y y y tres desigualdades, además de las condiciones $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Por consiguiente, es necesario introducir tres variables de holgura t, u y v, aumentando el número total de variables en el problema a $n + m = 2 + 3 = 5$. Todas estas cinco variables no pueden ser negativas y satisfacen las $m = 3$ ecuaciones lineales:

$$y + t = 1.5, \qquad 2x + 3y + u = 6, \qquad x + y + v = 2.5$$

La región factible de este problema aparece en la figura 14 en términos de las variables originales x y y. Sabemos que el valor óptimo de cualquier función objetivo lineal debe alcanzarse en uno (o más de uno) de los vértices de esta región. Pero en cada vértice, dos de las cinco variables del problema estándar siempre son cero: en O, $x = y = 0$; en A, $x = 0$ y $y = 1.5$ y así $t = 0$; en C, $x + y = 2.5$ y $2x + 3y = 6$ de modo que tanto u como v son cero; en D, $v = y = 0$ y en B, $t = u = 0$.

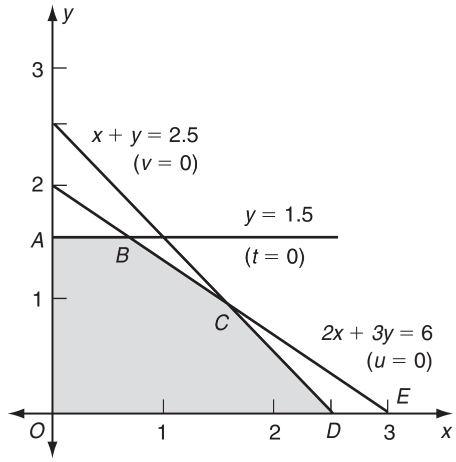


FIGURA 14

☛ **11.** Introduzca variables de holgura para el conjunto de desigualdades
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 2y \leq 6$,
$x - y \geq -1$
Dibuje la región factible y proporcione las parejas de variables que sean cero en cada vértice.

Concluimos que el valor óptimo de cualquier función objetivo para este ejemplo ocurre cuando dos de las cinco variables x, y, t, u y v son iguales a cero. ☛ **11**

Este resultado se generaliza. Suponga que tenemos un problema de programación lineal con n variables de decisión y m variables de holgura. El valor óptimo de cualquier función lineal objetivo se encuentra cuando n del conjunto total de $(n + m)$ variables son cero. Un punto en el que n variables son cero de llama **solución básica** y si este punto también es factible se denomina **solución básica factible** (SBF). Cada SBF corresponde a un vértice de la región factible, y la solución de cualquier problema de programación lineal se produce en uno (o más) de las SBF.

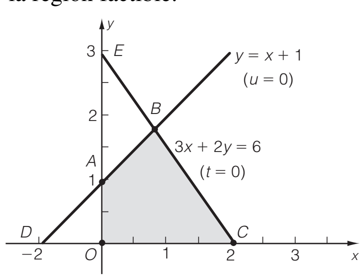
No podemos seleccionar de manera arbitraria las n variables para hacerlas iguales a cero, ya que algunas de estas elecciones no corresponderían a vértices de la región factible. Por ejemplo, en la figura 14, el punto E corresponde a $y = 0$, $u = 0$, pero éste no es una SBF ya que E se encuentra fuera de la región factible. (Es fácil ver que v es negativa en E: E tiene coordenadas (3, 0) y así $v = 2.5 - x - y = -0.5$). De manera análoga, el punto F, que corresponde a $t = v = 0$, no es una SBF ya que allí $u < 0$.

La esencia del método símplex consiste en seleccionar primero una SBF particular como punto de inicio y entonces a partir de ahí transformar ésta a otra SBF, de tal manera que la función objetivo esté más cercana a ser óptima. Este proceso de transformación se denomina **pivoteo** y se continua hasta que la solución básica óptima se determina. El criterio utilizado para seleccionar el pivote particular será de hecho el tema de la siguiente sección. En esta sección, sólo analizaremos las transformaciones.

Consideremos un ejemplo elemental. Supongamos que hay dos variables, x y y, que satisfacen las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \leq 12$ y $4x + y \leq 14$. Definiremos las variables de holgura t y u de modo que $t \geq 0$ y $u \geq 0$ y las desigualdades se transforman en

$$\begin{aligned} 2x + 3y + t &= 12 \\ 4x + y + u &= 14 \end{aligned}$$

Respuesta $3x + 2y + t = 6$,
$y - x + u = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$,
$t \geq 0$, $u \geq 0$
O: $x = y = 0$; A: $x = u = 0$;
B: $t = u = 0$; C: $t = y = 0$
Los puntos D: $u = y = 0$ y
E: $t = x = 0$ no son vértices de la región factible.



Estas ecuaciones pueden resumirse por medio de la siguiente matriz aumentada de coeficientes:

$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 12 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 14 \end{array}\right] \end{array}$$

Esta matriz se denomina la **tabla símplex**.

Observe que las variables están listadas en la tabla arriba de la columna de coeficientes que corresponden a tal variable. Ciertas variables se listan en el lado izquierdo de la tabla, en este caso t y u. Supongamos que todas las variables excepto t y u se hacen iguales a cero (esto es, $x = 0$ y $y = 0$). Así, las dos ecuaciones se reducen a

$$2(0) + 3(0) + t = 12 \quad \text{y} \quad 4(0) + 0 + u = 14$$

o bien $t = 12$ y $u = 14$. Por tanto, los valores de t y u están dados por los elementos de la matriz aumentada situados en la última columna. Ésta es la razón de que t y u se coloquen próximos a los renglones correspondientes de la tabla.

Observando las columnas encabezadas por t y u en el cuadro anterior, advertimos que forman una matriz unitaria 2×2. Ésta es la razón de que los valores de t y u puedan extraerse directamente de la última columna cuando $x = y = 0$. Se dice que las variables t y u forman la **base** de esta solución factible. ☛ **12**

☛ **12.** Construya la tabla símplex para las restricciones
$x + y + z + t = 30$
$2x + 3y + 2z + u = 12$
$5y + 2z + v = 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
$z \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$, $v \geq 0$

Al emplear el método símplex, nos movemos de una SBF a otra (esto es, de un vértice a otro) reemplazando las variables de la base, una a la vez por variables fuera a la base. La variable que se remueve de la base se denomina **variable de salida** y la variable que la reemplaza se denomina **variable de entrada**. Por ejemplo, podríamos cambiar de la base (t, u) de la tabla anterior a la base (y, u). Entonces, la variable de salida sería t y la variable de entrada sería y.

La figura 15 ilustra este ejemplo. La SBF con base (t, u) corresponde al vértice O y la SBF con base (y, u) corresponde al vértice A. Un pivote de una SFB a otra corresponde a movernos de O a A.

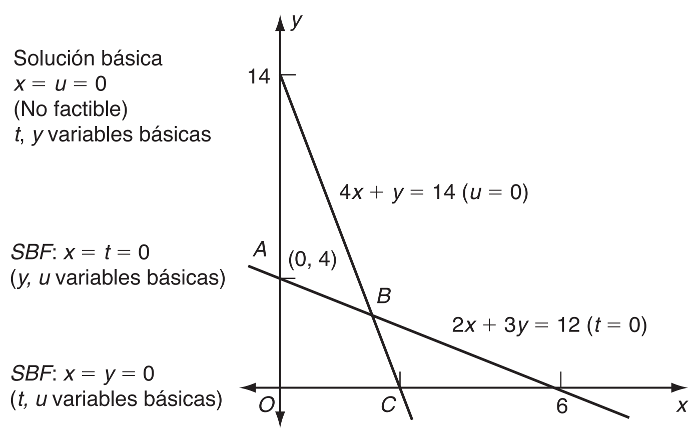


FIGURA 15

Respuesta

$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \\ v \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & t & u & v \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \end{array}.$$

☛ **13.** Construya la tabla símplex para las restricciones
$3x + 2y + t = 6$, $y - x + u = 1$,
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$
Utilice operaciones por renglón para transformar de la base (t, u) a la base (x, u) y luego a la base (x, y). Dibuje la región factible e indique los vértices implicados.

Cuando la base es (y, u), requerimos que los valores de y y u puedan obtenerse de la última columna de la tabla si $x = t = 0$. Esto significa que la tabla debe transformarse a la forma

$$\begin{array}{c} \\ y \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} — & 1 & — & 0 & — \\ — & 0 & — & 1 & — \end{array}\right] \end{array}$$

en donde los guiones indican elementos desconocidos. Esta transformación se logra por medio de operaciones elementales entre renglones. Por ejemplo, la operación $R_2 - \frac{1}{3}R_1$ (restar un tercio del primer renglón al segundo) cambia la tabla a

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 12 \\ \frac{10}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Esto coloca un cero en la columna y, como se requería. Dividiendo el primer renglón entre tres la tabla se reduce a la forma deseada.

$$\begin{array}{c} \\ y \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 4 \\ \frac{10}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 10 \end{array}\right] \end{array}$$

A partir de esta tabla, concluimos que para la SBF en que $x = t = 0$, los valores de y y u son 4 y 10, respectivamente. Esta segunda tabla corresponde a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}x + y + \tfrac{1}{3}t \qquad &= 4 \\ \tfrac{10}{3}x \qquad - \tfrac{1}{3}t + u &= 10 \end{aligned}$$

de la que es fácil advertir que haciendo $x = t = 0$ obtenemos $y = 4$ y $u = 10$. Estos valores son positivos, demostrando que esta solución es factible. En general, *una tabla puede representar una solución factible sólo si todas las entradas en la columna final son no negativas*.

Continuemos este ejemplo y transformemos otra vez de la base (y, u) a la base (x, u). Entonces, la variable que sale es y y la variable que entra es x. Debemos transformar la columna de x a la forma que tiene actualmente la columna y, es decir, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Las operaciones de renglón apropiadas son $R_2 - 5R_1$ seguida por $\frac{3}{2}R_1$ y el resultado es la tabla siguiente

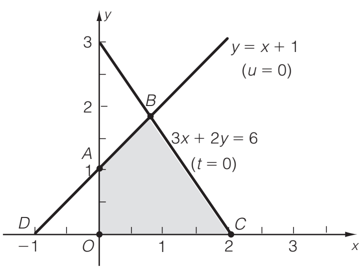
$$\begin{array}{c} \\ x \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & -5 & -2 & 1 & -10 \end{array}\right] \end{array}$$

Esta tabla corresponde a los valores $y = t = 0$, $x = 6$, $u = -10$ y en la figura 15 corresponde al punto D. Este punto es una solución básica pero no es factible. Podemos decir esto de inmediato con base en la entrada negativa en la columna final de la tabla. ☛ **13**

Respuesta

$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Éste corresponde al vértice O en la figura.



Primero t sale y x entra. Después de las operaciones $\frac{1}{3}R_1$, $R_2 + R_1$ obtenemos la tabla correspondiente al vértice C:

$$\begin{array}{c} \\ x \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

Después u sale y entra y. Después de las operaciones $\frac{3}{5}R_2$, $R_1 - \frac{2}{3}R_2$ obtenemos la tabla correspondiente al vértice B:

$$\begin{array}{c} \\ x \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \end{array}\right] \end{array}$$

EJEMPLO 4 Un problema de programación lineal demanda encontrar el valor máximo de $Z = x + 4y + 2z$ cuando x, y y z son variables no negativas que satisfacen las restricciones

$$3x + y + 2z \leq 6 \quad \text{y} \quad 2x + 3y + z \leq 6$$

Definimos las variables de holgura no negativas t y u de modo que

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z + t &= 6 \\ 2x + 3y + z + u &= 6 \end{aligned}$$

La tabla símplex tiene entonces la siguiente forma:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ u \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \end{array}$$

Transformemos esta tabla a una en la cual t y y formen la base. Esto significa que u será la variable de salida y y la variable de entrada, de modo que debemos realizar operaciones entre renglones de tal manera que cambiemos la segunda columna a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La operación $R_1 - \frac{1}{3}R_2$ (restar un tercio del segundo renglón al primero) da

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \frac{7}{3} & 0 & \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

y así la operación $\frac{1}{3}R_2$ (dividir el segundo renglón entre 3) da la forma requerida.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ y \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} \frac{7}{3} & 0 & \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 4 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

De esto, concluimos que la solución factible básica tal que $x = z = u = 0$ tiene los valores $t = 4$ y $y = 2$ para estas variables.

Los ejemplos anteriores contienen tablas con dos renglones. El número de renglones en una tabla es igual al número de variables de holgura, las cuales a su vez son iguales al número de desigualdades en el problema original (no contando aquéllas del tipo $x \geq 0$).

EJEMPLO 5 En el ejemplo 2 de esta sección, consideramos el problema de maximizar la función $Z = 300x + 480y$, en donde las variables no negativas x, y, t, u, v y w satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
0.3x + 0.4y + t \quad\quad\quad\quad &= 9\\
0.6x + 0.3y \quad + u \quad\quad &= 13.5\\
0.1x + 0.3y \quad\quad + v \quad &= 6\\
x + y \quad\quad\quad + w &= 25
\end{aligned}$$

Escriba la tabla símplex de este problema. Transfórmelo a la base (*t, u, y, w*) y luego a la base (*x, u, y, w*).

Solución La tabla es la siguiente:

$$\begin{array}{r|cccccc|c|}
 & x & y & t & u & v & w & \\
t & 0.3 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9\\
\to u & 0.6 & 0.3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13.5\\
v & 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6\\
w & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 25
\end{array}$$

En la primera transformación, v es la variable de salida y y es la variable de entrada, como se indica por las dos flechas. Esto quiere decir que la segunda columna de la tabla debe transformarse a la forma

$$\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}$$

por medio de operaciones elementales entre renglones. Esto se logra por la sucesión de operaciones $R_1 - \frac{4}{3}R_3$, $R_2 - R_3$, $R_4 - \frac{10}{3}R_3$ y $\frac{10}{3}R_3$. El resultado es la siguiente tabla:

$$\begin{array}{r|cccccc|c|}
 & x & y & t & u & v & w & \\
\to t & \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 1\\
u & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{15}{2}\\
y & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & 0 & 20\\
w & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & 1 & 5\\
 & \uparrow & & & & & &
\end{array}$$

De la última columna, advertimos que en la SBF para la cual $x = v = 0$, las otras variables son $t = 1$, $u = \frac{15}{2}$, $y = 20$ y $w = 5$.

En la figura 10 se aprecia la región factible de este ejemplo. La primera tabla corresponde al vértice O ($x = y = 0$); mientras que la segunda tabla corresponde a A ($x = v = 0$).

En la etapa siguiente, nos movemos a la base (*x, u, y, w*), que corresponde a $B(t = v = 0)$. En esta etapa, x es la variable de entrada y t la variable de salida. La sucesión de operaciones $R_2 - 3R_1$, $R_3 - 2R_1$, $R_4 - 4R_1$ y $6R_1$ da por resultado la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \\ y \\ w \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc|c} x & y & t & u & v & w & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 3 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 6 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

De nuevo advertimos que para la solución básica factible $t = v = 0$, $x = 6$, $u = \frac{9}{2}$, $y = 18$ y $w = 1$. (Esta solución básica factible es, en realidad, la óptima de este problema).

EJERCICIOS 10-3

(1-12) Defina las variables de holgura y determine la tabla símplex en los ejercicios 1-6, 17-21 y 25 de la sección 10-2.

(13-14) Defina las variables de holgura y determine la tabla símplex en cada uno de los siguientes problemas.

13. Maximice $Z = x + 3y + 2z$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $2x + y + z \leq 5$, $x + 2y + z \leq 4$

14. Maximice $Z = x + y + z$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $4x + 2y + z \leq 11$, $2x + 2y + 3z \leq 15$, $x + 2y + 2z \leq 11$

(15-22) Para cada una de las tablas símplex dadas abajo, efectúe las operaciones entre renglones apropiadas para realizar el cambio de base indicado. En cada caso decida si la nueva base da una solución factible. En los ejercicios 15, 16 y 19-22, ilustre el cambio de base con un diagrama en que aparezca el cambio de vértice correspondiente de la región factible.

15.
$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & t & u & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 0 & 1 & 19 \end{array}\right] \end{array} \quad (t, u) \to (y, u) \to (y, x)$$

16.
$$\begin{array}{c} \\ s \\ t \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & s & t & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right] \end{array} \quad (s, t) \to (s, x) \to (y, x)$$

17.
$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & z & t & u & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right] \end{array} \quad (t, u) \to (y, u) \to (y, x)$$

18.
$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & z & t & u & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \end{array} \quad (t, u) \to (y, u) \to (y, z)$$

19.
$$\begin{array}{c} \\ s \\ t \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & s & t & u & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 4 & 9 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \end{array}$$

$(s, t, u) \to (s, x, u) \to (s, y, x) \to (u, x, y)$

20.
$$\begin{array}{c} \\ s \\ t \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & s & t & u & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right] \end{array}$$

$(s, t, u) \to (y, t, u) \to (y, x, u)$

21.
$$\begin{array}{c} \\ p \\ q \\ r \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & p & q & r & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \end{array}$$

$(p, q, r) \to (x, q, r) \to (x, y, r) \to (x, y, q)$

22.
$$\begin{array}{c} \\ p \\ q \\ r \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & p & q & r & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right] \end{array}$$

$(p, q, r) \to (p, y, r) \to (p, y, x) \to (q, y, x)$

■ 10-4 MÉTODO SÍMPLEX

El procedimiento usado en el método símplex consiste en continuar efectuando cambios en las variables básicas del tipo analizado en la última sección, hasta que se obtenga el conjunto de variables que optimizan la función objetivo. Cada cambio de variables se realiza de tal manera que mejore el valor de la función objetivo.

Consideremos el método con respecto a un ejemplo particular. Supongamos que deseamos maximizar $Z = 2x + 3y$ sujeta a las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 4y \leq 9$ y $2x + y \leq 4$. Como de costumbre, definimos las variables de holgura t y u por

$$x + 4y + t = 9, \qquad 2x + y + u = 4 \tag{1}$$

en donde las cuatro variables x, y, t y u son no negativas. La tabla símplex es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ u \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & Z \end{array}\right] \end{array}.$$

Observe que ahora agregamos otro renglón a la tabla que contiene los coeficientes de la función objetivo

$$2x + 3y + 0 \cdot t + 0 \cdot u = Z$$

Empezamos con la SBF en la cual $x = y = 0$. En el caso de esta solución, $t = 9$ y $u = 4$. La función objetivo tiene el valor cero para esta SBF. Nuestro propósito es reemplazar una de las variables t o u con x o y en tal forma que Z se incremente. Observando en el último renglón de la tabla, advertimos que si x se incrementa en 1, Z se incrementa en 2; mientras que si y se incrementa en 1, Z se incrementa en 3. Esto es, cualquier incremento en y tiene un efecto mayor en Z que el mismo incremento en x. Por tanto, parece razonable considerar y como la variable de entrada al formar la nueva base.

Los elementos del renglón inferior de la tabla se denominan los **indicadores**. En cada etapa del proceso símplex, la *variable de entrada es la que tiene el indicador positivo más grande.* (Si el indicador más grande ocurre dos veces, lo elegimos arbitrariamente entre las dos variables).

Enseguida debemos decidir si consideramos a t o a u como la variable de salida. Consideremos estas dos posibilidades una por una.

Variable de salida *t*: En este caso, la base constará de (y, u), ya que y entra y t sale. La SFB para esta base se obtiene haciendo $x = t = 0$. De las ecuaciones (1), tenemos que $0 + 4y + 0 = 9$ y $2(0) + y + u = 4$. Así, $y = \frac{9}{4}$ y $u = 4 - y = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$. Esta solución es aceptable puesto que tanto y como u son positivas.

Variable de salida *u*: Ahora, la base consta de (t, y) y las SBF corresponde a hacer $x = u = 0$. De las ecuaciones (1), tenemos que $0 + 4y + t = 9$ y $2(0) + y + 0 = 4$. Por consiguiente, $y = 4$ y $t = 9 - 4y = 9 - (4)4 = -7$.

La segunda solución no es aceptable porque t es negativa. Se sigue, por tanto, que t debe ser la variable de salida.

Este método de decidir la variable de salida puede abreviarse de manera sustancial. Supongamos que la tabla tiene la forma general

$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} p_1 & q_1 & 1 & 0 & b_1 \\ p_2 & q_2 & 0 & 1 & b_2 \end{array}\right] \end{array}$$

en donde p_i, q_i y b_i denotan los elementos indicados en la tabla. Las ecuaciones correspondientes serían

$$\begin{aligned} p_1x + q_1y + t \qquad &= b_1 \\ p_2x + q_2y \qquad + u &= b_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Supongamos que ya hemos decidido que y es la variable de entrada y consideremos las posibilidades de que t o u sean la variable de salida.

Variable de salida *t*: En este caso, la base consta de (y, u). La SBF se obtiene haciendo $x = t = 0$, en cuyo caso las ecuaciones (2) dan

$$q_1y = b_1 \quad \text{y} \quad q_2y + u = b_2$$

Por consiguiente,

$$y = \frac{b_1}{q_1} \quad \text{y} \quad u = b_2 - q_2y = b_2 - q_2\frac{b_1}{q_1}$$

Puesto que y y u no deben ser negativas si ésta ha de ser una solución factible, requerimos que

$$\frac{b_1}{q_1} \geq 0 \quad \text{y} \quad b_2 - q_2\frac{b_1}{q_1} \geq 0$$

Dado que b_1 no es negativa (los elementos de la última columna nunca deben ser negativos), la primera condición se cumple siempre que $q_1 > 0$. Ahora q_1 es el elemento de la tabla que está situado en el renglón de la variable de salida t y la columna de la variable de entrada y. Se conoce como el **elemento pivote** de este cambio de base. Concluimos que en cualquier cambio de base en las variables el *elemento pivote debe ser positivo.*

La segunda de las condiciones automáticamente se satisfará si $q_2 \leq 0$, dado que entonces el término $q_2(b_1/q_1)$ será negativo o cero. (Nótese que $b_2 \geq 0$). Si $q_2 > 0$, esta segunda condición puede escribir como $b_2 \geq q_2(b_1/q_1)$ o

$$\frac{b_2}{q_2} \geq \frac{b_1}{q_1}$$

Variable de salida u: Mediante un análisis similar, concluimos que una SBF válida se obtendrá con la base (t, y) con tal de que el elemento pivote $q_2 > 0$ y a condición de que $q_1 \leq 0$ o si $q_1 > 0$, entonces $(b_1/q_1) \geq (b_2/q_2)$.

Observe que las razones b_1/q_1 y b_2/q_2 se obtienen dividiendo el elemento de la última columna de la tabla entre el elemento correspondiente de la columna de la variable de entrada. (Véase la figura 16). Así, podemos resumir:*

Si $q_1 > 0$ y $q_2 \leq 0$, t es la variable de salida.
Si $q_2 > 0$ y $q_1 \leq 0$, u es la variable de salida.

Si tanto $q_1 > 0$ como $q_2 > 0$,
t es la variable de salida si $b_1/q_1 \leq b_2/q_2$, y
u es la variable de salida si $b_2/q_2 \leq b_1/q_1$

$$\begin{array}{c c c}
 & \begin{array}{cccccc} x & y & t & u & & \end{array} & \\
\begin{array}{c} t \\ u \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} p_1 & q_1 & 1 & 0 & b_1 \\ p_2 & q_2 & 0 & 1 & b_2 \end{array}\right] & \begin{array}{c} b_1/q_1 \\ b_2/q_2 \end{array}
\end{array}$$

Variable de entrada

FIGURA 16

Así que *la variable de salida es aquella cuyo renglón en la tabla corresponde a la razón no negativa más pequeña b_i/q_i.*

Volvamos al ejemplo anterior. Los primeros dos renglones de la tabla aparecen en la figura 17. Puesto que y ha de ser la variable de entrada, dividimos cada elemento de la última columna entre el elemento correspondiente de la columna encabezada por y. Las razones están dadas a la derecha de la tabla. Ambas razones son positivas y la más pequeña es $9 \div 4 = 2.25$, que pertenece al renglón t de la tabla. Así, debemos tener que t es la variable de salida y el elemento pivote es 4.

$$\begin{array}{c c c}
 & \begin{array}{cccccc} x & y & t & u & & \end{array} & \\
\begin{array}{c} t \\ u \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 9 \div 4 = 2.25 \\ 4 \div 1 = 4 \end{array}
\end{array}$$

Variable de entrada

FIGURA 17

---

*Si tanto $q_1 \leq 0$ como $q_2 \leq 0$, entonces el problema no está acotado (esto es, Z no tiene un valor máximo finito).

Entonces, las dos operaciones por renglón $R_2 - \frac{1}{4}R_1$ y $\frac{1}{4}R_1$ reducen la tabla a la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \\ y \\ u \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & t & u & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{9}{4} \\ \frac{7}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{7}{4} \\ 2 & 3 & 0 & 0 & Z \end{array}\right] \end{array}$$

☛ **14.** Para el siguiente problema de programación lineal, escriba la tabla inicial y realice el primer pivoteo.
Maximizar $Z = x + 2y$, sujeta a $x + y \le 2$, $2x + y \le 3$, $x, y \ge 0$

En esta forma, los valores de las variables básicas y y u pueden localizarse directamente en la última columna para la SBF en que $x = t = 0$. ☛ **14**

Observemos que Z aún está expresada en términos de x y y. Nos gustaría expresarla en términos de x y t de modo que cuando x y t se hagan iguales a cero, el valor de Z pueda leerse de inmediato en la tabla. Podemos hacer esto mediante la operación $R_3 - 3R_1$.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x & y & t & u & \\ \hline y & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{9}{4} \\ u & \frac{7}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{7}{4} \\ & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & Z - \frac{27}{4} \end{array}$$

El último renglón de esta nueva tabla es equivalente a la ecuación

$$Z - \frac{27}{4} = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}t \qquad (3)$$

Cuando $x = t = 0$, ésta se convierte en $Z - \frac{27}{4} = 0$ o $Z = \frac{27}{4}$. En consecuencia, para la solución factible básica en que $x = t = 0$, la función objetivo tiene el valor $\frac{27}{4}$. Es evidente que esto representa una mejora con respecto al valor previo de cero.

En la ecuación (3), observamos que si t se hace positiva, Z en realidad decrecería. El indicador correspondiente (es decir $-\frac{3}{4}$) es negativo. Por tanto, no debemos permitir que t entre a la base. El indicador positivo más grande (de hecho, el único indicador positivo) es $\frac{5}{4}$, que pertenece a x, de modo que x será la variable de entrada en la etapa siguiente del proceso símplex.

Con objeto de determinar la variable de salida, de nuevo dividimos la última columna entre los elementos correspondientes de la columna encabezada por la variable de entrada. Los resultados están dados en la figura 18. El más pequeño de estos cocientes es 1, que proviene del renglón u, de modo que u será la variable de salida.

Respuesta

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x & y & t & u & \\ \hline t & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ u & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ & 1 & 2 & 0 & 0 & Z \end{array}$$

y entra (mayor indicador) y t sale (cociente 2/1, más pequeño que 3/1). Después de las operaciones por renglón $R_2 - R_1$, $R_3 - 2R_1$, obtenemos

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x & y & t & u & \\ \hline t & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ u & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ & -1 & 0 & -2 & 0 & Z - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rc|cccc|c|l} & & x & y & t & u & & \\ \hline & y & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{9}{4} & (\frac{9}{4}) \div (\frac{9}{4}) = 9 \\ \text{Variable de salida} \rightarrow & u & \frac{7}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{7}{4} & (\frac{7}{4}) \div (\frac{7}{4}) = 1 \end{array}$$

↑ Variable de entrada

FIGURA 18

La sucesión de operaciones entre renglones $R_1 - \frac{1}{7}R_2$, $R_3 - \frac{5}{7}R_2$ y $\frac{4}{7}R_2$ reducen la tabla a

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\ \begin{array}{c} y \\ x \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 2 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & Z-8 \end{array}\right] \end{array}$$

La SBF para esta tabla corresponde a $t = u = 0$. Observe que el último renglón de la tabla corresponde a la ecuación

$$Z - 8 = -\tfrac{4}{7}t - \tfrac{5}{7}u$$

de modo que cuando t y u son cero, el valor de Z puede determinarse de inmediato: $Z - 8 = 0$ o $Z = 8$. Los valores correspondientes de x y y pueden localizarse en la última columna $y = 2$ y $x = 1$.

Todos los indicadores son ahora negativos. Esto significa que si alguna de las variables t o u hubiera dado un valor positivo, Z decrecería. Así que el valor máximo de Z se obtiene haciendo $t = u = 0$, esto es, tomando la SBF en que $x = 1$ y $y = 2$. En general, el *procedimiento símplex debe detenerse cuando no quedan indicadores positivos.*

EJEMPLO 1 ***(Decisiones sobre producción)*** Una compañía produce dos tipos de calculadoras electrónicas, un modelo estándar, cuya utilidad es de \$5 y un modelo de lujo, cuya utilidad es de \$8. La compañía estima que su red de distribuidores a lo más puede manejar 1000 calculadoras a la semana. Debido al rápido crecimiento de la industria de las calculadoras, existe una disminución tanto en las partes como en la mano de obra calificada necesaria para ensamblar las calculadoras. La compañía puede obtener un suministro semanal regular de sólo 5000 circuitos electrónicos (chips) necesarios para las calculadoras; cada calculadora regular necesita 3 de estos chips y cada calculadora de lujo requiere 6. Mas aún, la compañía sólo dispone de 2500 horas-hombre de mano de obra calificada a la semana; cada calculadora regular demanda 3 horas-hombre y cada calculadora de lujo necesita 2. ¿Cuántas calculadoras de cada tipo deberían producirse a la semana con la finalidad de maximizar la utilidad total?

Solución Denotemos con x el número de calculadoras regulares y con y el número de calculadoras de lujo producidas cada semana. Esto requiere de $3x + 6y$ chips y de $3x + 2y$ horas-hombre de mano de obra. Así que, x y y deben satisfacer las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1000$, $3x + 6y \leq 5000$ y $3x + 2y \leq 2500$. La utilidad semanal es

$$Z = 5x + 8y$$

Definiendo las variables de holgura t, u y v, las restricciones pueden escribirse en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x + y + t &= 1000 \\ 3x + 6y + u &= 5000 \\ 3x + 2y + v &= 2500 \end{aligned}$$

en donde x, y, t, u y v son mayores o iguales que cero. Así, tenemos la tabla símplex que aparece enseguida.

☛ **15.** Resuelva el siguiente problema de programación lineal: Maximizar $Z = x + 2y$ sujeta a $x + y \leq 4$, $x + 5y \leq 8$, $x, y \geq 0$

$$\begin{array}{ccl}
 & \begin{array}{ccccc} x & y & t & u & v \end{array} & \\
\begin{array}{r} t \\ \to u \\ v \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1000 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 5000 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2500 \\ 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & Z \end{array}\right] & \begin{array}{l} 1000 \div 1 = 1000 \\ 5000 \div 6 = \ \ 833.3 \\ 2500 \div 2 = 1250 \\ \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc} & \uparrow & & & \end{array} &
\end{array}$$

El más grande de los indicadores es 8, en la columna y, de modo que y se convierte en la variable de entrada. Con el propósito de decidir sobre la variable de salida, consideramos las razones de los elementos de la última columna a los que aparecen en la columna y: la más pequeña de estas razones, $5000 \div 6$, ocurre en el renglón u, por lo que u es la variable de salida.

Debemos en consecuencia transformar la columna y a la forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dejando intactas las columnas t y v. La sucesión de operaciones entre renglones $R_1 - \frac{1}{6} R_2$, $R_3 - \frac{1}{3} R_2$, $R_4 - \frac{4}{3} R_2$ y $\frac{1}{6} R_2$ logra esto:

$$\begin{array}{ccl}
 & \begin{array}{ccccc} x & y & t & u & v \end{array} & \\
\begin{array}{r} \to t \\ y \\ v \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{500}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2500}{3} \\ 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2500}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & Z - \frac{20{,}000}{3} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \frac{500}{3} \div \frac{1}{2} \approx 333 \\ \frac{2500}{3} \div \frac{1}{2} \approx 1667 \\ \frac{2500}{3} \div 2 \approx 417 \\ \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc} \uparrow & & & & \end{array} &
\end{array}$$

El indicador positivo más grande ahora es 1, en la columna x, de modo que x es la variable de entrada en la siguiente etapa. Calculando las razones que involucran la última columna y la columna x, encontramos que la razón más pequeña ocurre en el renglón t, de modo que t es la variable de salida. Por consiguiente, efectuamos las operaciones entre renglones $R_2 - R_1$, $R_3 - 4R_1$, $R_4 - 2R_1$ y $2R_1$.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} x & y & t & u & v \end{array} \\
\begin{array}{r} x \\ y \\ v \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1000}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2000}{3} \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{500}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & Z - 7000 \end{array}\right]
\end{array}$$

En esta etapa, todos los indicadores son negativos o cero, de modo que no podemos mejorar el valor de Z por algún otro cambio de base. El valor óptimo de Z es 7000, que se alcanza tomando $x = \frac{1000}{3}$ y $y = \frac{2000}{3}$. Así que la compañía deberá producir 333 calculadoras regulares y 667 de lujo a la semana. ☛ **15**

El método símplex puede resumirse por la sucesión de los siguientes pasos:

Respuesta

$$\begin{array}{ccl}
 & \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} & \\
\begin{array}{r} t \\ u \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & Z \end{array}\right] & \begin{array}{l} 4/1 \\ 8/5 \leftarrow \\ \end{array} \\
 & \begin{array}{cccc} & \uparrow & & \end{array} &
\end{array}$$

y entra y sale u:

$$\begin{array}{ccl}
 & \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} & \\
\begin{array}{r} t \\ y \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{4}{5} & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{12}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & Z - \frac{16}{5} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \frac{12}{5}/\frac{4}{5} = 3 \leftarrow \\ \frac{8}{5}/\frac{1}{5} = 8 \\ \end{array} \\
 & \begin{array}{cccc} \uparrow & & & \end{array} &
\end{array}$$

Ahora x entra y sale t:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} x & y & t & u \end{array} \\
\begin{array}{r} x \\ u \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & Z - 5 \end{array}\right]
\end{array}$$

Entonces, la solución óptima es $x = 3$, $y = 1$, $Z_{\text{máx}} = 5$

Paso 1 Definimos las variables de holgura no negativas que transformen las desigualdades en ecuaciones.

Paso 2 Construimos la tabla símplex.

Paso 3 Seleccionamos la variable de entrada con base en el indicador positivo más grande.

Paso 4 Calculamos las razones de los elementos de la última columna de la tabla a los elementos de la columna de la variable de entrada. El cociente no negativo más pequeño determina la variable de salida.

Paso 5 Efectuamos operaciones entre renglones de la tabla para transformar la columna encabezada por la variable de entrada a la forma que la columna de la variable de salida tenía antes. Esto debe realizarse sin alterar las columnas encabezadas por las otras variables básicas.

Paso 6 Repetimos los pasos 3, 4 y 5 hasta que ninguno de los indicadores sea positivo. El valor máximo de la función objetivo estará dado entonces por el elemento inferior izquierdo de la tabla.

El método símplex puede aplicarse a problemas que incluyan más de dos variables y cualquier número de desigualdades. Cuando estos números son grandes, es necesario utilizar una computadora con el objetivo de realizar los cálculos; pero las operaciones correspondientes a problemas con tres variables pueden por lo general realizarse a mano sin demasiada dificultad.

EJEMPLO 2 Utilice el método símplex con el propósito de determinar el valor máximo de la función objetivo $Z = 4x + y + 3z$, en donde x, y y z son variables no negativas que satisfacen las restricciones $x + y + z \leq 4$, $3x + y + 2z \leq 7$ y $x + 2y + 4z \leq 9$.

Solución Definimos t, u y v como las variables de holgura no negativas tales que

$$
\begin{aligned}
x + y + z + t \qquad\qquad &= 4\\
3x + y + 2z \quad + u \qquad &= 7\\
x + 2y + 4z \qquad\quad + v &= 9
\end{aligned}
$$

La tabla símplex aparece abajo. El indicador más grande es 4, que pertenece a la columna x, de modo que x se convierte en la variable de entrada. Los cocientes de los elementos de la última columna entre los correspondientes elementos de la columna x están calculados a la derecha. El cociente más pequeño pertenece al renglón u, por lo que u debe ser la variable de salida.

Variable de salida

$$
\begin{array}{rcl}
 & \begin{matrix} x & y & t & u & v & & \end{matrix} & \\
\begin{matrix} t \\ \rightarrow u \\ v \\ \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & Z \end{array}\right] & \begin{matrix} 4 \div 1 = 4 \\ 7 \div 3 = 2.33 \\ 9 \div 1 = 9 \\ \end{matrix} \\
 & \uparrow &
\end{array}
$$

Variable

De esta manera, las operaciones entre renglones $R_1 - \frac{1}{3}R_2$, $R_3 - \frac{1}{3}R_2$, $R_4 - \frac{4}{3}R_2$ y $\frac{1}{3}R_2$ reducen la tabla a la siguiente forma:

$$\begin{array}{r c c}
 & \begin{matrix} x & y & z & t & u & v & & \end{matrix} & \\
\begin{matrix} t \\ x \\ \textit{Variable de salida} \rightarrow v \\ \\ \end{matrix} &
\left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\
1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\
0 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{20}{3} \\
0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & Z - \frac{28}{3}
\end{array}\right] &
\begin{matrix} \frac{5}{3} \div \frac{1}{2} = 5 \\ \frac{7}{3} \div \frac{1}{2} = 3.5 \\ \frac{20}{3} \div \frac{20}{3} = 2 \\ \\ \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} \uparrow \\ \textit{Variable de entrada} \end{matrix} &
\end{array}$$

El único indicador positivo pertenece ahora a z, de modo que esta variable entra a la base. De acuerdo con los cocientes calculados a la derecha, v es la variable de salida. Efectuamos la sucesión de operaciones $R_1 - \frac{1}{10}R_3$, $R_2 - \frac{1}{5}R_3$, $R_4 - \frac{1}{10}R_3$ y $\frac{3}{10}R_3$. El resultado es el siguiente:

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{matrix} x & y & z & t & u & v & \end{matrix} \\
\begin{matrix} t \\ x \\ z \\ \\ \end{matrix} &
\left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\
0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 2 \\
0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{13}{10} & -\frac{1}{10} & Z - 10
\end{array}\right]
\end{array}$$

Todos los indicadores son ahora negativos, lo cual indica que el valor máximo de Z se alcanzó en la correspondiente SBF. Ésta está dada por $y = u = v = 0$ y los valores de t, x y z pueden leerse en la última columna. Éstos son $t = 1$, $x = 1$ y $z = 2$. Por consiguiente, el valor máximo de Z es 10 y se alcanza cuando $x = 1$, $y = 0$ y $z = 2$.

Hemos descrito el método símplex en el caso de un problema de maximización. La manera más fácil de usarlo al resolver un problema de *minimización* es convertir el problema dado en uno que requiera maximización. Por ejemplo, supongamos que deseamos encontrar los valores de x y y sujetos a ciertas restricciones que minimizan un costo C dado por $C = 2x + 6y + 3$. Definamos entonces $Z = -2x - 6y$, de modo que $C = 3 - Z$. Se sigue que cuando C alcanza su valor mínimo, Z debe tener un máximo. Podemos de esta manera reemplazar el objetivo en el problema dado por el nuevo objetivo: maximizar $Z = -2x - 6y$. Las restricciones permanecen sin cambio y podemos aplicar el método símplex tal como se describió antes, porque tenemos ahora un problema de maximización.

En nuestros ejemplos del método símplex, empezamos con una SBF en la cual las variables de holgura forman la base y todas las variables originales son cero. Sin embargo, algunas veces tal solución no es factible y el procedimiento debe modificarse. No entraremos en los detalles en cuanto a la resolución de esta dificultad, pero el siguiente ejemplo indicará las ideas principales implicadas.

EJEMPLO 3 Minimice $C = 10 + x - 2y$ sujeta a las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 5$ y $2x + y \geq 6$.

Solución Primero defina $Z = -x + 2y$. Entonces, $C = 10 - Z$, y debemos maximizar Z, que será equivalente a minimizar C.

Introduciendo variables de holgura en la manera usual, el problema de programación lineal se transforma, en la forma estándar,

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & Z = -x + 2y \\ \text{Sujeta a} & x + y + t = 5, \quad 2x + y - u = 6, \quad x, y, t, u \geq 0 \end{array}$$

Ahora intentamos encontrar una SBF haciendo $x = y = 0$, para iniciar el método símplex. Obtenemos $t = 5$ y $u = -6$, y ésta no es factible ya que $u < 0$.

Es posible salvar esta dificultad por medio de la sencilla estrategia de introducir otra variable v, denominada **variable artificial**, en la segunda restricción de modo que las restricciones se transforman en

$$x + y + t = 5, \quad 2x + y - u + v = 6, \quad x, y, t, u, v \geq 0$$

Ahora podemos obtener una SBF poniendo $x = y = u = 0$, y las variables básicas son $t = 5$ y $v = 6$, ambas positivas.

Por supuesto, al introducir la variable ha cambiado el problema. Pero cuando $v = 0$, el nuevo conjunto de restricciones es el mismo que el anterior. Por tanto, si estamos seguros de que v es cero en la solución final del nuevo problema, esta solución también debe resolver el problema dado.

Podemos asegurar que v se lleva a cero cambiando la función objetivo a $Z = -x + 2y - Mv$, donde M es un número muy grande, por ejemplo, un millón. M se conoce como la **penalización** asociada con la variable artificial, y su efecto es asegurar que cualquier valor diferente de cero de v produce un valor negativo grande de la función objetivo, que por tanto debe ser menor al valor máximo. En el máximo de esta nueva Z, v debe ser cero.

Entonces la tabla para nuestro nuevo problema es

$$\begin{array}{c} \\ t \\ v \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & t & u & v \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -M & Z \end{array}\right] \end{array}$$

Sin embargo, esta tabla no está totalmente en la forma usual, ya que el indicador no es cero en la columna de v, y v es una variable básica. La operación $R_3 + MR_2$ resuelve ese pequeño problema, y queda

$$\begin{array}{c|ccccc|c|l} & x & y & t & u & v & & \\ \hline t & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & \frac{5}{1} = 5 \\ \to v & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 6 & \frac{6}{2} = 3 \\ & 2M - 1 & M + 2 & 0 & -M & 0 & Z + 6M & \\ & \uparrow & & & & & & \end{array}$$

Ahora procedemos con el método símplex usual. El indicador más grande es $2M - 1$, en la columna de x, de modo que x entra a la base, y las razones usuales a la dere-

☛ **16.** Utilice el método símplex para maximizar $Z = x$ sujeta a las restricciones $y \geq x + 1$, $x + 2y \leq 8$, $x, y \geq 0$

Respuesta Después de eliminar la variable artificial de la función objetivo, la tabla inicial es

$$\begin{array}{c} \\ t \\ v \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & t & u & v & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1-M & M & 0 & -M & 0 & Z+M \end{array}\right] \end{array}$$

Después de dos pivoteos, la tabla final es

$$\begin{array}{c} \\ t \\ u \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & t & u & v & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & M+\frac{2}{3} & Z-2 \end{array}\right] \end{array}$$

dando la solución óptima $x = 2$, $y = 3$ y $Z_{\text{máx}} = 2$

cha muestran que v sale. Entonces, las operaciones entre renglones $R_1 - \frac{1}{2}R_2$ y $R_3 - (M - \frac{1}{2})R_2$ seguida de $\frac{1}{2}R_2$, producen la tabla

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow t \\ x \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & t & u & v & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -M+\frac{1}{2} & Z+3 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccc} & \uparrow & & & & \end{array} \end{array}\begin{array}{l} \\ 2/\frac{1}{2} = 4 \\ 3/\frac{1}{2} = 6 \\ \\ \end{array}$$

Esta vez y entra y t sale. Las operaciones entre renglones $R_2 - R_1$ y $R_3 - 5R_1$ seguida por $2R_1$ producen la tabla:

$$\begin{array}{c} \\ y \\ x \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & t & u & v & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & -M+3 & Z-7 \end{array}\right] \end{array}$$

Ahora todos los indicadores son negativos, de modo que esta solución es óptima: $y = 4$, $x = 1$ y el valor máximo de Z es 7. (Con facilidad puede verificar por medio del método geométrico que esta solución es la correcta). Por último, el valor mínimo de $C = 10 - Z$ es 3. ☛ **16**

EJERCICIOS 10-4

(1-16) Use el método símplex para resolver los problemas de programación lineal dados en los ejercicios 1-6, 17-22, 25 y 26 de la sección 10-2 y los ejercicios 13 y 14 de la sección 10-3.

17. (*Mezclas*) Una compañía vende tres diferentes tipos de frituras, el tipo regular contiene 80% de cacahuates, 20% de nueces y no contiene pistaches; la mezcla super contiene 50% de cacahuates, 30% de nueces y 20% de pistaches y la mezcla de lujo contiene 30% de cacahuates, 30% de nueces y 40% de pistaches. La empresa tiene asegurados suministros por 4300 libras de cacahuates, 2500 de nueces y 2200 libras de pistaches a la semana. Si la utilidad es de 10¢ por libra de cada mezcla, ¿cuántas libras de cada una deberían venderse con el objetivo de maximizar la utilidad total?

(18-26) Mediante el método símplex encuentre el valor máximo de la función objetivo dada sujeta a las restricciones establecidas.

18. $Z = x + y + z$; $x, y, z \geq 0$, $x \leq 6$, $x + 2y + 3z \leq 12$, $2x + 4y + z \leq 16$

19. $Z = x + 2y - z$; $x, y, z \geq 0$, $2x + y + z \leq 4$, $x + 4y + 2z \leq 5$

20. $Z = 2x - y + 3z$; $x, y, z \geq 0$, $x + 3y + z \leq 5$, $2x + 2y + z \leq 7$

21. $Z = x + y + z$; $x, y, z \geq 0$, $x + 2y + z \leq 5$, $2x + y + 2z \leq 7$, $2x + 3y + 4z \leq 13$

22. $Z = 3x + y + 4z$; $x, y, z \geq 0$, $x + 2y + 2z \leq 9$, $2x + y + 3z \leq 13$, $3x + 2y + z \leq 13$

23. $Z = 4x + 5y$; $x, y \geq 0$, $x + 2y \leq 10$, $-x + 2y \leq 4$, $3x - y \leq 9$

24. $Z = x$; $x, y \geq 0$, $x \leq 2y$, $x + 2y \leq 4$, $3x + y \leq 9$

25. $Z = 3x - y + 2z$; $x, y, z \geq 0$, $4x - 3y + 2z \leq 4$, $3x + 2y + z \leq 1$, $-x + y - 3z \leq 0$

26. $Z = x + z$; $x, y, z \geq 0$, $2x - y + z \leq 6$, $4x + y + 3z \leq 20$, $-x + z \leq 2$

(27-30) Por medio de la introducción de variables artificiales cuando sea necesario, utilice el método símplex para resolver los ejercicios 9, 10, 27 y 29 de la sección 10-2.