m) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.

n) El conjunto de todos los rectángulos del plano es un subconjunto del conjunto de todos los cuadrados del plano.

o) El conjunto de todos los triángulos equiláteros es un subconjunto del conjunto de todos los triángulos.

p) El intervalo abierto (a, b) es un subconjunto del intervalo cerrado $[a, b]$.

q) $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\} \in \{y \mid 1 \leq y \leq 5\}$

r) $\{x \mid 1 \leq x \leq 2\} = \{y \mid 1 \leq y \leq 2\}$

26. Si A es el conjunto de todos los cuadrados del plano, B el conjunto de todos los rectángulos del plano y C es el conjunto de todos los cuadriláteros del plano, entonces, ¿cuál de estos conjuntos es un subconjunto de otro (o de qué otros)?

27. Demuestre que el conjunto $\{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$ no es un subconjunto del intervalo $[0, \infty)$.

28. ¿El conjunto $\{x \mid x\,(x^2 - 1) = 0\}$ es un subconjunto del intervalo $(0, \infty)$?

29. ¿El conjunto $\{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$ es un subconjunto de los números naturales?

30. ¿Es el conjunto $\{x \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$ es un subconjunto de los enteros? ¿De los números racionales?

■ 3-2 DESIGUALDADES LINEALES DE UNA VARIABLE

En esta sección, consideraremos desigualdades que requieren una sola variable. El siguiente ejemplo se refiere a un sencillo problema de negocios que conduce a una de tales desigualdades.

El costo total (en dólares) de producción de x unidades de cierto artículo está dado por $C = 3100 + 25x$ y cada unidad se vende a \$37. El fabricante quiere saber cuántas unidades deberá producir y vender para obtener una utilidad de al menos \$2000.

Suponga que se producen y venden x unidades. El ingreso I obtenido por vender x unidades en \$37 cada una es $I = 37x$ dólares. La utilidad U (en dólares) obtenida por producir y vender x unidades está dada entonces por las siguientes ecuaciones:

$$\text{Utilidad} = \text{Ingresos} - \text{Costos}$$

$$U = 37x - (3100 + 25x) = 12x - 3100$$

Dado que la utilidad requerida debe ser al menos de \$2000, es decir, debería ser de \$2000 o más, tenemos que

$$U \geq 2000$$

o bien,

$$12x - 3100 \geq 2000 \tag{1}$$

Esta es una desigualdad en la variable x. Observemos que los términos que aparecen son de dos tipos, términos constantes o términos que son múltiplos constantes de la variable x. Cualquier desigualdad que sólo tiene estos dos tipos de términos se denomina **desigualdad lineal**. Si el símbolo de desigualdades es $>$ o $<$ la desigualdad es **estricta**; si el símbolo es $\geq$ o $\leq$, se dice que es **débil**.

EJEMPLO 1

a) $3 - x \leq 2x + 4$ es una desigualdad lineal débil en la variable x.

b) $\frac{1}{4}z + 3 > 5 - \frac{1}{3}z$ es una desigualdad lineal estricta en la variable z.

Cualquier desigualdad puede escribirse en una forma equivalente, intercambiando los dos lados e invirtiendo el sentido del signo de la desigualdad. Por ejemplo, $x > 3$ es equivalente a $3 < x$; el ejemplo 1(a) es equivalente a $2x + 4 \geq 3 - x$.

DEFINICIÓN La **solución** de una desigualdad en una variable es el conjunto de todos los valores de la variable, para los cuales la desigualdad es una proposición verdadera.

Por ejemplo, la solución de la desigualdad (1) es el conjunto de todos los valores x (el número de unidades vendidas) que producen una utilidad de al menos $2000.

A semejanza de las ecuaciones, la solución de una desigualdad se encuentra efectuando ciertas operaciones en la desigualdad con el propósito de transformarla en alguna forma estándar. Hay dos operaciones básicas que se utilizan en el manejo de las desigualdades; estableceremos ahora las reglas que gobiernan estas operaciones.

Regla 1

Cuando el mismo número real se suma o se resta a ambos lados de una desigualdad, el sentido de la desigualdad no se altera.

En símbolos, si $a > b$ y c es cualquier número real, entonces

$$a + c > b + c \quad \text{y} \quad a - c > b - c$$

EJEMPLO 2

a) Es claro que $8 > 5$ es una proposición verdadera. Su sumamos 4 a ambos lados, obtenemos $8 + 4 > 5 + 4$ o $12 > 9$, que sigue siendo cierta. Si restamos 7 a ambos lados obtenemos $8 - 7 > 5 - 7$ o $1 > -2$, que de nuevo es válida.

b) Sea $x - 1 > 3$. Sumando 1 a ambos lados,

$$x - 1 + 1 > 3 + 1$$

o bien,

$$x > 4$$

El conjunto de valores de x para los cuales $x - 1 > 3$ es el mismo conjunto para el cual $x > 4$. ☛ **7**

☛ **7.** Sume -5 a ambos miembros de las siguientes desigualdades:
a) $x + 5 \geq -5$
b) $x - 5 < 2$

En el ejemplo 2 observamos que la igualdad $x > 4$ puede obtenerse de la desigualdad original $x - 1 > 3$ pasando el término -1 del lado izquierdo al derecho y cambiando su signo. En general, la regla anterior nos permite efectuar este tipo de operación: *cualquier término puede pasarse de un lado al otro de una desigualdad*

Respuesta *a*) $x \geq -10$
b) $x - 10 < -3$

después de cambiar su signo, sin alterar el sentido de la desigualdad. En símbolos, si $a > b + c$, entonces $a - b > c$ y $a - c > b$.

EJEMPLO 3

a) Si $8 > 5 + 2$, entonces $8 - 2 > 5$.

b) De $2x - 1 < x + 4$ se sigue que $2x - x < 4 + 1$. Tanto x como -1 se pasaron de un lado a otro. Entonces, simplificando obtenemos $x < 5$.

> **Regla 2**
>
> *El sentido de la desigualdad se preserva si ambos lados se multiplican (o dividen) por el mismo número positivo y se invierte cuando se multiplican (o dividen) por el mismo número negativo.*

En símbolos, si $a > b$ y c es cualquier número positivo, entonces

$$ac > bc \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

mientras que si c es un número negativo arbitrario, entonces

$$ac < bc \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

EJEMPLO 4

a) Sabemos que $4 > -1$ es una proposición verdadera. Multiplicando ambos lados por 2, obtenemos $8 > -2$ que aún es válida. Pero si la multiplicamos por (-2), debemos invertir el sentido de la desigualdad:

$$(-2)(4) < (-2)(-1) \quad \text{o bien} \quad -8 < 2$$

que otra vez es válida.

b) Si $2x \leq 4$, entonces podemos dividir ambos lados entre 2 y obtener la desigualdad equivalente $2x/2 \leq 4/2$ o $x \leq 2$.

c) Si $-3x < 12$, podemos dividir entre -3, que es negativo, de modo que debemos invertir el sentido de la desigualdad:

$$\frac{-3x}{-3} > \frac{12}{-3} \quad \text{o bien} \quad x > -4 \quad ☛ \mathbf{8}$$

☛ **8.** Multiplique ambos miembros de las siguientes desigualdades por -2;
a) $2x > -3$; *b*) $-\frac{1}{2}x \leq 3 - x$

Respuesta *a*) $-4x < 6$
b) $x \geq -6 + 2x$

Antes de considerar más ejemplos, deduciremos estas dos reglas básicas.

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA 1 Supongamos que $a > b$ y sea c cualquier número real. Si $a > b$, entonces por definición $a - b > 0$. Consideremos ahora la diferencia entre $(a + c)$ y $(b + c)$:

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b > 0$$

Pero, dado que $(a + c) - (b + c)$ es positivo, esto significa que

$$a + c > b + c$$

lo cual es lo que deseamos encontrar.

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA 2 De nuevo supongamos que $a > b$ y sea c cualquier número real positivo. Entonces, como antes, $a - b > 0$. Así, $a - b$ y c son números positivos, de modo que su producto también es positivo:

$$(a - b)\, c > 0$$

Es decir,

$$ac - bc > 0$$

Se sigue, por tanto, que $ac > bc$, como se requería. Si, por otro lado, c fuera negativo, el producto $(a - b)c$ sería negativo puesto que un factor sería positivo y el otro negativo. Se sigue que

$$ac - bc < 0$$

y de aquí, $ac < bc$, como se requería.

EJEMPLO 5 Encuentre todos los números reales que satisfacen la desigualdad

$$3x + 7 > 5x - 1$$

Solución Pasamos todos los términos en x a un lado de la desigualdad y todos los términos constantes al otro. Pasando $5x$ al lado izquierdo y 7 al lado derecho, cambiando sus signos y simplificando obtenemos las siguientes desigualdades:

$$3x - 5x > -1 - 7 \qquad \text{(Regla 1)}$$
$$-2x > -8$$

Enseguida, dividimos ambos lados entre -2 y cambiamos el sentido de la desigualdad (puesto que -2 es negativo).

$$\frac{-2x}{-2} < \frac{-8}{-2} \qquad \text{(Regla 2)}$$
$$x < 4$$

Por tanto, la solución consta del conjunto de números reales en el intervalo $(-\infty, 4)$. Esto se ilustra en la figura 4.

FIGURA 4

EJEMPLO 6 Resuelva la desigualdad

$$y + \frac{3}{4} \leq \frac{5y - 2}{3} + 1$$

Solución Ante todo, debemos eliminar las fracciones de la desigualdad. Aquí, el denominador común es 12, de modo que multiplicamos ambos lados por 12.

$$12\left(y + \frac{3}{4}\right) \le 12\left(\frac{5y - 2}{3} + 1\right)$$
$$12y + 9 \le 4(5y - 2) + 12$$
$$12y + 9 \le 20y - 8 + 12$$
$$12y + 9 \le 20y + 4$$

Pasando los términos en y a la izquierda y los términos constantes a la derecha, obtenemos

$$12y - 20y \le 4 - 9$$
$$-8y \le -5$$

Enseguida, dividimos ambos lados entre -8 e invertimos el sentido de la desigualdad (porque -8 es negativo).

$$y \ge \frac{-5}{-8} \quad \text{o bien} \quad y \ge \frac{5}{8}$$

☛ **9.** Determine las soluciones en la notación de intervalos:
a) $1 - x < 3 - 2x$
b) $x + 4 \ge 4x - 2$

Respuesta *a*) $(-\infty, 2)$
b) $(-\infty, 2]$

De aquí, la solución consta del conjunto de números reales mayores o iguales que $\frac{5}{8}$, es decir, de los números reales incluidos en el intervalo $[\frac{5}{8}, \infty)$. Este conjunto se ilustra en la figura 5. ☛ **9**

FIGURA 5

EJEMPLO 7 Resuelva la doble desigualdad en x.

$$8 - 3x \le 2x - 7 < x - 13$$

Solución De la sección 3-1, recuerde que la doble desigualdad $a \le b < c$ significa que $a \le b$ y al mismo tiempo $b < c$. La doble desigualdad considerada es equivalente a las dos desigualdades siguientes:

$$8 - 3x \le 2x - 7 \quad \text{y} \quad 2x - 7 < x - 13$$

Resolvemos estas dos desigualdades por separado por los métodos antes descritos, por lo que resulta

$$x \ge 3 \quad \text{y} \quad x < -6$$

☛ **10.** Determine la solución y dibújela en la recta numérica:
$3x - 2 \le 2 - x < x + 6$

Respuesta $-2 < x \le 1$

Ambas desigualdades deben ser satisfechas por x. Pero es imposible que tanto $x \ge 3$ como $x < -6$ puedan satisfacer a la vez. *Por lo que no hay solución*: ningún número real satisface la doble desigualdad. ☛ **10**

EJEMPLO 8 Determine la solución de la doble desigualdad

$$7 > 5 - 2x \ge 3$$

Solución En este caso, como x aparece sólo en la expresión de en medio, podemos manipular juntas las tres partes de la desigualdad. Primero, restamos 5 de las tres partes:

$$7 - 5 > 5 - 2x - 5 \geq 3 - 5$$

o bien,

$$2 > -2x \geq -2$$

Ahora, dividimos todo entre -2, invirtiendo ambos signos de desigualdad:

$$-1 < x \leq 1$$

La solución consiste en el intervalo semicerrado $(-1, 1]$.

EJEMPLO 9 ***(Utilidades del fabricante)*** El fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produce al precio de \$60 cada artículo. Gasta \$40 en materia prima y mano de obra al producir cada artículo, y tiene costos adicionales (fijos) de \$3000 a la semana en la operación de la planta. Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de al menos \$1000 a la semana.

Solución Sea x el número de artículos producidos y vendidos a la semana. Entonces el costo total de producir x unidades es de \$3000 más \$40 por artículo, lo cual es

$$(40x + 3000) \text{ dólares}$$

El ingreso obtenido por vender x unidades a \$60 cada una será de $60x$ dólares. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Utilidad} &= \text{Ingresos} - \text{Costos} \\ &= 60x - (40x + 3000) = 20x - 3000 \end{aligned}$$

Puesto que deseamos obtener una ganancia de al menos \$1000 al mes, tenemos las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Utilidad} &\geq 1000 \\ 20x - 3000 &\geq 1000 \\ 20x &\geq 4000 \\ x &\geq 200 \end{aligned}$$

☛ **11.** Un rectángulo tiene perímetro de 24 unidades. Si la diferencia entre los dos lados es menor que 6 unidades, determine el intervalo de valores para la longitud del lado más largo.

En consecuencia, el fabricante deberá producir y vender al menos 200 unidades cada semana. ☛ **11**

EJEMPLO 10 ***(Decisiones de fabricación)*** El administrador de una fábrica debe decidir si deberán producir sus propios empaques, que la empresa ha estado adquiriendo de proveedores externos a \$1.10 cada uno. La fabricación de los empaques incrementaría los costos generales de la empresa en \$800 al mes y el costo de material y de mano de obra será de 60¢ por cada empaque. ¿Cuántos empaques deberá usar la empresa al mes para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques?

Respuesta [6, 9)

Solución Sea x el número de empaques utilizados por la empresa al mes. Entonces, el costo de adquirir x empaques a \$1.10 cada uno es de $1.10x$ dólares. El costo de fabricar x empaques es de \$0.60 por empaque más costos generales de \$800 al mes, de modo que el costo total es

$$(0.60x + 800) \quad \text{dólares}$$

Para justificar la fabricación de los empaques por la empresa misma, debe ser cierta la desigualdad siguiente:

$$\text{Costo de adquisición} > \text{Costo de fabricación}$$
$$1.10x > 0.60x + 800$$
$$1.10x - 0.60x > 800$$
$$0.50\,x > 800$$
$$x > 1600$$

En consecuencia, la empresa debe usar al menos 1601 empaques al mes para justificar su fabricación.

EJERCICIOS 3-2

(1-20) Resuelva las siguientes desigualdades.

1. $5 + 3x < 11$

2. $3 - 2y \geq 7$

3. $2u - 11 \leq 5u + 6$

4. $5x + 7 > 31 - 3x$

5. $3(2x - 1) > 4 + 5(x - 1)$

6. $x + \dfrac{4}{3} > \dfrac{2x - 3}{4} + 1$

7. $\dfrac{1}{4}(2x - 1) - x < \dfrac{x}{6} - \dfrac{1}{3}$

8. $\frac{3}{2}(x + 4) \geq 2 - \frac{1}{5}(1 - 4x)$

9. $\dfrac{y + 1}{4} - \dfrac{y}{3} > 1 + \dfrac{2y - 1}{6}$

10. $5 - 0.3t < 2.1 + 0.5(t + 1)$

11. $1.2(2t - 3) \leq 2.3(t - 1)$

12. $2(1.5x - 2.1) + 1.7 \geq 2(2.4x - 3.5)$

13. $5 < 2x + 7 < 13$

14. $4 \geq \dfrac{1 - 3x}{4} \geq 1$

15. $(x + 3)^2 > (x - 2)^2$

16. $(2x + 3)(3x - 1) \leq (6x + 1)(x - 2)$

17. $(3x - 1)(2x + 3) > (2x + 1)(3x + 2)$

18. $(3x + 1)(x - 2) > (x - 3)(3x + 4)$

19. $2x + 1 < 3 - x < 2x + 5$

20. $4 - 2x < x - 2 < 2x - 4$

21. $3x + 7 > 5 - 2x \geq 13 - 6x$

22. $2x - 3 < 1 + x < 3x - 1$

23. $3x - 5 < 1 + x < 2x - 3$

24. $5x - 7 \geq 3x + 1 \geq 6x - 11$

25. *(Inversión)* Un hombre tiene \$7000 para invertir. Quiere invertir parte al 8% y el resto al 10%. ¿Cuál es el monto máximo que debe invertir al 8%, si desea un ingreso anual por interés de al menos \$600 anuales?

26. *(Inversión)* La señora K tiene \$5000 que quiere invertir, parte a 6% y el resto a 8%. Si ella desea un ingreso anual por intereses de al menos \$370, ¿cuál es la cantidad mínima que debe invertir al 8%?

27. *(Decisión de producción)* Un fabricante puede vender todas las unidades que produce al precio de \$30 cada una. Tiene costos fijos de \$12,000 al mes; y además, le cuesta \$22 producir cada artículo. ¿Cuántas unidades debe producir y vender al mes la compañía para obtener utilidades?

28. *(Utilidades del fabricante)* Un fabricante de aparatos de alta fidelidad puede vender todas las unidades producidas al precio de \$150 cada una. Tiene costos fijos a la semana de \$15,000 y costos por unidad de \$100 en materiales y mano de obra. Determine el número de aparatos de alta fidelidad que deberá fabricar y vender cada semana, con el propósito de obtener utilidades semanales de al menos $1000.

29. *(Decisiones de fabricación)* Una empresa automotriz desea saber si le conviene fabricar sus propias correas para el ventilador, que ha estado adquiriendo de proveedores externos a $2.50 cada unidad. La fabricación de las correas por la empresa incrementará sus costos fijos en $1500 al mes, pero sólo le costará $1.70 fabricar cada correa. ¿Cuántas correas debe utilizar la empresa cada mes para justificar la fabricación de sus propias correas?

30. *(Decisiones sobre contratación de maquiladores)* Una empresa puede encomendar a un contratista que empaque cada unidad de su producto a un costo de $2.75. Por otra parte, la empresa puede empacar sus productos instalando una máquina empacadora. Su instalación incrementará los costos fijos de la empresa en $2000 al mes y el costo de empaquetamiento sería de $1.50 por unidad. ¿Cuántas unidades tendría que producir al mes para que la instalación de la máquina empacadora fuera rentable?

31. *(Publicación de revistas)* El costo de publicación de cada ejemplar de la revista semanal *Compre y venda* es de 35¢. Los ingresos por ventas de distribución son de 30¢ por ejemplar, y los ingresos por publicidad del 20% sobre los ingresos obtenidos por ventas más allá de los 2000 ejemplares. ¿Cuántos ejemplares deberá publicar y vender cada semana para obtener ingresos semanales de al menos $1000?

32. *(Publicación de revistas)* El editor de una revista mensual tiene costos de edición de 60.5¢ por ejemplar. El ingreso por ventas de distribución es de 70¢ por ejemplar, y los ingresos por publicidad del 15% sobre los ingresos obtenidos por ventas más allá de los 20,000 ejemplares. ¿Cuántos ejemplares deberá publicar y vender al mes para asegurar utilidades que sobrepasen los $4000?

■ 3-3 DESIGUALDADES CUADRÁTICAS DE UNA VARIABLE

Una **desigualdad cuadrática** de una variable, tal como x, es una desigualdad que tiene términos proporcionales a x y a x^2 y términos constantes. Las formas estándares de una desigualdad cuadrática son

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ (o bien } < 0) \quad \text{o bien} \quad ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ (o bien } \leq 0)$$

en donde a, b y c son constantes determinadas ($a \neq 0$). ☛ **12**

Otra vez estamos interesados en resolver una desigualdad dada, esto es, en determinar el conjunto de x para el cual la desigualdad se cumple. Podemos hacer esto primero reemplazando la desigualdad con un signo = y encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática resultante. Estas soluciones dividen a la recta numérica en intervalos. En cada intervalo seleccionamos un punto y probamos si la desigualdad es cierta o falsa en ese punto. Si es verdadera en ese punto, entonces será verdadera en todos los puntos del intervalo, y recíprocamente, si es falsa en un punto en el intervalo, entonces será falsa en todos los puntos de ese intervalo.

☛ **12.** Exprese en la forma estándar:
$(x + 2)(2x - 1) \leq (3x - 2)^2 + 1$

Respuesta $7x^2 - 15x + 7 \geq 0$

EJEMPLO 1 Resuelva la desigualdad $x^2 + 3x < 4$

Solución Primero reescribimos la desigualdad en la forma estándar restando 4 de ambos miembros:

$$x^2 + 3x - 4 < 0$$

Reemplazamos el signo < por =, obtenemos la ecuación cuadrática $x^2 + 3x - 4 = 0$. Ésta puede resolverse por medio de factorización. Se convierte en $(x - 1)(x + 4) = 0$, de modo que las raíces son $x = 1$ y $x = -4$. Graficando estos puntos en la recta numérica, obtenemos la figura 6. Los dos puntos dividen a la recta numérica en tres intervalos, $x < -4$, $-4 < x < 1$ y $x > 1$. En cada uno de estos intervalos, la expresión siempre conserva el mismo signo, ya que sólo cambia de signo cuando pasa por el cero, y esto sucede sólo cuando $x = -4$ o 1.

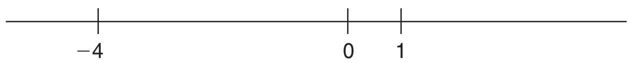

FIGURA 6

Tomemos cualquier punto en el primer intervalo $x < -4$: seleccionamos $x = -5$. Entonces $x^2 + 3x - 4 = (-5)^2 + 3(-5) - 4 = 6 > 0$. La desigualdad es falsa, de modo que es falsa para todos los puntos en el intervalo $x < -4$.

En $-4 < x < 1$ seleccionamos el punto $x = 0$. Entonces, $x^2 + 3x - 4 = (0)^2 + 3(0) - 4 = -4 < 0$. La desigualdad es verdadera, por lo que es cierta para todas las x que satisfagan $-4 < x < 1$.

En $x > 1$ seleccionamos $x = 2$. Entonces $x^2 + 3x - 4 = (2)^2 + 3(2) - 4 = 6 > 0$. La desigualdad es falsa, de modo que es falsa para toda $x > 1$.

Por tanto el conjunto solución es el intervalo $(-4, 1)$. Esto se ilustra en la figura 7. ☛ **13**

☛ **13.** Resuelva las desigualdades:
a) $(x - 1)(x - 3) < 0$
b) $(x + 1)(x + 4) \geq 0$
c) $(x - 3)^2 + 2 \leq 0$

FIGURA 7

EJEMPLO 2 Resuelva la desigualdad $5x \leq 2(x^2 - 6)$.

Solución Pasando todos los términos a la izquierda, la desigualdad dada se transforma en

$$5x - 2x^2 + 12 \leq 0$$

Siempre conviene tener el término cuadrático con signo positivo, porque entonces, la factorización es más fácil. Así, multiplicamos ambos lados de esta desigualdad por -1 y cambiamos el sentido de la desigualdad.

$$-5x + 2x^2 - 12 \geq 0$$

$$2x^2 - 5x - 12 \geq 0$$

Respuesta *a*) $1 < x < 3$
b) $x \leq -4$ o $x \geq -1$
c) no hay solución

Al reemplazar el signo $\geq$ por el signo $=$ obtenemos la ecuación cuadrática $2x^2 - 5x - 12 = 0$; y por medio de la factorización,

$$(2x + 3)(x - 4) = 0$$

Las raíces son $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 4$, que dividen a la recta numérica en los tres intervalos $(-\infty, -\frac{3}{2})$, $(-\frac{3}{2}, 4)$ y $(4, \infty)$ como se muestra en la figura 8. Seleccionar cual-

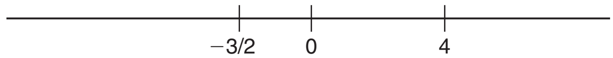

FIGURA 8

quier punto en cada intervalo y probar la desigualdad. En $(-\infty, -\frac{3}{2})$ elegimos $x = -2$, en $(-\frac{3}{2}, 4)$ seleccionamos $x = 0$; y en $(4, \infty)$ escogemos $x = 5$. Es conveniente colocar los cálculos como se muestra en la tabla 1. Por tanto, la desigualdad dada es verdadera en los intervalos $(-\infty, -\frac{3}{2})$ y $(4, \infty)$ y es falsa en el intervalo $(-\frac{3}{2}, 4)$.

TABLA 1

Intervalo	$(-\infty, -\frac{3}{2})$	$(-\frac{3}{2}, 4)$	$(4, \infty)$
Puntos de prueba	-2	0	5
$2x^2 - 5x - 12$	$2(-2)^2 - 5(-2) - 12 = 6 > 0$	$2(0)^2 - 5(0) - 12 = -12 < 0$	$2(5)^2 - 5(5) - 12 = 13 > 0$
Signo	Positivo	Negativo	Positivo

En este caso, tenemos una desigualdad no estricta, de modo que también se satisface en donde la expresión cuadrática sea cero, es decir, en $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 4$. Esta vez, los puntos extremos del intervalo se incluyen en el conjunto solución. La solución consiste en los dos intervalos semiinfinitos $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ y $[4, \infty)$. Este conjunto solución se ilustra en la siguiente figura.

FIGURA 9

> Resumen del método de solución de las desigualdades cuadráticas:
>
> **1.** Escribir la desigualdad en la forma estándar.
>
> **2.** Reemplazar el signo de desigualdad por un signo = y resolver la ecuación cuadrática resultante. Las raíces dividen la recta numérica en intervalos.
>
> **3.** En cada intervalo elegir un punto y probar la desigualdad dada en ese punto. Si es verdadera (falsa) en ese punto, entonces es verdadera (falsa) en todos los puntos de ese intervalo.
>
> **4.** Para una desigualdad estricta, en el conjunto solución no se incluyen los puntos extremos de los intervalos. Para una desigualdad no estricta sí se incluyen esos puntos extremos.

Algunas veces no podremos factorizar la expresión cuadrática y podría ser necesario utilizar la fórmula cuadrática para determinar los puntos de división de los intervalos.

EJEMPLO 3 Resuelva la desigualdad $x^2 - 6x + 6 \leq 0$.

Solución La desigualdad ya está en forma estándar. La correspondiente ecuación cuadrática es $x^2 - 6x + 6 = 0$, que no tiene raíces racionales. Con base en la fórmula cuadrática, tenemos las raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(6)}}{2 \cdot 1} = \tfrac{1}{2}(6 \pm \sqrt{12})$$
$$= 3 \pm \sqrt{3}$$

Son aproximadamente 1.27 y 4.73 y como es usual dividen la recta de los números reales en tres intervalos. Seleccionamos un punto de prueba en cada uno. (Véase la tabla 2 para los detalles). La conclusión es que la desigualdad es falsa en $(-\infty, 3 - \sqrt{3})$ y $(3 + \sqrt{3}, \infty)$ y es verdadera en $(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.

TABLA 2

Intervalo	$(-\infty, 3 - \sqrt{3})$	$(3 - \sqrt{3}, + 3 + \sqrt{3})$	$(3 + \sqrt{3}, \infty)$
Punto de prueba	0	3	5
$f(x) = x^2 - 6x + 6$	$0^2 - 6 \cdot 0 + 6 = 6 > 0$	$3^2 - 6 \cdot 3 + 6 = -3 < 0$	$5^2 - 6 \cdot 5 + 6 = 1 > 0$
Signo	Positivo	Negativo	Positivo

☛ **14.** Resuelva las desigualdades.
a) $x^2 - 2x - 2 \le 0$
b) $x^2 - 2x + 2 > 0$
c) $x^2 + 2x + 1 \le 0$

Como tenemos una desigualdad no estricta incluimos los puntos extremos, de modo que el conjunto solución es el intervalo cerrado $[3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$, o aproximadamente [1.27, 4.73]. Éstos se ilustra en la figura 10. ☛ **14**

FIGURA 10

EJEMPLO 4 Resuelva la desigualdad $x^2 + 2 > 2x$

Solución En la forma estándar tenemos $x^2 - 2x + 2 > 0$. La ecuación cuadrática correspondiente es $x^2 - 2x + 2 = 0$, y de la fórmula cuadrática, las raíces son

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{-4})$$

De modo que, en este caso no existen raíces reales. Esto significa que la expresión $x^2 - 2x + 2$ es positiva para toda x o bien negativa para toda x, ya que si cambiase de signo tendría que ser cero en algún punto. Entonces todo lo que tenemos que hacer es seleccionar cualquier punto como punto de prueba. El más sencillo es $x = 0$, y tenemos $0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$. La desigualdad dada se satisface; de aquí que se satisface para toda x.

EJEMPLO 5 ***(Producción y utilidades)*** Las ventas mensuales x de cierto artículo cuando su precio es p dólares están dadas por $p = 200 - 3x$. El costo de producir x unidades al mes del artículo es $C = (650 + 5x)$ dólares. ¿Cuántas unidades de este artículo deberán producirse y venderse de modo que la utilidad mensual sea por lo menos de 2200 dólares?

Respuesta
a) $1 - \sqrt{3} \le x \le 1 + \sqrt{3}$
b) $-\infty < x < \infty$
c) $x = -1$

Solución El ingreso I (en dólares) obtenido por vender x unidades al precio de p dólares por unidad es

$$\begin{aligned} I &= \text{(Unidades vendidas)} \times \text{(Precio por unidad)} \\ &= xp \\ &= x(200 - 3x) \\ &= 200x - 3x^2 \end{aligned}$$

El costo C (en dólares) de fabricar x unidades es $C = (650 + 5x)$. La utilidad U (mensual) obtenida por producir y vender x unidades está dada por

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{I} - \mathrm{C} \\ &= (200x - 3x^2) - (650 + 5x) \\ &= 195x - 3x^2 - 650 \end{aligned}$$

Dado que la utilidad U debe ser al menos de \$2200, tenemos que $U \geq 2200$. En consecuencia,

$$195x - 3x^2 - 650 \geq 2200$$

Al escribir esto en la forma estándar y dividir todo entre -3 (notando que el signo de la desigualdad se invierte), obtenemos la desigualdad

$$x^2 - 65x + 950 \leq 0$$

Las raíces deben determinarse por medio de la fórmula cuadrática:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-65) \pm \sqrt{(-65)^2 - 4(1)(950)}}{2 \cdot 1} \\ &= \tfrac{1}{2}(65 \pm \sqrt{425}) \end{aligned}$$

o aproximadamente 22.2 y 42.8. En los tres intervalos $x < 22.2$, $22.2 < x < 42.8$ y $x > 42.8$ seleccionamos los tres puntos $x = 0$, 40 y 100, respectivamente. Encontramos que $x^2 - 65x + 950 > 0$ cuando $x = 0$ y 100, pero $x^2 - 65x + 950 < 0$ cuando $x = 40$. Por tanto se sigue que $x^2 - 65x + 950 < 0$ para toda x en el intervalo $22.2 < x < 42.8$. Así, el conjunto solución de la desigualdad es el intervalo cerrado [22.2, 42.8]. ☛ **15**

☛ **15.** En el ejemplo 5, ¿para qué intervalo de x la ganancia mensual excede los \$2500?

De modo que, para alcanzar la meta requerida, el número de unidades producidas y vendidas por mes debe estar entre 22.2 y 42.8, inclusive.

EJEMPLO 6 ***(Decisión de precios)*** Un peluquero tiene un promedio de 120 clientes semanales a un costo actual de \$8 por corte de cabello. Por cada incremento de 75¢ en el precio, el peluquero perderá 10 clientes. ¿Cuál es el precio máximo que puede cobrarse de modo que los ingresos semanales no sean menores que los actuales?

Solución Sea x el número de incrementos de 75¢ por encima de \$8. Entonces el precio por corte de cabello es $(8 + 0.75x)$ dólares, y el número de clientes será de

Respuesta $30 < x < 35$

$(120 - 10x)$ por semana. De modo que

$$\begin{aligned}\text{Ingresos totales semanales} &= \text{Número de clientes} \times \text{Precio por corte}\\ &= (120 - 10x) \times (8 + 0.75x)\end{aligned}$$

Los ingresos por los 120 clientes actuales son $120 \times \$8 = \$960$. Por tanto, los nuevos ingresos deben ser al menos $960:

$$(120 - 10x)(8 + 0.75x) \geq 960$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned}960 + 10x - 7.5x^2 &\geq 960\\ 10x - 7.5x^2 &\geq 0\end{aligned}$$

La ecuación correspondiente es $10x - 7.5x^2 = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $\frac{4}{3}$. En los tres intervalos $x < 0$, $0 < x < \frac{4}{3}$ y $x > \frac{4}{3}$ seleccionamos los puntos de prueba -1, 1 y 2, respectivamente. Encontramos que $10x - 7.5x^2 < 0$ cuando $x = -1$ o 2, pero $10x - 7.5x^2 > 0$ cuando $x = 1$. Por tanto, la solución de la desigualdad es el intervalo $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$. Esto es, el precio de un corte de cabello debe estar entre $8 y $\$(8 + 0.75 \times \frac{4}{3}) = \$9.00$. El precio máximo que puede cobrarse es $9.00.

EJERCICIOS 3-3

(1-22) Resuelva las siguientes desigualdades.

1. $(x - 2)(x - 5) < 0$

2. $(x + 1)(x - 3) \leq 0$

3. $(2x - 5)(x + 3) \geq 0$

4. $(3x - 1)(x + 2) > 0$

5. $x^2 - 7x + 12 \leq 0$

6. $9x > x^2 + 14$

7. $x(x + 1) < 2$

8. $x(x - 2) \geq 3$

9. $y(2y + 1) > 6$

10. $3y^2 \geq 4 - 11y$

11. $(x + 2)(x - 3) > 2 - x$

12. $(2x + 1)(x - 3) < 9 + (x + 1)(x - 4)$

13. $x^2 \geq 4$

14. $9x^2 < 16$

15. $x^2 + 3 > 0$

16. $x^2 + 1 \leq 0$

17. $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

18. $x^2 + 4 \leq 4x$

19. $x^2 + 2x + 1 > 0$

20. $x^2 + 9 \geq 6x$

21. $x^2 + 13 < 6x$

22. $x^2 + 7 > 4x$

23. $(x - 2)^2 + 5 \geq 0$

24. $x^2 + 2x + 4 < 0$

25. $(2x + 3)(x - 3) > (x - 1)(3x + 2)$

26. $(1 - 3x)(x + 2) > (3 - 2x)(x + 3)$

27. *(Ingresos del fabricante)* Al precio de p por unidad, x unidades de cierto artículo pueden venderse al mes en el mercado, con $p = 600 - 5x$. ¿Cuántas unidades deberán venderse cada mes con objeto de obtener ingresos por lo menos de $18,000?

28. *(Ingresos del fabricante)* Un fabricante puede vender x unidades de un producto cada semana al precio de p dólares por unidad, en donde $p = 200 - x$. ¿Qué número de unidades deberá venderse a la semana para obtener ingresos mínimos por $9900?

29. *(Decisiones de producción)* En el ejercicio 27, si cuesta $(800 + 75x)$ dólares producir x unidades, ¿cuántas unidades deberán producirse y venderse cada mes con objeto de obtener una utilidad de al menos $5500?

30. *(Decisiones sobre fijación de precios)* En el ejercicio 28, si cuesta $(2800 + 45x)$ dólares producir x unidades, ¿a qué precio p deberá venderse cada unidad para generar una utilidad semanal de por lo menos $3200?

31. *(Utilidades)* Un fabricante puede vender todas las unidades de un producto a $25 cada una. El costo C (en dólares) de producir x unidades cada semana está dado por $C = 3000 + 20x - 0.1x^2$. ¿Cuántas unidades deberán producirse y venderse a la semana para obtener alguna utilidad?

32. *(Ingresos del editor)* Un editor puede vender 12,000 ejemplares de un libro al precio de $25 cada uno. Por cada dólar de incremento en el precio, las ventas bajan en 400 ejemplares. ¿Qué precio máximo deberá fijarse a cada ejemplar con objeto de lograr ingresos por lo menos de \$300,000?

33. *(Agricultura)* Un granjero desea delimitar un terreno rectangular y tiene 200 yardas de cerca disponible. Encuentre las dimensiones posibles del terreno si su área debe ser de al menos 2100 yardas cuadradas.

34. Un lado de un campo rectangular está limitado por un río. Un granjero tiene 100 yardas de cerca y quiere cubrir los otros tres lados del campo. Si quiere encerrar un área de al menos 800 yardas cuadradas, ¿cuáles son los posibles valores para la longitud del campo a lo largo del río?

35. Una caja abierta se fabrica de una hoja rectangular metálica de 16 por 14 pies, cortando cuadrados iguales de cada esquina y doblando hacia arriba los lados. Si el área de la base de la caja es al menos de 80 pies cuadrados, ¿cuál es la máxima altura posible de la caja?

36. Una hoja rectangular de cartón es de 16 por 10 pulgadas. Se cortan cuadrados iguales de cada esquina y los lados se doblan hacia arriba para formar una caja abierta. ¿Cuál es la altura máxima de esta, caja si la base tiene un área de al menos 72 pulgadas cuadradas?

37. *(Conservación)* En cierto estanque se crían peces. Si se introducen n de ellos allí, se sabe que la ganancia de peso promedio de cada pez es de $(600 - 3n)$ gramos. Determine las restricciones de n, si la ganancia total en peso de todos los peces debe ser mayor que 28,800 gramos.

38. *(Inversiones)* Un accionista invierte \$100 a un interés anual del R por ciento y otros \$100 al $2R$ por ciento anual. Si el valor de las dos inversiones debe ser de al menos \$224.80 después de 2 años, ¿qué restricciones deben establecerse sobre R?

39. *(Política de fijación de precios)* Un supermercado se encuentra con grandes existencias de manzanas que debe vender rápidamente. El gerente sabe que si las manzanas se ofrecen a p centavos por libra, venderá x libras, con $x = 1000 - 20p$. ¿Qué precio deberá fijar con el fin de obtener ingresos por lo menos de \$120?

40. *(Decisiones sobre fijación de precios)* Un peluquero atiende en promedio a 120 clientes a la semana cobrándoles \$4 por corte. Por cada incremento de 50¢ en el precio, el peluquero pierde 8 clientes. ¿Qué precio máximo deberá fijar para obtener ingresos semanales de al menos \$520?

■ 3-4 VALORES ABSOLUTOS

Si x es un número real, entonces el **valor absoluto** de x, denotado por $|x|$, se define por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

☛ **16.** Evalúe *a*) $-|-5|$
b) $|2 - 3 - 4|$
c) $|2| + |-3| - |4|$

Por ejemplo, $|5| = 5$, $|-3| = -(-3) = 3$ y $|0| = 0$. ☛ **16**

De la definición, es claro que *el valor absoluto de un número siempre es un número real no negativo*; es decir,

$$|x| \geq 0$$

El valor absoluto de x es una medida del “tamaño” de x sin tener en cuenta que x sea negativo o positivo.

EJEMPLO 1 Resuelva para x.

$$|2x - 3| = 5$$

Respuesta *a*) -5 *b*) 5 *c*) 1

Solución De acuerdo con la definición de valor absoluto, se satisface la ecuación dada si

$$2x - 3 = 5 \quad \text{o bien} \quad 2x - 3 = -5$$

porque en cualesquiera de los dos casos, el valor absoluto de $2x - 3$ es 5. Si $2x - 3 = 5$, entonces $2x = 3 + 5 = 8$ y así, $x = 4$. De manera similar, si $2x - 3 = -5$, entonces $x = -1$. En consecuencia, hay dos valores de x, $x = 4$ y $x = -1$, que satisfacen la ecuación dada.

EJEMPLO 2 Resuelva para x.

$$|3x - 2| = |2x + 7|$$

Solución La ecuación se satisface si

$$3x - 2 = 2x + 7 \quad \text{o bien} \quad 3x - 2 = -(2x + 7)$$

Resolviendo estas dos ecuaciones por separado, obtenemos $x = 9$ y $x = -1$. ☛ **17**

☛ **17.** Resuelva para x:
a) $|x + 1| = 2$
b) $|x - 1| = |3 - 2x|$
c) $|x - 1| = (3 - 2x)$

De los ejemplos 1 y 2, es claro que tenemos las siguientes reglas generales para resolver ecuaciones en que aparecen valores absolutos.

Si $|a| = b$, donde $b \geq 0$, entonces $a = b$ o bien $a = -b$

Si $|a| = |b|$, entonces $a = b$ o bien $a = -b$

Observación El símbolo $\sqrt{a}$ *denota la raíz cuadrada no negativa del número real a* ($a \geq 0$). Por ejemplo, $\sqrt{9} = 3$. La raíz cuadrada negativa de 9 se denota mediante $-\sqrt{9}$. Usando el símbolo de radical, podemos dar la siguiente definición alternativa de valor absoluto.

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Por ejemplo, $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$ y $\sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$.

Podemos interpretar $|x|$ geométricamente. (Véase la figura 11). Los números 3 y 8 sobre la recta numérica están separados 5 unidades. También $|8 - 3| = |5| = 5$ y $|3 - 8| = |-5| = 5$. En consecuencia, $|8 - 3| = |3 - 8|$ da la distancia entre los puntos 3 y 8 de la recta numérica. En general, podemos interpretar $|x - c| = |c - x|$ como la distancia entre los puntos x y c situados sobre la recta numérica, sin prestar atención a la dirección. Por ejemplo, la ecuación $|x - 2| = 5$

Respuesta *a*) -3 o 1
b) $\frac{4}{3}$ o 2
c) $\frac{4}{3}$ (si $x = 2$, el lado derecho es negativo)

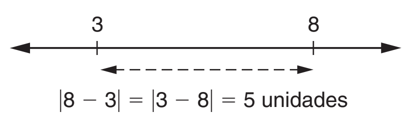

FIGURA 11

establece que la distancia entre x y 2 sobre la recta numérica es 5 unidades, sin importar la dirección. Por tanto, x puede ser $2 + 5 = 7$ o $2 - 5 = -3$, como se aprecia en la figura 12.

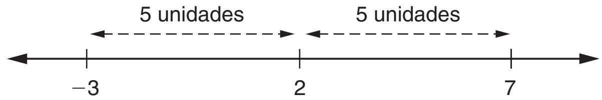

FIGURA 12

Dado que $|x| = |x - 0|$, $|x|$ representa la distancia del punto x sobre el eje real al origen O, sin importar la dirección. (Véase la figura 12). También, dado que la distancia entre O y x es igual a la distancia entre O y $-x$, se sigue que:

$$\boxed{|x| = |-x|}$$

Por ejemplo, $|7| = |-7| = 7$.

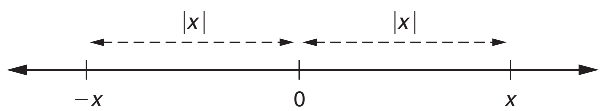

FIGURA 13

En el ejemplo 3 varios enunciados se reexpresan en términos de valores absolutos.

EJEMPLO 3

a) x está a una distancia de 3 unidades del 5: $|x - 5| = 3$

b) x está a menos de 7 unidades del 4: $|x - 4| < 7$

c) x está al menos a 7 unidades del -3: $|x - (-3)| \geq 7$ o $|x + 3| \geq 7$

d) x se encuentra estrictamente dentro de un radio de 3 unidades del 7: $|x - 7| < 3$

e) x está dentro de c unidades de a: $|x - a| \leq c$. ☛ **18**

☛ **18.** Exprese lo siguiente utilizando valores absolutos:
a) x está a lo más a 4 unidades del 3
b) $5 - x$ está 4 unidades alejado de x

Respuesta *a*) $|x - 3| \leq 4$
b) $|5 - 2x| = 4$

Consideremos ahora algunas desigualdades que incluyen valores absolutos. La desigualdad $|x| < 5$ implica que la distancia entre x y el origen es menor que 5 unidades. Dado que x puede estar a la derecha o a la izquierda del origen, x está entre -5 y 5 o $-5 < x < 5$. (Véase la figura 14). De manera similar, $|x| > 5$ implica que x está a más de 5 unidades del origen (a la derecha o a la izquierda); es decir, $x < -5$ o $x > 5$. (Véase la figura 15). Este resultado se generaliza en el teorema siguiente:

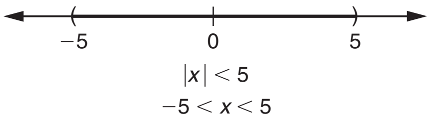

FIGURA 14

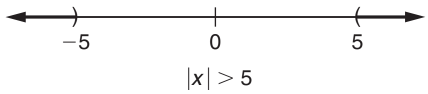

FIGURA 15

TEOREMA 1 Si $a > 0$, entonces,

$\lvert x \rvert < a$ si y sólo si $-a < x < a$	(1)
$\lvert x \rvert > a$ si y sólo si $x > a$ o bien $x < -a$	(2)

Las figuras 16 y 17 se refieren al teorema 1.

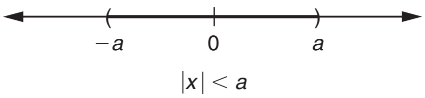

FIGURA 16

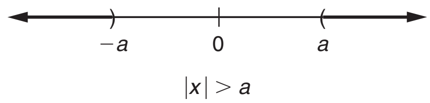

FIGURA 17

EJEMPLO 4 Resuelva $\lvert 2x - 3 \rvert < 5$ para x y exprese el resultado en términos de intervalos.

Solución Usando la proposición (1) del teorema 1, la desigualdad dada implica que

$$-5 < 2x - 3 < 5$$

Sumando 3 a cada lado de la doble desigualdad y simplificando, obtenemos

$$-5 + 3 < 2x - 3 + 3 < 5 + 3$$
$$-2 < 2x < 8$$

Enseguida dividimos todo entre 2:

$$-1 < x < 4$$

En consecuencia, la solución consta de todos los números reales x situados en el intervalo abierto $(-1, 4)$. (Véase la figura 18).

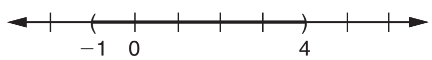

FIGURA 18

EJEMPLO 5 Resuelva $\lvert 2 - 3x \rvert > 7$ para x y exprese el resultado en notación de intervalos.

Solución Utilizando la proposición (2) del teorema 1, la desigualdad dada implica que

$$2 - 3x > 7 \quad \text{o bien} \quad 2 - 3x < -7$$

Considerando la primera desigualdad, tenemos que

$$2 - 3x > 7$$

Restando 2 a ambos lados y dividiendo entre -3 (y cambiando el sentido de la desigualdad):

$$x < -\tfrac{5}{3}$$

De manera similar, resolviendo la segunda desigualdad,

$$x > 3$$

Así, $|2 - 3x| > 7$ es equivalente a

$$x < -\tfrac{5}{3} \quad \text{o bien} \quad x > 3$$

Por tanto, la solución consta de todos los números reales que *no* están en el intervalo cerrado $[-\frac{5}{3},\ 3]$. (Véase la figura 19).

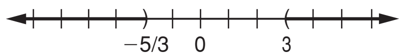

FIGURA 19

EJEMPLO 6 Resuelva $|2x - 3| + 5 \leq 0$ para x.

Solución La desigualdad dada se puede reescribir como

☛ **19.** Resuelva las desigualdades.
a) $|1 - x| < 4$
b) $|7 - 4x| \geq 3$
c) $|x - 1| + |x + 1| < 0$

$$|2x - 3| \leq -5$$

Pero $|2x - 3|$ nunca puede ser negativo, de modo que no existen valores de x para los cuales sea verdadera la desigualdad dada. Así no existe solución. ☛ **19**

EJEMPLO 7 Resuelva la desigualdad $|3x - 5| \leq x + 1$

Solución Si $(x + 1) < 0$, allí claramente no habría solución, ya que el valor absoluto del lado izquierdo no puede ser menor que un número negativo. Así el conjunto solución está restringido de inmediato a $x \geq -1$.

Si $x + 1 \geq 0$, podemos utilizar el teorema 1 para expresar la desigualdad dada en la forma

$$-(x + 1) \leq 3x - 5 \leq (x + 1)$$

La mitad izquierda de esta desigualdad doble, $-(x + 1) \leq 3x - 5$, conduce a $x \geq 1$. La mitad derecha, $3x - 5 \leq x + 1$, lleva a $x \leq 3$. Deben satisfacerse las tres condiciones, $x \geq 1$, $x \leq 3$ y $x \geq -1$. Así, el conjunto solución es $1 \leq x \leq 3$ o el intervalo cerrado $[1, 3]$.

Respuesta *a*) $-3 < x < 5$
b) $x \leq 1$ o $x \geq \frac{5}{2}$
c) no hay solución

Concluimos esta sección estableciendo dos propiedades básicas del valor absoluto. Si a y b son dos números reales, entonces

$$|ab| = |a| \cdot |b| \tag{3}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (b \neq 0). \tag{4}$$

EJEMPLO 8

a) $|(-3)(5)| = |-3|\,|5| = (3)(5) = 15$

b) $\left|\dfrac{x-2}{1+x}\right| = \dfrac{|x-2|}{|1+x|} \qquad (x \neq -1)$

c) $\left|\dfrac{x-7}{-3}\right| = \dfrac{|x-7|}{|-3|} = \dfrac{|x-7|}{3}$

Las ecuaciones (3) y (4) se deducen con facilidad del hecho que para cualquier número real x, $|x| = \sqrt{x^2}$. Por ejemplo, la ecuación (3) se deduce como sigue:

$$\begin{aligned} |ab| &= \sqrt{(ab)^2} \\ &= \sqrt{a^2b^2} \\ &= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \qquad \text{(usando una propiedad de los radicales)} \\ &= |a| \cdot |b| \end{aligned}$$

EJERCICIOS 3-4

(1-4) Evalúe.

1. $\sqrt{2}\,|-2| + 5\,|-\sqrt{2}|$

2. $|\sqrt{3}-2| + |\sqrt{3}-1|$

3. $|\pi - 5| - |-2|$

4. $|3-\sqrt{5}| - |\sqrt{5}-2|$

(5-18) Resuelva las ecuaciones siguientes para x.

5. $|3-7x| = 4$

6. $|2x+5| = 7$

7. $|x+2| = |3-x|$

8. $\left|\dfrac{2x+1}{3}\right| = |3x-7|$

9. $|3x-2| = 4-x$

10. $|x+3| = 5-x$

11. $|x+3| = x-5$

12. $|3x-2| = x-4$

13. $|x-3| + 7 = 0$

14. $|2x+1| + |3x-2 = 0$

15. $\left|\dfrac{x-3}{3x-5}\right| = 6$

16. $\left|\dfrac{-5x-2}{x+3}\right| = 5$

17. $\left|\dfrac{1}{x} - 3\right| = 4$

18. $\left|3 - \dfrac{1}{x-2}\right| = 7$

(19-36) Resuelva las desigualdades siguientes y exprese la solución en forma de intervalos, si es posible.

19. $|3x+7| < 4$

20. $|2x-6| \leq 3$

21. $|2-5x| \geq 3$

22. $|3-4x| < \frac{1}{2}$

23. $5 + 2|3-2x| < 7$

24. $5 - 2|3-2x| \leq 1$

25. $7 + |3x-5| \leq 5$

26. $|3x-13| + 6 \geq 0$

27. $|x+2| + |2x-1| \geq 0$

28. $|3x-2| + |2x-7| < 0$

29. $\left|\dfrac{5-x}{3}\right| + 4 \leq 2$

30. $\left|\dfrac{2-5x}{4}\right| \geq 3$

31. $|5-2x| + 5 \geq 0$

32. $|2x-3| + |7+3x| < 0$

***33.** $|2x-3| < x-4$

***34.** $|x-2| < 3-x$

***35.** $|x-3| < x-2$

***36.** $|3x-2| > 2x-3$